Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt VI. Detailaufnahme und Flächenberechnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

(Sind die beiden fraglichen Punkte des Systems A durch ihre geographische Länge und Breite bekannt, wie z. B. die trigonometrischen Punkte der Landesaufnahme, so werden dieselben nach den Formeln des § 33 auf das System B zu beziehen sein, wenn der Nullpunkt des letzteren Systems ebenfalls durch Länge und Breite gegeben sind).

Sind nun in Fig. 76 die Punkte 1 und 4 durch die Coordinaten **beider** Systeme gegeben, und seien 2 und 3 durch die Coordinaten des Systems A gegeben und letztere auf das System B umzuformen, so bilden wir die Coordinatendifferenzen:

$$\triangle y_{A_1},\ \triangle x_{A_1},\ \triangle y_{A_2},\ \triangle x_{A_2} \text{ etc.}$$

und haben die Rechenprobe: $[\triangle y_A] = y_{A_4} - y_{A_1}$ und $[\triangle x_A] = x_{A_4} - x_{A_1}$.

Wären die Abscissenaxen beider Systeme parallel, so würde $y_{A_4} - y_{A_1} = y_{B_4} - y_{B_1}$, und $x_{A_4} - x_{A_1} = x_{B_4} - x_{B_1}$, oder es würde sein:

$$[\triangle y_A] = y_{B_4} - y_{B_1}, \text{ und } [\triangle x_A] = x_{B_4} - x_{B_1}.$$

Wegen der gegenseitigen Neigung der Abscissenaxen zu einander werden sich gegen diese Gleichung Widersprüche f_y und f_x ergeben, grade so, als wären die Differenzen $\triangle y_A$ und $\triangle x_A$ nach den Formeln des § 40 mit einem Fehler in den Neigungen gegen die Abscissenaxe des Systems B berechnet, und zwar ist dieser Neigungsfehler gleich der gegenseitigen Neigung der beiden Abscissenaxen. Es werden daher die Fehler

$$\left.\begin{aligned} f_y &= [\triangle y_A] - (y_{B_4} - y_{B_1}) \\ f_x &= [\triangle x_A] - (x_{B_4} - x_{B_1}) \end{aligned}\right\} \qquad (190)$$

genau nach § 40, 1) zu behandeln sein. Die danach verbesserten $\triangle y_A$ und $\triangle x_A$ geben uns die Unterschiede $\triangle y_B$ und $\triangle x_B$, durch deren successives Aufaddiren wir die auf das System B bezogenen Coordinaten der fraglichen Punkte erhalten.

VI. Detailaufnahme und Flächenberechnung.

§ 49.

Stückvermessung.

1) **Grenzen.** Ehe zur Einzelaufnahme eines Objektes geschritten werden kann, sind die Umgrenzungen derselben an der Hand vorhandener Karten festzustellen und dauernd zu vermarken, sodann von den interessirten Grenznachbarn und Vorstehern der betreffenden Gemeinden, (bei Kreisgrenzen vom Landrathe), anzuerkennen. Finden sich Abweichungen von den vorhandenen Grundsteuerkarten, welche nicht auf offenbaren Fehlern der letzteren Karten beruhen, wollen die Interessenten aber die **örtlich** vorgefundenen Grenzen beibehalten wissen, so ist denselben die Erklärung abzunehmen, dass sie mit der Uebernahme der Grenze, wie sie von beiden Seiten als gültig anerkannt wird, in die Katasterkarten einverstanden sind. Ist in solchen Fällen die Grenze streitig, und eine Einigung der Parteien nicht zu erzielen, so ist die Entscheidung im geordneten Wege*) herbeizuführen. Stimmt die örtliche Grenze mit der Grundsteuerkarte überein, ist aber gleichwohl streitig, so entscheidet die Karte.

*) Durch Vermittelung des Landraths.

Die gepflogenen Verhandlungen sind zu Protocoll zu nehmen. In den Protocollen sind die Grenzen durch Zeichnung und Schrift genau zu erläutern, zu dem Ende sind in ersteren die Grenzzeichen, von einem Dreiortsmale*) beginnend, bis zum nächsten Dreiortsmale fortlaufend zu numeriren, Kulturarten und Namen der angrenzenden Besitzer in dieselben einzutragen, besonders auch, wo Wege, Gräben und dergl. die Grenze bilden, zu vermerken, ob dieselben zu beiden aneinander grenzenden Bezirken gemeinschaftlich, bezw. zu welchem Bezirke sie gehören.

Trifft bei Grenzstreitigkeiten die Entscheidung nicht rechtzeitig ein, so ist der streitige Gegenstand einstweilen nach bestem Ermessen aufzunehmen und ev. später zu berichtigen.

Jede Abänderung der bestehenden Bezirksgrenzen ist genau zu erläutern und die Bestätigung derselben im geordneten Wege herbeizuführen.

2) **Liniennetz.** Die Aufnahme der Terraingegenstände erfolgt von den Polygonseiten aus durch Abscissen- und Ordinatenmessung, wie dies in Fig. 77 am Grenzzuge A B veranschaulicht ist. Zur Controlle für die Richtigkeit der Abscissen- und Ordinatenmessung sind die Entfernungen der einzelnen Grenzzeichen zu messen. Wo das Polygonnetz zur Aufnahme des Details nicht ausreicht, sind weitere Messungslinien zu bestimmen, deren Endpunkte in Polygonseiten oder bereits vorher ähnlich bestimmte Messungslinien eingebunden werden, (d. h. es wird der durch genaues Ausfluchten bestimmte Schnittpunkt (Bindepunkt), der zu bestimmenden Linie mit der Polygonseite durch einen Pfahl bezeichnet). Die Coordinaten der Bindepunkte, z. B. a und c für die Messungslinie a c werden nach § 47, 1 berechnet. Indem man die Linie a c, von a beginnend, misst, werden die weiteren Bindepunkte b und d bekannt. Die Messung darf aber nicht etwa bei d abbrechen, ist vielmehr bis zum Endpunkte c fortzusetzen, damit die Differenz der Messung gegen die aus den Coordinaten von a und c abgeleitete Länge a c durch Vergleichen der letzteren Länge mit dem direkten Messungsergebniss festgestellt und ausgeglichen werden kann. Hierdurch wird zugleich eine Controlle für die richtige Bestimmung der Bindepunkte a und c gewonnen, insofern die berechnete Länge a c mit der gemessenen Länge a c bis auf die in der Ungenauigkeit der Längenmessung begründete kleine Differenz übereinstimmen muss. Trifft indessen eine Linie f b annähernd **rechtwinklig** auf a c, so wird durch die Messung von f b eine genügende Controlle für die richtige Bestimmung des Punktes b noch nicht gewonnen, denn es ist z. B. die Länge f b′ nahezu gleich der Länge f b, wird daher mit der berechneten Länge f b′ noch innerhalb der zulässigen Fehlergrenzen übereinstimmen. Es muss daher in solchen Fällen noch eine weitere Controlle geschaffen werden, z. B. durch Messung der Linie g h oder dadurch, dass man den Schnittpunkt v der verlängerten Linie a b auf irgend einer anderen Messungslinie, hier c d, bei der Messung der letzteren notirt. Die Bindepunkte e und d sind durch die Messung der Linie e d genügend controllirt. Wäre z. B. irrthümlich der Punkt d′ statt des Punktes d notirt worden, so würde die Vergleichung der **berechneten** (falschen) Länge e d′ mit der **gemessenen** Länge e d sofort den Fehler nachweisen.

Zur Controlle der Gradlinigkeit und auch der richtigen Einbindung der langen Linien $a\,a_1$, $a_2\,a_3$, $a_4\,a_5$ ist die Linie $a_6\,a_7$ gemessen.

---

*) D. h. Grenzmale, in denen 3 verschiedene Gemarkungen a, b, c zusammenstossen: $\frac{a \mid b}{c}$.

3) **Längenmessung.** Bei dem uns vorschwebenden Grundsatze, uns in diesem Buche mit den einfachen Operationen, die jeder Landmesser-Eleve nicht nur sehr bald kennen lernt, sondern auch ohne Weiteres versteht, nicht aufzuhalten, würden wir uns auch über die Längenmessung mittelst des Messbandes ausschweigen können, wenn es uns nicht darauf ankäme, ein von Wilski angegebenes Verfahren zum Ersatz der ungenauen und zeitraubenden Staffelmessung, (in etwas abgeänderter Form), allgemeiner bekannt zu machen.

Man lasse um die Kettenstöcke in Höhe von 1,50 m je einen Oelfarbenstrich ziehen und theile die Stöcke von dieser Marke aus abwärts nach folgender Scala: 63, 90, 110, 127, 142 cm. Die einzelnen Theilstriche erhalten die Nummern 0, 1, 2, 3, 4, 5. Weiter braucht man ein Instrumentchen für Handnivellement, — (wir empfehlen als solches die kreisförmige Canalwage, Band XIV der Zeitschrift für Vermessungswesen, zu beziehen von Glastechniker Haak in Jena, Preis 3 Mark), — mittelst dessen durch den Nullpunkt der Scala des unteren Kettenstocks, Fig. 155, eine Horizontale bestimmt wird. Erscheint nun z. B. in dieser Horizontalen der Theilstrich 3 der Scala des oberen Stockes, so bedeutet dies, „die auf die Horizontale projicirte Länge des 20 m-Bandes ist um 3 cm kürzer, als das Band, also = 19,97.“ Der vordere Kettenzieher hat also seine Markirnadel 3 cm über seinen Kettenstock hinaus einzusetzen.

Für steileres Terrain muss man die nachfolgende Tabelle in ein auf dem Felde mitzuführendes Notizbuch eintragen, mit Fortlassung der Spalten V, (Verhältnisszahlen, deren Bedeutung wir weiter unten kennen lernen werden). Man lässt durch einen Arbeiter denjenigen Punkt des Bandes markiren, welcher in der in Augenhöhe des am unteren Kettenstocke stehenden Beobachters gelegten Horizontalen erscheint, Fig. 156. Die Entfernung dieses Punktes vom unteren Kettenstocke wird am Messbande abgelesen. Sei die Bandablesung = 5,90 m, so findet man aus der Tabelle die zugehörige Reduktionsgrösse = 65 cm. Um soviel ist die Horizontalprojektion des ganzen Messbandes kürzer, als das Band. Die Tabelle ist für eine Augenhöhe von 150 cm berechnet. Wäre die wirkliche Augenhöhe des Beobachters = 155 cm, also 5 cm grösser, als die der Tabelle zu Grunde liegende, so wären die gesammten Zahlen in den Spalten „Bandablesung“ umzurechnen, indem man die Zahlen in Spalte V mit 5 multiplicirt und die so erhaltenen Centimeterzahlen den zugehörigen Bandablesungen hinzuzählt. Statt der Ablesung 18,3 hätte man also z. B. zu schreiben: $18{,}3 + 5 \times 12{,}2$ cm $= 18{,}91$.

Liegt das Band nicht in **stetiger** Neigung, Fig. 157, so wird man doch die zwischen dem Beobachter und dem abgelesenen Punkte des Messbandes liegende Strecke als stetig geneigt annehmen können. Sei die Kettenablesung = 6,20 m, so ist die Reduktionsgrösse für die **ganze** Bandlänge nach der Tabelle = 60 cm, also für 5 m = 15 cm. Nunmehr gehe man auf den Kettenpunkt 5 m*), wiederhole das Verfahren, und sei die Kettenablesung = 18 m, also die Entfernung des in der Horizontalen erscheinenden Punktes vom Beobachter = 18 — 5 = 13 m, so findet man die Reduktionsgrösse für das ganze Band = 13 cm, also für die Länge von 15 m $= \frac{13}{4} \times 3 = 10$ cm, mithin die Gesammt-Reduktionsgrösse $= 15 + 10 = 25$ cm.

*) Will man die Tabelle nicht auf Augenhöhe umrechnen, so kann man durch Beugen der Kniee seine Augenhöhe auf 1,50 m bringen, zu welchem Zwecke man den vom Bande losgelösten unteren Kettenstock, dessen Scalen-Nullpunkt 1,50 m hoch liegt, auf den Kettenpunkt 5 m mit zu nehmen hat.

Man berechnet also die Reduktionsgrössen für einzelne Theile des Messbandes, und bestimmt die einzelnen Theilstücke desselben dadurch, dass man die abgelesenen Entfernungen, der leichteren Kopfrechnung wegen, auf ein Vielfaches von 5 abrundet, da 5 m = $^1/_4$ der ganzen Bandlänge, (oder auch auf ein Vielfaches von 4, da 4 m = $^1/_5$ der ganzen Bandlänge, also ebenfalls für die Kopfrechnung bequem).

Band-Ablesung	V.	Reduktions-grösse	Band-Ablesung	V.	Reduktions-grösse	Band-Ablesung	V.	Reduktions-grösse	Band-Ablesung	V.	Reduktions-grösse	Band-Ablesung	V.	Reduktions-grösse
			10,8	7,2	20	7,57	5,1	40	6,20	4,1	60	5,38	3,6	80
			10,5	7,0	21	7,48	5,0	41	6,15	4,1	61	5,34	3,6	81
			10,2	6,8	22	7,40	4,9	42	6,09	4,1	62	5,29	3,5	82
			10,0	6,6	23	7,31	4,9	43	6,05	4,0	63	5,26	3,5	83
			9,8	6,5	24	7,23	4,8	44	6,00	4,0	64	5,23	3,5	84
			9,6	6,4	25	7,15	4,8	45	5,94	3,9	65	5,20	3,5	85
19,5	13,0	6	9,4	6,3	26	7,07	4,7	46	5,89	3,9	66	5,17	3,5	86
18,3	12,2	7	9,3	6,2	27	7,00	4,7	47	5,85	3,9	67	5,14	3,4	87
17,2	11,5	8	9,1	6,1	28	6,93	4,6	48	5,82	3,9	68	5,11	3,4	88
16,3	10,4	9	9,0	6,0	29	6,86	4,6	49	5,79	3,9	69	5,08	3,4	89
15,4	10,3	10	8,8	5,8	30	6,78	4,5	50	5,74	3,8	70	5,06	3,4	90
14,7	10,0	11	8,6	5,7	31	6,72	4,5	51	5,70	3,8	71	5,04	3,4	91
14,1	9,4	12	8,5	5,6	32	6,66	4,4	52	5,66	3,8	72	5,02	3,4	92
13,5	9,0	13	8,3	5,5	33	6,60	4,4	53	5,62	3,7	73	4,99	3,3	93
12,9	8,6	14	8,2	5,5	34	6,54	4,4	54	5,58	3,7	74	4,96	3,3	94
12,5	8,3	15	8,1	5,4	35	6,48	4,3	55	5,55	3,7	75	4,93	3,3	95
12,1	8,1	16	8,0	5,3	36	6,42	4,3	56	5,51	3,6	76	4,91	3,3	96
11,7	7,8	17	7,9	5,3	37	6,36	4,2	57	5,47	3,6	77	4,89	3,3	97
11,4	7,6	18	7,8	5,2	38	6,30	4,2	58	5,44	3,6	78	4,86	3,3	98
11,1	7,4	19	7,7	5,1	39	6,25	4,2	59	5,41	3,6	79	4,84	3,3	99
10,8	7,2	20	7,6	5,1	40	6,20	4,1	60	5,38	3,6	80	4,81	3,3	100
10,5	7,0		7,5	5,0		6,15	4,1		5,34	3,6		4,79	3,3	

Die Formel, nach welcher obige Tabelle berechnet ist, wird keiner Erörterung bedürfen.

§ 50.
Fortschreibungsvermessungen.

Ursprünglich nur zu Grundsteuerregulirungszwecken wurden in den Katasterämtern Karten und Besitzstandsverzeichnisse des gesammten Grundbesitzes angefertigt. Die einzelnen Grundstücke sind nach der Reihenfolge ihrer Lage im Felde in den Flurbüchern gemarkungsweise nach Fläche und Bonität nachgewiesen. Diese Flurbücher bilden die Grundlage der Mutterrollen, welche alle Besitzstände, die einem und demselben Besitzer gehören, in getrennten Artikeln nachweisen. Später wurde das so hergestellte werthvolle Material auch zur Regulirung des Grundbuchwesens verwendet, und hat damit eine eminente Bedeutung für den gesammten Grundbesitz erlangt.

Um den Karten und Flurbüchern ihren Werth dauernd zu erhalten, sind alle eintretenden Aenderungen, Besitzwechsel, Grenzverlegungen, Neuanlagen, (z. B. von

Bahnen, Wegen, Canälen), in die Karten und Register nachzutragen, und hat zu dem Ende das Grundbuchamt dem Katasteramte von jeder eingetretenen Eigenthumsänderung Kenntniss zu geben. Der Katastercontroleur übernimmt die Aenderungen in das sogen. Fortschreibungsprotocoll und giebt dem Grundbuchamte Kenntniss von den etwa neu entstandenen Parzellennummern, Artikeln der Mutterrolle etc.

Bei freiwilligen Veräusserungen dürfen die Berichtigungen des Katasters **nur** auf Grund der Benachrichtigung seitens des Grundbuchamtes vorgenommen werden, oder auf Vorlegung einer Urkunde über die erfolgte Grundbuchberichtigung, (Auflassung), durch die Betheiligten. — Bei Gemeinheitstheilungen, Erwerb durch Erbgang, durch Subhastation oder Enteignungsbeschluss, (Expropriation), darf die Fortschreibung *ohne* vorgängige Eintragung des Eigenthumsüberganges in das Grundbuch erfolgen. Ebenso kann die Berichtigung materieller Irrthümer, soweit dieselben lediglich auf falscher Darstellung der Grenzen in den Karten beruhen, ohne Weiteres vorgenommen werden. Ist aber ein Grundstück einem falschen Eigenthümer zugeschrieben, so bedarf es der vorgängigen Berichtigung des Grundbuchs, falls dieses denselben Fehler enthält. Von jeder vorgenommenen Aenderung, mag dieselbe auf Grund einer Benachrichtigung durch das Grundbuchamt, oder ohne eine solche erfolgt sein, ist den betheiligten Grundbesitzern Nachricht zu geben.

Bei Theilungen von Grundstücken, Grenzverlegungen, Neuanlagen pp. bedarf es örtlicher Messungen, um die Ergänzung der Karten herbeiführen zu können. Die Eintragungen in das Fortschreibungsprotocoll erfolgen dann erst **vorläufig** in rother Tinte. Aus diesem Protocoll erhalten die Betheiligten einen Auszug nebst Handzeichnung über die vorgenommenen Veränderungen, behufs Einleitung der Auflassung. Nachdem diese erfolgt ist, werden die *vorläufigen* Eintragungen schwarz unterstrichen, bezw. auf Grund der Grundbucheintragungen vervollständigt.

Nach den Fortschreibungsprotocollen sind alljährlich die Flurbücher, Mutterrollen etc. zu berichtigen und die Karten durch Eintragung des neuen Verhältnisses zu ergänzen. Damit die Karteneintragungen leicht und sicher erfolgen können, ist bei den erforderlichen Messungen folgendes zu beachten:

Allen Fortschreibungsvermessungen sind Auszüge aus den Grundsteuerurkarten — Urkarten — zu Grunde zu legen. An der Hand derselben sind die Grenzen im Felde genau zu prüfen, verloren gegangene Grenzzeichen in Gegenwart der Interessenten und ihrer Grenznachbarn herzustellen, und mit diesen Verhandlungen aufzunehmen, durch welche die Grenzen als richtig anerkannt werden. Finden sich gegen die Karten Differenzen, so ist zu prüfen, ob diese auf fehlerhafter kartographischer Darstellung in den Karten, oder auf eingetretenen Veränderungen beruhen. Ist Letzteres der Fall, und wollen die Interessenten die verschobenen Grenzen beibehalten wissen, so kann die dadurch nöthig werdende Fortschreibung nur nach vorangegangener Berichtigung des Grundbuchs erfolgen. Aus den Grenzverhandlungen muss daher ersichtlich sein, ob ein materieller Irrthum, oder eine örtliche Verschiebung der Grenzen Ursache der vorgefundenen Differenz gewesen.

Damit die Messungslinien, welche zur Aufnahme des neuen Verhältnisses dienen, in die Karten eingetragen werden können, ist es nöthig, dieselben entweder direkt an sichere, in den Karten genau verzeichnete feste Punkte anzuschliessen — als Grenzsteine und dergl., — oder dieselben in andere, bereits an solche Punkte angeschlossene Linien einzubinden. Alle Linien sind ihrer ganzen Länge nach durchzumessen, damit die wegen des Karteneinsprungs sich ergebenden Differenzen richtig vertheilt werden können. Ordinaten über 10 m Länge sind durch Winkelmessung zu bestimmen, über 40 m Länge durch Hypotenusenmessung zu sichern. So lange Ordinaten sind indessen überhaupt thunlichst zu vermeiden bezw. (ev. unter gehöriger Verlängerung), in bereits fest bestimmte Linien einzubinden und bis zum Bindepunkte durchzumessen, so dass in jeder einzelnen längeren Linie die Kartendifferenz zur Erscheinung und Vertheilung gelangen kann. — Bei Aufnahmen von Gebäuden sind die Verlängerungen der Fundamentlinien in das Liniennetz einzubinden und zu messen, auch die Dimensionen der Gebäude zu ermitteln.

Sind ausnahmsweise statt der graden Linien Polygone nöthig, so sind diese beiderseits an feste Punkte anzuschliessen, die Coordinaten, bezogen auf die gradlinige Verbindungslinie dieser festen Punkte als Abscissenaxe zu berechnen, und die Coordinatenfehler nach Verhältniss der Streckenlängen auf die einzelnen Coordinatenunterschiede zu vertheilen. Da Anfangs- und Endpunkt des Polygons in der Abscissenaxe liegen, so muss die Summe der Ordinatenunterschiede $= 0$ werden, die der Abscissenunterschiede aber gleich der nach der Karte zu ermittelnden Entfernung der beiden festen Punkte, an welche das Polygon angeschlossen ist. Lässt sich die Neigung der ersten und letzten Strecke gegen die Abscissenaxe, d. i. die Verbindungslinie des Anfangs- und Endpunktes des Polygons, nicht messen, weil man von einem zum anderen dieser Punkte nicht sehen kann, so kommt das am Schlusse des § 29 geschilderte Verfahren zur Anwendung.

Findet eine vollständige Neumessung des fraglichen Complexes oder eines Theiles desselben statt, dessen Umgrenzungen sich nicht mit denen der Katasterkarten in Uebereinstimmung befinden, und sollen die örtlich vorgefundenen Grenzen beibehalten werden, so genügt es nicht, die fragliche Grenze nur von den neu gelegten Polygonen der Neumessung aus aufzunehmen, sondern der fragliche Grenzzug ist auch von festen Punkten der Katasterkarte aus aufzunehmen, so dass die an das Neumessungsgebiet angrenzenden Kartenblätter der Grundsteuerkarten berichtigt werden können, d. h. also, damit die Congruenz der an das neu zu kartirende Blatt anschliessenden Grenzen der bestehen bleibenden Karten mit denen des neuen Blattes hergestellt werden kann.

Wenn von einer Parzelle eine oder mehrere Theilparzellen abgezweigt werden, so ist auch die Restparzelle vollständig mit aufzumessen. Nur wenn die Theilparzellen zusammen nicht $\frac{1}{10}$ der Stammparzelle überschreiten, ist es statthaft, den Flächeninhalt der Restparzelle durch Abzug der Theilparzellen von dem Flächeninhalte der Stammparzelle zu ermitteln.

Die Vermessungsergebnisse sind in ein Feldbuch einzutragen, und zwar vorhandene Terraingegenstände schwarz, neu entstandene roth. Das Feldbuch ist zu paginiren und die Originalität desselben zu bescheinigen. Hierauf werden die Ergänzungen roth in die Karten eingetragen und etwa fortfallende Grenzlinien roth in derselben durchkreuzt. Auch die Messungslinien und Messungszahlen sind roth in die Ergänzungskarte mit aufzunehmen, bezw. ist bezüglich der Zahlen, — bei mangelndem Raum —, auf das Feldbuch zu verweisen.

Jede neu entstandene Parzelle erhält eine neue Nummer, in Anschluss an die letzte **alte** Nummer des Blattes. Die bestehen bleibende alte Nummer der neuen Parzelle ist in Bruchform unter die neue Nummer zu setzen.

Die Flächenberechnung erfolgt zweimal und muss bei Parzellen unter 1 Ar nach Originalzahlen ausführbar sein. Die Flächen sind auf den Integralinhalt des alten Katasters zu reduciren, falls die gefundene Differenz die zulässigen Grenzen*) nicht überschreitet. Ist dies der Fall, so ist das neue Resultat beizubehalten.

Werden die Fortschreibungsvermessungen nicht durch den Katastercontroleur ausgeführt, so unterliegen doch die Arbeiten der Revision durch denselben.

§ 51.

Flächenberechnung.

1) Ein Polygon aus den Coordinaten seiner Eckpunkte zu berechnen:

Aus Fig. 78 ergeben sich ohne Schwierigkeit die Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2F = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + \ldots + y_{n-1}(x_{n-2} - x_n) + y_n(x_{n-1} - x_1) \\ 2)\ 2F = x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + \ldots + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_1) \end{array}\right\} \quad (191)$$

d. h. man multiplicirt jede Ordinate mit dem Unterschiede der Abscissen des vorhergehenden und folgenden Punktes, oder jede Abscisse mit dem Unterschiede der Ordinaten dieser Punkte, und addirt die Produkte.

Rechenprobe: 1) Summe der Abscissen- (bezw. Ordinaten-) Unterschiede = 0, 2) Resultat der Formel 1) = dem der Formel 2).

Geht eine der Axen mitten durch das Polygon, so vergrössert man die Ordinaten, (bezw. Abscissen), um einen constanten Betrag, derart, dass man lauter positive Ordinaten (bezw. Abscissen) erhält.

2) Die Berechnung der Flächen erfolgt durch Zerlegung der Figur in Dreiecke oder Trapeze, deren Grundlinien und Höhen nach der Karte ermittelt werden.

Bei sehr langgestreckten gradlinig begrenzten Figuren, Fig. 79, sind die Kopfbreiten a und b durch Messung auf dem Felde zu ermitteln, die Figur ist in der angedeuteten Weise in Dreiecke zu zerlegen und deren Höhen nach der Karte zu ermitteln. Die Ermittelung der Kopfbreiten nach der Karte ist in solchen Fällen nicht zulässig, da ein geringer Fehler der schmalen Kopfbreiten, mit der verhältnissmässig grossen Höhe multiplicirt, eine zu erhebliche Flächendifferenz ergeben würde.

§ 52.

Polarplanimeter.

Die Einrichtung dieses allgemein verbreiteten Instruments, Fig. 80, wird jeder Anfänger sehr bald aus eigener Anschauung kennen zu lernen Gelegenheit haben, und brauchen wir daher nur noch die Theorie desselben in Kürze zu besprechen.

1) Es bezeichnen F die Länge des Fahrarms, ϱ die Entfernung der Laufrolle von der Axe C des Fahrarms, Fig. 81a, P den Pol, R dessen Entfernung von der Axe C, F_1 sei der Anfangspunkt der Umfahrung. Ist nun die zu berechnende Fläche von F_1 bis F_2 umfahren, so ist C_2 F_2 eine neue Lage des Fahrarms, und wir können uns vorstellen, dass diese entstanden sei a) durch parallele Verschiebung des Arms aus der Lage C_1 F_1 in die Lage C_2 F_1', wobei die Rolle einen Bogen von der Länge h_1 abwickeln wird, sodann b) durch Drehung des Arms aus der Lage C_2 F_1' in die Lage C_2 F_2, wobei der Arm einen Kreissektor mit dem Centriwinkel α_1

*) Es sind zulässig bei Flächen unter 1 Ha. pr. Ar 1,4 qm, bei Flächen von 1—10 Ha. pr. Ar 0,8, bei grösseren Flächen 0,7 qm. Die Berechnung erfolgt nach folgendem Beispiel: Auf 3,50 Ha. ist zulässig eine Differenz a) pr. 1. Ha. = 140 qm, für den Rest 2,50 × 80 = 200 qm, zusammen 340 qm.

beschreibt, wo α_1 durch die Länge des Bogens für den Radius 1 ausgedrückt sein soll. Während dieser Drehung wird die Rolle einen Bogen $\varrho\,\alpha_1$ abwickeln. Die gesammte Abwickelung der Rolle beim Uebergange aus der Lage $C_1\,F_1$ in die Lage $C_2\,F_2$ ist also

$$A_1 = h_1 + \varrho\,\alpha_1. \tag{192}$$

Die dabei von dem Fahrarm bestrichene Fläche, d. h. die Fläche, welche von der 1. und 2. Lage des Fahrarms und von den von seinen Endpunkten F und C zurückgelegten Wegen $F_1\,F_2$ und $C_1\,C_2$ begrenzt wird, ist, wenn wir den Sektor mit dem Centriwinkel $\alpha_1 = s_1$ setzen:

$$J_1 = F\,h_1 + s_1. \tag{192a}$$

Setzt man die Umfahrung bis F_3 fort, so ist die weitere Abwickelung der Rolle

$$A_2 = h_2 + \varrho\,\alpha_2, \tag{193}$$

und die vom Fahrarme bestrichene Fläche

$$J_2 = F\,h_2 + s_2. \tag{193a}$$

So geht die Sache weiter, bis der Fahrstift in B_1 angekommen ist. Von hier an findet Rückwärtsbewegung der Rolle statt: die Abwickelung der Rolle ist also negativ, und ist also bei Umfahrung von B_1 nach B_2:

$$A' = -(h' + \varrho\,\alpha') \tag{194}$$

und die vom Fahrarm bestrichene Fläche

$$J' = (F\,h' + s'). \tag{194a}$$

Wird die Umfahrung bis auf den Anfangspunkt F_1 fortgesetzt, so ist also die gesammte Abwickelung der Rolle

$$\Sigma A = \Sigma h + \Sigma(\varrho\,\alpha) - (\Sigma h' + \Sigma(\varrho\,\alpha')).$$

Offenbar ist aber nach einer vollen Umfahrung

$$\Sigma(\varrho\,\alpha) = \Sigma(\varrho\,\alpha')$$

also
$$\Sigma A = \Sigma h - \Sigma h'. \tag{195}$$

Die Fläche der umfahrenen Figur ist nun:

$$Fl. = \Sigma J - \Sigma J' \tag{196}$$

oder nach (192a, 193a, 194a)

$$Fl. = F \times \Sigma h + \Sigma s - (F \times \Sigma h' + \Sigma s')$$

oder da $\Sigma s = \Sigma s'$

$$Fl. = F \times (\Sigma h - \Sigma h')$$

oder nach (195)
$$Fl. = F \times \Sigma A. \tag{197}$$

Die umfahrene Figur ist also gleich einem Rechtecke, welches die Länge des Fahrarmes zur Grundlinie, den von der Rolle abgewickelten Bogen zur Höhe hat.

Aufgabe: Der Umfang der Rolle sei = 5 cm, die Nonieneinheit betrage $^1/_{1000}$ des Umfanges, also = 0,05 mm. Wie lang muss der Fahrarm sein, wenn bei einer Umfahrung einer Fläche von 1 □ mm die Rolle sich um eine Nonieneinheit, d. h. um 0,05 mm, abwickeln soll?

Es ist
$$F \times 0{,}05 \text{ mm} = 1 \square \text{ mm}$$
$$F = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ mm}.$$

Sei nun beispielsweise eine Karte im Massstab 1 : 2000 gezeichnet, so entspricht eine Fläche von 1 □ mm einer Fläche von 4 qm des verjüngten Kartenmasses. Bei einer Fahrarmlänge von 20 mm ist also der Werth der Nonieneinheit für den Massstab 1 : 2000 = 4 □ m. Sollte der Fahrarm nun so eingestellt werden, dass der Werth der Nonieneinheit 10 □ m betrage, (= 2,5 × 4 □ m), so wird die Fahrarmlänge 2,5 × 20 mm, = 50 mm zu nehmen sein.

In der Regel ist der Fahrarm nicht mit Millimetertheilung versehen, sondern nur mit einzelnen Marken, welche die Bezeichnungen 2 □ mm, 2,5 □ mm, 5 □ mm etc. tragen. Dieselben bedeuten, dass der Werth der Nonieneinheit bei der betreffenden Einstellung = 2, 2,5, 5 etc. □ mm sei. Um daraus den Werth der Nonieneinheit für ein verjüngtes Kartenmass zu erhalten, wird man also nur zu berechnen haben, wieviele Quadratmeter des verjüngten Masses in einem Quadratmillimeter natürlichen Masses enthalten sind. Ist z. B. der Fahrarm auf die Marke 5 □ mm eingestellt, und will man eine im Massstabe 1 : 2000 gezeichnete Figur berechnen, so ist der Werth der Nonieneinheit = 20 □ m, da 20 □ m des verjüngten Masses in 5 □ mm natürlichen Masses enthalten sind. Ist demnach die Abwickelung der Rolle bei Umfahrung einer gewissen Fläche = x Nonieneinheiten, so weiss man, dass diese Fläche einen Inhalt von 20 x qm enthält.

2) Steht der Pol innerhalb der zu umfahrenden Figur, so wird der Fahrarm während der Umfahrung nach und nach die Lagen $F_1\,C_1$, $F_2\,C_2$ etc., Fig. 82, einnehmen und endlich wieder in die Lage $F_1\,C_1$ zurückkehren. Die beim Uebergange von einer in die andere Lage abgewickelten Bögen werden sein: $h_1 + \varrho\,\alpha_1$, $h_2 + \varrho\,\alpha_2$ etc., und ihre Summe, d. h. der während der ganzen Umfahrung sich abwickelnde Bogen:

$$\Sigma A = \Sigma h + \Sigma \varrho\,\alpha. \tag{198}$$

Da sich der Arm nach einer vollen Umfahrung einmal um seine Axe C gedreht haben wird, so ist $\Sigma\,\varrho\,\alpha$ gleich dem Umfange eines Kreises mit dem Radius ϱ, also $\Sigma\,\varrho\,\alpha = 2\,\varrho\,\pi$, mithin

$$\Sigma A = \Sigma h + 2\,\varrho\,\pi. \tag{199}$$

Die vom Fahrarm bestrichene Fläche ist

$$J = \Sigma h \,.\, F + F^2\,\pi$$

oder nach (199)

$$J = (\Sigma A - 2\,\varrho\,\pi)\,F + F^2\,\pi$$
$$= (\Sigma A)\,F + F^2\,\pi - 2\,\varrho\,\pi\,F. \tag{200}$$

Zu dieser Fläche ist, um die Gesammtfläche der umfahrenen Figur zu erhalten, die vom Radius P C = R beschriebene Kreisfläche $R^2\,\pi$ hinzuzufügen. Es ist also

$$Fl. = (\Sigma A)\,F + R^2\,\pi + F^2\,\pi - 2\,\varrho\,\pi\,F$$

oder wenn man $(R^2 + F^2)\,\pi - 2\,\varrho\,\pi\,F = c^2$ setzt:

$$Fl. = (\Sigma A)\,F + c^2, \tag{201}$$

d. h. die umfahrene Fläche ist gleich dem Rechtecke aus dem abgewickelten Bogen und der Fahrarmlänge, vermehrt um eine von den Dimensionen des Instruments abhängige Constante c^2.

3) Wir wollen noch eines bisweilen plötzlich auftretenden Fehlers des Instruments gedenken, der sich darin äussert, dass die Instrumentenangaben bei wechselnder Polstellung schwankende sind. Die Ursache dieser Erscheinung ist in einer schiefen Axenstellung der Laufrolle zu suchen. Die Laufrollenaxe soll der durch die Polarmaxe C und die Fahrstiftspitze F gelegten Geraden **parallel** sein. Ein Blick auf Fig. 81b lehrt, dass, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, bei einer parallelen Verschiebung des Fahrarmes aus der Lage C F in die Lage C′ F′ nicht die Bogenlänge h, wie es sein sollte, sondern die Bogenlänge h′ abgewickelt wird. Das Verhältniss h : h′ ist nun nicht constant, sondern schwankt mit dem Winkel P C F, den Pol- und Fahrarm einschliessen, und den wir mit α bezeichnen wollen. Es ist nun, wenn wir uns den Bogen C C′ = s sehr klein denken, so dass C C′ ⊥ P C angenommen werden kann, dass also $\sin F\,C\,C' = \cos\alpha$,

$$h = s\cos\alpha. \tag{a}$$

Enthält nun der Winkel α, infolge schiefer Axenstellung der Laufrolle, gewissermassen einen kleinen Fehler $d\,\alpha$, so finden wir den dadurch in der Rollenabwickelung h entstehenden Fehler durch Differentiation von (a)

$$d\,h = -\,s\sin\alpha\;d\,\alpha. \tag{b}$$

Da nach der Einrichtung des Instruments Winkel α nur im ersten und zweiten Quadranten liegen kann, so ist $\sin\alpha$ stets positiv, also $d\,h$ stets negativ,

(d. h. h ist abnehmend bei zunehmenden Winkel α). Dagegen ist nach (a) die Abwickelung h für $\alpha > 90^0$ **negativ**. Es ist also 1) bei spitzwinkliger Armstellung, $(\alpha < 90^0)$,

$$h' = h - d\alpha$$

und bei stumpfwinkliger Polstellung, $(\alpha > 90^0)$

$$- h' = -(h + d\alpha).$$

Dem absoluten Werthe nach ist also im ersten Falle $h' < h$, im zweiten Falle $h' > h$, und wir erhalten den Satz:

I. Bei spitzwinkliger Polarmstellung werden durch positive Rollenschiefe die Rollenabwickelungen vermindert, bei stumpfwinkliger Stellung vergrössert, und zwar ist die Differenz in beiden Fällen um so grösser, je mehr sich der Winkel zwischen Pol- und Fahrarm dem Rechten nähert, — denn nach Gl. (b) ist der Fehler der Rollenabwickelung dem $\sin \alpha$ proportional, erreicht also sein Maximum für $\alpha = 90^0$.

Weiter erkennen wir aus Fig. 81a folgenden Satz:

II. Während der Umfahrung einer Figur liegt der Winkel α dem Rechten, (90^0), bei rückläufiger Rollenbewegung, d. h. bei der Umfahrung in der Richtung $B_1 - F_1$, näher, als bei rechtläufiger.*)

Aus diesen beiden Sätzen lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

Fall 1). Die zu umfahrende Figur liegt ganz innerhalb des mit der Hypotenuse $P F_1$ um P beschriebenen Kreises, wo also $C F_1$ die rechtwinklige Fahrarmstellung bezeichnet, Fig. 81b. Hier ist die Polarmstellung während der ganzen Umfahrung spitzwinklig, die Rollenabwickelungen werden nach Satz I **vermindert**, und zwar um so mehr, je mehr Winkel α sich dem Rechten nähert, also nach Satz II mehr bei rückläufiger, als bei rechtläufiger Rollendrehung. Die Gesammtabwickelung der Rolle giebt also den gesuchten Flächeninhalt **zu gross**. (Denn die rückläufigen, — negativen — Rollenabwickelungen werden im Verhältniss zu den positiven zu klein, die algebraische Summe der positiven und negativen Abwickelungen also zu gross gefunden.

Fall 2). Die zu umfahrende Figur liegt ausserhalb des gedachten Kreises, die Polarmstellung ist durchweg stumpfwinklig. Man findet durch analoge Schlussfolgerung, dass der Flächeninhalt der Figur sich zu **klein** ergiebt.

Hierbei ist immer ein positives $d\alpha$ vorausgesetzt. Bei negativem $d\alpha$ ist das Resultat das umgekehrte.

Fall 3). Die Figur wird von der Peripherie des gedachten Kreises durchschnitten, Fig. 82b. Hier wird man den Theil innerhalb des Kreises zu gross, den Theil ausserhalb zu klein finden. In der Summe beider Theile heben sich also die Fehler ganz oder theilweise auf.

Hieraus die wichtige Regel:

M a n w ä h l e d i e P o l s t e l l u n g s t e t s s o , d a s s d e r m i t d e r H y p o t e n u s e $P F_1$ u m P b e s c h r i e b e n e K r e i s d i e z u u m f a h r e n d e F i g u r m i t t e n d u r c h s c h n e i d e t.**) Fig. 82b.

*) Experimentell zeigt sich die Richtigkeit dieses Satzes darin, dass man bei rechtäufiger Umfahrung einer Figur stets positive Gesammtabwickelungen der Rolle erhält, woraus folgt, dass die rückläufigen Rollendrehungen im Ganzen kleiner sein müssen, als die rechtläufigen. Nach Gl. (a) finden aber die kleinsten Rollenabwickelungen statt für $\alpha = 90^0$, wo die Rollenbewegung lediglich eine gleitende ist.

**) Bei dieser Stellung wird der von den Armen eingeschlossene Winkel stets nahe bei 90^0 liegen, der Fehler dh also nahe constant bleiben, denn durch Differentiation von (b) findet man: $d\,dh = -s \cos\alpha \, d\alpha^2$. Die Aenderung des Fehlers dh ist also für $\alpha = 90^0$ gleich 0, da $\cos 90^0 = 0$.

Die Prüfung des Instruments auf die Richtigkeit der Rollenaxe erfolgt durch Umfahren einer Figur aus verschiedenen Polstellungen. Man wird nach Obigem leicht entscheiden, ob der Fehler der Axenstellung positiv oder negativ ist.

Bei den meisten Instrumenten lässt sich entweder die Axe selbst, oder die durch C F gelegte Gerade, durch Verschiebung des Fahrstifts F, justiren.

§ 53.

Linearplanimeter.

Eine der vorzüglichsten Einrichtungen dieser Instrumentengattung haben wir im Kugelrollplanimeter von Coradi, Fig. 83. Vorzüge desselben sind besonders: Fortfall der zu mancherlei Fehlerquellen Anlass gebenden Gleitbewegung der Rolle, grössere Unabhängigkeit von der Beschaffenheit der Papierfläche.

Wir wollen die Construction dieses Instruments in rohen Zügen vortragen, wobei man Figur 84 vergleichen wolle:

Das ganze Instrument wird von 2 auf dem Papier laufenden Rollen R getragen, durch deren Drehung das Rädchen r und mit ihm eine durch eine horizontale Axe mit demselben in Verbindung stehende Kugelkalotte K in Umdrehung versetzt wird. Letztere bewirkt durch Reibung die Rotation des um seine Axe drehbaren Cylinders C, welcher mit dem Fahrarm F in der aus Fig. 85 ersichtlichen Weise verbunden ist. An diesem Cylinder ist die Rolle J befestigt, deren Theilung mittelst eines feststehenden Nonius ablesbar ist. Während der Bewegung des Instruments beschreibt die Axe des Fahrarms eine grade Linie C X, Fig. 86. Liegt der Fahrarm selbst in dieser Linie, so berührt der Cylinder C die Kugelkalotte K in der Verlängerung ihrer Axe. Die Drehung des Cylinders C ist dann, trotz der Bewegung des Instruments und der Drehung der Kalotte = 0. Bildet der Fahrarm mit der Axe C X den Winkel α, so schliesst auch derjenige Kugelradius der Kalotte, welcher deren Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte des Cylinders verbindet, mit der Axe der Kalotte den Winkel α ein, und das von diesem Berührungspunkte auf die Axe der Kalotte gefällte Loth a ist, wenn ϱ den Kugelradius bezeichnet:

$$a = \varrho \sin \alpha.$$

Die Drehung des Cylinders C, d. i. die Abwickelung der Rolle J ist gleich dem vom Berührungspunkte des Cylinders und der Kalotte infolge Drehung der Letzteren beschriebenen Kreisbogen, ist also proportional dem Radius a dieses Kreises, und andererseits auch proportional der Drehung der Kalotte K, also der Abwickelung der Rolle R. Bewegt sich nun der Fahrstift von A nach A′, so ist die Abwickelung der Rolle R gleich dem Abschnitte d x auf der Linie C X, die Abwickelung der Rolle J ist also, wenn k einen von den Dimensionen des Instruments*) abhängigen Coefficienten bezeichnet:

$$A_1 = k\, d\, x \sin \alpha$$

oder, da $\sin \alpha = \frac{AB}{F} = \frac{y}{F}$, worin F die Länge des Fahrarms bezeichnet:

$$A_1 = k\, d\, x \frac{y}{F}$$

*) In Betracht kommen das Verhältniss des Radius der Rolle R zu dem der Rolle r, und der Kugelradius ϱ.

oder für $\frac{k}{F} = c$:

$$A_1 = c\, y\, d\, x$$

und bei Fortsetzung der Umfahrung von A′ nach A″,

$$A_2 = c\, y'\, d\, x',$$

also ist die Abwickelung der Rolle bei Umfahrung der ganzen Figur:

$$\Sigma A = c\, \Sigma (y\, d\, x). \tag{202}$$

$\Sigma (y\, d\, x)$ setzt sich aus positiven und negativen Flächenelementen zusammen, weil $d\, x$ bei Rückwärtsbewegung des Instruments negativ wird. $\Sigma (y\, d\, x)$ ist offenbar gleich der umfahrenen Figur, (wie man sofort einsieht, wenn man sich $d\, x$ unendlich klein vorstellt), also ist die Abwickelung der Rolle proportional der umfahrenen Figur. Hieran wird nichts geändert, wenn die Letztere von der Geraden C X durchschnitten wird, Fig. 87. Hat nämlich die Umfahrung bei A begonnen und ist bis B fortgesetzt, so tritt zwar bei noch weiterer Umfahrung Rückwärtsbewegung des Instruments ein, die Abwickelung der Rolle ist aber nur so lange negativ, als der Fahrstift noch nicht auf der Axe C X angelangt ist. In dem Moment, wo derselbe die Axe C X erreicht, ist die Drehung der Rolle = 0, und geht wieder in **positive** Drehung über, wenn der Fahrstift die Axe C X überschreitet, weil dann der Berührungspunkt des Cylinders C über die Axe der Kalotte tritt, wo die Bewegung die entgegengesetzte ist. Der in der Figur rechts von C X liegende Theil der umfahrenen Fläche wird also von der Rolle, trotz der Rückbewegung des Instruments, gleichwohl im **positiven** Sinne angegeben.

§ 54.
Flächenberechnung grösserer Complexe.

Besteht ein Complex aus mehreren einzelnen Parzellen, so darf man seinen Inhalt nicht durch Summiren des ermittelten Inhaltes der einzelnen Parzellen berechnen, weil dadurch unzulässige Fehleranhäufungen entstehen könnten. Es ist vielmehr der Gesammtinhalt des ganzen Complexes unbekümmert um die darin enthaltenen Parzellen zu berechnen, und sind demnächst die Flächen der Parzellen auf den so ermittelten Flächeninhalt des ganzen Complexes zu reduciren, indem man die Differenz der Summe der Parzellen gegen den Inhalt des ganzen Complexes proportional auf die einzelnen Parzellen vertheilt. (Grosse Massenberechnung.)

Weiter sind sodann durch Zusammenstellen mehrerer zusammenhängender Parzellen verschiedene Gruppen zu bilden, der Gesammtinhalt der einzelnen Gruppen, unbekümmert um die dieselben bildenden Parzellen, also im **Ganzen** zu berechnen, und die so gefundenen Flächen der Gruppen mit denjenigen Flächen zu vergleichen, welche durch Summiren der die Gruppe bildenden Parzellen, (nach deren Reduction auf die grosse Massenberechnung), erhalten wird. (Kleine Massenberechnung.) Nur so vermag man sich gegen das Anhäufen von Fehlern zu schützen.

Ist die Karte, auf welcher diese Rechnungen vorgenommen werden, mit Quadratnetz versehen, so gewinnt man den Gesammtinhalt des ganzen Kartenblattes durch Zusammenzählen der Quadrate, deren Inhalt bekannt ist. In den am Rande der Zeichnung liegenden Quadraten, welche nur **theilweise** mit Kartenbezeichnung bedeckt sind, sind sowohl die Theile **mit**, als auch die Theile **ohne** Zeichnung zu berechnen und die Flächen beider Theile auf den Sollinhalt des Quadrats zu reduciren, hierauf die so corrigirte Fläche des **bezeichneten**, zur Karte gehörigen

Theils in Rechnung zu stellen. Hierdurch werden die durch etwaigen Karteneinsprung entstehenden Fehler vollkommen ausgeglichen.

§ 55.

Theilung der Grundstücke.

A. nach der Fläche.

a) Theilung von gegebenem Punkte aus. 1) Von einem Dreiecke a b c, Fig. 88, mit dem Flächeninhalte Q, soll eine Fläche F so abgeschnitten werden, dass die Theilungslinie d e durch den gegebenen Punkt d geht.

Es ist $$F : Q = ae \,.\, h : ab \,.\, h_c$$

$$ae = \frac{F}{Q} \,.\, ab \,.\, \frac{h_c}{h}$$

oder da $h_c : h = ac : ad$

$$ae = \frac{F \,.\, ab \,.\, ac}{Q \,.\, ad}. \qquad (203)$$

2) Im Viereck a b c d, Fig. 89, soll die die Fläche F abschneidende Theilungslinie m f durch den gegebenen Punkt m gehen.

Es ist $$2F = ae \times ed + (ef + fg)(ed + gm) - fg \,.\, gm$$

woraus folgt: $$ef = ae + \frac{2F - de \,.\, ag}{gm}. \qquad (204)$$

3) Im Falle der Fig. 90, in welcher P P′ die durch den gegebenen Punkt P gehende Theilungslinie bezeichnet, hat man:

$$2F = mn + (n + y)(s - m - x) + yx.$$
$$2F = ns - nx + ys - my.$$

Hierin ist

$$y = u \sin\beta$$
$$x = u \cos\beta$$
$$m = v \cos\alpha$$
$$n = v \sin\alpha$$

also $$2F - vs\sin\alpha = \left(s - v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta - v\cos\alpha\right) u \sin\beta$$

$$\frac{2F - vs\sin\alpha}{s\sin\beta - v\sin(\alpha + \beta)} = u. \qquad (205)$$

Sind **mehrere** Flächen, $F_1, F_2 \ldots F_n$, derart abzuschneiden, dass die Theilungslinien sämmtlich durch gegebene Punkte $P_1\, P_2,\, P_3 \ldots P_n$ gehen, so setzt man in die Formel (205) für F der Reihe nach die Werthe $F_1, F_2 \ldots F_n$, um die Längen $u_1, u_2 \ldots u_n$ zu erhalten.

b) Paralleltheilung. 4) Die Theilungslinie d e, Fig. 91, soll parallel zu b c sein.

Es ist $$F : Q = ad^2 : ac^2$$

$$\left.\begin{array}{l} ad^2 = \dfrac{F}{Q}\, ac^2, \text{ also } ad = ac\sqrt{\dfrac{F}{Q}} \\ \text{und analog} \quad ae = ab\sqrt{\dfrac{F}{Q}} \end{array}\right\} \qquad (206)$$

5) Die Theilungslinie e f, Fig. 92, soll || a b sein.

1) $2F = (s + x) y$

2) $y (\cot \alpha + \cot \beta) = s - x$.

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2F &= \frac{s^2 - x^2}{\cot \alpha + \cot \beta} \\ x &= \sqrt{s^2 - 2F(\cot \alpha + \cot \beta)} \\ y &= \frac{2F}{s + x} \end{aligned}\right\} \tag{207}$$

Sind mehrere Flächen nach einander abzuschneiden, so ist folgende Formel sehr geeignet:

Man messe, Fig. 93, die Parallele s_1 im Abstande m von der Basis, so ist $s - s' = a + b, = m(\cot \alpha + \cot \beta)$, also $\cot \alpha + \cot \beta = \frac{s - s_1}{m}$, folglich nach (207)

$$x = \sqrt{s^2 - 2F \frac{s - s_1}{m}}. \tag{208}$$

6) Soll vom Polygon, Fig. 94, die Fläche F so abgeschnitten werden, dass die Theilungslinie parallel zu A B C D wird, so ist, wenn man die Polygonseiten mit a, a_1, a_2, den Abstand der Theilungslinie von den Seiten mit y bezeichnet, im Uebrigen die Bezeichnungen der Figur gelten lässt:

$$a = x + y \cot A + y \cot \frac{B}{2}$$

$$a_1 = x_1 + y \cot \frac{B}{2} + y \cot \frac{C}{2}$$

$$a_2 = x_2 + y \cot \frac{C}{2} + y \cot D$$

$$1) \quad \Sigma a = \Sigma x + y \,.\, \Sigma \,\text{cotang}.$$

Weiter ist

$$2) \quad 2F = (\Sigma a + \Sigma x) y.$$

Multiplicirt man 1) mit 2), so erhält man:

$$(\Sigma a)^2 - (\Sigma x)^2 = 2F \,.\, \Sigma \,\text{cotang}$$

$$\Sigma x = \sqrt{(\Sigma a)^2 - 2F \,.\, \Sigma \,\text{cotang}}$$

also nach 1)

$$y = \frac{2F}{\Sigma a + \Sigma x}. \tag{209}$$

Die Cotangenten der Winkel A, B, C, D ergeben sich ohne Weiteres aus den Coordinaten.

c) Normaltheilungen. 7) Die Theilungslinie d e, Fig. 95, soll ⊥ a b sein. Man schneidet nach b), 4) die Fläche F derart von △ a c f ab, dass d e || c f.

Im Falle der Fig. 96 berechne man das rechtwinklige Dreieck a c d = △, und schneide zu diesem dann noch die Differenz F — △ nach 5).

d) **Proportionaltheilung.** 8) In Fig. 97 soll die Theilungslinie so gelegt werden, dass $v_1 : v = u_1 : u$.

Es ist
$$a x + (x + z)(s - a - b) + b z = 2F.$$

Setzt man $v_1 : v = u_1 : u = m$, so folgt:

$$m^2 v^2 (\sin \alpha + \cos \alpha) + m (v \sin \alpha + u \sin \beta)(s - m v \cos \alpha - m u \cos \beta)$$
$$- m^2 u^2 \sin \beta \cos \beta = 2F.$$

$$m = \frac{v s \sin \alpha + u s \sin \beta}{2 u v \sin (\alpha + \beta} \pm \sqrt{-\left(\frac{v s \sin \alpha + u s \sin \beta}{2 u v \sin (\alpha + \beta)}\right)^2 - \frac{2F}{u v \sin (\alpha + \beta)}}.$$

Der Wurzelausdruck ist positiv oder negativ, je nach dem $(\alpha + \beta) > $ oder $< 180^0$. Setzt man

$$A = u\,v \sin(\alpha + \beta),\ B = -v \sin \alpha - u \sin \beta,\ \frac{B}{2A} = M,\ \frac{2F}{A} = N,$$

so lautet der Ausdruck für m:

$$m = M \pm \sqrt{M^2 - N}. \tag{210a}$$

Setzt man Viereck $ABCD = V$, so hat man die Rechenprobe:

$$A + B = -2V. \tag{210b}$$

Sind mehrere Flächen, $F_1, F_2 \ldots$ abzuschneiden, so setze man für die weiteren Rechnungen

$$\frac{2(F + F_1)}{A} = N,\ \frac{2(F + F_1 + F_2)}{A} = N \ldots \text{etc.}$$

Hat man m, so ist

$$v_1 = m\,v,\ u_1 = m\,u.$$

9) Soll im Polygon Fig. 98 $r_1 : r = u_1 : u = v_1 : v, = w_1 : w = m$ sein, so setze man in (210a)

$$A = r\,u \sin(\alpha + \beta) + u\,v \sin(\alpha_1 + \beta_1) + v\,w \sin(\alpha_2 + \beta_2)$$
$$B = -r\,s \sin \alpha - u\,s \sin \beta - u\,s_1 \sin \alpha_1 - v\,s_1 \sin \beta_1 - v\,s_2 \sin \alpha_2 - w\,s_2 \sin \beta_2.$$

10) Complicirtere Figuren theilt man am schnellsten durch **Probiren** auf der Karte und überträgt die ermittelte Theilungslinie von der Karte auf das Feld.

B. nach dem Werthe.

Der Werth W einer Fläche F ist gleich dem Produkt aus dem Werthe der Flächeneinheit und der Fläche. Haben die Bodenklassen I, II, III, Fig. 99, pr. Quadratmeter den Werth w_1, w_2, w_3, und soll von dem in der Figur dargestellten Grundstücke eine Fläche von dem Werthe W abgeschnitten werden, so zieht man nach Schätzung, oder auf Grund einer überschläglichen Berechnung, die Versuchslinie ab, ermittelt die Flächen f_1, f_2, f_3 der Bonitätsabschnitte I, II, III, multiplicirt sie mit den Werthen der Flächeneinheit w_1, w_2, w_3, so stellt die Summe Σ dieser Produkte den Werth der durch die Versuchslinie abgeschnittenen Fläche dar. Ist $W - \Sigma = w$, so ist der abgeschnittene Werth Σ noch um den Betrag w zu verbessern. Multiplicirt man die nach der Karte zu ermittelnden Längen l_1, l_2, l_3, d. h. die in den Bodenklassen I, II, III liegenden Theile der Versuchslinie a b, bezüglich mit w_1, w_2, w_3, so ist die Summe dieser Produkte gleich dem Werthe eines längs a b sich hinziehenden Streifens von 1 m Breite. Ist derselbe $= v$, so ist, wenn x die Breite des noch abzuschneidenden Streifens mit dem Werthe w bezeichnet, $w = x\,v$, also $x = \frac{w}{v}$. Man hat nun noch in dem Abstande x zu a b die Parallele $a'\,b'$ zu ziehen, wodurch man $a'\,b'$ als die gesuchte Theilungslinie erhält. Die ursprünglich abgeschnittenen Flächen f_1, f_2, f_3 ändern sich dadurch um die Beträge $l_1\,x$, $l_2\,x$, $l_3\,x$, welche mit w_1, w_2, w_3 multiplicirt, zusammen die Correktion w ergeben müssen.

Dies Verfahren setzt voraus, dass die Grenzen des Grundstücks, wie auch die Bonitirungsgrenzen, annähernd **rechtwinklig** durch die Theilungslinie geschnitten werden. Ist dies nicht der Fall, so ermittelt man nun die Längen l_1, l_2, l_3 nochmals, indem man dieselben jedoch nicht auf der Versuchslinie a b, sondern in der Mitte zwischen a b und $a'\,b'$ abgreift, sonst aber wieder wie oben verfährt, wodurch man einen genaueren Werth für x erhält, welcher wieder von a b aus, nicht etwa von a′ b′ aus, abgetragen wird. Bei sehr unregelmässigen Begrenzungen, bezw. sehr spitzen Schnitten der Grenzen und der Theilungslinie, wird man indessen die von der Linie a′ b′ abgeschnittene Fläche nochmals ordnungsmässig berechnen, und den sich ergebenden Fehlbetrag in derselben Weise beseitigen, indem man jetzt a′ b′ als Versuchslinie ansieht.

C. Grenzregulirung.

1) Soll die krumme Grenzlinie a b c d e f g, Fig. 100, in eine Grade verwandelt werden, welche durch den Punkt g geht und am Flächeninhalt der aneinander grenzenden Grundstücke nichts ändert, so messe man die Grenze von der Messungslinie a g aus auf, berechne die Flächen a b c d und d e f g, ziehe letztere von der ersteren ab, dividire den doppelten Rest durch a g, so erhält man die Höhe a h des Dreiecks a g h, mit a g als Grundlinie. Die Linie g h ist die gesuchte Grenze.

2) Zeigt die zu regulirende Grenze nur **einen** Bruch, so kann man die Aufgabe mit genügender Schärfe durch blosse Construktion auf dem Felde lösen: Man steckt die Linie c d || a b, Fig. 101, ab, so ist d b die gesuchte Grenzlinie.

Soll die Grenze a b, Fig. 102, so verlegt werden, dass sie durch den Punkt c geht, so stecke man a d || b c ab, und gewinnt c d als gesuchte Grenze.

3) Soll die neue Grenze parallel zu einer vorhandenen Grenze a b, Fig. 103, gehen, so messe man sie von einer zu a b parallelen Messungslinie c d aus auf, berechne die Flächenabschnitte zu beiden Seiten derselben und beseitige die Differenz D der letzteren durch parallele Verschiebung der angenommenen Messungslinie um den Betrag $x = \frac{D}{c\,d}$. Ist indessen eine **erhebliche** Verschiebung erforderlich, und sind die Grenzen a c und b d nicht parallel, so muss die Verschiebung nach (207) erfolgen, zu welchem Ende die Cotangenten der Winkel α und β durch Coordinatenmessung zu bestimmen sind.

4) Die Mittellinie eines krummen Baches bildet die Grenze zwischen zwei Grundstücken. Der Bach soll durch einen Durchstich regulirt werden, so dass das durch die Verkürzung der Grabenstrecke entstehende Plus an Land beiden aneinander grenzenden Grundstücken gleichmässig zu Gute kommt.

Man nimmt die fragliche Strecke des Grabens auf, kartirt sie, ermittelt durch Probiren auf der Karte eine passende Linie als Mittellinie des Durchstichs so, dass die Flächenabschnitte 1 + 2, Fig. 104, den Abschnitten 3 + 4 gleich werden, überträgt die so ermittelte Linie ins Feld, und trägt von derselben rechts und links die halbe Breite des Durchstichs ab.

Um die Linie von der Karte ins Feld übertragen zu können, ist es nöthig, einige Punkte A, B und C genügend dauerhaft auf dem Felde zu vermarken, mit aufzumessen und auf die Karte zu bringen, damit man später, bei Uebertragung der Kartenlinie ins Feld, sichere Punkte zur Verfügung hat, von denen aus die nöthigen Abmessungen erfolgen können.

D. Planabsteckung.

Ist eine Flächentheilung nach der Karte vorgenommen worden, und sind die Theilungslinien, welche man im Allgemeinen unter sich parallel machen wird, ins Feld zu übertragen, so wird man die rechtwinkligen Abstände der Theilungslinien, — Planbreiten, — nach der Karte ermitteln, und dieselben auf dem Felde der

Reihe nach abmessen, wodurch die Theilungslinien auf dem Felde bestimmt sind. Bei verhältnissmässig **langen** Plänen darf man indessen die Planbreiten nicht mittelst Zirkel und Massstab nach der Karte ermitteln, da kleine Fehler der Planbreiten verhältnissmässig grosse Fehler der Flächen verursachen würden, sondern man ermittelt in solchen Fällen die **Längen** der Pläne, — arithmetisches Mittel der beiden parallelen Grenzlinien, — und erhält die Breite durch Division der Planlänge in die Fläche. Sind die Kopfseiten der Pläne unregelmässig begrenzt, so hat man zuvor die krummen Grenzen auf der Karte in grade zu verwandeln.

Bei nicht parallel begrenzten Plänen wird man die Kopfbreiten zwar durch Abgreifen mittelst Zirkel und Massstab ermitteln müssen, wird dann aber gleichzeitig auch die zugehörigen Höhen, nach Anleitung der Fig. 79, abgreifen und sich durch Multiplication der ermittelten Höhen und Grundlinien überzeugen, ob diese Masse den Sollinhalt der Fläche ergeben. Anderenfalls sind die abgegriffenen Kopfbreiten entsprechend zu corrigiren, ehe sie zur Absteckung auf dem Felde benutzt werden dürfen.

VII. Linienabsteckung.

§ 56.

Abstecken grader Linien.

1) **Aufgabe.** Zwei Punkte, welche eine derartige Lage haben, dass dieselben von keinem Standpunkte aus gleichzeitig gesehen werden können, durch eine grade Linie zu verbinden.

Man verbindet beide Punkte, A und B, Fig. 105, durch ein Polygon, misst Strecken und Winkel desselben, berechnet die Coordinaten des Punktes B für eine beliebige, durch A als Nullpunkt gehende Abscissenlinie A X, indem man eine ganz willkürliche Anfangsneigung ν annimmt, berechne aus den Coordinaten der Punkte A und B, (die des ersteren Punktes sind $= 0$), den Winkel α, vergl. die Figur, und trage den Winkel $\beta = \nu - \alpha$ an die Anfangsstrecke des Polygons an*), so hat man die Richtung der gesuchten Geraden, die gehörig verlängert durch B treffen muss, ev. noch etwas zu corrigiren ist, (vergl. 4).

2) Hat man eine Karte, in welcher ausser den beiden Punkten A und B noch irgend zwei andere, im Felde scharf markirte Punkte, z. B. C und D, Fig. 106, verzeichnet sind, so verlängere man auf derselben die Linien A B und C D bis E, berechne aus den aus der Karte zu entnehmenden Seiten des Dreiecks B E C den Winkel E, construire sodann den Punkt E auch im Felde, durch Verlängerung der Linie C D um die aus der Karte zu entnehmende Strecke D E, und trage in E den berechneten Winkel an.

3) Man kann auch mittelst der Bussole die Neigung der Linie C D gegen den magnetischen Meridian bestimmen, letzteren in die Karte eintragen, sodann auf

*) Um einen Winkel **genau** abzustecken, wird man den zunächst mittelst einfacher Nonieneinstellung **roh** abgesteckten Winkel repetiren, wobei sich gegen das Soll eine Differenz δ'' herausstellen wird. Um diese zu beseitigen, errichtet man in einer abgemessenen Entfernung s vom Scheitel ein Loth $h = \frac{s}{\varrho''} \delta''$, oder wenn man h in cm erhalten will, während s in m ausgedrückt ist: $h = \frac{100\,s}{\varrho''} \delta''$, oder für $\frac{\varrho''}{100} = k$, : $h = \delta'' : \frac{k}{s}$, worin $\frac{k}{s}$ aus Tafel III des Anhangs entnommen werden kann.