Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt VII. Linienabsteckung.

Reihe nach abmessen, wodurch die Theilungslinien auf dem Felde bestimmt sind. Bei verhältnissmässig **langen** Plänen darf man indessen die Planbreiten nicht mittelst Zirkel und Massstab nach der Karte ermitteln, da kleine Fehler der Planbreiten verhältnissmässig grosse Fehler der Flächen verursachen würden, sondern man ermittelt in solchen Fällen die **Längen** der Pläne, — arithmetisches Mittel der beiden parallelen Grenzlinien, — und erhält die Breite durch Division der Planlänge in die Fläche. Sind die Kopfseiten der Pläne unregelmässig begrenzt, so hat man zuvor die krummen Grenzen auf der Karte in grade zu verwandeln.

Bei nicht parallel begrenzten Plänen wird man die Kopfbreiten zwar durch Abgreifen mittelst Zirkel und Massstab ermitteln müssen, wird dann aber gleichzeitig auch die zugehörigen Höhen, nach Anleitung der Fig. 79, abgreifen und sich durch Multiplication der ermittelten Höhen und Grundlinien überzeugen, ob diese Masse den Sollinhalt der Fläche ergeben. Anderenfalls sind die abgegriffenen Kopfbreiten entsprechend zu corrigiren, ehe sie zur Absteckung auf dem Felde benutzt werden dürfen.

VII. Linienabsteckung.

§ 56.

Abstecken grader Linien.

1) **Aufgabe.** Zwei Punkte, welche eine derartige Lage haben, dass dieselben von keinem Standpunkte aus gleichzeitig gesehen werden können, durch eine grade Linie zu verbinden.

Man verbindet beide Punkte, A und B, Fig. 105, durch ein Polygon, misst Strecken und Winkel desselben, berechnet die Coordinaten des Punktes B für eine beliebige, durch A als Nullpunkt gehende Abscissenlinie A X, indem man eine ganz willkürliche Anfangsneigung ν annimmt, berechne aus den Coordinaten der Punkte A und B, (die des ersteren Punktes sind $= 0$), den Winkel α, vergl. die Figur, und trage den Winkel $\beta = \nu - \alpha$ an die Anfangsstrecke des Polygons an*), so hat man die Richtung der gesuchten Geraden, die gehörig verlängert durch B treffen muss, ev. noch etwas zu corrigiren ist, (vergl. 4).

2) Hat man eine Karte, in welcher ausser den beiden Punkten A und B noch irgend zwei andere, im Felde scharf markirte Punkte, z. B. C und D, Fig. 106, verzeichnet sind, so verlängere man auf derselben die Linien A B und C D bis E, berechne aus den aus der Karte zu entnehmenden Seiten des Dreiecks B E C den Winkel E, construire sodann den Punkt E auch im Felde, durch Verlängerung der Linie C D um die aus der Karte zu entnehmende Strecke D E, und trage in E den berechneten Winkel an.

3) Man kann auch mittelst der Bussole die **Neigung** der Linie C D gegen den magnetischen Meridian bestimmen, letzteren in die Karte eintragen, sodann auf

---

*) Um einen Winkel **genau** abzustecken, wird man den zunächst mittelst einfacher Nonieneinstellung **roh** abgesteckten Winkel repetiren, wobei sich gegen das Soll eine Differenz δ'' herausstellen wird. Um diese zu beseitigen, errichtet man in einer abgemessenen Entfernung s vom Scheitel ein Loth $h = \frac{s}{\varrho''}\,\delta''$, oder wenn man h in cm erhalten will, während s in m ausgedrückt ist: $h = \frac{100\,s}{\varrho''}\,\delta''$, oder für $\frac{\varrho''}{100} = k$, : $h = \delta'' : \frac{k}{s}$, worin $\frac{k}{s}$ aus Tafel III des Anhangs entnommen werden kann.

derselben die Neigung der Linie A B gegen diesen ermitteln, und letztere Neigung mit der Bussole ins Feld übertragen.

Wo es auf grosse Genauigkeit nicht ankommt, ist die Bussole besonders im Walde das geeignetste, am wenigsten schwerfällige Instrument. Trifft z. B. die Linie auf einen starken Baum, den man nicht beseitigen möchte, etwa weil die Linie, wie bei generellen Wege- oder Eisenbahnprojekten noch nicht einmal endgültig feststeht, so braucht man die Bussole nur jenseits des Hindernisses neu aufzustellen, und die Arbeit geht ungestört weiter.

4) Steht im Falle der Fig. 108 nur ein **schmales** Hinderniss im Wege, so legt man eine beliebige Linie A C an diesem Hinderniss vorbei, misst A C und das Loth B C, und kann dann für eine beliebige Anzahl von Punkten, a_1, a_2, a_3 . . . der Geraden A B die Abscissen A a_1', A a_2', A a_3' . . . und die Ordinaten $a_1\, a_1'$, $a_2\, a_2'$, $a_3\, a_3'$ mit Hülfe des Proportionssatzes berechnen, mithin die Punkte a_1, a_2, a_3 . . . im Felde construiren.

Dies Verfahren kann auch Anwendung finden, um, wenn die Schenkel der nach 1) und 2) angetragenen Winkel den Punkt B nicht genau treffen, die nöthige Correktur auszuführen.

§ 57.

Kurvenabsteckung.

a. Kreis.

1) **Aufgabe.** Gegeben der Brechungswinkel α zweier Linien. Es soll ein Kreisbogen mit dem Radius R abgesteckt werden, der die gegebenen Linien berührt.

Es ist in Fig. 107

$$\angle M = 180^0 - \alpha$$

$$A\,C = R \operatorname{tang} {}^1/_2\, M. \tag{211}$$

Mithin sind die Punkte B und C bekannt. Die Tangenten B A und C A werden als Abscissenlinien angesehen. Die Coordinaten der Punkte 1, 2, 3 . . . ergeben sich, wenn man in die Scheitelgleichung des Kreises (14b) der Reihe nach verschiedene Werthe für x einsetzt, (z. B. x = 2, 4, 6, 8 . . . m) und die zugehörigen Werthe y berechnet.

Man kann auch leicht den Punkt S, Fig. 112, durch Berechnung der Länge A S und Halbirung des Winkels α abstecken, und die Tangente S B in derselben Weise benutzen. (Es ist $A\,S = \frac{R}{\sin {}^1/_2\, \alpha} - R$).

2) Sollen die abgesteckten Bogenstücke unter sich gleich, und zwar = b sein, so ergiebt sich der Centriwinkel

$$\varphi = \frac{b}{R}\varrho. \tag{212}$$

Setzt man weiter die Sehne C — 1, Fig. 107, gleich s_1, so hat man:

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = s_1 \cos A\,C\,1 & y_1 = s_1 \sin A\,C\,1 \\ \quad = 2\,R \sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} & \quad = 2\,R \sin\frac{\varphi^2}{2} \\ x_1 = R \sin\varphi & y_1 = 2\,R \sin\frac{\varphi^2}{2} \end{array}\right\} \tag{213}$$

und analog

$$x_2 = R \sin 2\,\varphi \qquad y_2 = 2\,R \sin\varphi^2$$

etc. etc.

3) Das in Fig. 109 dargestellte Verfahren hat den Vorzug, dass die Grössen b a′ und a′ b′, b′ a″ und a″ b″ etc. einander gleich sind, daher nur einmal berechnet zu werden brauchen. Die Grössen B a und a b sind nach (212) und (213) zu berechnen. Zur Berechnung der Abscisse b a′ hat man

$$b\,a' = B\,a' - s$$

$$B\,a' = B\,b' \cos\frac{\varphi}{2} = 2\,R \sin\varphi \cos\frac{\varphi}{2},$$

also

$$\left.\begin{aligned} b\,a' &= 2\,R \sin\varphi\, \cos\frac{\varphi}{2} - s. \\ &\text{Die Ordinate } a'\,b' \text{ ist} \\ a'\,b' &= B\,b' \sin {}^1\!/_2\,\varphi = 2\,R \sin\varphi \sin {}^1\!/_2\,\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (214)$$

Wegen der ungünstigen Fehlerfortpflanzung bei diesem Verfahren wird man zum Schluss nicht genau auf A abschliessen, und muss die Curve nach dem Augenmass corrigiren.

4) Man kann sich auch mit Vortheil der Polarcoordinaten bedienen. Fig. 110. Will man n Punkte der Kurve bestimmen, so dividirt man den Winkel M durch n, setzt $\frac{M}{n} = \varphi$ und berechnet die zu den Winkeln φ, $2\,\varphi$, . . . $n\,\varphi$ gehörigen Sehnen s_1, s_2, . . . s_n und trägt dieselben der Reihe nach unter den Winkeln ${}^1\!/_2\,\varphi$, φ, ${}^3\!/_2\,\varphi$ etc. an die Tangente B A an.

Kann man das ganze Terrain von B bis C nicht übersehen, so bricht man bei dem zuletzt sichtbaren Punkte, z. B. 3, Fig. 111, ab, stellt das Instrument in 3 auf, stellt die Tangente 3—D durch Antragen des Winkels ${}^3\!/_2\,\varphi$ an die Sehne 3—B her, bringt dann das Fernrohr des Instruments durch blosses Durchschlagen in die Lage 3—E, und trägt an die Tangente 3—E wiederum der Reihe nach die Winkel ${}^1\!/_2\,\varphi$, φ, ${}^3\!/_2\,\varphi$ etc.

Die Länge der ganzen Kurve ist $= \frac{M}{\varrho}\,R$.

b. Parabel.

5) **Aufgabe.** Statt des Kreisbogens der Aufgabe 1) einen Parabelbogen mit dem kleinsten Krümmungsradius r abzustecken.

Nach Theil I, § 44, 3) Zusatz ist der kleinste Krümmungsradius der Parabel = p. Die Gleichung der abzusteckenden Parabel lautet also

$$y^2 = 2\,r\,x.$$

Die Ordinate des Berührungspunktes P, Fig. 112, ist

$$\left.\begin{aligned} Y &= r \cot {}^1\!/_2\,\alpha \\ &\text{und die Tangente } A\,P \\ A\,P &= \frac{Y}{\sin {}^1\!/_2\,\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (215)$$

Die Entfernung des Scheitels s vom Tangentendurchschnittspunkte A ist

$$\left.\begin{aligned} A\,S &= S\,F = X = \frac{Y^2}{2\,r} \\ \text{oder auch}\quad A\,S &= {}^1\!/_2\,Y \cot {}^1\!/_2\,\alpha. \\ \text{Ferner ist}\quad S\,B &= {}^1\!/_2\,Y. \end{aligned}\right\} \quad (215b)$$

Es hat nun keine Schwierigkeit, den Berührungspunkt P und die Ordinatenaxe S B abzustecken. Die Ordinaten für bestimmte Abscissenwerthe, z. B. 2, 4, 6 etc. m, ergeben sich durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung $y^2 = 2\,r\,x$.

c. Uebergangskurve.

In Eisenbahnkurven wird die äussere Schiene um einen bestimmten Betrag*) höher gelegt, als die innere Schiene, um die Wirkung der Schwungkraft aufzuheben. Die Schwungkraft kommt im Anfangspunkte der Kreiskurve sofort zur vollen Wirkung, es muss daher auch die Ueberhöhung der äusseren Schiene schon im Anfangspunkte des Kreisbogens ihre volle Höhe besitzen. Gleichwohl darf der Uebergang auf die höhere Schiene kein plötzlicher sein. Wollte man nun vor Beginn der Kreiskurve, im letzten Theile der noch gradlinigen Strecke, der äusseren Schiene schon eine allmälige Steigung geben, so würde auf dieser gradlinigen Uebergangsstrecke ein ähnlicher Nachtheil geschaffen, wie der, welcher in der Kurve durch die Schienenüberhöhung beseitigt werden soll, nämlich Störung des Gleichgewichts. Der Uebergang muss daher durch eine Kurve bewirkt werden, deren Krümmungsradius im Anfangspunkte, wo die Ueberhöhung beginnt, $= \infty$ ist, und proportional der zunehmenden Ueberhöhung abnimmt, bis er im Endpunkte der Uebergangskurve, d. i. im Berührungspunkte derselben, mit der nun beginnenden Hauptkurve, (Kreisbogen), dem Radius r der letzteren gleich wird. Soll die Aufsteigung der Schiene eine gleichmässige sein, so muss auch die Abnahme des Krümmungsradius gleichmässig erfolgen, d. h. die Krümmungsradien in beliebigen Punkten der Uebergangskurve müssen sich umgekehrt wie die Ueberhöhungen in diesen Punkten verhalten, denn je kleiner der Radius, um so grösser muss die Ueberhöhung sein, wenn der Gleichgewichtszustand erhalten bleiben soll, und umgekehrt. Bezeichnen nun r den Radius der Hauptkurve, also auch den der Uebergangskurve in ihrem Endpunkte E, S die Länge der Uebergangskurve, H die Ueberhöhung in E, ϱ den Krümmungsradius der Uebergangskurve in einem beliebig angenommenen Punkte P, h die Ueberhöhung in P, s die Entfernung des Punktes P vom Anfangspunkte A der Uebergangskurve, so muss also die Proportion stattfinden: $h : H = r : \varrho$

---

*) 1) Ist v die Tangentialgeschwindigkeit des fahrenden Wagens, b die Spurbreite, p das Gewicht des Wagens, so ist, wie wir sogleich zeigen werden, (Absatz 2 dieser Anmerkungen), die Centrifugalkraft $K = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{p}{g}$. Die infolge der Schienenüberhöhung H der Schwungkraft entgegenwirkende Kraft ist, (vergl. Absatz 3 dieser Bemerkungen), — wenn α die Neigung der die Oberkante der Schienen in der Richtung des Radius verbindenden Graden bezeichnet, $Q = p \operatorname{tang} \alpha = p \frac{H}{b}$. Da $Q = K$ sein soll, so folgt hieraus für die Ueberhöhung: $H = \frac{b\, v^2}{r\, g}$.

2) Ist, Fig. 113, v die Geschwindigkeit des Wagens, d. h. der in einer Sekunde zurückgelegte Weg, so stellt die Strecke a den Weg dar, welchen die Centripedalkraft K den Wagen in einer Sekunde zurücklegen lässt. Der Weg, den ein frei fallender Körper infolge der Schwere pr. Sekunde zurücklegt, ist bekanntlich $= \frac{1}{2} g$. Da der pr. Sekunde zurückgelegte Weg der bewegenden Kraft proportional ist, so ist also $k : p = a : \frac{1}{2} g$, also $k = \frac{2\, a\, p}{g}$. Nach bekanntem Satze der Planimetrie ist aber $a\,(a + 2\,r) = v^2$, also $a = \frac{v^2}{a + 2\,r}$. Da a im Verhältniss zu r sehr klein ist, so kann man diese kleine Grösse im Nenner des Bruchs $\frac{v^2}{a + 2\,r}$ vernachlässigen, und erhält $a = \frac{v^2}{2\,r}$, also $K = \frac{v^2}{r} \cdot \frac{p}{g}$.

3) Zerlegt man, Fig. 114, die den Wagen in verticaler Richtung herabtreibende Kraft $A B = p$ nach dem Gesetze des Kräftenparallelogramms in zwei Componenten, A C und A D, von welchen A C senkrecht zur Verbindungslinie der Schienenoberkanten gerichtet ist, also durch den Widerstand der Schienen aufgehoben wird, während A D in der Richtung der Horizontalen dem Drucke gegen die äussere Schiene, d. i. der Schwungkraft K, entgegenwirkt, so findet man ohne Weiteres aus der Figur: $A D = p \operatorname{tang} \alpha$.

und, da die Aufsteigung der Schiene eine gleichmässige sein soll:

$$h : H = s : S.$$

Da die Kurve eine sehr flache ist, so können wir statt der Längen s und S ohne Fehler die Abscissen der Punkte P und E setzen, bezogen auf die an die Kurve im Anfangspunkt A gelegte Tangente, mit A als Coordinatennullpunkt. Sind a und x bezüglich die Abscissen der Punkte E und P, so lautet demnach die letztere Proportion

$$x : a = r : \varrho$$

$$\varrho = \frac{a\,r}{x}. \tag{216}$$

Wir haben nun im Theil I, § 44, 2) Beispiel, eine Kurve kennen gelernt, deren Krümmungsradius für $x = 0$ unendlich ist und mit wachsendem x abnimmt. Schreiben wir die Gleichung derselben in der Form

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{x^3}{c} \\ \text{so ist}\quad \frac{d\,y}{d\,x} &= \frac{3\,x^2}{c} \\ \text{und}\quad \frac{d^2\,y}{d\,x^2} &= \frac{6\,x}{c} \end{aligned}\right\} \tag{216a}$$

Ist hierin c gegen x sehr gross, so wird die quadrirte Abgeleitete $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 = \frac{9\,x^2}{c^2}$ ein sehr kleiner Bruch, den wir in der Gleichung für den Krümmungsradius (60):

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

ohne grossen Fehler vernachlässigen können, so dass dieselbe lautet:

$$\varrho = \frac{1}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}} = \frac{1}{\frac{6\,x}{c}} = \frac{c}{6\,x}. \tag{217}$$

Setzen wir hierin für ϱ unseren Werth aus (216), so finden wir die Constante c unserer Kurvengleichung:

$$c = 6\,a\,r. \tag{217a}$$

Aus Gl. (217) ersehen wir, dass die Werthe ϱ und x zu einander im umgekehrten Verhältniss stehen. Setzen wir nun noch in dieser Gleichung $x = a$, und für c den Werth aus (217a), so erhalten wir $\varrho = r$. Die Gleichung $y = \frac{x^3}{6\,a\,r}$ stellt also eine Kurve dar, welche die oben geforderten Eigenschaften einer Uebergangskurve besitzt.

Wie gross man die Länge a dieser Kurve annehmen will, ist ziemlich willkürlich. Bei Radien über 600 m pflegt man $a = 20$ m anzunehmen. Bei kleineren Radien, welche eine grössere Schienenüberhöhung erfordern, nimmt man a dem Radius umgekehrt proportional, also $a = \frac{k}{r}$, worin k eine Constante, (in der Regel 12000 m), bezeichnet.

Zur Absteckung der Kurve bedarf es noch der Kenntniss weiterer Eigenschaften derselben. Zieht man, Fig. 115, in E an dieselbe eine Tangente, E D, so ist die trigonometrische Tangente des Winkels τ gleich dem Differentialquotienten der Kurvengleichung, in welcher für den Punkt E $x = a$, $y = b$, zu setzen ist, also nach (216)

$$\text{tang}\,\tau = \frac{d\,b}{d\,a} = \frac{3\,a^2}{6\,a\,r} = \frac{a}{2\,r} \tag{218}$$

mithin die Subtangente B D:

$$B\,D = \frac{2\,b\,r}{a},$$

oder, da nach der Kurvengleichung

$$b = \frac{a^3}{6\,a\,r} = \frac{a^2}{6\,r} \tag{219}$$

$$B\,D = {}^1/_3\,a. \tag{220}$$

Zieht man $E\,M = r \perp E\,D$, schlägt um M den Kreisbogen E F, zieht F G $\parallel$ A B, so hat man, da E D gleichzeitig Tangente an den Kreis um M, also, wie sofort erhellt, $\angle\, E\,M\,C = \tau$ ist

$$B\,C = E\,H = r \sin \tau. \tag{221}$$

Da τ ein sehr kleiner Winkel ist, $\left(\text{denn tang}\,\tau = \frac{a}{2\,r}, (218)\right)$, so kann man ohne Fehler $\sin \tau = \text{tang}\,\tau, = \frac{a}{2\,r}$ setzen, und erhält, wenn man $B\,C = a'$ setzt, nach (221)

$$a' = r\,\frac{a}{2\,r} = \frac{a}{2} \tag{222}$$

d. h. die Abscisse a wird durch das Loth M C halbirt. — Ferner ist

$$E\,G = b' = r - M\,H$$

$$b' = r - \sqrt{r^2 - {}^1/_4\,a^2}$$

oder, wenn man die Wurzel zieht:

$$b' = r - r + \frac{a^2}{8\,r} \cdot \cdot \cdot \cdot$$

alle folgenden sehr kleinen Glieder können wir vernachlässigen. Es ist also

$$b' = \frac{a^2}{8\,r}$$

also nach (219) $\quad b' = {}^3/_4\,b \qquad (223)$

folglich $F\,C = b - b'$:

$$F\,C = {}^1/_4\,b = \frac{a^2}{24\,r}. \tag{224}$$

Absteckung. Fig. 118. Man berechnet F C nach (224), ferner den Halbirungspunkt C der Länge a aus der Gleichung $T\,C = (r + F\,C) \cot {}^1/_2\,\alpha$, sodann den Punkt A aus $T\,A = T\,C + {}^1/_2\,a$. Man hat nun den Coordinaten-Nullpunkt A und findet eine beliebige Anzahl Punkte der Kurve, wenn man in die Gleichung derselben für x der Reihe nach verschiedene Werthe einsetzt und die zugehörigen Werthe y berechnet. Endlich findet man aus der Scheitelgleichung des in E an die Kurve sich anschliessenden Kreises die Coordinaten für eine Reihe von Punkten der Hauptkurve, bezogen auf die Tangente F G dieser letzteren Kurve. Um diese Coordinaten auf die Abscissenaxe A F mit A als Nullpunkt umzuformen, sind den Abscissen der Kreispunkte je die Constante ${}^1/_2\,a$, den Ordinaten die Constante ${}^1/_4\,b$ hinzuzufügen. Somit sind alle Elemente, welche zur Absteckung der Kurve von der Abscissenaxe A T aus nöthig sind, ermittelt.

d. Vermittelung des Gefällwechsels.

Bei Eisenbahnen ist auch der Uebergang von geringerem Gefälle in ein stärkeres durch eine Kurve zu vermitteln. Die Neigung einer Strecke gegen die Horizontale wird durch das Verhältniss des Höhenunterschiedes h zweier Punkte dieser Strecke zu deren Horizontalentfernung l, also durch den Bruch $\frac{h}{l}$ ausgedrückt, d. i. durch die trigonometrische Tangente der Neigung gegen den Horizont. Diese Neigungen sind bei Eisenbahnen, da hier starkes Gefälle nicht statthaft, sehr kleine Winkel, so dass der Bruch $\frac{h}{l}$, ohne dass dadurch ein für die Praxis unzulässiger Fehler begangen würde, als analytisches Mass der Neigung gegen die Horizontale betrachtet werden kann.

In Fig. 116 ist in der Strecke A C B bei C ein Uebergang von schwächerem in stärkeres Gefälle. Soll dieser durch eine Kurve mit dem Radius R, (gewöhnlich = 10000), vermittelt werden, so kann man die Länge dieser Kurve ohne Fehler gleich der Summe der Tangenten a C + b C setzen. Der Centriwinkel M ist also in analytischem Masse

$$1)\ M = \frac{2 \times \text{Tangente}}{R}.$$

Es ist aber auch

$$M = \angle BCD = BCH' - DCH'$$
$$= \angle BCH' - ACH$$

also in analytischem Masse, wenn $\frac{1}{l_1}$ und $\frac{1}{l_2}$ bezüglich das relative Gefälle der Strecken A C und B C bezeichnen:

$$2)\ M = \frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}.$$

Aus 1) und 2) folgt die Länge der Tangente

$$\text{Tang.} = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{l_2} - \frac{1}{l_1}\right).$$

Bezüglich des Weiteren kann auf die bisherigen Erörterungen dieses Paragraphen verwiesen werden.

Die Absteckung der in verticaler Ebene liegenden Kurve erfolgt mit Hülfe des Nivellir-Instruments.
