Anfangsgründe der niederen Geodäsie

Loewe, Hans

Liebenwerda, 1892

§ 2. Refraktion

urn:nbn:de:hbz:466:1-79893

I. Nivellements.

§ 1.

Trigonometrisches Höhenmessen.

Aufgabe des Nivellirens ist die Ermittelung des Höhenunterschiedes zwischen zwei oder mehreren Punkten, d. h., — die Erde als Kugel betrachtet —, der Differenz ihrer Entfernungen vom Meeresniveau.

Ist s die Horizontalentfernung zweier Punkte A und B, h der Höhenunterschied derselben, und α der in A gemessene Elevationswinkel, so ist, wenn die Entfernung s so gering ist, dass man den Erdbogen s als mit dem scheinbaren Horizonte zusammenfallend ansehen kann, —

$$h = s \operatorname{tang} \alpha. \tag{225}$$

Indessen darf die Krümmung der Erdoberfläche schon bei einer Entfernung von nur wenigen hundert Metern nicht mehr vernachlässigt werden. Ist in Fig. 119 A E der scheinbare Horizont des Punktes A, so kann $\triangle$ A E B selbst bei grossen Entfernungen noch ohne Einfluss auf das Resultat als rechtwinklig angesehen werden, auch kann man die Länge A E ohne Fehler $= s$ setzen, und erhält

$$h = DE + s \operatorname{tang} \alpha.\text{*)}$$

Hierin bedeutet D E die Correktion wegen der Erdkrümmung. Bezeichnen wir dieselbe mit c, den Erdradius mit r, so ist $AE^2 = (2r + c)\,c$, oder ohne merklichen Fehler $s^2 = 2rc$,**) also:

$$c = \frac{s^2}{2r}. \tag{226}$$

Ausser der Correktion wegen der Erdkrümmung bedarf es noch einer zweiten Correktion, der Correktion wegen der Strahlenbrechung. Da nämlich der Lichtstrahl B A, Fig. 120, von B ausgehend, in immer dichtere Luftschichten gelangt, so wird derselbe infolge der Refraktion nicht eine grade Linie, sondern eine Kurve durchlaufen. Ist A F die in A an diese Kurve gezogene Tangente, so wird dem Beobachter in A der Punkt B in B′ zu liegen scheinen. Der Elevationswinkel α wird daher durch die Messung zu gross gefunden werden, und ist um einen Betrag ϱ zu verbessern, worüber im folgenden § die Rede sein wird.

§ 2.

Refraktion.

Lassen wir die Bezeichnung der Fig. 120 gelten, so ist, unter der Voraussetzung, dass die Lichtkurve A B ein Kreisbogen sei,

$$\varrho = {}^1/_2\, M,$$

---

*) Oder auch $h = s \operatorname{tang} (\alpha + {}^1/_2\, C)$, worin $C'' = \frac{s}{r}\, \varrho''$.

**) Vergl. Absatz 2 der Anmerkung auf Seite 129.

oder wenn wir als Winkelmass das Verhältniss des Bogens zum Radius einführen

$$\varrho = \frac{A\,B}{R}.$$

Dagegen ist der Winkel C

$$C = \frac{s}{r}$$

oder ohne merklichen Fehler

$$C = \frac{A\,B}{r}$$

$$A\,B = r\,C$$

mithin

$$\varrho = \frac{r}{2\,R}\,C.$$

oder wenn man $\frac{r}{2\,R} = k$ setzt:

$$\varrho = \mathbf{k\,C}. \tag{227}$$

Hierin ist C in Sekunden

$$C'' = \frac{s}{r}\,\varrho''.$$

Die Gleichung (225) wird nun, bei Berücksichtigung der Erdkrümmung und Refraktion lauten

$$h = s \tang(\alpha - \varrho) + c.$$

Wäre hierin h durch ein Nivellement bekannt, so liesse sich die Refraktion ϱ berechnen und demnach der Coefficient k in (227) aus der Gleichung $k = \frac{\varrho}{C}$ finden. Messungen dieser Art sind von verschiedenen Forschern ausgeführt, haben aber für k schwankende Resultate ergeben. Danach bewegt sich k zwischen den Werthen 0,06 bis 0,10. Bei kleinen Entfernungen ist eine kleine Ungenauigkeit des Coefficienten k ohne Belang, und kann für k ein Mittelwerth, etwa $k = 0{,}08$ gesetzt werden.

Die Schwankungen von k erklären sich durch die Veränderlichkeit der Dichtigkeit der Luft, und hat man in neuerer Zeit sich bemüht, dieselbe gebührend in Rechnung zu ziehen. Wir können indessen in diesem Buche keine der neueren Formeln zur Darstellung bringen, und wollen uns damit begnügen, eine ältere Formel von Grunert, (Grunert, Mathematik und Physik), wiederzugeben, welche zwar keineswegs Alles hier in Betracht kommende erschöpft, immerhin aber doch schon einen Schritt weiter geht, als die in der Praxis auch heute meist noch benutzte Formel (227) mit **constantem** Coefficienten.

Die Krümmung der Lichtkurve ist, wie schon erwähnt, abhängig von der Dichtigkeit der Luft und ist dieser proportional. Demnach ist der Krümmungsradius R der Luftdichtigkeit **umgekehrt** — (Thl. I, § 44), der Bruch $\frac{r}{2\,R} = k$ derselben also wieder **direkt** proportional. Nach dem mariotteschen Gesetze ist nun die Dichtigkeit der Luft proportional dem auf der betreffenden Luftschicht lastenden Drucke, d. i. dem beobachteten Barometerstande. Bezeichnet daher k den bei mittlerem Barometerstand 760 mm gültigen Coefficienten, k_1 den Coefficienten für den Barometerstand b, so ist $k : k_1 = 760 : b$, also

$$k_1 = k\,\frac{b}{760}.$$

Die Dichtigkeit der Luft ist nun weiter abhängig von ihrer Temperatur. Da sich die Luft bei steigender Temperatur ausdehnt, so wird ihre Dichtigkeit abnehmen. Die Ausdehnung der Luft beträgt für 1^0 C $^1/_{273}$ ihres Volumens. Ist demnach die Dichtigkeit für die Temperatur $0^0 = 1$, so ist dieselbe, da sie dem Volumen umgekehrt proportional ist, für die Temperatur t^0 gleich $\frac{1}{1+\frac{t}{273}} = \frac{1}{1+0{,}0037\,t.}$ Bezeichnet demnach k den Refraktionscoefficienten für die Temperatur 0^0, k_1 für die Temperatur t, so ist $k : k_1 = 1 : \frac{1}{(1+0{,}0037\,t)}$, also

$$k_1 = \frac{k}{1+0{,}0037\,t}.$$

Wir erhalten demnach die Refraktion für den Barometerstand b und die Temperatur t:

$$\varrho = k\,\frac{b}{760\,(1+0{,}0037\,t)}\,.\,C^{*)} \qquad (228)$$

Hierin ist $k = 0{,}08$ zu setzen. Dies die Formel nach Grunert. Für die Rechnung etwas bequemer kann man dieselbe gestalten, indem man mit 273 erweitert, nämlich $\frac{0{,}08 \times 273}{760} = 0{,}03$, und $(1+0{,}0037\,t)\,273 = 273 + t$, also:

$$\varrho = \frac{\mathbf{0.03\,b}}{\mathbf{273+t}}\,.\,\mathbf{C}. \qquad (229)$$

Setzen wir, **Fig. 118**, die Correktion der Höhe h, d. i. $BB' = c'$, so ist, wenn ϱ und c durch das Verhältniss der Bögen zu den Radien ausgedrückt werden: $\varrho = \frac{c'}{s}$ und $C = \frac{s}{r}$, also nach (229)

$$\frac{c'}{s} = \frac{0{,}03\,b}{273+t}\,.\,\frac{s}{r}$$

$$c' = \frac{0.03\,b}{273+t}\,.\,\frac{s^2}{r}. \qquad (230)$$

Um den Betrag c' wird die beobachtete Höhe h zu gross gefunden, c' ist der Höhe h also in **negativem** Sinne hinzuzufügen.

Man kann die Gleichung (230), wenn wir $\frac{0.03\,b}{273+t} = k$ setzen, (wo nun also k keine Constante, sondern eine nach der Temperatur und Barometerstand schwankende Grösse darstellt), auch schreiben:

$$c' = 2\,k\,\frac{s^2}{2\,r}$$

und erhält so die Höhe h nach (225), (226) und (231)

$$\mathbf{h = s\,tang\,\alpha + \frac{s^2}{2\,r}\,(1-2\,k).} \qquad (232)$$

---

*) Von noch grösserem Einfluss auf die Refraktion, als der Luftdruck und die Temperatur, ist die **Aenderung** der Temperatur mit der Höhe, wie neuere Untersuchungen dargethan haben. Hieraus erklären sich die täglichen Schwankungen der Refraktion, ihre Abnahme des Vormittags und Zunahme des Nachmittags, da bei stark erwärmtem Erdboden die Abnahme der Temperatur nach der Höhe eine stärkere sein wird, als bei kaltem Boden. Bei starker Erhitzung des Bodens kann die Refraktion ganz aufhören, ja ins Negative übergehen, (Luftspiegelung!), denn hier ist die Luftdichtigkeit in den **unteren,** erheblich wärmeren Schichten die geringere.

Ist s in der Höhe des Meeresspiegels gemessen, so ist die Länge s auf die Höhe $\frac{H+H'}{2}$ zu reduciren, wenn H und H' die Meereshöhen der Punkte B und A bezeichnen. Bezeichnet a die reducirte Entfernung, so ist offenbar

$$s : r = a : \left(r + \frac{H+H'}{2}\right)$$

$$a = s\left(1 + \frac{H+H'}{2r}\right)$$

also

$$a \tan \alpha = s \tan \alpha \left(1 + \frac{H+H'}{2r}\right)$$

oder genau genug

$$a \tan \alpha = h \left(1 + \frac{H+H'}{2r}\right)$$

$$= (H - H')\left(1 + \frac{H+H'}{2r}\right)$$

$$= H - H' + \frac{H^2 - H'^2}{2r}$$

$$= s \tan \alpha + \frac{H^2 - H'^2}{r\,2}. \qquad (233)$$

Setzen wir also in (232) a für s, und für a tang α den Werth aus (233), so erhalten wir

$$h = s \tan \alpha + \frac{H^2 - H'^2}{2r} + \frac{s^2}{2r}(1 - 2k). \qquad (234)$$

Hierin brauchen die Meereshöhen H und H' nur ganz roh bekannt zu sein, etwa aus Barometerbeobachtungen. Bei nicht allzugrossen Höhendifferenzen kann der Bruch $\frac{H^2 - H'^2}{2r}$ ganz vernachlässigt werden.

Der so gefundene Höhenunterschied ist noch um die Höhe des anvisirten Signals und um die Instrumentenhöhe zu verbessern, wozu es keiner Anleitung bedarf.

Sind **gleichzeitig** in A die Elevation α und in B die Depression $-\alpha'$ beobachtet, so ist α um den Refraktionswinkel zu gross, α' um denselben Winkel zu klein gefunden*). Man hat dann, ohne sich um die Refraktion und Erdkrümmung weiter zu kümmern, den Werth $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ in Formel (125) für α einzuführen, wie leicht verständlich.

§ 3.

Trigonometrisch-nivellitisches Netz.

Vom trigonometrischen Nivelliren macht man vorzugsweise Gebrauch, um bei ausgedehnten Flächennivellements eine Anzahl von Punkten ihrer Höhe nach zu bestimmen, um daran später die Nivellementszüge zweiter Ordnung, — barometrische Nivellements, (vergl. § 6), — oder Tachymeteraufnahmen**) anschliessen zu können. Man legt über die aufzunehmende Fläche ein Dreiecksnetz, misst dessen Horizontal- und Elevations- bezw. Depressionswinkel, sowie eine Basis, von welcher ausgehend man die Längen s der Dreiecksseiten nach und nach berechnet. Die Berechnung der Höhen kann dann nach folgendem Beispiel erfolgen. Sei H_A die Höhe des Punktes A, Fig. 121, $\triangle h_A^d$, $\triangle h_d^E$ etc. die Höhenunterschiede der Punkte A und D, d und E, etc., so findet man die Höhe des Punktes E

$$H_{E_1} = H_A + \triangle h_A^d + \triangle h_d^E$$

oder auch

$$H_{E_2} = H_A + \triangle h_A^a + \triangle h_a^b + \triangle h_b^E$$

oder

$$H_{E_3} = H_A + \triangle h_A^e + \triangle h_e^f + \triangle h_f^E.$$

*) Streng genommen sind die Refraktionen auch bei gleichzeitiger Beobachtung auf beiden Stationen nicht gleich, da die Refraktion mit der Höhe abnimmt.

**) Vergl. § 8.