Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

Durch Einsetzung dieser Summe in II erhält man: $(s) = -4{,}1$ und durch Einsetzung von $(s) = -4{,}1$ in II oder III: $(1) = +5$, $(2) = -3{,}2$, $(3) = +10{,}5$, $(4) = -1{,}6$.

Es erhält nun jeder der Dreieckswinkel der Dreiecke 1, 2, 3, 4 bezüglich die Verbesserung (1), (2), (3), (4), ausserdem aber diejenigen Dreieckswinkel, welche zugleich Theile der Polygonwinkel bilden, die Verbesserungen $\frac{1}{p}(s)$ bezw. $\frac{1}{q}(s)$.

Nach Verbesserung der Winkel erfolgt die Berechnung der Dreiecksseiten in der Weise, dass zunächst die Anfangsseite $a = 1000$ angenommen wird. Hierauf erfolgt dann nach § 40 eine **vorläufige** Berechnung der Coordinatenunterschiede.*) Die Summe derselben dient zur Berechnung der **vorläufigen** Entfernung $\mathfrak{S}$ der **gegebenen** Punkte. Ist die bekannte **wirkliche** Entfernung dieser Punkte $= S$, so ist $q = \frac{S}{\mathfrak{S}}$ die Verhältnisszahl, mit welcher die **vorläufigen** Seiten der Dreiecke und die **vorläufigen** Coordinatenunterschiede zu multipliciren sind, um zu den **wahren** Werthen derselben zu gelangen.

Sind die An- und Abschlussneigungen auf den Punkten 12 und 15 nicht beobachtet, so beschränkt sich die Ausgleichung der Winkel nur auf die Vertheilung der Widersprüche $f_1, f_2 \ldots f_n$ in den einzelnen Dreiecken $1, 2 \ldots n$. Die Berechnung der vorläufigen Coordinatenunterschiede erfolgt unter Zugrundelegung einer blos durch Schätzung bestimmten Anfangsneigung. Ausser der vorläufigen Entfernung $\mathfrak{S}$ ist dann aus den vorläufigen Coordinatenunterschieden und den Coordinaten der **gegebenen** Punkte noch der Fehler der Anfangsneigung herzuleiten.**) Letztere ist dann um den erhaltenen Betrag zu verbessern, und die Berechnung, nachdem selbstverständlich auch die wahren Werthe der Dreiecksseiten durch Multiplication der vorläufigen Werthe mit q ermittelt worden, mit den so berichtigten Elementen zu wiederholen.

IV. Sphärisch trigonometrische Messungen.

§ 30.

Das Erdsphäroid.

Ein Körper, welcher durch Rotation einer Ellipse um ihre kleine Axe entstanden ist, heisst Sphäroid. Ein solcher Körper ist bekanntlich die Erde. Die Meridiane, d. i. die durch die Rotationsaxe der Erde gelegten Schnitte, sind also Ellipsen, und es können daher, wo es sich um die Aufnahme ganzer Länder handelt, die Formeln der sphärischen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden, bedürfen vielmehr gewisser Correktionen,***) welche ihrerseits die Kenntniss der Excentricität der Meridianellipse bezw. der Abplattung erfordern. Wir wollen daher

*) Im trigon. Form. 19 der pr. Verm.-Anw. Vom § 40 muss hier zum Verständniss des Folgenden vorweg Kenntniss genommen werden.

) Ist die aus den Coordinaten der gegebenen Punkte abgeleitete Neigung der diese Punkte verbindenden Geraden $= \nu$, die aus den **vorläufigen Coordinaten sich ergebende Neigung $= n$, $\left(\tan n = \frac{[\Delta \mathfrak{y}]}{[\Delta \mathfrak{x}]}\right)$, so ist $n - \nu$ der Fehler der Anfangsneigung.

***) Wenigstens einer strengen Berücksichtigung des mit der geographischen Breite wechselnden Krümmungsradius der Meridianellipse pp.

noch zeigen, wie diese durch blosse Gradmessungen gefunden werden können, (vergl. 4)), zugleich auch einige Formeln entwickeln, welche auch in die niedere Geodäsie Eingang gefunden haben, seitdem bei Aufnahme grösserer Flächen der Anschluss an die Landesaufnahme vorgeschrieben ist.

1) Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Erdoberfläche ist, infolge der sphäroidischen Gestalt der Erde, kein Bogen eines grössten Kugelkreises, liegt also nicht in einer durch den Erdmittelpunkt gelegten Ebene, ja, sie liegt überhaupt nicht einmal in einer Ebene, ist also eine Kurve doppelter Krümmung. Denkt man sich nämlich diese Linie A B, Fig. 54, durch verticale Signalstangen abgesteckt, so müssten diese, wenn sie in der Ebene des grössten Kugelkreises A B C lägen, in ihren Verlängerungen den Erdmittelpunkt treffen. Dies ist aber, wie man aus der Figur ersieht, nicht der Fall, vielmehr schneidet ein in einem Punkte der nördlichen Halbkugel auf die Erdoberfläche, (Berührungsebene), errichtetes Loth die kleine Axe südlich vom Erdmittelpunkte, und zwar um so südlicher, je nördlicher der fragliche Punkt gelegen. Alle in verschiedenen Breiten errichteten Lothe müssen sich daher in der Nähe des Erdmittelpunktes **kreuzen.** liegen also nicht in einer Ebene, also auch nicht der durch sie bezeichnete Erdbogen. Letzterer heisst die **geodätische Linie,** welche indessen nicht Gegenstand unserer Erörterungen sein kann. Immerhin erschien es angemessen, derselben mit diesen kurzen Andeutungen Erwähnung zu thun.

2) **Abplattung, Excentricität.** Bezeichnen wir die Abplattung, d. h. die Differenz der grossen und kleinen Halbaxe, ausgedrückt in Theilen der ersteren, d. h. also den Bruch $\frac{a - b}{a}$ mit e, die Excentricität der Meridianellipse, ebenfalls in Theilen der grossen Halbaxe ausgedrückt, mit ε, also $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \varepsilon$, so ist, da $\frac{a - b}{a} = e$:

$$b = a - e\,a = a\,(1 - e) \tag{138}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - a^2\,(1 - e)^2}{a}} \tag{139}$$

$$\varepsilon = \sqrt{e\,(2 - e)}. \tag{140}$$

Hierin ist die Abplattung e durch Gradmessung (vergl. 4) $= \frac{1}{299{,}15}$ gefunden.

3) Ziehen wir in A, Fig. 55, eine Tangente an die Meridianellipse, errichten auf diese in A ein Loth A B, so stellt erstere die Horizontale, letzteres die Verticale für den Punkt **A** dar. Der Winkel φ heisst die elliptische, ψ die geocentrische Polhöhe des Ortes **A.**

Die Subnormale D E ist nach (54)

$$D\,E = \frac{b^2}{a^2}\,x \tag{141}$$

ferner ist
$$\operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{A\,E^2}{E\,D^2} = y^2 : \frac{b^4}{a^4}\,x^2 \text{ (nach 141)} \tag{142}$$

endlich nach der Ellipsengleichung:

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}\,x^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{143}$$

also $$\operatorname{tang}\varphi^2 = \frac{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}{\frac{b^4}{a^4}x^2}$$

folglich $$a^4 = (a^2 + b^2 \operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \tag{144}$$

oder $$a^2 = \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi^2\right) x^2.$$

Da $\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a}} = \varepsilon$, so ist $\frac{b^2}{a^2} = (1 - \varepsilon^2)$

also
$$\begin{aligned} a^2 &= (1 + (1 - \varepsilon^2)\operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \\ a^2 &= (1 + \operatorname{tang}\varphi^2 - \varepsilon^2 \operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \\ &= (\sec\varphi^2 - \varepsilon^2 \operatorname{tang}\varphi^2)\, x^2 \\ a^2\cos\varphi^2 &= (1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)\, x^2 \end{aligned}$$

mithin $$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}} \tag{145}$$

Durch Einsetzung dieses Werthes in (142) erhält man leicht, unter Anwendung von (139), da $y = AE$,

$$y = \frac{\frac{b^2}{a^2}\sin\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}} \tag{146}$$

oder auch nach (141), da $y = DE \operatorname{tang}\varphi$

$$y = \frac{b^2}{a^2}\, x \operatorname{tang}\varphi.$$

Weiter ist $\operatorname{tang}\psi = \frac{y}{x}$, oder nach (145) und (146)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi &= \frac{b^2}{a^2}\operatorname{tang}\varphi \\ &= (1 - \varepsilon^2)\operatorname{tang}\varphi \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

3) Aendern sich y und x um die sehr kleinen Beträge dy und dx, so ändert sich der zum Winkel φ gehörige Bogen um

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Durch Differentiation der Gleichung (143) erhalten wir:

$$2y\,dy = -\frac{-2b^2 x}{a^4}\,dx$$

$$dy^2 = \frac{b^4 x^2\, dx^2}{a^4 y^2}$$

daher $$ds = \frac{dx}{a^2 y}\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}$$

oder nach (145) und (146)

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dx}{a^2 y}\sqrt{\frac{a^2 b^4 \sin\varphi^2 + a^2 b^4 \cos\varphi^2}{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}} \\ &= \frac{dx}{a^2 y}\, a b^2 \sqrt{\frac{\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2}{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}} \end{aligned}$$

$$ds = \frac{b^2\, dx}{a y} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2}}.$$

Durch Differentiation von (144) wird erhalten:

$$2\,x\,dx\,(a^2 + b^2 \operatorname{tang}\varphi^2) + x^2 b^2\, 2 \operatorname{tang}\varphi\, d \operatorname{tang}\varphi = 0 \quad \text{oder nach (41):}$$

$$2\,x\,dx\,(a^2 + b^2 \operatorname{tang}\varphi^2) + \frac{2\,b^2 x^2 \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi^2} = 0$$

woraus man durch Division mit $2\,x$ und Multiplication mit $\cos\varphi^2$ findet:

$$dx = \frac{-\,b^2 x \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi}{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}$$

also

$$\frac{dx}{y} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{b^2 \operatorname{tang}\varphi\, d\varphi}{a^2 \cos\varphi^2 + b^2 \sin\varphi^2}$$

nach (145) und (146) ergiebt sich:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2}{b^2} \cot\varphi$$

also

$$\frac{dx}{y} = -\frac{a^2\, d\varphi}{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}$$

oder da $b^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2)$

$$\frac{dx}{y} = -\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}$$

der obige Ausdruck für $d\,s$ geht daher über in:

$$ds = -\frac{b^2\, d\varphi}{a\,(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder wenn wir wieder $a^2 (1 - \varepsilon^2) = b^2$ setzen:

$$\mathbf{ds} = -\frac{\mathbf{a\,(1 - \varepsilon^2)\, d\varphi}}{\mathbf{(1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{148}$$

4) **Gradmessungen** bezwecken die Ermittelung der Abplattung des Erdsphäroids. Setzt man in (148) $d\varphi = 1^0 = \frac{\pi}{180}$, so erhält man die Bogenlänge für 1^0 des Meridians in der Breite φ

$$m_\varphi = \frac{a\,(1 - \varepsilon^2)\,\pi}{180\,((1 - \varepsilon^2 \sin\varphi^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

Hätte man die Bogenlängen für 1^0 des Meridians unter zwei verschiedenen Breiten φ und φ' gemessen, wären also m_φ und $m_{\varphi'}$ bekannt, dagegen die Dimensionen des Erdsphäroids, in unserer Formel also a und ε, noch unbekannt, so wären zur Bestimmung dieser Unbekannten zwei Gleichungen, nämlich die beiden Ausdrücke für m_φ und $m_{\varphi'}$, gegeben, woraus sich die Unbekannten entwickeln lassen. Es genügt also zur Bestimmung der Dimensionen des Erdsphäroids die Messung zweier Meridiangrade unter möglichst verschiedenen Breiten.*)

*) Weitere Mittel zur Bestimmung der Abplattung hat man in Pendelbeobachtungen und in Bestimmungen der Mondbahn, deren Gestalt einen Schluss auf die Gestalt der Erde gestattet. Alle diese verschiedenen Mittel führen zu etwas von einander abweichenden Resultaten. Die Resultate der Pendelbeobachtungen sind schwankende wegen der verschiedenen Dichtigkeit der Erde. Da auch die Resultate verschiedener Gradmessungen nicht so genau unter sich übereinstimmen, als die Schärfe der Messungen erwarten lässt, so ist man zu der Annahme einer mathematisch nicht genauen Sphäroidform der Erde genöthigt.

5) **Krümmungsradien der Meridianellipse.** Der Krümmungsradius des Meridians für die Breite φ ist nach (59)

$$R_m = \frac{d\,s}{d\,\varphi}$$

daher nach (148)
$$\mathbf{R_m} = \frac{\mathbf{a\,(1 - \varepsilon^2)}}{\mathbf{(1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}}. \tag{149}$$

6) **Der Radius des Parallelkreises** in der Breite φ ist nach (145), da $r = x$

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a \cos \varphi}}{\mathbf{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}} \tag{150}$$

mithin ist A B, Fig. 55, welches wir gleich R_n setzen wollen:

$$\mathbf{R_n} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}}.\text{*)} \tag{151}$$

Aufgabe: Wie gross ist der Radius einer Kugel, deren Parallelkreis in der Breite φ dem Parallelkreise des Sphäroids in der Breite φ congruent ist?

Ist R der Radius der Kugel, r der Radius des Parallelkreises für die Kugel sowohl, wie für das Sphäroid, so ist für die Kugel $r = R \cos \varphi$, wie ohne Weiteres erhellt, für das Sphäroid $r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}}$, also $R = \frac{a}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin \varphi^2}} = R_n$.

§ 31.

Sphärische Coordinaten.

Die niedere Geodäsie, welche sich die Aufnahme von Flächen geringer Ausdehnung zur Aufgabe stellt, kann von der Berücksichtigung der sphäroidischen Gestalt der Erde absehen und die Flächen als **eben** betrachten. Es fragt sich nun, wie weit ein Messungsgebiet ausgedehnt werden darf, wenn man dasselbe noch als eben ansehen will, ohne befürchten zu müssen, dass dadurch ein für die Praxis merkbarer Fehler entsteht.

Denken wir uns senkrecht zum Meridian, den wir als Abscissenaxe eines Coordinatensystems ansehen, in verschiedenen Punkten grösste Kugelkreise gelegt, Fig. 56, so werden diese sich sämmtlich in **einem** um 90° vom Meridian entfernten Punkte schneiden, (ebenso wie sich die zum Aequator senkrechten Meridiane sämmtlich im Pole schneiden). Die Convergenz der Ordinatenbögen ist indessen in der Nähe des Meridians noch sehr gering, und es fragt sich, bis zu welcher Entfernung von demselben kann dieselbe noch vernachlässigt werden? Denken wir uns in der Entfernung α vom Meridian zu diesem einen Parallelkreis gezogen, Fig. 56, wo wir den Bogen α in Theilen des Erdradius ausgedrückt denken wollen, so ist, wenn wir die Bezeichnungen der Figur einführen:

$$b = a \cos \alpha$$

— denn der Radius des Parallelkreises ist, wenn R den Radius des Meridiankreises bezeichnet, $r = R \cos \alpha$. — Nach (48) können wir, wenn wir in dieser Reihe alle Glieder, welche α in höherer als der 2ten Potenz enthalten, vernachlässigen, diesen Ausdruck schreiben:

$$b = a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

*) R_n ist Krümmungsradius des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises in der Breite φ.

Indem wir nun das Coordinatensystem als eben ansehen, begehen wir den Fehler, dass wir b = a annehmen. Der Fehler a — b kann für die Praxis unbeachtet bleiben, wenn derselbe nicht den Betrag 0,00005 a übersteigt, d. h. der Fehler a — b, oder $a - a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ darf im äussersten Falle den Werth 0,00005 a erreichen. Wir haben also für diesen Fall die Gleichung

$$a - a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = 0{,}00005\, a$$

woraus sich

$$\alpha = 0{,}001$$

ergiebt. Dieser Werth gilt für den Radius 1. Für den Radius R = rtd 6000000 m ergiebt sich somit

$$\alpha = 60000 \text{ m.}$$

Wir werden also ein Coordinatensystem als eben ansehen können, so lange seine Ordinaten nicht länger als 60 Kilometer sind. Im anderen Falle können die Formeln der ebenen Trigonometrie nicht ohne Weiteres Anwendung finden. Wir betrachten dann die Terrainoberfläche als eine Kugel, welche das Erdsphäroid im Nullpunkte des Coordinatensystems berührt und sich der Oberfläche des Sphäroids möglichst nahe anschmiegt. Der Radius dieser Kugel ist gleich dem geometrischen Mittel des Krümmungsradius der Meridianellipse in der Breite φ des Coordinaten-Nullpunkts und des zum Meridian senkrechten grössten Kugelkreises, also $R = \sqrt{R_m\, R_n}$, (vergl. (149) und (150)).

§ 32.

Berechnung der sphärischen Coordinaten aus den geographischen Coordinaten, (Länge und Breite).*)

Seit Fertigstellung der Landesaufnahme wird der Geometer die Ausführung selbstständiger Triangulationen nur noch selten nöthig haben. Es wird sich in der Regel nur noch darum handeln, der Landesaufnahme einzelne Punkte durch trigonometrische Punkteinschaltung ergänzend hinzuzufügen. Da die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme durch ihre geographische Länge und Breite gegeben sind, so entsteht dem Geometer zunächst die Aufgabe, diese geographischen Coordinaten in rechtwinklig sphärische umzurechnen, wobei der Meridian irgend eines Punktes der Landesaufnahme als Abscissenaxe, und dieser Punkt selbst als Coordinaten-Nullpunkt angesehen wird.

In der preussischen Vermessungs-Anweisung sind für die verschiedenen Kreise der Provinzen ganz bestimmte trigonometrische Punkte als Nullpunkte vorgeschrieben. Da die Lage derselben eine genügend enge ist, die einzelnen Systeme also nur eine geringe Ausdehnung haben, so können dann die sphärischen Coordinaten dieser Systeme als **ebene** behandelt werden.

Sei nun P_0, Fig. 57, der Nullpunkt des Systems, P ein zweiter Punkt, dessen sphärische Coordinaten, bezogen auf den Meridian des Nullpunktes als Abscissenaxe, gefunden werden sollen, und seien φ_0, φ und λ_0, λ bezüglich die geographischen Breiten und Längen der Punkte P_0 und P, φ_f die geographische Breite des Fusspunktes P_f der Ordinate $P\,P_f$, und setzt man

$$\varphi_f - \varphi = \psi \tag{152}$$

so ist die Abscisse des Punktes P

$$x = P_0\, P_f = (\varphi + \psi) - \varphi_0. \tag{152a}$$

*) Trigon. Formul. 6 der preussischen Verm.-Anw.

Die Ordinate wird, wenn man

$$\lambda - \lambda_0 = \eta \tag{153}$$

setzt, aus dem rechtwinklig sphärischen Dreiecke $N P P_f$

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} \eta \cos \varphi_f \tag{154}$$

gefunden, (nach (4), da $\sin N P_f = \cos \varphi_f$).

Es kommt nun darauf an, den Breitenunterschied $\varphi_f - \varphi = \psi$ zu finden, wodurch φ_f bekannt wird.

Man lege senkrecht zum Meridian des Punktes P_0, Fig. 58, den grössten Kugelkreis $P_f P$, welcher offenbar die Ebene des Parallels $B P B'$, sowie die des Aequators, unter dem Winkel φ_f schneidet, und zwar Erstere in der Kante $P D$, auf welcher die Radien $C B$ des Parallelkreises und $M P_f$ des Meridians senkrecht stehen. Nach der Scheitelgleichung des Kreises (14) ist dann, wenn r den Radius $C B$ des Parallels in der Breite φ bezeichnet:

$$A P^2 = 2 r A B - A B^2.$$

Da der Bogen $P B$, — Längenunterschied der Punkte P_0 und P, — stets ein sehr flacher sein wird, so ist $A B$ gegen r, also $A B^2$ gegen $2 r A B$, verschwindend klein, und kann die halbe Sehne $A P$ ohne Fehler gleich dem Bogen $B P$ gesetzt werden. Bezeichnet nun L die Bogenlänge für $1''$ des Parallels, η'' den in Sekunden ausgedrückten Winkel $B C P$ $(= \lambda - \lambda_0)$, so ist $B P = \eta'' L$, unsere Gleichung geht also über in

$$(\eta'' L)^2 = 2 r A B.$$

Ferner kann man ohne Fehler setzen:

$$\psi = A B \sin P_f \quad A B = A B \sin \varphi_f$$

$$1)\ \psi = \frac{(\eta'' L)^2 \sin \varphi_f}{2 r}.$$

Ist nun r der Radius des Parallelkreises in der Breite φ, so ist die Bogenlänge für $1''$ dieses Parallels $L = \frac{r}{\varrho''}$, — (denn die Bogenlänge für $1''$ des mit dem Radius **Eins** beschriebenen Kreises ist nach Thl. I, § 31 1) gleich $\frac{1}{\varrho''}$). — Nach § 30, 6) ist aber

$$2)\ r = R_n \cos \varphi$$

also

$$3)\ L = \frac{R_n}{\varrho''} \cos \varphi.$$

Setzen wir 2) und 3) in 1) ein, so erhalten wir:

$$\psi = \frac{\eta'' \eta'' L \sin \varphi_f}{2 \varrho''}$$

oder, da φ_f nur um wenige Sekunden von φ verschieden ist, so dass wir ohne merklichen Fehler $\sin \varphi$ für $\sin \varphi_f$ setzen können

$$\psi = \frac{\eta'' \eta'' L \sin \varphi}{2 \varrho''}.$$

Bezeichnet nun R_m den Krümmungsradius des Meridians in der Breite φ, und setzt man $\frac{L \sin \varphi}{2 R_m} = q$ (worin q aus Tabelle I des Anhangs entnommen werden kann), also $L \sin \varphi = 2 R_m q$, so erhalten wir:

$$\psi = \eta'' \eta'' q \frac{R_m}{\varrho''}$$

$$\psi \frac{\varrho''}{R_m} = \eta'' \eta'' q.$$

Da $\frac{\psi}{R_m}$ das analytische Mass für den Winkel ψ, so ist $\frac{\psi}{R_m}\varrho''$ der in Sekunden ausgedrückte Winkel ψ. Setzen wir denselben gleich ψ'', so erhalten wir:

$$\psi'' = \eta'' \eta'' q. \tag{155}$$

Die Gleichungen (152)—(155) setzen uns in den Stand, die Bögen x und y in Gradmass zu berechnen. Wir werden in § 34 zeigen, wie dasselbe in Metermass auszudrücken ist.

§ 33.

Additamentenverfahren.

Drücken wir den Sinus und die Tangente eines Winkels φ nach (47) und (49) durch seinen Bogen aus, wobei wir uns den Winkel φ so klein vorstellen wollen, dass alle Glieder der bezüglichen Reihen, welche φ in höherer als der dritten Potenz enthalten, als verschwindend angesehen werden können, so erhalten wir:

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{2\,.\,3}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3}$$

und wenn wir $\frac{\varphi^3}{2\,.\,3} = a$, $\frac{\varphi^3}{3}$ also $= 2\,a$ setzen:

$$1)\left\{\begin{array}{l}\sin\varphi = \varphi - a\\ \operatorname{tang}\varphi = \varphi + 2\,a.\end{array}\right.$$

Da wir φ als sehr klein annehmen, so wird auch a eine sehr kleine Grösse (Differential) sein.

Nach (38) ist nun

$$d\log\varphi = M\frac{d\varphi}{\varphi}$$

also für $d\varphi = a$ $\quad d\log\varphi = \frac{M\,a}{\varphi}$

d. h. lässt man in der Funktion $\log\varphi$ die Veränderliche φ um den Betrag a zu- oder abnehmen, so wird $\log\varphi$ um den Betrag $\frac{M\,a}{\varphi}$ zu- oder abnehmen,

also ist $\quad \log(\varphi - a) = \log\varphi - \frac{M\,a}{\varphi}$ *)

oder nach 1): $\quad \log\sin\varphi = \log\varphi - \frac{M\,a}{\varphi},$

oder für $\frac{M\,a}{\varphi} = A$

und ebenso

$$\left.\begin{array}{l}\log\sin\varphi = \log\varphi - A\\ \log\operatorname{tang}\varphi = \log\varphi + 2\,A\end{array}\right\} \tag{156}$$

woraus weiter folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\log\varphi = \log\sin\varphi + A\\ \log\varphi = \log\operatorname{tang}\varphi - 2\,A\\ \log\sin\varphi = \log\operatorname{tang}\varphi - 3\,A\end{array}\right\} \tag{156a}$$

---

*) Dies folgt auch ohne Weiteres aus der Taylorschen Reihe (§ 52), wenn in derselben alle Glieder, welche das Differential a, — einen sehr kleinen Bruch, — in höherer als der 1. Potenz enthalten, als verschwindend angesehen werden.

Kennt man also für einen Bogen φ sein Additament $A = \frac{M a}{\varphi} = \frac{M \varphi^3}{6}$, so kann man vom Logarithmus des Bogens φ ohne Weiteres zum Logarithmus irgend welcher Winkelfunktion übergehen und umgekehrt. — Näheres ergeben die Erläuterungen zu Tafel II, Anhang.

§ 34.

Verwandlung des Gradmasses der kleinen Bögen y und x (§ 32) in Längenmass.

Ist n die Bogenlänge für 1″ des grössten Kugelkreises, so ist die Bogenlänge des in Sekunden ausgedrückten Winkels η

$$\eta = \eta'' \, n$$

also nach (154), da $\varphi + \psi = \varphi_f$

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} \eta'' \, n \cos \varphi_f.$$

Es ist aber $n \cos \varphi_f$ nichts anderes, als die Bogenlänge für 1″ des Parallelkreises in der Breite φ_f. Bezeichnen wir dieselbe mit L_f*), so ist also

$$\operatorname{tang} y = \operatorname{tang} \eta'' \, L_f$$

also nach (156)

$$\log \operatorname{tang} y = \log \eta'' + 2 A_\eta + \log L_f. \tag{157}$$

Ist hieraus log tang y berechnet, so erhalten wir y aus der Gleichung

$$\log y = \log \operatorname{tang} y - 2 A_y. \tag{158}$$

Hierin ist das Additament A_y der Tafel II des Anhangs mit dem Argument log tang y (= log s) zu entnehmen.

Für die Abscisse haben wir nach (152a) und (152)

$$x = \varphi_f - \varphi_0.$$

Tafel I des Anhangs giebt die Länge B der Erdbögen φ in Metern. (Spalte B = Breite). Wir erhalten x in Metermass

$$x = B_f - B_0. \tag{159}$$

Wir können auch x wie folgt finden: Bezeichnet m die Bogenlänge für 1″ des Meridians in der Breite $\frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2}$**), so ist, wenn ξ'' den in Sekunden ausgedrückten Breitenunterschied $\varphi_f - \varphi_0$ bezeichnet,

$$y = \xi'' \, m. \tag{160}$$

Der Gang der Rechnungen gestaltet sich nach diesen Formeln wie folgt: ***)

Man bildet $\eta'' = \lambda - \lambda_0$, entnimmt mit Argument φ aus Tafel I des Anhangs die Grösse q und findet ψ'' nach (155). Somit kennt man φ_f nach (152). Entnimmt man mit Argument φ_0 und φ_f die Länge der Bögen φ_0 und $\varphi_f = B_0$ u. B_f, so ergiebt sich die Abscisse nach (159). Zur Berechnung der Ordinate entnimmt man mit Argument log η'' das Additament $A_{\eta''}$ aus Tafel II des Anhangs, ferner aus Tafel I die Länge L_f mit Argument φ_f, und findet log tang y nach (157). Mit log tang y als Argument entnimmt man aus Tafel II, (Eingang in Spalte log s), das Additament A_y und findet dann endlich log y nach (158).

---

*) Auf dem Erdsphäroid ist der Parallelkreis φ_f congruent mit dem Parallelkreise φ_f einer Kugel mit dem Radius R_n — vergl. § 30, 6) —, also ist $\frac{n}{R_n}$ das analytische Mass für den Winkel 1″. Da man die Sekundenzahl eines in analytischem Masse gegebenen Winkels durch Multiplication mit ϱ'' erhält, so ist also $\frac{n \varrho''}{R_n} = 1$, also $n = \frac{R_n}{\varrho''}$, folglich $L_f = \frac{R_n}{\varrho''} \cos \varphi_f$.

**) m ist $= \frac{R m}{\varrho''}$ und kann mit Argument $\frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2}$ aus Tafel I des Anhangs entnommen worden.

***) Im trigon. Formul. 6 der pr. Verm.-Anw.

§ 35.

Berechnung geographischer Coordinaten aus den sphärischen Coordinaten.

Gegeben seien die sphärischen Coordinaten y und x des Punktes P, die Breite und Länge des Coordinaten-Nullpunkts, φ_0 und λ_0, gesucht die Breite φ und Länge λ des Punktes P.

Man findet $\xi'' = \varphi_f - \varphi_0$ nach (160):

$$\xi'' = \frac{m}{x}. \tag{160b}$$

Hierin ist m zunächst **vorläufig** mit Argument φ_0 aus Tafel I des Anhangs zu entnehmen, wodurch mittelst (160b) ein **angenäherter** Werth für ξ'', und sodann für $\varphi_f = \varphi_0 + \xi''$ erhalten wird. Dieser angenäherte Werth für φ_f ist genau genug zur Bildung des Arguments $\frac{\varphi_0 + \varphi_f}{2}$, mit welchem m nochmals derselben Tafel entnommen wird, worauf nun (160b) den genauen Werth für ξ'' liefert. Somit kennt man nun $\varphi_f = \varphi_0 + \xi''$, also auch L_f (nach Tafel I) und findet nach (157)

$$\begin{aligned} \log \eta'' + 2\,A_{\eta''} &= \log \operatorname{tang} y - \log L_f \\ &= \log y + 2\,A_y - \log L_f. \end{aligned} \tag{161}$$

Hiermit hat man den Längenunterschied $\eta = \lambda - \lambda_0$.

Um weiter den Bogen ψ zu berechnen entnimmt man in Formel (155) den Werth q **vorläufig** mit Argument φ_f, berechnet damit einen **vorläufigen** Werth für ψ'' und nach (152) einen vorläufigen Werth für φ, welcher als Argument zur nochmaligen Entnahme von q dient, worauf aus (155) der endgültige Werth für ψ'', und sodann aus (152) der endgültige Werth für φ erhalten wird.

§ 36.

Berechnung geodätischer Dreiecke.

1) **Additamentenmethode.** In einem sphärischen Dreiecke, dessen Seiten im Verhältniss zum Kugelradius sehr klein sind, (geodätisches Dreieck), sei die Seite a und die Winkel α und β gegeben, b sei zu berechnen.

Es ist $\qquad \sin a : \sin \alpha = \sin b : \sin \beta$

also $\qquad \log \sin b = \log \sin a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha.$

Der Bogen a ist in Metermass gegeben, b in gleichem Masse zu ermitteln. — Man entnimmt aus Tafel II des Anhangs das zu log sin a, (Eingang in Spalte log s), gehörige Additament A_a und erhält $\log \sin a = \log a - A_a$, also $\log \sin b = \log a + A_a + \log \sin \beta - \log \sin \alpha$.

Ist hieraus log sin b gefunden, so entnimmt man aus Tafel II das zugehörige Additament A_b und findet $\log b = \log \sin_b - A_b$.

2) **Lehrsatz von Legendre.** Sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks im Verhältniss zum Radius sehr klein, so kann man das Dreieck als **ebenes** Dreieck behandeln, nachdem man die drei Winkel je um $1/3$ des sphärischen Excesses vermindert hat.*)

Ist die Summe der gemessenen Winkel eines sphärischen Dreiecks

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 + E',$$

*) Der Beweis dieses Satzes liegt zwar keineswegs ausserhalb des Rahmens dieses Buches, bietet aber kein besonderes Interesse, weshalb wir glauben, denselben übergehen zu können.

so bedeutet E′ noch nicht den sphärischen Excess, sondern es setzt sich E′ vielmehr aus diesem und den Beobachtungsfehlern zusammen. Man wird also den Excess auf anderem Wege ermitteln müssen, und erhält, wenn man denselben mit E bezeichnet, die Summe der Beobachtungsfehler

$$f = E' - E.$$

Diese Summe ist nach den Gesetzen der Ausgleichungsrechnung zu vertheilen, die so verbesserten Winkel sind je um $^1/_3$ E zu vermindern, worauf das Dreieck nach den Formeln der ebenen Trigonometrie zu berechnen ist.

Zur Berechnung des sphärischen Excesses hat man nach (10)

$$E'' = \frac{648000}{\pi} \frac{F}{r^2}$$

oder nach Theil I, § 31 1) $E'' = \varrho'' \frac{F}{r^2}$.

Der Flächeninhalt F wird genau genug erhalten, indem man das Dreieck als eben betrachtet, also nach den Formeln der ebenen Trigonometrie rechnet.

§ 37.

Berechnung sphärischer Coordinaten (nach Soldner).*)

1) **Gegeben** seien die Coordinaten x_a, y_a des Punktes P_a, Fig. 59, der Neigungswinkel ν_a des Erdbogen $P_a\,P_b$, die Entfernung $P_a\,P_b = s$, welche aus den Dreiecksberechnungen bekannt ist, — **gesucht** die Coordinaten x_b, y_b des Punktes P_b und die Neigung ν_b — (Letztere wird gebraucht, um die Neigung des an die Dreiecksseite $P_a\,P_b$ sich anschliessende Seite des folgenden Dreiecks zu berechnen, zum Zwecke der Berechnung der Coordinaten des folgenden Punktes).

Nach (47) ist

$$1)\ y_b = \sin y_b + \frac{1}{6} \sin^3 y_b$$

die folgenden Glieder kann man wegen der Kleinheit des Bogens y_b vernachlässigen.

Weiter ist nach (8) im sphärischen Dreiecke $P_a\,P_b\,O$

$$2)\ \sin y_b = \cos s \sin y_a + \sin s \cos y_a \sin \nu_a$$

und $$3)\ \sin y_a = y_a - \frac{y_a^3}{6} \text{ und } \sin s = s - \frac{s^3}{6}$$

$$\cos y_a = y_a + \frac{y_a^2}{2} \qquad \cos s = 1 - \frac{s^2}{2}.$$

Setzen wir die Werthe 3) in 2) ein und vernachlässigen alle sich ergebenden Glieder von höherer als der 3ten Potenz, so erhalten wir:

$$4)\ \sin y_b = y_a + s \sin \nu_a - \frac{1}{6} y_a^3 - \frac{1}{2} y_a s^2 + \frac{1}{2} y_a^2 s \sin \nu_a - \frac{1}{6} s^3 \sin \nu_a.$$

Dieser Werth für $\sin y_b$ in Gleichung 1) rechts eingesetzt ergiebt, wenn wir wieder alle Glieder von höherer als 3ter Ordnung streichen:

$$5)\ y_b = y_a + s \sin \nu_a + \frac{1}{2} y_a s^2 \cos^2 \nu_a - \frac{1}{6} s^3 \cos^2 \nu_a \sin \nu_a.$$

Diese Gleichung gilt für den Radius 1. Für den Halbmesser r, (Halbmesser der Berührungskugel $r = \sqrt{R_m R_n}$ — § 32 —), sind die Bögen y_a, y_b und s mit r

*) Bauernfeind, Elemente der Vermessungskunde.

zu dividiren. Führen wir diese Division aus, und multipliciren gleichzeitig die **ganze** Gleichung mit r, so erhalten wir:

$$y_b = y_a + s \sin \nu_a - \frac{y_a\, s^2}{2\, r^2} \cos^2 \nu_a - \frac{s^3}{6\, r^2} \cos^2 \nu_a \sin \nu_a$$

oder wenn wir $s \sin \nu_a = \mathfrak{y}$, $s \cos \nu_a = \mathfrak{x}$ setzen: (163)

$$y_b = y_a + \mathfrak{y} - \frac{y_a\, \mathfrak{x}^2}{2\, r^2} - \frac{\mathfrak{y}\, \mathfrak{x}^2}{6\, r^2}. \tag{164}$$

Nach dem Sinussatze ist, wenn wir in demselben sphärischen Dreiecke für den Winkel bei O den Bogen $\triangle x = x_b - x_a$ setzen*)

$$\sin \triangle x = \frac{\sin s \cos \nu_a}{\cos y_b}$$

woraus sich durch ganz analoge Entwickelung ergiebt:

$$\triangle x = \mathfrak{x} + \frac{\mathfrak{x}\, y^2}{2\, r^2} - \frac{\mathfrak{x}\, \mathfrak{y}^2}{6\, r^2} \tag{164a}$$

$\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$, ($= s \sin \nu_a$ und $s \cos \nu_a$), sind die nach den Formeln der **ebenen** Trigonometrie berechneten Coordinatenunterschiede, — vergl. (174). — Die Brüche in den Gleichungen (164) und (164a) stellen also die Correktionen dar, welche den **ebenen** Coordinaten hinzuzufügen sind, um zu den **sphärischen** Coordinaten überzugehen. Bezeichnen wir diese Correktionsglieder der Reihe nach mit A, B, C, D, also

$$\left.\begin{aligned} \frac{y_a\, \mathfrak{x}^2}{2\, r^2} &= A \text{ und } \frac{\mathfrak{x}\, y^2}{2\, r^2} = C \\ \frac{y\, \mathfrak{x}^2}{6\, r^2} &= B \quad " \quad \frac{\mathfrak{x}\, y^2}{6\, r^2} = D \end{aligned}\right\} \tag{165}$$

so erhalten wir aus (163) und (164):

$$\left.\begin{aligned} y_b &= y_a + \mathfrak{y} - (A + B) \\ x_b &= x_a + \mathfrak{x} + (C - D) \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

2) In dem sphärischen Viereck, welches von den Bögen $\triangle x$, y_a, y_b und s eingeschlossen ist, ist, wie man sofort erkennt, die Winkelsumme $= 2 \times 90^0 + (90 + \nu_a) + (3 \times 90^0 - \nu_b)$. Dieselbe Winkelsumme ist aber auch, wenn E den sphärischen Excess des Vierecks bezeichnet, $= 4 \times 90^0 + E$. Man hat also

$$4 \times 90^0 + E = 6 \times 90^0 + \nu_a - \nu_b$$

und hieraus $\nu_b = \nu_a + 180^0 - E.$ (167)

Zur Berechnung von E hat man, wenn F den Flächeninhalt des Vierecks bezeichnet, — vergl. (162):

$$E = \frac{F\, \varrho''}{r^2} = \frac{\varrho''}{2\, r^2}\, \mathfrak{x} \cdot 2\, y_a + \frac{\varrho''}{2\, r^2}\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{y}. \tag{167a}$$

§ 38.

Berechnung der sphärischen Entfernungen und Neigungen aus den sphärischen Coordinaten.**)

Nach den Gleichungen (166) erhalten wir die **ebenen** Coordinatenunterschiede

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y} &= y_b - y_a + A + B \\ \mathfrak{x} &= x_b - x_a + (D - C) \end{aligned}\right\} \tag{168}$$

*) Es leuchtet ein, dass die zwischen den Kreisen P_a O und P_b O liegenden Bögen aller zum Meridian parallelen Kreise, in Winkelmass ausgedrückt, dem Winkel bei O gleich sind.

**) Trigon. Formul. 7 der preussischen Verm.-Anw.

Zur Berechnung von A, B, C, D setzen wir in die Gleichungen (165) für die Unbekannten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die bekannten Grössen $\triangle$ x und $\triangle$ y, was ohne merklichen Fehler geschehen kann, und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} A &= y_a \triangle x^2 \frac{1}{2\,r^2} \\ 3\,B &= \triangle y \triangle x^2 \frac{1}{2\,r^2} \\ C &= y^2 \triangle x \frac{1}{2\,r^2} \\ 3\,D &= \triangle x \triangle y^2 \frac{1}{2\,r^2} \end{aligned}\right\} \tag{169}$$

Nachdem wir $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x}$ gefunden, ergiebt sich aus (163), wonach:

$$\mathfrak{y} = s \sin \nu_a$$
$$\mathfrak{x} = s \cos \nu_a,$$

$$1)\ \operatorname{tang} \nu_a = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}, \quad \left(\text{nämlich } \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \frac{s \sin \nu_a}{s \cos \nu_a} = \operatorname{tang} \nu_a\right)$$

und $\quad 2)\quad s = \dfrac{\mathfrak{y}}{\sin \nu_a} = \dfrac{\mathfrak{x}}{\cos \nu_a}.$

Die Neigung ν_b ergiebt sich sodann nach (167) und (167a).

V. Polygonometrische Arbeiten.

§ 39.

Polygonmessung.

Sind zwei trigonometrische Punkte A und E, Fig. 60, durch einen Streckenzug verbunden, welcher durch die Coordinaten seiner Brechpunkte 1, 2, 3 . . . . bestimmt werden soll, so sind zu messen:

1) die Brechungswinkel β_1, β_2, β_3 . . . .

2) die Winkel β_A und β_E, welche die Anfangs- und Endseite des Polygons mit irgend einer Dreiecksseite einschliessen.

3) Die Strecken s_1, s_2, s_3 . . . .

§ 40.

Berechnung der Polygone.

1) **Neigungen.** Unter der Neigung ν einer Strecke s versteht man den Winkel, welchen diese mit der positiven Richtung der Abscissenaxe einschliesst, und zwar von dieser aus rechts herum zählend, Fig. 61. Kennt man die Neigung ν_1 einer Streke s_1, so findet man die Neigung ν_2 der sich daran anschliessenden folgenden Strecke s_2 aus der Gleichung (Fig. 61)

$$\beta + (\nu_1 - \nu_2) = 180^0$$

woraus

$$\nu_2 = \nu_1 + \beta - 180^0. \tag{170}$$

Ist die Summe $\nu_1 + \beta < 180^0$, so vermeidet man den nach der letzten Gleichung sich ergebenden negativen Winkel, indem man dieser Summe 360^0 hin-