Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

Abschnitt I. Nivellements.

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

I. Nivellements.

§ 1.
Trigonometrisches Höhenmessen.

Aufgabe des Nivellirens ist die Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen zwei oder mehreren Punkten, d. h., — die Erde als Kugel betrachtet —, der Differenz ihrer Entfernungen vom Meeresniveau.

Ist s die Horizontalentfernung zweier Punkte A und B, h der Höhenunterschied derselben, und α der in A gemessene Elevationswinkel, so ist, wenn die Entfernung s so gering ist, dass man den Erdbogen s als mit dem scheinbaren Horizonte zusammenfallend ansehen kann, —

$$h = s \operatorname{tang} \alpha. \tag{225}$$

Indessen darf die Krümmung der Erdoberfläche schon bei einer Entfernung von nur wenigen hundert Metern nicht mehr vernachlässigt werden. Ist in Fig. 119 A E der scheinbare Horizont des Punktes A, so kann $\triangle$ A E B selbst bei grossen Entfernungen noch ohne Einfluss auf das Resultat als rechtwinklig angesehen werden, auch kann man die Länge A E ohne Fehler $= s$ setzen, und erhält

$$h = DE + s \operatorname{tang} \alpha.\text{*)}$$

Hierin bedeutet D E die Correktion wegen der Erdkrümmung. Bezeichnen wir dieselbe mit c, den Erdradius mit r, so ist $AE^2 = (2r + c)c$, oder ohne merklichen Fehler $s^2 = 2rc$,**) also:

$$c = \frac{s^2}{2r}. \tag{226}$$

Ausser der Correktion wegen der Erdkrümmung bedarf es noch einer zweiten Correktion, der Correktion wegen der Strahlenbrechung. Da nämlich der Lichtstrahl B A, Fig. 120, von B ausgehend, in immer dichtere Luftschichten gelangt, so wird derselbe infolge der Refraktion nicht eine grade Linie, sondern eine Kurve durchlaufen. Ist A F die in A an diese Kurve gezogene Tangente, so wird dem Beobachter in A der Punkt B in B' zu liegen scheinen. Der Elevationswinkel α wird daher durch die Messung zu gross gefunden werden, und ist um einen Betrag ϱ zu verbessern, worüber im folgenden § die Rede sein wird.

§ 2.
Refraktion.

Lassen wir die Bezeichnung der Fig. 120 gelten, so ist, unter der Voraussetzung, dass die Lichtkurve A B ein Kreisbogen sei,

$$\varrho = {}^1/_2 M,$$

---

*) Oder auch $h = s \operatorname{tang} (\alpha + {}^1/_2 C)$, worin $C'' = \frac{s}{r} \varrho''$.

**) Vergl. Absatz 2 der Anmerkung auf Seite 129.

oder wenn wir als Winkelmass das Verhältniss des Bogens zum Radius einführen

$$\varrho = \frac{A\,B}{R}.$$

Dagegen ist der Winkel C

$$C = \frac{s}{r}$$

oder ohne merklichen Fehler

$$C = \frac{A\,B}{r}$$

$$A\,B = r\,C$$

mithin

$$\varrho = \frac{r}{2\,R}\,C.$$

oder wenn man $\frac{r}{2\,R} = k$ setzt:

$$\varrho = \mathbf{k\,C}. \tag{227}$$

Hierin ist C in Sekunden

$$C'' = \frac{s}{r}\,\varrho''.$$

Die Gleichung (225) wird nun, bei Berücksichtigung der Erdkrümmung und Refraktion lauten

$$h = s \operatorname{tang}(\alpha - \varrho) + c.$$

Wäre hierin h durch ein Nivellement bekannt, so liesse sich die Refraktion ϱ berechnen und demnach der Coofficient k in (227) aus der Gleichung $k = \frac{\varrho}{C}$ finden. Messungen dieser Art sind von verschiedenen Forschern ausgeführt, haben aber für k schwankende Resultate ergeben. Danach bewegt sich k zwischen den Werthen 0,06 bis 0,10. Bei kleinen Entfernungen ist eine kleine Ungenauigkeit des Coofficienten k ohne Belang, und kann für k ein Mittelwerth, etwa $k = 0{,}08$ gesetzt werden.

Die Schwankungen von k erklären sich durch die Veränderlichkeit der Dichtigkeit der Luft, und hat man in neuerer Zeit sich bemüht, dieselbe gebührend in Rechnung zu ziehen. Wir können indessen in diesem Buche keine der neueren Formeln zur Darstellung bringen, und wollen uns damit begnügen, eine ältere Formel von Grunert, (Grunert, Mathematik und Physik), wiederzugeben, welche zwar keineswegs Alles hier in Betracht kommende erschöpft, immerhin aber doch schon einen Schritt weiter geht, als die in der Praxis auch heute meist noch benutzte Formel (227) mit **constantem** Coofficienten.

Die Krümmung der Lichtkurve ist, wie schon erwähnt, abhängig von der Dichtigkeit der Luft und ist dieser proportional. Demnach ist der Krümmungsradius R der Luftdichtigkeit **umgekehrt** — (Thl. I, § 44), der Bruch $\frac{r}{2\,R} = k$ derselben also wieder **direkt** proportional. Nach dem mariotteschen Gesetze ist nun die Dichtigkeit der Luft proportional dem auf der betreffenden Luftschicht lastenden Drucke, d. i. dem beobachteten Barometerstande. Bezeichnet daher k den bei mittlerem Barometerstand 760 mm gültigen Coofficienten, k_1 den Coofficienten für den Barometerstand b, so ist $k : k_1 = 760 : b$, also

$$k_1 = k\,\frac{b}{760}.$$

Die Dichtigkeit der Luft ist nun weiter abhängig von ihrer Temperatur. Da sich die Luft bei steigender Temperatur ausdehnt, so wird ihre Dichtigkeit abnehmen. Die Ausdehnung der Luft beträgt für 1^0 C $^1/_{273}$ ihres Volumens. Ist demnach die Dichtigkeit für die Temperatur $0^0 = 1$, so ist dieselbe, da sie dem Volumen umgekehrt proportional ist, für die Temperatur t^0 gleich $\frac{1}{1+\frac{t}{273}} = \frac{1}{1+0{,}0037\,t}$. Bezeichnet demnach k den Refraktionscoefficienten für die Temperatur 0^0, k_1 für die Temperatur t, so ist $k : k_1 = 1 : \frac{1}{(1+0{,}0037\,t)}$, also

$$k_1 = \frac{k}{1+0{,}0037\,t}.$$

Wir erhalten demnach die Refraktion für den Barometerstand b und die Temperatur t:

$$\varrho = k\,\frac{b}{760\,(1+0{,}0037\,t)} \cdot C\text{*)} \tag{228}$$

Hierin ist $k = 0{,}08$ zu setzen. Dies die Formel nach Grunert. Für die Rechnung etwas bequemer kann man dieselbe gestalten, indem man mit 273 erweitert, nämlich $\frac{0{,}08 \times 273}{760} = 0{,}03$, und $(1+0{,}0037\,t)\,273 = 273+t$, also:

$$\varrho = \frac{\mathbf{0.03\,b}}{\mathbf{273+t}} \cdot \mathbf{C}. \tag{229}$$

Setzen wir, **Fig. 118**, die Correktion der Höhe h, d. i. $B\,B' = c'$, so ist, wenn ϱ und c durch das Verhältniss der Bögen zu den Radien ausgedrückt werden: $\varrho = \frac{c'}{s}$ und $C = \frac{s}{r}$, also nach (229)

$$\frac{c'}{s} = \frac{0{,}03\,b}{273+t} \cdot \frac{s}{r}$$

$$c' = \frac{0{,}03\,b}{273+t} \cdot \frac{s^2}{r}. \tag{230}$$

Um den Betrag c' wird die beobachtete Höhe h zu gross gefunden, c' ist der Höhe h also in **negativem** Sinne hinzuzufügen.

Man kann die Gleichung (230), wenn wir $\frac{0{,}03\,b}{273+t} = k$ setzen, (wo nun also k keine Constante, sondern eine nach der Temperatur und Barometerstand schwankende Grösse darstellt), auch schreiben:

$$c' = 2\,k\,\frac{s^2}{2\,r} \tag{231}$$

und erhält so die Höhe h nach (225), (226) und (231)

$$\mathbf{h = s\,tang\,\alpha + \frac{s^2}{2\,r}\,(1-2\,k).} \tag{232}$$

*) Von noch grösserem Einfluss auf die Refraktion, als der Luftdruck und die Temperatur, ist die **Aenderung** der Temperatur mit der Höhe, wie neuere Untersuchungen dargethan haben. Hieraus erklären sich die täglichen Schwankungen der Refraktion, ihre Abnahme des Vormittags und Zunahme des Nachmittags, da bei stark erwärmtem Erdboden die Abnahme der Temperatur nach der Höhe eine stärkere sein wird, als bei kaltem Boden. Bei starker Erhitzung des Bodens kann die Refraktion ganz aufhören, ja ins Negative übergehen, (Luftspiegelung!), denn hier ist die Luftdichtigkeit in den **unteren**, erheblich wärmeren Schichten die geringere.

Ist s in der Höhe des Meeresspiegels gemessen, so ist die Länge s auf die Höhe $\frac{H + H'}{2}$ zu reduciren, wenn H und H' die Meereshöhen der Punkte B und A bezeichnen. Bezeichnet a die reducirte Entfernung, so ist offenbar

$$s : r = a : \left(r + \frac{H + H'}{2}\right)$$

$$a = s \left(1 + \frac{H + H'}{2\,r}\right)$$

also

$$a \operatorname{tang} \alpha = s \operatorname{tang} \alpha \left(1 + \frac{H + H'}{2\,r}\right)$$

oder genau genug

$$\begin{aligned} a \operatorname{tang} \alpha &= h \left(1 + \frac{H + H'}{2\,r}\right) \\ &= (H - H') \left(1 + \frac{H + H^1}{2\,r}\right) \\ &= H - H' + \frac{H^2 - H'^2}{2\,r} \\ &= s \operatorname{tang} \alpha + \frac{H^2 - H'^2}{r\,2}. \end{aligned} \tag{233}$$

Setzen wir also in (232) a für s, und für a tang α den Werth aus (233), so erhalten wir

$$h = s \operatorname{tang} \alpha + \frac{H^2 - H'^2}{2\,r} + \frac{s^2}{2\,r}\,(1 - 2\,k). \tag{234}$$

Hierin brauchen die Meereshöhen H und H' nur ganz roh bekannt zu sein, etwa aus Barometerbeobachtungen. Bei nicht allzugrossen Höhendifferenzen kann der Bruch $\frac{H^2 - H'^2}{2\,r}$ ganz vernachlässigt werden.

Der so gefundene Höhenunterschied ist noch um die Höhe des anvisirten Signals und um die Instrumentenhöhe zu verbessern, wozu es keiner Anleitung bedarf.

Sind **gleichzeitig** in A die Elevation α und in B die Depression $-\alpha'$ beobachtet, so ist α um den Refraktionswinkel zu gross, α' um denselben Winkel zu klein gefunden*). Man hat dann, ohne sich um die Refraktion und Erdkrümmung weiter zu kümmern, den Werth $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ in Formel (125) für α einzuführen, wie leicht verständlich.

§ 3.

Trigonometrisch-nivellitisches Netz.

Vom trigonometrischen Nivelliren macht man vorzugsweise Gebrauch, um bei ausgedehnten Flächennivellements eine Anzahl von Punkten ihrer Höhe nach zu bestimmen, um daran später die Nivellementszüge zweiter Ordnung, — barometrische Nivellements, (vergl. § 6), — oder Tachymeteraufnahmen**) anschliessen zu können. Man legt über die aufzunehmende Fläche ein Dreiecksnetz, misst dessen Horizontal- und Elevations- bezw. Depressionswinkel, sowie eine Basis, von welcher ausgehend man die Längen s der Dreiecksseiten nach und nach berechnet. Die Berechnung der Höhen kann dann nach folgendem Beispiel erfolgen. Sei H_A die Höhe des Punktes A, Fig. 121, $\triangle h_A^d$, $\triangle h_d^E$ etc. die Höhenunterschiede der Punkte A und D, d und E, etc., so findet man die Höhe des Punktes E

$$H_{E_1} = H_A + \triangle h_A^d + \triangle h_d^E$$

oder auch

$$H_{E_2} = H_A + \triangle h_A^a + \triangle h_a^b + \triangle h_b^E$$

oder

$$H_{E_3} = H_A + \triangle h_A^e + \triangle h_e^f + \triangle h_f^E.$$

*) Streng genommen sind die Refraktionen auch bei gleichzeitiger Beobachtung auf beiden Stationen nicht gleich, da die Refraktion mit der Höhe abnimmt.

**) Vergl. § 8.

Die drei von einander etwas abweichenden Werthe werden gemittelt, wobei den Werthen H_{E_1}, H_{E_2}, H_{E_3} die Gewichte $\frac{1}{s_1}$, $\frac{1}{s_2}$, $\frac{1}{s_3}$ beizulegen, worin s_1, s_2, s_3 die Längen der Züge A d E, A a b E und A e f E bezeichnen. Hat man so die Höhe H_E gefunden, so findet man

$$H_{d_1} = H_A + \triangle h_A^d$$
$$H_{d_2} = H_E + \triangle h_E^d$$
$$H_{d_3} = H_A + \triangle h_A^a + \triangle h_a^d$$
etc.

woraus wiederum das Mittel zu bilden ist. In dieser Weise fährt man fort, bis das ganze Netz berechnet ist.

Wo es auf weniger genaue Bestimmung ankommt, kann man ganz wie bei Polygonberechnungen verfahren. Danach wird man beispielsweise die Höhen der in einem Zuge liegenden Punkte A, e, f wie folgt finden:

Es muss sein

$$\triangle h_A^e + \triangle h_e^f + \triangle h_f^e = H_E - H_A.$$

Den gegen diesen Sollbetrag sich ergebenden Widerspruch f wird man nach Verhältniss der Strecken A e, e f, f E auf die einzelnen Höhenunterschiede $\triangle$ h vertheilen, und schliesslich die so verbesserten Höhenunterschiede successive addiren, denn es ist

$$H_e = H_A + \triangle h_A^e$$
$$H_f = H_e + \triangle_e^f, = H_A + \triangle h_A^e + \triangle_e^f$$
etc.

Bei grosser Ausdehnung des Netzes empfiehlt es sich, um dasselbe einen Nivellementszug zu legen, welcher mit dem Nivellirinstrumente zu nivelliren ist, z. B. den Zug A a b E C i h g, bezw. das Netz noch mit mehreren solchen Zügen quer zu durchschneiden. An die so mit grosser Genauigkeit bestimmten Punkte werden sodann die trigonometrischen Nivellementszüge in der oben erörterten Weise angeschlossen.

Die Längen der Dreiecksseiten des Netzes nimmt man nicht gern über 1000 m, denn es gilt bezüglich der Genauigkeit der einzelnen Züge Aehnliches, wie bezüglich der Genauigkeit von Bussolenzügen, vergl. § 45. Wie dort die Neigungen gegen den magnetischen Meridian, so werden hier die Neigungen gegen die Horizontale, d. i. die Elevationen und Depressionen **direkt** beobachtet, jede Elevation wird unabhängig von der Elevation der vorhergehenden Strecke gefunden.

§ 4.

Barometrisches Höhenmessen.

Denken wir uns eine Luftsäule von der Höhe h in h gleiche Theile zerlegt, Fig. 122, so ist die Dichtigkeit der einzelnen Luftschichten proportional dem auf denselben lastenden Druck, also proportional den in den einzelnen Schichten beobachteten Barometerständen. Das Gewicht der einzelnen Luftschichten ist der Dichtigkeit derselben proportional, mithin ist, wenn p_1, p_2 etc. die Gewichte der einzelnen Schichten, b_1, b_2 etc. die in denselben beobachteten Barometerhöhen bezeichnen:

$$p_1 : p_2 : p_3 \ldots = b_1 : b_2 : b_3 \ldots$$

Die Gewichte p werden gemessen durch die Differenz der an der Grundfläche und Oberfläche der einzelnen Schichten beobachteten Barometerhöhen. Es ergiebt sich demnach

$$(b_0 - b_1) : b_1 = (b_1 - b_2) : b_2 \ldots = \ldots (b_{h-1} - b_h) : b_h$$

oder

$$b_0 : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 \ldots = b_{h-1} : b_h$$

also

$$\log b_0 - \log b_1 = \log_{b_1} - \log_{b_2} = \ldots = \log_b b_{h-1} - \log b_h$$

d. h. die Logarithmen der beobachteten Barometerhöhen bilden eine arithmetische Reihe, wenn die Höhen, in welchen die Beobachtungen vorgenommen wurden, eine arithmetische Reihe bilden. Sind diese Höhen h_1, h_2, h_3, und setzt man die Differenz der Reihe $h_2 - h_1 = h_3 - h_2$ etc. $= \triangle h$, die Differenz der Reihe $\log b_0$, $\log b_1$, $\log b_2 \ldots = \triangle \log b$, das Verhältniss $\frac{\triangle h}{\triangle \log b} = k$, also $\triangle h = k \triangle \log b$, so ist, wenn h und h_n irgend zwei Glieder der Reihe h_1, h_2, h_3, ..., log b und $\log b_n$ zwei entsprechende Glieder der Reihe $\log b_0$, $\log b_1 \ldots$ bezeichnen:

$$h - h_n = k (\log b - \log b_n) \tag{235}$$

d. h. man findet den Höhenunterschied zweier Punkte, wenn man die Differenz der Logarithmen der in den beiden Punkten beobachteten Barometerhöhen mit dem noch näher zu bestimmenden Coefficienten k multiplicirt.

Dieser Coefficient ist, (abgesehen von der Basis des Logarithmensystems), abhängig von der Dichtigkeit der Luft, von ihrem Gewicht pr. Raumeinheit. Die Formel (235) erleidet daher, da die Dichtigkeit der Luft durch verschiedene Verhältnisse beeinflusst wird, noch einige, diesen Verhältnissen Rechnung tragende Correktionen:

1) Temperaturcorrektion: Die Dichtigkeit der Luft, also auch ihr specifisches Gewicht, ist abhängig von der Temperatur. Die Luft wird, da bei steigender Temperatur Ausdehnung eintritt, bei zunehmender Temperatur an specifischem Gewicht verlieren, mithin wird auch die Differenz der in der oberen und unteren Station beobachteten Barometerhöhen abnehmen. — Beobachtet man bei einer Temperatur von 0^0 C. in zwei Punkten mit dem Höhenunterschiede $\triangle h$ die Barometerhöhen b und b′, so ist die Differenz $b - b'$ ein Mass für das Gewicht der auf dem Quecksilber lastenden Luftsäule von der Höhe $\triangle h$. Diese Luftsäule wird, da der Ausdehnungscoefficient für 1^0 C. $= 0{,}0037$ ist, unter gleichbleibendem Druck bei einer Temperatur t die Höhe $\triangle h (1 + 0{,}0037\, t)$ annehmen müssen, wenn ihr Gewicht ungeändert bleiben soll. Dieselbe Barometerdifferenz, welche bei der Temperatur 0^0 eine Höhendifferenz $\triangle h$ anzeigte, wird also bei der Temperatur t eine Höhendifferenz $\triangle h (1 + 0{,}0037\, t)$ anzeigen. Die Differenz $\triangle h$ der arithmetischen Reihe h_1, h_2, $h_3 \ldots$ geht also, wenn die in den verschiedenen Höhen h abgelesenen Barometerstände b unverändert bleiben sollen, über in $\triangle h (1 + 0{,}0037\, t)$. Ist also $k = \frac{\triangle h}{\triangle \log b}$ für die Temperatur 0^0 bekannt, so lautet dieser Coefficient für die Temperatur t

$$k_1 = \frac{\triangle h (1 + 0{,}0037\, t)}{\triangle \log b} = k (1 + 0{,}0037\, t).$$

Der Coefficient wächst also proportional mit der Temperatur.

Da das specifische Gewicht der Luft der Temperatur umgekehrt proportional ist, so folgt hieraus der Satz:

Der Coefficient k ist dem Gewichte der Luft umgekehrt proportional.

Die Temperatur der Luft nimmt mit zunehmender Höhe ab. Da man das Gesetz dieser Abnahme noch nicht kennt*), so ist man darauf angewiesen, das arithmetische Mittel der auf der oberen und unteren Station beobachteten Temperaturen als Durchschnittstemperatur der Luftsäule anzusehen. Bezeichnet t die Temperatur der unteren, t' die der oberen Station, so lautet also der Coefficient: $k\left(1+0{,}0037\,\frac{t+t'}{2}\right)$.

2) Höhencorrektion: Die Schwere nimmt bekanntlich im Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde ab. Ist die Schwere in der Meereshöhe gleich 1, so ist dieselbe also in der Höhe $H = \frac{r^2}{(r+H)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{H}{r}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{2H}{r}+\frac{H^2}{r^2}}$, worin r den Erdradius bezeichnet. Vernachlässigt man den sehr kleinen Bruch $\frac{H^2}{r^2}$, so erhält man die Schwere in der Höhe $H = \frac{1}{1+\frac{2H}{r}}$. Die Aenderung des Gewichts der Luft ist der Aenderung der Schwere proportional, die Aenderung des Coefficienten k also derselben umgekehrt proportional. Der für die Höhe des Meeresspiegels gültige Coefficient k ist daher für die Meereshöhe H zu multipliciren mit $\left(1+\frac{2H}{r}\right)$. Hierin ist für H das arithmetische Mittel der Meereshöhen der oberen und unteren Station zu setzen. Man findet die Meereshöhe eines Ortes genau genug nach Gl. (235), wenn man für b den mittleren Barometerstand für den Meeresspiegel, d. i. 760 mm, für b_n den mittleren Barometerstand der Beobachtungsstation einsetzt.

3) Breitencorrektion. Wird die Schwere in der Breite $45^0 = 1$ gesetzt, so ist dieselbe in der Breite $\varphi = 1 - 0{,}0027 \cos \varphi$**). Der Barometercoofficient ist also zu multipliciren mit $(1 + 0{,}0027 \cos \varphi)$.

---

*) Beiläufig beträgt die Abnahme der Temperatur 1° C pr. 200 m Höhe.

**) Der Schwere wirkt infolge der Axendrehung der Erde die Schwungkraft entgegen. Ist diese am Aequator = s, so ist dieselbe in der Breite $\varphi = s \cos \varphi$, (da nämlich der Radius des Parallels in der Breite $\varphi = r \cos \varphi$). Die Kraft $s \cos \varphi$ wirkt aber in der Ebene des Parallels, arbeitet also nicht in vollem Umfange der nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Schwerkraft entgegen. Zerlegt man die Kraft a b, Fig. 117, nach dem Gesetze des Kräftenparallelogramms in zwei Componenten, deren eine, a c, der Schwere direkt entgegenarbeitet, so ist $ac = ab \cos \varphi = s \cos^2 \varphi$. Es ist nun

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$
$$= \cos^2 \varphi - (1 - \cos^2 \varphi)$$
$$\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$$
$$\cos^2 \varphi = \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}$$

mithin die in der Breite φ der Schwerkraft entgegenwirkende Schwungkraft

$$ac = s\,\frac{\cos 2\varphi + 1}{2}. \qquad \text{a)}$$

Bezeichnet nun G die Schwere, wie sich dieselbe äussern würde, wenn die Schwungkraft nicht vorhanden wäre, so ist die um die Schwungkraft **verminderte** Schwere in der Breite φ

$$g_\varphi = G - s\,\frac{\cos 2\varphi + 1}{2}$$
$$= G - \frac{s}{2} \cos 2\varphi - \frac{s}{2}. \qquad \text{b)}$$

Setzen wir die Schwere in Breite $45^0 = 1$, also, (da $\cos 2 \times 45^0 = 0$)

$$g_{45} = G - \frac{s}{2} = 1$$

4) Correktion der Quecksilbersäule. Wegen Abnahme der Schwere mit der Höhe wird der Barometerstand der oberen Station, in Vergleich zu dem der unteren Station, zu gross gefunden, weil das Gewicht des Quecksilbers in der oberen Station leichter ist, so dass eine höhere Quecksilbersäule durch die Atmosphäre getragen wird. Man hat daher die Barometerhöhe der unteren Station zu multipliciren mit $\frac{(r + \triangle h)^2}{r^2} = \left(1 + \frac{\triangle h}{r}\right)^2$, wo $\triangle h$ den Höhenunterschied beider Stationen bezeichnet, d. h. man hat statt $\log b$ zu setzen $\log b + 2 \log \left(1 + \frac{\triangle h}{r}\right)$.

Für Metallbarometer kommt diese Correktion natürlich in Fortfall.

Nach Theil I, Gl. (38), ist nun $d \log x = \frac{M\,d\,x}{x}$, d. i. $\log (x + d\,x) - \log x = \frac{M\,d\,x}{x}$. Setzt man hierin $x = 1$, $d\,x = \frac{\triangle h}{r}$, so ergiebt sich

$$\log\left(1 + \frac{\triangle h}{r}\right) = \frac{M \triangle h}{r}.$$

Man hat also statt $\log b$ zu setzen: $\log b + \frac{2 M \triangle h}{r}$.

Den noch unbekannten Höhenunterschied $\triangle h$ erhält man hierin genau genug nach Formel (235).

5) Feuchtigkeitscorrektion. Die Spannung des Wasserdampfes wird, wie die der Luft, ausgedrückt durch die Höhe der Quecksilbersäule, welche der Dampf zu tragen vermag. Das Gewicht des Wasserdampfes ist $= {}^5/_8$ eines gleichen Volumens Luft von gleicher Spannung. Ist dagegen die Spannung des Wasserdampfes nur $\frac{1}{n}$ der Luftspannung, so ist auch sein Gewicht nur $\frac{5}{8\,n}$ des Gewichts eines gleichen Luftvolumens. Setzt man das Gewicht eines gewissen Luftvolumens von der Spannung b gleich P, so ist also das Gewicht eines gleichen Dampfvolumens von der Spannung β, wenn $\beta = \frac{1}{n} b$, also $n = \frac{b}{\beta}$:

$$p = \frac{5\,\beta}{8\,b} P.$$

---

so geht Gl. b) über in

$$g_\varphi = 1 - \frac{s}{2} \cos 2\,\varphi. \qquad \text{d)}$$

Die Schwungkraft s ist am Aequator, (vergl. die Bemerkung auf Seite 141, Absatz 2) $= \frac{v^2}{2\,r}$, wenn v den Weg bezeichnet, den ein Punkt des Aequators infolge der Erdaxendrehung pr. Sekunde zurücklegt. In derselben Zeit legt ein fallender Körper am Aequator den Weg ${}^1/_2$ g zurück, wo g die Beschleunigung der Schwere, also 9,8 m bezeichnet. Die Schwungkraft am Aequator ist also, da eine leichte Rechnung $\frac{v^2}{2\,r} = 0{,}017$ m ergiebt, gleich $\frac{1}{289}$ der Schwerkraft, also wenn man diese $= 1$ setzt, $s = 0{,}0034$, mithin ${}^1/_2 s = 0{,}0017$, daher nach d)

$$g_\varphi = 1 - 0{,}0017 \cos 2\,\varphi. \qquad \text{e)}$$

Da aber ein Körper mit zunehmender Breite dem Mittelpunkte der Erde sich nähert, so nimmt die Schwere auch aus diesem Grunde mit der Breite zu, und ist daher der Coefficient 0,0017 in der Formel e) noch entsprechend zu vergrössern. Durch Pendelversuche hat sich derselbe $= 0{,}0027$ ergeben, so dass wir die Schwere in der Breite φ erhalten

$$g_\varphi = 1 - 0{,}0027 \cos 2\,\varphi.$$

Hat man nun einen Raumtheil Wasserdampf von der Spannung β und einen gleichen Raumtheil Luft von der Spannung b, so ergeben beide Gase im Gemisch, in denselben Raum eingeengt, die Spannung $\beta + b$, welche wir gleich B setzen wollen. Ist das Gewicht desselben Raumtheils **trockener** Luft von der Spannung B gleich 1, so ist das Gewicht der Luft von der Spannung b, — da sich die Gewichte gleicher Luftvolumina wie ihre Spannungen verhalten, — gleich $\frac{b}{B}$, das Gewicht des Volumens Wasserdampf von der Spannung $\beta = \frac{5}{8}\frac{\beta}{B}$.

Das Gewicht des Gemenges ist also $P = \frac{5}{8}\frac{\beta}{B} + \frac{b}{B}$, oder, da $b + \beta = B$, also

$$b = B - \beta: \; P = \frac{5}{8}\frac{\beta}{B} + \frac{B-\beta}{B} = \frac{5}{8}\frac{\beta}{B} + 1 - \frac{\beta}{B} = 1 + \frac{\beta}{B}\left(\frac{5}{8} - 1\right) = 1 - \frac{3}{8}\frac{\beta}{B}.$$

Der Barometercoofficient k ist also zu multipliciren mit $\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\beta}{B}\right)$. *)

Die vollständige Barometerformel wird nun also lauten, wenn wir in (235) $\triangle h$ für $h - h_n$, B und b für b und b_n schreiben:

$$\triangle h = k\left(1 + 0{,}0037\,\frac{t + t'}{2}\right)\left(1 + \frac{2H}{r}\right)(1 + 0{,}0027\,\cos\varphi)\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\beta}{B}\right)$$

$$\times\left(\log B - \log b + \frac{2M\triangle h}{r}\right). \tag{236}$$

Ist $\triangle h$ durch ein Nivellement bekannt, so lässt sich hieraus k berechnen, und ist auf diesem Wege für Metermass = 18400 gefunden.

6) Reduktion der Barometerhöhe auf 0°. Die abgelesenen Barometerhöhen sind, bevor sie in obige Gleichung (236) eingeführt werden dürfen, auf 0° zu reduciren, um die Ausdehnung der Scala und des Quecksilbers durch die Wärme unschädlich zu machen. Für Barometer mit Holzscala beträgt die Correktion — 0,00018 B t, für Messingscala — 0,000162 B t.

Bei Barometern mit ungleich weiten Schenkeln kommt hierzu noch die Correktion wegen Capillardepression. Hierüber wird jedem derartigen Instrumente eine Tabelle beigegeben.

---

*) Die Ermittelung der Dunstspannung ist Aufgabe der

Hygrometrie.

Bringt man Wasser in luftleeren Raum, so beginnt dasselbe alsbald zu sieden, bis die sich entwickelnden Dämpfe eine bestimmte, von der Temperatur des siedenden Wassers, bezw. der sich bildenden Dämpfe, abhängige Spannung erreicht haben. Diese Dampfspannungen sind für die verschiedenen Temperaturgrade folgende:

Temperatur	Spannung	Temperatur	Spannung	Temperatur	Spannung
— 10° C	2,09 mm	+ 0 C	+ 4,60 mm	+ 10 C	9,17
— 9	2,27	1	4,95	11	9,32
— 8	2,45	2	5,30	12	10,46
— 7	2,67	3	5,70	13	11,08
— 6	2,88	4	6,10	14	11,91
— 5	3,10	5	6,55	15	12,70
— 4	3,37	6	7,00	16	13,54
— 3	3,43	7	7,50	17	14,44
— 2	3,49	8	8,02	18	15,36
— 1	3,55	9	8,60	19	16,37
0	4,60	10	9,17	20	17,39

Höhere Spannungen, als die hier angegebenen, sind bei unveränderter Temperatur nicht zu erzielen, sie erfolgt erst bei erhöhter Erwärmung. Umgekehrt geht bei erfolgender Abkühlung ein Theil der entwickelten Dämpfe wieder in flüssigen Zustand zurück. Es erfolgt also ein Niederschlag, bis die Spannung des zurückbleibenden Dampfes wieder die der erniedrigten Temperatur entsprechende ist. Im Luft erfüllten Raume bleibt das Verhältniss ein ähnliches, da die Dampfmoleküle zwischen den Luftmolekülen reichlich

§ 5.

Aneroidbarometer.

Zu barometrischen Nivellements bedient man sich heute vorzugsweise der Aneroidbarometer. Das Naudet'sche Aneroid hat folgende Einrichtung:

Die luftleere Büchse B, Fig. 123, trägt auf ihrem elastischen, wellenförmig gebogenen Deckel das Säulchen s, welches eine breite Stahlfeder F durchdringt und dieselbe mittelst einer Schneide niederdrückt. Die Bewegungen des Deckels der Büchse B werden somit auf diese Feder, und von dieser durch den Arm A auf den um eine horizontale Axe drehbaren Winkelhebel w w übertragen. Am Ende des verticalen Schenkels des letzteren ist eine feine Kette befestigt, welche, um die Axe des Zeigers Z geschlungen, auf diesen die Bewegung überträgt. Die Kette wird durch eine um die Axe des Zeigers gewundene Spiralfeder in Spannung erhalten. Aus der Figur ist leicht erkenntlich, wie durch die Correktionsschraube C auf die Feder F, also auch auf den Stand des Zeigers Z eingewirkt werden kann, welche Vorrichtung zur Justirung des Instruments dient. Die Theilung des Kreises, über welcher der Zeiger schwebt, ist derart ausgeführt, dass die Theilungseinheit demjenigen Ausschlag des Zeigers entspricht, welcher dieser bei einer Luftdruckänderung von 1 mm des Quecksilberbarometers erleidet.

Die Angaben des Instruments stimmen nicht ohne Weiteres mit den auf 0° reducirten Angaben des Quecksilberbarometers überein, es sind vielmehr folgende Correktionen anzubringen:

1) Temperaturcorrektion. (Reduktion auf 0°.) Infolge der Dehnung der Metalltheile des Instruments durch die Wärme wird jede Temperaturänderung einen

Raum haben, um den lufterfüllten Raum ungehindert ebenso zu occupiren, wie den luftleeren (Daltonsches Gesetz), nur findet hier kein Sieden des Wassers statt, sondern die Dampfbildung erfolgt nur an der Oberfläche des Wassers, wo der sofortige Eintritt zwischen die Luftmoleküle möglich ist. Jedes sonst sich bildende Dunstbläschen ist dem überwiegenden Drucke der Atmosphäre nicht gewachsen. Es wird sofort im Entstehen wieder condensirt. Erst wenn die Dampfspannung dem Drucke der Atmosphäre gleich ist, d. i. bei 760 mm Luftspannung bei einer Temperatur von 100 C., kann das Sieden des Wassers beginnen.

Nach vorstehender Tabelle kann man nun beispielsweise bei einer Temperatur von + 10° eine Dunstspannung von 9,17 mm erzielen. Hat der Dampf in der Luft diese Spannung thatsächlich erreicht, so ist eine weitere Verdunstung nicht mehr möglich. Die Luft ist mit Dampf gesättigt. Die weitere Dampfbildung beginnt erst wieder bei steigender Temperatur. Dagegen bewirkt die geringste Abkühlung Niederschläge. Ist aber bei einer Temperatur von 10° etwa nur eine Dunstspannung von 7,00 mm vorhanden, so vermag die Luft noch weitere Dampfmengen aufzunehmen. Die relative Feuchtigkeit der Luft ist $\frac{7}{9,17} = 77,4\,\%$. Sollen Niederschläge stattfinden, so bedarf es nach obiger Tabelle einer Abkühlung bis auf 6°. Dieser Temperaturgrad heisst der Thaupunkt. Kennt man den Thaupunkt, (hier 6°), so lässt sich aus der Tabelle die vorhandene Dunstspannung (hier 7,00 mm) entnehmen. Alsdann findet man die relative Feuchtigkeit der Luft durch Division der bei der vorhandenen Temperatur möglichen Maximaldunstspannung in die vorhandene Dunstspannung. Hierauf beruht das Daniellsche Hygrometer. Da bei jeder Verdunstung ein Verbrauch von Wärme, also eine Abkühlung stattfindet, so wird man durch rasch verdunstende Flüssigkeiten, (Aether), eine Glasröhre soweit abkühlen können, bis dieselbe beschlägt. In dem Moment, wo der Niederschlag erfolgt, wird ein in der Glasröhre befindliches Thermometer abgelesen, und der Thaupunkt ist gefunden.

Allgemeiner gebräuchlich, als das Daniellsche Hygrometer, ist das Augustsche Psychrometer. Wasser verdunstet um so schneller, je trockner die Luft. Da mit der Verdunstung eine Temperaturerniedrigung verbunden ist, so wird man somit von dem Grade der Temperaturerniedrigung auf die Feuchtigkeit der Luft schliessen können. Beim Augustschen Psychrometer findet die Verdunstung auf der Kugel eines Thermometers statt, welches mit einem trockenen Thermometer verglichen, die Temperaturerniedrigung anzeigt. Multiplicirt man Letztere mit dem zeitigen Barometerstande × 0,00063, zieht das Produkt von der zum feuchten Thermometerstande gehörigen Dunstspannung der obigen Tabelle ab, so wird die zeitige Dunstspannung erhalten.

Ausschlag des Zeigers verursachen. Bringt man das Instrument aus der Temperatur t bei **unverändertem** Luftdruck in die Temperatur t′, und ist der dabei erfolgende Ausschlag des Zeigers gleich a, so ist die Correktion für jeden Temperaturgrad

$$c = \frac{a}{t - t'} . \tag{237}$$

Ist nun das Instrument bei einer Temperatur t_0 justirt, ist also t_0 die Temperatur, bei welcher die Angaben des Instruments mit denen des Quecksilberbarometers übereinstimmen, so ist die bei der Temperatur t anzubringende Correktion, wie sofort klar sein wird,

$$k_1 = c\,(t - t_0).$$

2) Standcorrektion. Infolge Aenderung der Elasticität der Metalltheile zeigt der Zeiger Schwankungen, so dass die Uebereinstimmung mit dem Quecksilberbarometer, (auch nach Anbringung der Temperaturcorrektion), nicht bestehen bleibt.

Das Barometer ist daher während des Gebrauchs bei jeder Gelegenheit mit dem Quecksilberbarometer zu vergleichen und die gefundene Differenz bei jeder folgenden Ablesung zu berücksichtigen. Die Standcorrektion wird gemeinschaftlich mit einer dritten Correktion ermittelt, nämlich

3) der Theilungscorrektion. Es entspricht nämlich die Theilungseinheit nicht immer genau einer Druckdifferenz von 1 mm. Ist α der Fehler der Theilungseinheit, und ist 760 mm der Barometerstand, bei welchem, nach Anbringung der Temperaturcorrektion, Uebereinstimmung des Quecksilber- und Aneroidbarometers stattfindet, so ist beim Barometerstand b die anzubringende Correktion

$$k_3 = \alpha\,(760 - b). \tag{238}$$

Bezeichnet nun k_2 die Standcorrektion, so bestimmt man diese und die Theilungscorrektion gleichzeitig wie folgt: Quecksilber- und Aneroidbarometer werden mindestens zweimal, nachdem beide auf 0° reducirt worden, mit einander verglichen, und zwar müssen diese beiden Beobachtungen bei möglichst verschiedenem Luftdruck ausgeführt werden. Die Angaben des Quecksilberbarometers seien B und B′, die des Aneroids b und b′, so findet man die beiden Correktionen aus den Gleichungen

$$B = b + k_2 + \alpha\,(760 - b)$$
$$B' = b' + k_2 + \alpha\,(760 - b')$$

woraus k_2 und α sich ergeben. — Hat man mehrere derartige Beobachtungen bei verschiedenem Luftdruck ausgeführt, so kann k_2 und α nach der Methode der kl. Quadrate, (Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen), gefunden werden.

Der Theilungsfehler α ist ein für allemal zu ermitteln, während die Ermittelung der Correktion k_2, wie oben erwähnt, häufig zu wiederholen ist. Bei diesen späteren Bestimmungen der Standcorrektion k_2 bedarf es natürlich, da α bekannt ist, nur einer Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer, denn es ist

$$k_2 = B - (b + k_1 + k_3), \tag{239}$$

nämlich die Differenz des Quecksilberbarometers gegen das um Temperatur- und Theilungscorrecktion berichtigte Aneroidbarometer.

§ 6.

Messungen mit dem Aneroidbarometer.

1) Bei Aneroidmessungen bedient man sich zumeist der abgekürzten Formel

$$\triangle h = k\left(1 + 0{,}0037\,\frac{t + t'}{2}\right)(\log B - \log b) \tag{240}$$

worin k = 18400 m.

Um mit dem Aneroid ein Flächennivellement auszuführen, geht man mit demselben von Station zu Station, liest in jeder Station Barometer, Thermometer und die Zeit der Beobachtung ab, während ein zweiter Beobachter auf einem festen Punkte unausgesetzt die Barometerschwankungen an einem Quecksilberbarometer, (Standbarometer), beobachtet und ebenfalls die Zeiten seiner Beobachtungen notirt, damit die stattgehabten Schwankungen in Rechnung gestellt werden können. Vor und nach den Beobachtungen werden beide Barometer, behufs Ermittelung der Standcorrektion, mit einander verglichen und eine etwa vorgefundene Standveränderung proportional den Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen auf die letzteren vertheilt und in Rechnung gestellt, und nach Anbringung aller dieser Correktionen die Höhen der einzelnen Stationen über dem Standort des Standbarometers berechnet. Die Entfernung des Standbarometers vom Wanderbarometer darf nicht über 2 Meilen betragen.

2) Sind einzelne Punkte der aufzunehmenden Fläche ihrer Höhe nach, — etwa durch trigonometrisches Nivellement, — bereits bekannt, so kann man das Standbarometer entbehren und folgendes Verfahren, — (Interpolation), — anwenden:

Man beginnt die Beobachtungen bei einem der Punkte von gegebener Höhe, nimmt in möglichst kurzer Zeit eine Reihe von anderen Punkten auf, (d. h. beobachtet in denselben das Barometer), welche man so zu wählen hat, dass man sich, indem man dieselben der Reihe nach durchläuft, irgend einem anderen **gegebenen** Punkte nähert, auf welchem man schliesslich die Reihe der Beobachtungen abschliesst. Seien nun H und H′ die Höhen der bekannten Punkte, B und B′ die auf denselben beobachteten Barometerstände in mm ausgedrückt, so ist $\frac{H - H'}{B - B'}$ die Höhendifferenz, welche einer Barometerdifferenz von 1 mm entspricht. Multiplicirt man mit diesem Quotienten die Differenzen der auf den Zwischenstationen beobachteten Barometerhöhen, $B - b_1$, $b_1 - b_2$ etc., so erhält man die Höhenunterschiede $\triangle h_1$, $\triangle h_2$ . . . etc., deren Summe die Differenz $H - H'$ ergeben muss.

Natürlich darf man zwischen den Beobachtungen auf den gegebenen Punkten nicht zu lange Zeit verstreichen lassen, damit nicht inzwischen eintretende Barometer- und Temperaturschwankungen die Güte der Arbeit beeinträchtigen. Auch dürfen die Höhendifferenzen nicht allzugrosse sein, da dieselben sonst nicht mehr als den Barometerdifferenzen proportional angesehen werden dürfen.

Durch Differentiation der Gleichung

$$\triangle h = k (\log B - \log b)\left(1 + 0{,}0037 \frac{t + t'}{2}\right)$$

nach der Veränderlichen b erhält man nämlich:

$$\delta h = - \frac{M \delta b}{b} k \left(1 + 0{,}0037 \frac{t + t'}{2}\right) \tag{241}$$

Hierin bedeutet δh die Höhendifferenz, welche der Barometerdifferenz d b entspricht. Die Aenderung der Höhe für eine bestimmte Aenderung der Barometerhöhe, z. B. 1 mm, ist also dem Barometerstande umgekehrt proportional, daher in verschiedenen Höhen verschieden. Kennt man d h für die Barometerdifferenz 1 mm, so hat man nur noch mit der in mm ausgedrückten Barometerdifferenz $B - b$ zu multipliciren, um den Höhenunterschied der Beobachtungsstationen zu erhalten.

Nach Gl. (241) ist die Barometertafel, Tafel IV Anhang, berechnet, worin $d b = 1$ mm angenommen ist.

Bei Anwendung dieser Tafel kann man auch, wenn keine gegebenen Punkte vorhanden sind, das Standbarometer entbehren, wenn man nur möglichst oft auf den Ausgangspunkt zurückkehrt, bezw. auf einen Punkt, auf welchem man schon einmal beobachtet hat, um die Schwankungen des Luftdrucks zu controlliren. Etwa gefundene kleine Druckdifferenzen werden nach Verhältniss der Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen vertheilt und in Rechnung gestellt.

§ 7.
Nivellement mit Niveau.

Wir setzen den Gebrauch des Nivellirinstruments als bekannt voraus und erwähnen nur Folgendes:

Um die Correktionen wegen Erdkrümmung und Strahlenbrechung zu erübrigen und gleichzeitig einen etwaigen Zielfehler des Instruments unschädlich zu machen, ist jede Station aus der Mitte zu nivelliren. Die Correktionen der Lattenablesungen werden unter dieser Bedingung für die Vor- und Rückvisur gleich, fallen also bei Bildung der Lattendifferenzen fort, brauchen daher überhaupt nicht berücksichtigt zu werden, ($[H + c_1 + c_2 + c_3] - [H' + c_1 + c_2 + c_3] = H - H'$).

Jedes Nivellement ist doppelt, entweder mit 2 Latten mit verschiedenen Wechselpunkten, oder vor- und rückwärts auszuführen.

Schliesst ein Nivellement beiderseits an bereits bekannte Punkte an, so kann eine Ausgleichung desselben vorgenommen werden, indem man die gegen den bekannten Höhenunterschied der gegebenen Punkte gefundene Differenz auf die einzelnen Stationen, nach Verhältniss der Stationslängen, vertheilt. Treffen mehrere Züge in einem Punkte zusammen, so kann dieser nach Analogie der Knotenpunkte bei Polygonmessungen behandelt werden, (cfr. Thl. II, § 43 1) u. 3)). Die dabei in Rechnung zu stellenden Gewichte sind, wenn S die Länge eines Nivellementszuges bezeichnet, $p = \frac{1}{S}$. Denn ist m der mittlere Fehler der Längeneinheit, so ist der mittlere Fehler des ganzen Nivellementszuges $= m\sqrt{S}$. Die Gewichte sind aber den Quadraten der mittleren Fehler umgekehrt proportional.

Eine ähnliche Betrachtung wie die in Thl. II, § 45, über Bussolenzüge angestellte, führt zu der Regel, dass man die Stationslängen nicht zu gross nehmen darf, — in der Regel = 50 m. —

Die Nivellementszahlen werden in eine Tabelle etwa von der beistehenden Einrichtung eingetragen. Spalte 3 und 5 sind für die Visuren nach den Wechselpunkten bestimmt, Spalte 4 für Zwischenvisuren. In Spalte 6 werden die Differenzen der Lattenablesungen gebildet, und zwar werden die negativen Unterschiede in Form dekadischer Ergänzungen eingetragen, wenn man es nicht vorzieht, Spalte 6 in zwei Unterabtheilungen zu theilen, eine für positve, (Steigungen), die andere für negative, (Fallen), Differenzen. Als Probe für die richtige Bildung der Unterschiede $\triangle h$ hat man: Summe der Spalte 3 weniger Summe der Spalte 5 = Summe Spalte 6. Als Probe für die richtige Summirung der Differenzen in Spalte 7 bildet man den Unterschied zwischen der letzten und ersten Höhe, welche mit der Summe der Spalte 6 übereinstimmen muss. Für doppeltes Nivellement sind die Spalten 3—6 zu wiederholen, und zwischen Spalte 6 und 7 eine weitere Spalte, — „Mittel der Höhenunterschiede aus Nivellement I und II“, — einzuschalten. Ist das Nivellement beiderseits an bekannte Punkte angeschlossen, so kommt dazu noch eine fernere Spalte: „Verbesserte Höhenunterschiede.“

No. der Station	Länge der Station	Visur Rückwärts	Visur zwischen	Visur Vorwärts	Unterschiede $\triangle$ h	Höhe h	Bemerkungen
1	2	3	4	5	6	7	8
0		0,953				22,550	
1	50			1,762	$\times$ 9,191	21,741	
1	50	2,426					
2	50		2,012		0,414	22,155	
3	50			1,202	0,810	22,965	
3	50	0,448					
4	50		2,131		$\times$ 8,317	21,282	
5	50			2,026	0,105	21,387	
		3,827		4,990	$\times$ 8,837	$\times$ 8,837	
				3,827			
				$\times$ 8,837			

Die Nivellementslinie ist gelegentlich der Eintheilung in Stationen durch Ordinatenmessungen nach festen Punkten, — Grenzsteinen, Häuserecken —, oder nach eigens zu dem Zwecke vermarkten Punkten derart festzulegen, dass sie mit Sicherheit jederzeit wieder hergestellt werden kann. In Abständen von 500 bis 1000 m sind derartige Punkte mit einzunivelliren und zu dem Ende durch Einlassen von sogen. Nivellementsbolzen in einer für diesen Zweck geeigneten Weise herzurichten.

§ 8.
Terraindarstellung.

Denkt man sich einen Berg durch äquidistante Horizontalebenen durchschnitten, Fig. 124, und die Schnittlinien dieser Ebenen mit der Terrainoberfläche, (Horizontalkurven), auf eine horizontale Ebene projicirt, so werden die so erhaltenen Kurven um so näher bei einander liegen, je steiler der Berg ist, wie aus der Fig. einleuchten wird. Man kann also von der Entfernung der projicirten Kurven auf den Böschungsgrad des Terrains schliessen. Die Kurven stellen das Terrain für den im Lesen derselben Geübten in übersichtlicher Weise dar, und es sind daher Karten, welche mit Horizontalkurven versehen sind, nicht nur für topographische Zwecke, sondern auch als Unterlagen für Projekte, bei welchen die Terraingestaltung in Frage kommt, von hohem Werthe.

Zur Anfertigung solcher Karten kann man die Kurven entweder im Felde mit Hilfe des Nivellirinstruments abstecken und sodann aufmessen und in die Karten eintragen, — natürlich eine sehr zeitraubende Arbeit, welche nur da zur Ausführung kommen wird, wo es sich um wenige Kurven, die sich möglichst genau dem Terrain anschmiegen sollen, handelt —, oder man verfährt wie folgt:

Man bezeichnet zunächst alle für die Terraingestaltung charakteristischen Punkte, d. h. alle Punkte, in denen ein in die Augen fallender Gefällswechsel stattfindet, mit Pfählen, so dass also das von drei benachbarten Pfählen eingeschlossene Terrain eine Ebene darstellt, misst diese Pfähle auf, nivellirt sie, und trägt sie nebst ihren Höhenzahlen in die Karte. Alsdann kann man die Horizontalkurven auf der

Karte construiren. Seien beispielsweise in Fig. 125 die Höhen der Punkte a und b = 8,4 und 4,4 m, so ist es nicht schwierig, diejenigen Punkte der von a bis b stetig aufsteigenden Linie a b zu finden, welchen die Höhen 5, 6, 7, 8 m zukommen. Man hat diese Linie nur in dem Verhältniss 0,6 : 1 : 1 : 1 : 0,4 zu theilen. In analoger Weise werden die Linien c d, e f, etc. getheilt, und sodann alle Punkte, für welche man eine gleiche Höhe gefunden hat, durch eine aus freier Hand zu ziehende Kurve verbunden. Die angedeutete Theilung erfolgt am schnellsten mit Hilfe eines Diagramms, Fig. 126. Man trägt die Linie a b auf der Zeigerlinie 8,4 derselben von der Abscissenlinie aus ab, verbindet den Punkt b mit dem Punkte 4,4 der Abscissenlinie, (durch blosses Anlegen der Kante eines Zeichendreiecks), und trägt die zwischen der Linie b c und der Abscissenlinie liegenden Abschnitte der Zeigerlinien 5, 6, 7, 8 auf der Linie a b in der Karte, Fig. 123, von b aus ab, wodurch diese, wie sofort verständlich, in der angedeuteten Weise getheilt ist.

Kommt es auf möglichst genaue kartographische Terraindarstellung an, so wird man die zu nivellirenden Punkte auf dem Felde in grosser Anzahl wählen müssen. Man kommt in solchen Fällen am schnellsten zum Ziele, wenn man das Terrain mit einem Quadratnetze überspannt, und die Qradratecken nivellirt. Je kleiner man die Quadratseiten wählt, um so genauer, um so mehr wird sich die Terrainoberfläche in jedem Quadrate der Ebene nähern. Wo dieselbe in einem oder dem anderen Quadrate noch erheblich von der Ebene abweicht, sind innerhalb des Quadrats noch weitere Punkte besonders zu bestimmen. Derartige Quadratnetzaufnahmen gewähren auch sonst mancherlei Vortheile, wie wir später sehen werden.

In neuerer Zeit bedient man sich zu Terrainaufnahmen mit grosser Zeitersparniss des Tachymeters, eines Theodolits mit Horizontal- und Verticalkreis und distanzmessendem Fernrohr. Durch ein solches Instrument wird gleichzeitig die Lage und Höhe der Punkte, erstere durch Distanz- und Horizontalwinkelmessung, (Polarcoordinaten!), letztere durch Verticalwinkelmessung bestimmt. Wird der Träger der Distanzlatte durch einen zweiten Geometer geführt, so ist das Abpfählen der Punkte erübrigt.

1) **Aufgabe:** In einem Schichtenplane, Fig. 129, ist eine Linie a b gegeben. Es soll das Profil derselben gezeichnet werden.

Die Auflösung geht aus der Figur hervor.

2) **Aufgabe:** In einen Schichtenplan, Fig. 127, eine bei a beginnende Linie mit einer stetigen Steigung von 1 % zu zeichnen.

Auch diese Auflösung wird aus der Figur verständlich werden, aus welcher auch erkenntlich ist, dass man die verschiedensten Linien von der vorgeschriebenen Eigenschaft, z. B. a b c d e, a b c′ d′ e′, a b c′ d′ e″ und ähnliche construiren kann.

3) **Aufgabe:** Zwei Punkte A und B, Fig. 128, durch eine stetig aufsteigende Linie von 1 % Steigung zu verbinden.

Man trägt nach voriger Aufgabe von A aus die Linie A C A′, von B aus die Linie B C B′ von 1 % Steigung ein. Beide schneiden sich im Punkte C. Die Linie A C B ist eine Linie von der verlangten Eigenschaft.

4) **Aufgabe:** Die Höhe eines auf einem Schichtenplane gegebenen Punktes, welcher zwischen zwei Höhencurven liegt, zu bestimmen.

Man ziehe durch den gegebenen Punkt senkrecht zu den benachbarten Kurven eine Linie, ermittele das Verhältniss, nach welchem der zwischen den beiden benachbarten Kurven liegende Abschnitt derselben durch den gegebenen Punkt getheilt wird, und theile den bekannten Höhenunterschied der benachbarten Kurven nach demselben Verhältniss.

Soll durch den gegebenen Punkt eine neue Horizontalkurve construirt werden, so ziehe man in angemessenen Abständen zwischen den benachbarten Horizontalcurven mehrere zu diesen senkrechte Linien, theile dieselben nach demselben Verhältniss, und verbinde die Theilungspunkte.

5) **Aufgabe:** Eine Wasserleitung A B, Fig. 130, liegt bei A 1 m tief und besitzt ein Gefälle von 1 %. Wie tief durchschneidet dieselbe den Berg bei C?

Die Aufgabe ist durch Rechnung leicht zu lösen. Ist aber auf der Linie A B eine grössere Anzahl von Punkten gegeben, deren Tiefe unter der Terrainoberfläche ermittelt werden soll, so zeichne man für die Linie A B das Profil nach Aufgabe 1), trage in dieselbe auch die Leitung A B nach den dieselbe bestimmenden Daten ein, so kann man dieser Zeichnung die Tiefe für jeden beliebigen Punkt der Linie A B direkt durch Abgreifen mit dem Zirkel entnehmen.

6) **Aufgabe:** In einen Schichtenplan die Durchschnittslinie der Böschungen eines Grabens mit der Terrainoberfläche einzuzeichnen, wenn die Mittellinie, (Trace), des Grabens, sein Profil, Gefälle, und seine Tiefe in A, Fig. 130, gegeben sind.

Man ermittelt nach Aufgabe 5) die Grabentiefen an verschiedenen Punkten der Grabenlinie, trägt diese Tiefen in das in grossem Massstabe gezeichnete Grabenprofil ein, in Fig. 131 also die Tiefen A a_1, A a_2, A a_3 etc., zieht die Horizontalen*) $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$, $a_3\,b_3$ etc., ermittelt die Längen dieser horizontalen Linien und trägt sie im Massstabe der Karte von der gegebenen Grabenlinie aus zu beiden Seiten derselben ab, und zwar natürlich in denjenigen Punkten der letzteren, für welche die betreffenden Grabentiefen ermittelt sind.

Nach dem hier Gesagten wird es an Mitteln zur Lösung ähnlicher Aufgaben nicht fehlen.

II. Erdbau.

§ 9.

Massenberechnung und Terrainumformung.

1) **Massenberechnung:** Der Schichtenplan eines Grundstücks, Fig. 132, ist gegeben. Durch den niedrigsten Punkt A des Grundstücks wird eine horizontale Ebene gedacht. Es soll der cubische Inhalt der über dieser Ebene in dem Grundstück lagernden Erdmasse berechnet werden.

Man bestimmt zunächst die Höhe des niedrigsten Punktes A nach § 8, Aufgabe 4), berechnet die Fläche G des Grundstücks, und die Flächen g_1, g_2, g_3 etc., welche die Horizontalkurven 1, 2, 3 etc. mit den Grenzen des Grundstücks einschliessen. Ist h_1 der Vertikalabstand der durch A gedachten Kurve von der nächst höheren Kurve 1, so ist der cubische Inhalt der Erdschicht zwischen beiden Kurven $J_0 = \frac{G_1 + g_1}{2} \cdot h_1$. Bezeichnet weiter h die Aequidistanz der übrigen Kurven, so sind die in den einzelnen

*) Ist das Terrain rechtwinklig zur Grabenrichtung stark geneigt, wie dies z. B. der Fall wäre, wenn in Fig. 128 B C B′ die gegebene Grabentrace vorstellte, so sind statt der Horizontalen die entsprechenden Terrain-Querprofile in das Normalprofil des Grabens zu zeichnen. Dieselben werden nach Aufgabe 1 gewonnen.