Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 52. Polarplanimeter

Die Flächenberechnung erfolgt zweimal und muss bei Parzellen unter 1 Ar nach Originalzahlen ausführbar sein. Die Flächen sind auf den Integralinhalt des alten Katasters zu reduciren, falls die gefundene Differenz die zulässigen Grenzen*) nicht überschreitet. Ist dies der Fall, so ist das neue Resultat beizubehalten.

Werden die Fortschreibungsvermessungen nicht durch den Katastercontroleur ausgeführt, so unterliegen doch die Arbeiten der Revision durch denselben.

§ 51.
Flächenberechnung.

1) Ein Polygon aus den Coordinaten seiner Eckpunkte zu berechnen:

Aus Fig. 78 ergeben sich ohne Schwierigkeit die Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 2F = y_1(x_n - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + \ldots + y_{n-1}(x_{n-2} - x_n) + y_n(x_{n-1} - x_1) \\ 2)\ 2F = x_1(y_n - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + \ldots + x_{n-1}(y_{n-2} - y_n) + x_n(y_{n-1} - y_1) \end{array}\right\} \quad (191)$$

d. h. man multiplicirt jede Ordinate mit dem Unterschiede der Abscissen des vorhergehenden und folgenden Punktes, oder jede Abscisse mit dem Unterschiede der Ordinaten dieser Punkte, und addirt die Produkte.

Rechenprobe: 1) Summe der Abscissen- (bezw. Ordinaten-) Unterschiede = 0, 2) Resultat der Formel 1) = dem der Formel 2).

Geht eine der Axen mitten durch das Polygon, so vergrössert man die Ordinaten, (bezw. Abscissen), um einen constanten Betrag, derart, dass man lauter positive Ordinaten (bezw. Abscissen) erhält.

2) Die Berechnung der Flächen erfolgt durch Zerlegung der Figur in Dreiecke oder Trapeze, deren Grundlinien und Höhen nach der Karte ermittelt werden.

Bei sehr langgestreckten gradlinig begrenzten Figuren, Fig. 79, sind die Kopfbreiten a und b durch Messung auf dem Felde zu ermitteln, die Figur ist in der angedeuteten Weise in Dreiecke zu zerlegen und deren Höhen nach der Karte zu ermitteln. Die Ermittelung der Kopfbreiten nach der Karte ist in solchen Fällen nicht zulässig, da ein geringer Fehler der schmalen Kopfbreiten, mit der verhältnissmässig grossen Höhe multiplicirt, eine zu erhebliche Flächendifferenz ergeben würde.

§ 52.
Polarplanimeter.

Die Einrichtung dieses allgemein verbreiteten Instruments, Fig. 80, wird jeder Anfänger sehr bald aus eigener Anschauung kennen zu lernen Gelegenheit haben, und brauchen wir daher nur noch die Theorie desselben in Kürze zu besprechen.

1) Es bezeichnen F die Länge des Fahrarms, ϱ die Entfernung der Laufrolle von der Axe C des Fahrarms, Fig. 81a, P den Pol, R dessen Entfernung von der Axe C, F_1 sei der Anfangspunkt der Umfahrung. Ist nun die zu berechnende Fläche von F_1 bis F_2 umfahren, so ist $C_2\ F_2$ eine neue Lage des Fahrarms, und wir können uns vorstellen, dass diese entstanden sei a) durch parallele Verschiebung des Arms aus der Lage $C_1\ F_1$ in die Lage $C_2\ F_1'$, wobei die Rolle einen Bogen von der Länge h_1 abwickeln wird, sodann b) durch Drehung des Arms aus der Lage $C_2\ F_1'$ in die Lage $C_2\ F_2$, wobei der Arm einen Kreissektor mit dem Centriwinkel α_1

*) Es sind zulässig bei Flächen unter 1 Ha. pr. Ar 1,4 qm, bei Flächen von 1—10 Ha. pr. Ar 0,8, bei grösseren Flächen 0,7 qm. Die Berechnung erfolgt nach folgendem Beispiel: Auf 3,50 Ha. ist zulässig eine Differenz a) pr. 1. Ha. = 140 qm, für den Rest 2,50 × 80 = 200 qm, zusammen 340 qm.

beschreibt, wo α_1 durch die Länge des Bogens für den Radius 1 ausgedrückt sein soll. Während dieser Drehung wird die Rolle einen Bogen $\varrho\,\alpha_1$ abwickeln. Die gesammte Abwickelung der Rolle beim Uebergange aus der Lage $C_1 F_1$ in die Lage $C_2 F_2$ ist also

$$A_1 = h_1 + \varrho\,\alpha_1. \tag{192}$$

Die dabei von dem Fahrarm bestrichene Fläche, d. h. die Fläche, welche von der 1. und 2. Lage des Fahrarms und von den von seinen Endpunkten F und C zurückgelegten Wegen $F_1 F_2$ und $C_1 C_2$ begrenzt wird, ist, wenn wir den Sektor mit dem Centriwinkel $\alpha_1 = s_1$ setzen:

$$J_1 = F\,h_1 + s_1. \tag{192a}$$

Setzt man die Umfahrung bis F_3 fort, so ist die weitere Abwickelung der Rolle

$$A_2 = h_2 + \varrho\,\alpha_2, \tag{193}$$

und die vom Fahrarme bestrichene Fläche

$$J_2 = F\,h_2 + s_2. \tag{193a}$$

So geht die Sache weiter, bis der Fahrstift in B_1 angekommen ist. Von hier an findet Rückwärtsbewegung der Rolle statt; die Abwickelung der Rolle ist also negativ, und ist also bei Umfahrung von B_1 nach B_2:

$$A' = -(h' + \varrho\,\alpha') \tag{194}$$

und die vom Fahrarm bestrichene Fläche

$$J' = (F\,h' + s'). \tag{194a}$$

Wird die Umfahrung bis auf den Anfangspunkt F_1 fortgesetzt, so ist also die gesammte Abwickelung der Rolle

$$\Sigma A = \Sigma h + \Sigma(\varrho\,\alpha) - (\Sigma h' + \Sigma(\varrho\,\alpha')).$$

Offenbar ist aber nach einer vollen Umfahrung

$$\Sigma(\varrho\,\alpha) = \Sigma(\varrho\,\alpha')$$

also
$$\Sigma A = \Sigma h - \Sigma h'. \tag{195}$$

Die Fläche der umfahrenen Figur ist nun:

$$Fl. = \Sigma J - \Sigma J' \tag{196}$$

oder nach (192a, 193a, 194a)

$$Fl. = F \times \Sigma h + \Sigma s - (F \times \Sigma h' + \Sigma s')$$

oder da $\Sigma s = \Sigma s'$

$$Fl. = F \times (\Sigma h - \Sigma h')$$

oder nach (195)
$$Fl. = F \times \Sigma A. \tag{197}$$

Die umfahrene Figur ist also gleich einem Rechtecke, welches die Länge des Fahrarmes zur Grundlinie, den von der Rolle abgewickelten Bogen zur Höhe hat.

Aufgabe: Der Umfang der Rolle sei = 5 cm, die Nonieneinheit betrage $^1/_{1000}$ des Umfanges, also = 0,05 mm. Wie lang muss der Fahrarm sein, wenn bei einer Umfahrung einer Fläche von 1 □ mm die Rolle sich um eine Nonieneinheit, d. h. um 0,05 mm, abwickeln soll?

Es ist
$$F \times 0{,}05\ \text{mm} = 1\ \square\,\text{mm}$$

$$F = \frac{1}{0{,}05} = 20\ \text{mm}.$$

Sei nun beispielsweise eine Karte im Massstab 1 : 2000 gezeichnet, so entspricht eine Fläche von 1 □ mm einer Fläche von 4 qm des verjüngten Kartenmasses. Bei einer Fahrarmlänge von 20 mm ist also der Werth der Nonieneinheit für den Massstab 1 : 2000 = 4 □ m. Sollte der Fahrarm nun so eingestellt werden, dass der Werth der Nonieneinheit 10 □ m betrage, (= 2,5 × 4 □ m), so wird die Fahrarmlänge 2,5 × 20 mm, = 50 mm zu nehmen sein.

In der Regel ist der Fahrarm nicht mit Millimetertheilung versehen, sondern nur mit einzelnen Marken, welche die Bezeichnungen 2 □ mm, 2,5 □ mm, 5 □ mm etc. tragen. Dieselben bedeuten, dass der Werth der Nonieneinheit bei der betreffenden Einstellung = 2, 2,5, 5 etc. □ mm sei. Um daraus den Werth der Nonieneinheit für ein verjüngtes Kartenmass zu erhalten, wird man also nur zu berechnen haben, wieviele Quadratmeter des verjüngten Masses in einem Quadratmillimeter natürlichen Masses enthalten sind. Ist z. B. der Fahrarm auf die Marke 5 □ mm eingestellt, und will man eine im Massstabe 1 : 2000 gezeichnete Figur berechnen, so ist der Werth der Nonieneinheit = 20 □ m, da 20 □ m des verjüngten Masses in 5 □ mm natürlichen Masses enthalten sind. Ist demnach die Abwickelung der Rolle bei Umfahrung einer gewissen Fläche = x Nonieneinheiten, so weiss man, dass diese Fläche einen Inhalt von 20 x qm enthält.

2) Steht der Pol innerhalb der zu umfahrenden Figur, so wird der Fahrarm während der Umfahrung nach und nach die Lagen $F_1\,C_1$, $F_2\,C_2$ etc., Fig. 82, einnehmen und endlich wieder in die Lage $F_1\,C_1$ zurückkehren. Die beim Uebergange von einer in die andere Lage abgewickelten Bögen werden sein: $h_1 + \varrho\,\alpha_1$, $h_2 + \varrho\,\alpha_2$ etc., und ihre Summe, d. h. der während der ganzen Umfahrung sich abwickelnde Bogen:

$$\Sigma A = \Sigma h + \Sigma \varrho\,\alpha. \tag{198}$$

Da sich der Arm nach einer vollen Umfahrung einmal um seine Axe C gedreht haben wird, so ist $\Sigma\,\varrho\,\alpha$ gleich dem Umfange eines Kreises mit dem Radius ϱ, also $\Sigma\,\varrho\,\alpha = 2\,\varrho\,\pi$, mithin

$$\Sigma A = \Sigma h + 2\,\varrho\,\pi. \tag{199}$$

Die vom Fahrarm bestrichene Fläche ist

$$J = \Sigma h \,.\, F + F^2 \pi$$

oder nach (199)

$$J = (\Sigma A - 2\,\varrho\,\pi)\,F + F^2\pi$$
$$= (\Sigma A)\,F + F^2\pi - 2\,\varrho\,\pi\,F. \tag{200}$$

Zu dieser Fläche ist, um die Gesammtfläche der umfahrenen Figur zu erhalten, die vom Radius $P\,C = R$ beschriebene Kreisfläche $R^2\pi$ hinzuzufügen. Es ist also

$$Fl. = (\Sigma A)\,F + R^2\pi + F^2\pi - 2\,\varrho\,\pi\,F$$

oder wenn man $(R^2 + F^2)\,\pi - 2\,\varrho\,\pi\,F = c^2$ setzt:

$$Fl. = (\Sigma A)\,F + c^2, \tag{201}$$

d. h. die umfahrene Fläche ist gleich dem Rechtecke aus dem abgewickelten Bogen und der Fahrarmlänge, vermehrt um eine von den Dimensionen des Instruments abhängige Constante c^2.

3) Wir wollen noch eines bisweilen plötzlich auftretenden Fehlers des Instruments gedenken, der sich darin äussert, dass die Instrumentenangaben bei wechselnder Polstellung schwankende sind. Die Ursache dieser Erscheinung ist in einer schiefen Axenstellung der Laufrolle zu suchen. Die Laufrollenaxe soll der durch die Polarmaxe C und die Fahrstiftspitze F gelegten Geraden **parallel** sein. Ein Blick auf Fig. 81b lehrt, dass, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, bei einer parallelen Verschiebung des Fahrarmes aus der Lage C F in die Lage C′ F′ nicht die Bogenlänge h, wie es sein sollte, sondern die Bogenlänge h′ abgewickelt wird. Das Verhältniss h : h′ ist nun nicht constant, sondern schwankt mit dem Winkel P C F, den Pol- und Fahrarm einschliessen, und den wir mit α bezeichnen wollen. Es ist nun, wenn wir uns den Bogen $C\,C' = s$ sehr klein denken, so dass $C\,C' \perp P\,C$ angenommen werden kann, dass also $\sin F\,C\,C' = \cos\alpha$,

$$h = s \cos\alpha. \tag{a}$$

Enthält nun der Winkel α, infolge schiefer Axenstellung der Laufrolle, gewissermassen einen kleinen Fehler $d\,\alpha$, so finden wir den dadurch in der Rollenabwickelung h entstehenden Fehler durch Differentiation von (a)

$$d\,h = -\,s \sin\alpha\,d\,\alpha. \tag{b}$$

Da nach der Einrichtung des Instruments Winkel α nur im ersten und zweiten Quadranten liegen kann, so ist $\sin\alpha$ stets positiv, also $d\,h$ stets negativ,

(d. h. h ist abnehmend bei zunehmenden Winkel α). Dagegen ist nach (a) die Abwickelung h für $\alpha > 90^{0}$ **negativ**. Es ist also 1) bei spitzwinkliger Armstellung, ($\alpha < 90^{0}$),

$$h' = h - d\,\alpha$$

und bei stumpfwinkliger Polstellung, ($\alpha > 90^{0}$)

$$-h' = -(h + d\,\alpha).$$

Dem absoluten Werthe nach ist also im ersten Falle $h' < h$, im zweiten Falle $h' > h$, und wir erhalten den Satz:

I. Bei spitzwinkliger Polarmstellung werden durch positive Rollenschiefe die Rollenabwickelungen vermindert, bei stumpfwinkliger Stellung vergrössert, und zwar ist die Differenz in beiden Fällen um so grösser, je mehr sich der Winkel zwischen Pol- und Fahrarm dem Rechten nähert, — denn nach Gl. (b) ist der Fehler der Rollenabwickelung dem $\sin\alpha$ proportional, erreicht also sein Maximum für $\alpha = 90^{0}$.

Weiter erkennen wir aus Fig. 81a folgenden Satz:

II. Während der Umfahrung einer Figur liegt der Winkel α dem Rechten, (90^{0}), bei rückläufiger Rollenbewegung, d. h. bei der Umfahrung in der Richtung $B_1 - F_1$, näher, als bei rechtläufiger.*)

Aus diesen beiden Sätzen lassen sich nun folgende Schlüsse ziehen:

Fall 1). Die zu umfahrende Figur liegt ganz innerhalb des mit der Hypotenuse $P\,F_1$ um P beschriebenen Kreises, wo also $C\,F_1$ die rechtwinklige Fahrarmstellung bezeichnet, Fig. 81b. Hier ist die Polarmstellung während der ganzen Umfahrung spitzwinklig, die Rollenabwickelungen werden nach Satz I **vermindert**. und zwar um so mehr, je mehr Winkel α sich dem Rechten nähert, also nach Satz II mehr bei rückläufiger, als bei rechtläufiger Rollendrehung. Die Gesammtabwickelung der Rolle giebt also den gesuchten Flächeninhalt **zu gross**. (Denn die rückläufigen, — negativen — Rollenabwickelungen werden im Verhältniss zu den positiven zu klein, die algebraische Summe der positiven und negativen Abwickelungen also zu gross gefunden.

Fall 2). Die zu umfahrende Figur liegt ausserhalb des gedachten Kreises, die Polarmstellung ist durchweg stumpfwinklig. Man findet durch analoge Schlussfolgerung, dass der Flächeninhalt der Figur sich zu **klein** ergiebt.

Hierbei ist immer ein positives $d\,\alpha$ vorausgesetzt. Bei negativem $d\,\alpha$ ist das Resultat das umgekehrte.

Fall 3). Die Figur wird von der Peripherie des gedachten Kreises durchschnitten, Fig. 82b. Hier wird man den Theil innerhalb des Kreises zu gross, den Theil ausserhalb zu klein finden. In der Summe beider Theile heben sich also die Fehler ganz oder theilweise auf.

Hieraus die wichtige Regel:

M a n w ä h l e d i e P o l s t e l l u n g s t e t s s o , d a s s d e r m i t d e r H y p o t e n u s e $P\,F_1$ u m P b e s c h r i e b e n e K r e i s d i e z u u m f a h r e n d e F i g u r m i t t e n d u r c h s c h n e i d e t.**) Fig. 82b.

---

*) Experimentell zeigt sich die Richtigkeit dieses Satzes darin, dass man bei rechtäufiger Umfahrung einer Figur stets positive Gesammtabwickelungen der Rolle erhält, woraus folgt, dass die rückläufigen Rollendrehungen im Ganzen kleiner sein müssen, als die rechtläufigen. Nach Gl. (a) finden aber die kleinsten Rollenabwickelungen statt für $\alpha = 90^{0}$, wo die Rollenbewegung lediglich eine gleitende ist.

**) Bei dieser Stellung wird der von den Armen eingeschlossene Winkel stets nahe bei 90^{0} liegen, der Fehler $d\,h$ also nahe constant bleiben, denn durch Differentiation von (b) findet man: $d\,d\,h = - s \cos\alpha\, d\,\alpha^2$. Die Aenderung des Fehlers $d\,h$ ist also für $\alpha = 90^{0}$ gleich 0, da $\cos 90^{0} = 0$.

Die Prüfung des Instruments auf die Richtigkeit der Rollenaxe erfolgt durch Umfahren einer Figur aus verschiedenen Polstellungen. Man wird nach Obigem leicht entscheiden, ob der Fehler der Axenstellung positiv oder negativ ist.

Bei den meisten Instrumenten lässt sich entweder die Axe selbst, oder die durch C F gelegte Gerade, durch Verschiebung des Fahrstifts F, justiren.

§ 53.

Linearplanimeter.

Eine der vorzüglichsten Einrichtungen dieser Instrumentengattung haben wir im Kugelrollplanimeter von Coradi, Fig. 83. Vorzüge desselben sind besonders: Fortfall der zu mancherlei Fehlerquellen Anlass gebenden Gleitbewegung der Rolle, grössere Unabhängigkeit von der Beschaffenheit der Papierfläche.

Wir wollen die Construction dieses Instruments in rohen Zügen vortragen, wobei man Figur 84 vergleichen wolle:

Das ganze Instrument wird von 2 auf dem Papier laufenden Rollen R getragen, durch deren Drehung das Rädchen r und mit ihm eine durch eine horizontale Axe mit demselben in Verbindung stehende Kugelkalotte K in Umdrehung versetzt wird. Letztere bewirkt durch Reibung die Rotation des um seine Axe drehbaren Cylinders C, welcher mit dem Fahrarm F in der aus Fig. 85 ersichtlichen Weise verbunden ist. An diesem Cylinder ist die Rolle J befestigt, deren Theilung mittelst eines feststehenden Nonius ablesbar ist. Während der Bewegung des Instruments beschreibt die Axe des Fahrarms eine grade Linie C X, Fig. 86. Liegt der Fahrarm selbst in dieser Linie, so berührt der Cylinder C die Kugelkalotte K in der Verlängerung ihrer Axe. Die Drehung des Cylinders C ist dann, trotz der Bewegung des Instruments und der Drehung der Kalotte = 0. Bildet der Fahrarm mit der Axe C X den Winkel α, so schliesst auch derjenige Kugelradius der Kalotte, welcher deren Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte des Cylinders verbindet, mit der Axe der Kalotte den Winkel α ein, und das von diesem Berührungspunkte auf die Axe der Kalotte gefällte Loth a ist, wenn ϱ den Kugelradius bezeichnet:

$$a = \varrho \sin \alpha.$$

Die Drehung des Cylinders C, d. i. die Abwickelung der Rolle J ist gleich dem vom Berührungspunkte des Cylinders und der Kalotte infolge Drehung der Letzteren beschriebenen Kreisbogen, ist also proportional dem Radius a dieses Kreises, und andererseits auch proportional der Drehung der Kalotte K, also der Abwickelung der Rolle R. Bewegt sich nun der Fahrstift von A nach A′, so ist die Abwickelung der Rolle R gleich dem Abschnitte d x auf der Linie C X, die Abwickelung der Rolle J ist also, wenn k einen von den Dimensionen des Instruments*) abhängigen Coefficienten bezeichnet:

$$A_1 = k\, d\, x \sin \alpha$$

oder, da $\sin \alpha = \frac{AB}{F} = \frac{y}{F}$, worin F die Länge des Fahrarms bezeichnet:

$$A_1 = k\, d\, x \frac{y}{F}$$

---

*) In Betracht kommen das Verhältniss des Radius der Rolle R zu dem der Rolle r, und der Kugelradius ϱ.