Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

I. Theil. (Constructionen der Ebene.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

übereinstimmen, in der Grösse aber verschieden sind, heissen ähnlich; ähnlich sind z. B. alle Quadrate, Kreise, Würfel, Kugeln (das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$).

Gebilde, welche sowohl hinsichtlich der Form, als auch der Grösse nach vollkommen übereinstimmen, heissen congruent (das Zeichen der Congruenz ist $\cong$, aus den Zeichen $=$ und $\sim$ zusammengesetzt); congruente Gebilde sind z. B. gleich lange Gerade, gleich grosse Quadrate, Kreise von gleichem Halbmesser, gleich grosse Kugeln etc.; congruente Gebilde decken sich gegenseitig.

I. Theil.

Constructionen der Ebene. Tafel I—VIII.

Aufgaben über das Zeichnen von Senkrechten zu einander, Antragen und Theilen der Winkel und Linien.

Tafel I. Figur I—XVI.

§ 9. Gegeben ist eine Gerade *a b* (Fig. I); es soll in *c* eine Senkrechte errichtet werden.

Man schneide aus *c* mit beliebiger Zirkelöffnung (Halbmesser) zwei gleiche Grössen *c* 1, *c* 2 ab, zeichne mit beliebigem, aber gleichem Halbmesser aus 1 und 2 Bögen oberhalb der Geraden, verbinde deren Schnittpunkt *d* mit *c*, so ist diese die verlangte Senkrechte zu *a b*.

Gegeben ist eine Gerade *a b* (Fig. II und III); es soll von einem ausserhalb gelegenen Punkte *c* die Senkrechte zu *a b* gefällt werden.

Man beschreibe von einem beliebigen Punkte *1* auf der gegebenen Geraden mit dem Halbmesser *1 c* den Bogen *c b d*, ebenso von einem zweiten beliebigen Punkte *2* mit dem Halbmesser *2 c* den Bogen *c a d* und verbinde *c*, *d* durch eine Gerade; oder: man beschreibe aus dem gegebenen Punkte *c* (Fig. III) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die gegebene Gerade *a b* in zwei Punkten *1* und *2* schneidet, beschreibe aus *1* und *2* mit gleichem Halbmesser Bögen, welche sich in *d* schneiden, und verbinde *c* mit *d*, so ist in beiden Fällen *c d* die verlangte Senkrechte.

Gegeben ist eine Gerade *a b* (Fig. IV); es soll an dem Endpunkte *a* eine Senkrechte dazu errichtet werden.

Man wähle einen beliebigen Punkt *m*, welcher voraussichtlich innerhalb des Winkels liegt, beschreibe mit dem Halbmesser *m a* den Halbkreis durch *a*, welcher *a b* in *1* schneidet, ziehe die Gerade *1 m*, welche den Halbkreis in *2* schneidet, ziehe von *a* durch *2*, so bildet *a c* den rechten Winkel zu *a b*;

oder: man beschreibe aus dem Endpunkte *a**) der gegebenen Geraden *a b* mit beliebigem Halbmesser *a 1* den Bogen *1 m*, aus *1* mit dem gleichen Halbmesser den Bogen *a m*, und aus *m* den Halbkreis *1 a 2*, durch *m* eine Gerade, bis sie den halbkreisförmigen Bogen schneidet, ziehe von *a* durch *2*, so ist *a c* die verlangte Senkrechte zu *a b*.

§ 10. Zu einer gegebenen Geraden *a b* (Fig. V) soll von einem Punkte *c* aus die Parallele construirt werden.

Man beschreibe von *c* mit möglichst grossem Halbmesser *c n* einen Bogen *n d*, ebenso von *n* mit gleichem Halbmesser *n c* den Bogen *c e*, nehme die Grösse *e c* als Sehne in den Zirkel und trage sie von *n* aus als Sehne auf den Bogen nach *d*. Die Gerade *c d* ist die verlangte Parallele. Die zweite Parallele aus *f* wurde auf gleiche Weise construirt.

§ 11. Ein gegebener Winkel *a b c* (Fig. VI) soll halbirt werden.

Man beschreibe aus *b* mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des Winkels in *1* und *2* schneidet, beschreibe aus *1* und *2* weitere Bögen mit beliebigen, aber gleichen Halbmessern; diese schneiden sich in *m*, *b* mit *m* verbunden ist die Halbirungslinie, und die zu beiden Seiten derselben liegenden Winkel sind congruent.

Ein Winkel soll in eine ungleiche Zahl von Theilen (z. B. 3) getheilt werden.

Man beschreibe ebenso, wie bei Fig. VI, einen Bogen, nehme dem Augenmasse nach den dritten Theil des Bogens in den Zirkel und probire, ob derselbe genau als Sehne dreimal im Bogen enthalten ist; wäre die schätzungsweise angenommene Zirkelöffnung zu gross oder zu klein gewesen, so hätte man das plus oder minus sich wieder in drei gleiche Theile getheilt zu denken und wäre die Zirkelöffnung um ein solches Dritttheil zu vergrössern oder zu verkleinern, und damit das Antragen auf's neue zu probiren, bis die Aufgabe gelöst ist; die auf diese Weise erhaltenen Punkte *2* und *1* verbinde man mit *e*, und es sind die drei neben einander liegenden Winkel congruent.

*) Siehe nebenstehende Figur rechts, welche aus Versehen nicht bezeichnet ist.

Es soll der Winkel *def* (Fig. VII) von einem gegebenen grösseren Winkel *ghi* (Fig. VIII) abgezogen werden.

Man beschreibe aus den Scheitelpunkten der beiden Winkel Bögen von gleichen Halbmessern, trage die Sehnenlänge des Bogens aus Fig. VII von *e* nach *o* als Sehne in Fig. VIII auf und ziehe von *h* durch *o*; der dadurch entstandene Winkel *ghk* ist nun gleich dem Unterschiede (Differenz) der beiden Winkel *def* (Fig. VII) und *ghi* (Fig. VIII); auf ähnliche Art könnten auch mehrere Winkel addirt, oder ein Winkel um ein mehrfaches vergrössert werden; jedoch kann die Winkelsumme um einen Punkt nie mehr als vier Rechte, d. h. 360^0 betragen.

Es soll ein Transporteur oder Winkelmesser construirt werden.

Man beschreibe über einer als Durchmesser gegebenen Geraden den Halbkreis (hier der äussere), errichte sodann über dem Mittelpunkte *m* die Senkrechte, so erhält man auf jeder Seite derselben einen rechten Winkel von 90^0; beschreibt man ferner mit dem Halbmesser des Kreises aus den Endpunkten des Durchmessers, sowie aus dem Schnittpunkte der Senkrechten Bögen, so ist damit der Halbkreis in sechs gleiche Theile getheilt, und die Theilpunkte mit *m* verbunden ergeben sechs Winkel von je 30^0; durch weiteres Halbiren erhält man Winkel von je 15^0 u. s. w. In Fig. IX sind zum Theil auch noch die einzelnen Grade eingetragen worden.

Ein Winkel von 30^0 ist gleich $^1/_3$, ein Winkel von 45^0 gleich einem halben, ein Winkel von 60^0 gleich $^2/_3$ eines Rechten.

§ 12. Eine gegebene Strecke *ab* (Fig. X) soll durch fortgesetztes Halbiren in eine Anzahl gleiche Theile getheilt werden. Man beschreibe aus den Endpunkten *ab* mit einem Halbmesser, welcher grösser ist als die halbe Strecke, Bögen, welche sich über und unter der Geraden schneiden; verbindet man nun die beiden Schnittpunkte durch eine Gerade, so halbirt letztere die Strecke *ab* in *m*; wiederholt man das gleiche Verfahren bei den Strecken *am* und *mb*, so erhält man für die ganze Strecke *ab* vier Theile, durch weiteres Halbiren acht Theile u. s. w.

Es soll eine gegebene Strecke *ab* (Fig. XI) in eine ungleiche Anzahl von Theilen getheilt werden, z. B. drei. Man nehme schätzungsweise den dritten Theil der ganzen Strecke in den Zirkel und probire, ob derselbe genau darin enthalten ist. Angenommen, man hätte dieses Drittel zu klein geschätzt, so hätte man den bleibenden Rest *ax* sich in drei gleiche Theile zu denken und die Zirkelöffnung um ein solches Drittel zu vergrössern, und mit dieser die Theilung aufs neue zu probiren u. s. w.

Es soll eine gegebene Strecke *ab* (Fig. XII) nach irgend einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden. Angenommen, die Theile seien alternirend, d. h. abwechselnd kleiner und grösser, und es soll sich ein jeder kleinere Theil zum grösseren etwa wie zwei zu drei verhalten, so trage man auf einer unter beliebigem Winkel an einem Endpunkte *a* gezeichneten Geraden erst zwei beliebige, aber gleiche Theile, und von Punkt *2* an dieselben Theile dreimal auf, die Strecken *a 2*, *2 5* werden so oft auf *ac* weiter angetragen, als man dieses Verhältniss auf der Strecke *ab* wiederholen will; verbindet man nun den Endpunkt (z. B. *18*) mit dem Endpunkt *b* und zieht aus den Punkten *2*, *5* u. s. w. die Parallelen zu *18b*, so ergibt sich auf *ab* die gewünschte Theilung.

Die Aufgabe hätte auch lauten können:

Es soll das Theilverhältniss einer gegebenen Strecke auf eine andere grössere oder kleinere Strecke übertragen werden. Die Lösung der Aufgabe bliebe dabei ganz dieselbe.

§ 13. Es soll ein Winkel halbirt werden, dessen Scheitelpunkt unzugänglich ist; oder mit anderen Worten: es soll in der Mitte zweier convergirender Geraden *ab*, *cd* (Fig. XIII) eine dritte *mm''* construirt werden, welche nach dem gleichen Convergenzpunkte geht.

Man verbinde zwei auf *ab* und *cd* beliebig gewählte Punkte *x*, *y* durch eine Gerade, halbire die dadurch entstandenen vier Winkel *ayx*, *byx*, *cxy* und *dxy*, durch die Schnittpunkte *s* je zweier Halbirungslinien lege man die Gerade *mm''*, so geht letztere nach dem gleichen Convergenzpunkte; oder: man zeichne innerhalb *ab*, *cd* in beliebigen, aber gleichen Abständen Parallele; diese schneiden sich in einem Punkte *s''*; halbirt man den hierdurch entstandenen spitzen Winkel bei *s*, welcher gleich ist dem Winkel, unter welchem sich *ab* und *cd*, wenn hinlänglich verlängert, schneiden müssen, so ist, wie aus der Figur ersichtlich, das Resultat das gleiche.

Gegeben sind die beiden Geraden *ab*, *cd* (Fig. XIV), und es sollen von beliebigen Punkten *a'* und *b'* Gerade construirt werden, welche den gleichen Convergenzpunkt haben. Man ziehe eine beliebige Gerade, welche *ab*, *cd* in *e* und *f* schneidet, zu dieser parallel eine zweite Gerade *bd*, verbinde *a'* mit *f* und *e*, ebenso *b'* mit *e* und *f*, ziehe ferner aus *b* und *d* die Parallelen zu *eb'*, *ea'*, *fa'*, *fb'*, so ergeben sich die Schnittpunkte *a''b''*, und die Geraden *a'a''*, *b'b''* gehen nach dem gleichen Punkte, wie *ab* und *cd*.

§ 14. Es soll der Schnittpunkt zweier Geraden (Fig. XV), welche sich unter sehr kleinem Winkel schneiden, genau bestimmt werden.

Schneiden sich zwei Gerade unter sehr spitzem Winkel, so ist es nicht möglich, den Schnittpunkt derselben mit Genauigkeit direkt zu bestimmen.

Man ziehe daher in diesem Falle auf beiden Seiten des Schnittpunktes und in möglichst grossen Abständen von demselben zwei Parallele in beliebiger Richtung; auf diesen trage man die zwischen den Geraden liegenden

Abschnitte *1″0*, *1″0* beliebig, aber gleich oft in entgegengesetzter Richtung auf (z. B. viermal) und verbinde die äusseren Punkte (*4*, *4*) durch eine Gerade miteinander, wodurch sich *s* als der Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden bestimmt.

In Fig XVI ist ein Decimeter $= {}^1/_{10}$ Meter in ${}^2/_3$ natürlicher Grösse aufgetragen*); um eine gemischte Zahl, z. B. Centimeter und Millimeter, leicht entnehmen zu können, trägt man zunächsä von dem Punkte *0* aus zehn Centimeter nach rechts, sowie einen Centimeter nach links auf; letzterer wird wieder in zehn Theile, welche Millimeter bedeuten, getheilt; will man nun z. B. mit dem Zirkel eine Grösse von 7 cm und 8 mm diesem Massstabe entnehmen, so setze man die eine Spitze in 7 ein und greife mit demselben, indem man den Zirkel von rechts nach links öffnet, 7 cm + 8 mm = 78 mm; in Fig. XVI sind auch die Centimeter nochmals halbirt worden, so dass ein kleinster, rechts von *0* liegender Theil $= {}^1/_2$ cm = 5 mm ist.

Das Dreieck.

§ 15. Das Dreieck ist eine durch drei Strecken begrenzte Figur; eine Strecke heisst eine Seite des Dreieckes; jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel; Dreiecke unterscheidet man:

a) nach ihren Seiten,

b) nach ihren Winkeln.

a) Ein Dreieck heisst gleichseitig, wenn es drei gleich lange Seiten hat, gleichschenklig, wenn es zwei gleich lange Seiten hat; die gleichlangen Seiten heissen Schenkel; die dritte Seite, welche kleiner oder grösser sein kann, heisst die Basis oder Grundlinie; die der Grundlinie gegenüber liegende Ecke heisst die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes.

Ein Dreieck heisst ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

b) Ein Dreieck heisst spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat. Es heisst rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel enthält; ein jeder der beiden andern Winkel ist dann spitz.

Ein Dreieck heisst stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält. Im rechtwinkligen Dreieck heissen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, die Katheten (Senkrechten); diejenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst die Hypotenuse (Schräge). Unter einem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke versteht man ein solches, dessen Katheten gleich lang sind; ist von den Katheten eines Dreieckes die Rede, so kann es nur ein rechtwinkliges sein; ist von den Schenkeln eines Dreieckes die Rede, so ist es gleichschenklig.

*) Die Ausführung der Blätter seitens des Lernenden ist um die Hälfte grösser gedacht; der Massstab ist daher in seiner wahren Grösse zu zeichnen.

Die Transversalen.

§ 16. Unter der Transversalen eines Dreieckes versteht man eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreieckes oder deren Verlängerungen schneidet; es kann dieses in drei oder auch in zwei Punkten geschehen, in welch letzterem Falle zwei Punkte in einen, und zwar an der Spitze des Dreieckes zusammenfallen, oder die Transversale schneidet die dritte, verlängerte Seite erst in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist parallel zu einer Seite. Man unterscheidet vier specielle Arten von Transversalen; diese sind: a) Höhen, b) Medianen, c) Mittellothe, d) Flächenhalbirungslinien oder kurz Transversalen.

a) Unter der Höhe versteht man eine Senkrechte, welche von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seite gefällt wird (siehe Fig. VI, Tafel II); da das Dreieck drei Seiten und drei Winkel hat, so hat es im Allgemeinen auch drei Höhen; die zur Höhe rechtwinklige Seite heisst deren Basis oder Grundlinie.

b) Unter der Mediane (mittlere Linie) versteht man eine Gerade, welche den Winkel eines Dreieckes halbirt, also eine Winkelhalbirungslinie; in jedem Dreiecke können drei Medianen verzeichnet werden; diese schneiden sich in einem Punkte innerhalb des Dreieckes, dessen kleinster Abstand von den drei Seiten gleich ist. (Siehe Fig. VII, Tafel II.)

c) Unter Mittelloth versteht man eine Gerade, welche senkrecht (lothrecht) auf der Mitte einer Dreiecksseite steht; der Punkt, in welchem sich die drei Mittellothe schneiden, hat gleichen Abstand von den Spitzen des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

d) Unter einer Transversalen im engeren Sinne versteht man eine Gerade, welche den Flächenraum eines Dreieckes theilt oder halbirt; zieht man von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seitenmitte eine Gerade, so ist diese eine Transversale; sie halbirt die Fläche ihrem Inhalte nach*); solche Transversalen treffen sich in der Mitte der Fläche; der Schnittpunkt dreier Transversalen ist der Schwerpunkt des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

Höhen und Mittellothe können sowohl innerhalb wie ausserhalb eines Dreieckes, sowie im Umfange desselben sich schneiden; so z. B. liegt der Schnittpunkt der Höhen im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb desselben, im rechtwinkligen fällt derselbe mit der Spitze des rechten Winkels, und zwei der Höhen fallen mit den Katheten zusammen, im stumpfwinkligen liegt er ausserhalb der Dreiecksfigur in der Verlängerung der Höhen.

*) Theilt man die Seite eines Dreieckes in drei, vier, fünf gleiche Theile und zieht von diesen Theilpunkten nach der gegenüberliegenden Spitze, so wird das Dreieck in drei, vier, fünf inhaltlich gleiche Theile zerlegt.

Zwei Höhen treffen hierbei senkrecht auf die Verlängerung jener Seiten, welche den stumpfen Winkel bilden. Der Schnittpunkt der Mittellothe liegt im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb der Figur; im rechtwinkligen auf der Mitte der Hypotenuse und im stumpfwinkligen ausserhalb der Figur. Im rechtwinkligen Dreiecke heisst insbesondere jene Gerade die Höhe, welche von der Spitze des rechten Winkels gegen die Hypotenuse gefällt wird; im gleichschenkligen jene, welche von der Spitze gegen die Basis gefällt wird; man spricht somit bei dem rechtwinkligen und bei dem gleichschenkligen Dreiecke nur von einer Höhe. Mediane und Transversalen schneiden sich stets innerhalb des Dreieckes.

Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Höhe sowohl den Winkel an der Spitze, als auch die Basis, und bildet zugleich Mediane, Transversale und Mittelloth. Im gleichseitigen Dreiecke fallen Höhen, Mediane, Mittelloth und Transversalen zusammen; der Schnittpunkt (siehe Fig. X, Tafel II) hat also von den Ecken, sowie von den Seiten gleichen Abstand.

Dreiecksgesetze.

§ 17. In einem jeden Dreiecke ist die Summe der inneren Winkel = zwei Rechten = 180°. Der Beweis für diesen Satz ist leicht zu erbringen. Man denke sich durch eine beliebige Spitze b des Dreieckes abc (Fig. 13) eine Parallele zur gegenüber liegenden Seite ac gelegt; so sind: ad Wechselwinkel, daher Winkel d = Winkel a, ebenso Winkel e = Winkel c; die drei Winkel dbe sind aber, da ihre Summe einen Halbkreis bildet, = zwei Rechten = 180°, und daher auch $a = d$, $b = b$, $c = e$ oder $a + b + c$ = zwei Rechten.

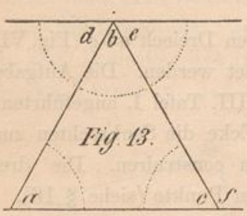


Fig. 13.

Der Aussenwinkel f eines Dreieckes, welcher durch die Verlängerung einer Dreiecksseite entsteht, ist so gross wie jene beiden inneren Dreieckswinkel, welche seinem Nebenwinkel c gegenüberliegen. Der Beweis ist auch hier leicht ersichtlich; denn es sind cf als Nebenwinkel = zwei Rechten, $a + b + c$ = zwei Rechten, daher $f = a + b$; daraus folgt auch, dass die Summe der Aussenwinkel eines Dreieckes (= 3 . 2 R. — 2 R. = 4 R.) gleich vier Rechten ist. Im gleichseitigen Dreiecke sind die Winkel einander gleich, daher jeder $(= \frac{180^0}{3} = 60^0)$ gleich $^2/_3$ eines Rechten.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe derjenigen Winkel, welche an der Hypotenuse liegen, gleich einem Rechten; ist daher in einem rechtwinkligen Dreiecke ausser dem rechten Winkel noch ein anderer bekannt, so kennt man auch die Grösse des dritten; dasselbe gilt auch für jedes beliebige Dreieck, in welchem zwei Winkel ihrer Grösse nach bekannt sind; z. B. in einem Dreiecke enthalte ein Winkel 60°, der andere 45°, so ist, da die Winkelsumme eines Dreieckes 180° beträgt, der dritte Winkel gleich 75°.

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich (siehe Fig. III, Tafel II); ist daher in einem solchen ein Winkel seiner Grösse nach bekannt, so sind es auch die beiden anderen.

Im gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel, welche an der Hypotenuse liegen, jeder gleich einem halben Rechten = 45°.

In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte; die Differenz oder der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte; der grösseren Seite liegt auch immer der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt.

Congruenz der Dreiecke.

§ 18. Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben, decken sich gegenseitig und sind daher congruent, d. h. an Grösse und Form einander gleich. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite und die beiden daranliegenden Winkel gleich haben.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie alle drei Seiten gleich haben. In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite gleich haben. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie einen Schenkel und einen anliegenden Winkel, oder die Basis und einen anliegenden Winkel gleich haben. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Katheten oder eine Kathete und die Hypotenuse gleich haben. Zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Kathete oder eine Hypotenuse gleich haben.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

§ 19. Zwei Dreiecke, welche an Form einander gleich, der Grösse nach aber verschieden sind, heissen ähnlich; zieht man z. B. in einem schon vorhandenen Dreiecke abc (Fig. 14) zu irgend einer Seite eine Parallele, so entsteht ein zweites Dreieck ade, welches dem ersten (grösseren) ähnlich ist.

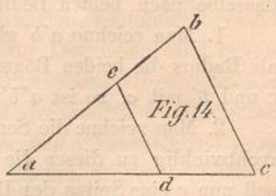


Fig. 14.

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Winkel des einen Dreieckes einzeln den drei Winkeln des andern Dreieckes gleich sind.

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Seiten des einen mit den drei Seiten des andern gleich proportionirt sind. In ähnlichen Dreiecken nennt man die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleichliegende Seiten.

In ähnlichen Dreiecken stehen die gleichliegenden Seiten mit einander in gleichem Verhältniss (Proportion).

Aufgaben über Dreiecke.

Tafel II, Fig. I—X.

§ 20. Ein Dreieck ist im Allgemeinen seiner Grösse und Form nach bestimmt, wenn von den drei Seiten und den drei Winkeln eines solchen drei Stücke davon, z. B. drei Seiten, oder zwei Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel gegeben sind; eine Seite ist immer nothwendig. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch Schenkel und Basis, oder Basis und anliegende Winkel, ein rechtwinkliges Dreieck durch zwei Katheten oder eine Kathete und Hypotenuse bestimmt. Das gleichseitige Dreieck ist durch eine Seite oder auch seine Höhe bestimmt.

§ 21. Gegeben sind drei Strecken ab, bc, ca (Fig. I); es soll aus diesen ein Dreieck construirt werden.

Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit einem Halbmesser gleich bc aus b' einen Bogen über $a'b'$, nehme ferner die Strecke ac in den Zirkel und beschreibe aus a' damit einen zweiten Bogen; beide schneiden sich im Punkte c'; $a'b'c'$ ist das verlangte Dreieck.

Hätte man mit der Strecke bc als Radius den Bogen statt aus b' aus a' beschrieben, und demgemäss auch mit der Strecke ac als Radius den Bogen aus b' beschrieben, so wäre das Dreieck $a'b'c''$ wohl seiner Lage nach verschieden, an Form und Grösse aber dem ersten vollständig gleich (congruent). Die durch den Schnittpunkt der beiden Dreiecksseiten $a'c'$, $a'c''$ gehende Senkrechte heisst die Symmetrieachse beider Dreiecksfiguren.

§ 22. Gegeben ist 1. eine Strecke ab (Fig. II), als die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes, oder 2. die Höhe H eines gleichseitigen Dreieckes; es soll dasselbe nach beiden Bedingungen gezeichnet werden.

1. Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit $a'b'$ als Radius die beiden Bögen $a'c$, $b'c$, verbinde a' mit c und b' mit c, so ist $a'b'c$ das gleichseitige Dreieck.

2. Man zeichne die Senkrechte H' gleich der Höhe, rechtwinklig zu dieser die beiden Parallelen $a'b'$, dc; soll nun c eine Spitze des Dreieckes sein, so beschreibe man mit beliebigem Halbmesser cd einen Viertelskreis und mit gleichem Halbmesser aus d den Bogen ce, ziehe von c durch e eine Gerade, bis sie die untere Parallele in a' schneidet; zieht man jetzt noch mit dem Halbmesser $a'c$ aus a' den Bogen cb', so ist b' ein dritter Eckpunkt und $a'b'c$ das verlangte Dreieck. In Fig. II sind beide Constructionen angegeben.

§ 23. Gegeben sind in Fig. III B als Basis, S als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Man zeichne B' gleich B, beschreibe aus den Endpunkten der Basis mit dem Halbmesser des Schenkels S zwei Bögen über der Grundlinie, so ist deren Schnittpunkt die Spitze des verlangten gleichschenkligen Dreieckes, B' die Basis und S' S'' sind die beiden Schenkel.

§ 24. Gegeben sind (Fig. IV): 1. die Strecke K als die Kathete, die Strecke H als die Hypotenuse, oder 2. K, K' (Fig. V) als die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes.

1. Man zeichne K' gleich K, errichte in einem der Endpunkte die Senkrechte und beschreibe aus dem andern Endpunkte mit einem Halbmesser, welcher gleich der Hypotenusenlänge ist, einen Bogen, welcher die Senkrechte schneidet; verbindet man letzteren Schnittpunkt mit dem Endpunkte der Kathete (hier rechts), so ergibt sich das rechtwinklige Dreieck; oder man zeichne H' gleich H, beschreibe über H' als Durchmesser einen Halbkreis und mit einem Halbmesser gleich K aus dem einen oder andern Endpunkte der Hypotenuse (hier von dem Endpunkte rechts) einen Bogen, so ergibt sich das gleiche Resultat.*)

Beide Constructionsarten sind in Fig. IV angedeutet.

2. Man zeichne K'' gleich K (Fig. V), errichte in einem Endpunkte von K'' die Senkrechte und mache sie gleich lang K' etc.

§ 25. In einem gegebenen Dreieck abc (Fig. VI) sollen die Höhen eingezeichnet werden. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. II und III, Tafel I, angeführten; es sind nämlich von jeder Ecke die Senkrechten zur gegenüber liegenden Seite zu construiren. Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte (siehe § 16).

§ 26. In einem gegebenen Dreieck abc (Fig. VII) sind die Medianen oder Winkelhalbirungslinien einzuzeichnen; die Aufgabe ist gleich der in Fig. VI, Tafel I, ausgeführten. Die Medianen schneiden sich in m; dieser Schnittpunkt hat gleichen Abstand von den drei Seiten des Dreieckes; werden zwei Seiten eines Dreieckes über eine Ecke hinaus verlängert und einer der hierdurch entstandenen Nebenwinkel, z. B. bcd, ebenfalls halbirt, so steht letztere Mediane senkrecht zu mc. Dieses gilt selbstverständlich auch für die übrigen Ecken.

§ 27. In einem gegebenen stumpfwinkligen Dreiecke abc (Fig. VIII) sollen 1. die Mittellothe und 2. die Flächenhalbirungslinien oder Transversalen gezeichnet werden.

*) Die letztere Construction beruht auf dem geometrischen Satz, dass alle Winkel, welche über dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Scheitel in der Peripherie liegen, Rechte sind.

1. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. X, Tafel I, angeführten; es ist nämlich jede der Dreiecksseiten durch Construction zu halbiren und jede der Halbirungslinien bis zu ihrem Schnittpunkte S, welcher hier ausser dem Dreiecke liegt, zu verlängern. S hat gleichen Abstand von den Ecken a, b, c; verbindet man die Ecken mit je einem Mittelpunkte m, m', m'' der gegenüberliegenden Dreiecksseite, so erhält man die Transversalen; m''' ist der Schwerpunkt des Dreieckes etc. (siehe § 16).

In dem gegebenen rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. IX) fällt der Schnittpunkt der Mittellothe auf die Mitte m' der Hypotenuse; ein Mittelloth $b\,m'$ fällt mit der Höhe dieses Dreieckes zusammen.

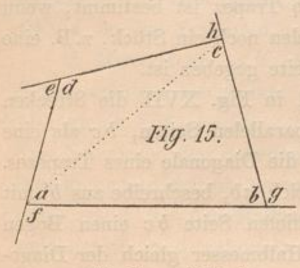
In dem gegebenen gleichseitigen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. X) fallen Höhen, Medianen, Mittellothe und Transversalen zusammen; der Schnittpunkt derselben liegt in der Mitte des Dreieckes, und sein Abstand von den Ecken wie von den Seiten ist gleich.

Das Viereck.

Parallelogramm, Trapez, Trapezoid.

§ 28. Das Viereck ist eine durch vier Strecken begrenzte Figur. Die Strecken heissen Seiten des Viereckes; das Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Eine Gerade, welche zwei Ecken mit einander verbindet und nicht Seite ist, heisst eine Diagonallinie oder kurz Diagonale. Jede Diagonale theilt das Viereck in zwei Dreiecke; die innere Winkelsumme eines jeden Viereckes ist gleich vier Rechten gleich 360°; da nämlich jedes Dreieck zwei rechte Winkel enthält, das Viereck aber in zwei Dreiecke zerlegt werden kann, so enthält dasselbe $2 \cdot 180^0 = 360^0$. Die Aussenwinkel e, f, g, h (Fig. 15) eines Viereckes betragen zusammen ($4 \cdot 2 = 8$ Rechte — Winkel $a + b + c + d$) vier Rechte. (Siehe Dreiecke.)



Vierecke werden eingetheilt in:

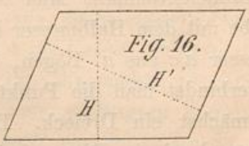
a) Parallelogramme,
b) Trapeze,
c) Trapezoide.

a) Ein Viereck heisst ein Parallelogramm, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten parallel und von gleicher Länge sind. Im Parallelogramm sind je zwei schräg gegenüberliegende Winkel gleich. Die Diagonalen halbiren sich gegenseitig. Unter der Höhe eines Parallelogrammes versteht man den Abstand zweier paralleler Seiten, und kann jede derselben als die Basis betrachtet werden. Bei dem Parallelogramm unterscheidet man noch vier besondere Arten: nämlich Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid.

Ein Parallelogramm heisst ein Quadrat oder Gevierte, wenn es vier gleiche Seiten und einen rechten Winkel hat; die drei übrigen Winkel sind ebenfalls rechte. Die beiden Diagonalen haben gleiche Länge, halbiren die vier Winkel und stehen senkrecht zu einander. (Siehe Fig. XIII, Tafel II.) Ein Parallelogramm heisst Oblong oder Rechteck, wenn es einen rechten Winkel hat; die drei übrigen Winkel sind ebenfalls rechte. (Siehe Fig. XIV Tafel II.) Ein Parallelogramm heisst Rhombus oder Raute, wenn es, wie das Quadrat, vier gleiche Seiten, aber nur je ein paar gleiche Winkel hat; die Diagonalen halbiren ebenso, wie bei dem Quadrat, die Winkel und stehen senkrecht zu einander, sind jedoch ungleich lang. (Siehe Fig. XVI, Tafel II.) Ein Parallelogramm, welches nur je zwei Seiten gleich hat und keinen rechten Winkel enthält, heisst auch Rhomboid, das eigentliche Parallelogramm. (Siehe Fig. XI, Tafel II.) Das Parallelogramm hat im Allgemeinen zwei verschiedene Höhen (H, H', Fig. 16). Im Quadrat fallen die Höhen mit den Seiten zusammen, und da diese alle gleich sind, so gibt es hierfür nur einerlei, d. h. eine Höhe.

Im Rechteck sind die Seiten den Höhen gleich, d. h. fallen mit diesen zusammen.

Im Rhombus oder der Raute sind die beiden Höhen H, H' einander gleich (Fig. 17).



b) Ein Viereck heisst ein Trapez, wenn es nur zwei parallele Seiten hat; die beiden übrigen Seiten, welche schief heissen, können beliebig zu einander geneigt sein. Die Diagonalen sind im Allgemeinen ungleich lang; eine Ausnahme hiervon bildet das gleichschenklige Trapez, dessen beide schiefe Seiten zu den Parallelen gleich oder symmetrisch geneigt sind (siehe Fig. XIX, Tafel II); ihr Convergenzpunkt befindet sich bei entsprechender Verlängerung über der Mitte der beiden Parallelen; fällt man aus dem Convergenzpunkt eine Senkrechte zu den Parallelen, so bildet diese die Symmetrieachse der Figur; die Diagonalen sind in diesem Falle gleich lang. Bei dem Trapez bezeichnet man allgemein nur den Abstand der beiden Parallelen als die Höhe, und jede der Parallelen kann als die Basis oder Grundlinie betrachtet werden.

c) Ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist, heisst Trapezoid.

Winkel und Diagonalen sind im Allgemeinen ungleich gross (siehe Fig. XX und XXI, Tafel II); es können aber auch je zwei Winkel oder je zwei Seiten einander gleich sein; in diesem Falle kann eine der Diagonalen auch zugleich die Symmetrieachse darstellen (z. B. ab, Fig. 18); ist dieses der Fall, oder wird überhaupt im Trapezoid durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt, so heisst die Figur eine symmetrische.

Aufgaben über Vierecke.

Construction des Parallelogrammes.

Tafel II. Fig. XI—XVI.

§ 29. Das schiefwinklige Parallelogramm (Rhomboid) ist seiner Grösse und Form nach bestimmt, wenn zwei Seiten und eine Diagonale oder zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel, oder wenn Basis, Höhe und ein Winkel gegeben sind.

Das Rechteck, wenn zwei Seiten oder eine Seite und eine Diagonale gegeben sind.

Der Rhombus, wenn eine Seite und eine Diagonale, oder zwei Diagonalen, oder eine Seite und der anliegende Winkel gegeben sind.

Das Quadrat ist durch eine Seite oder auch eine Diagonale bestimmt.

§ 30. Fig. XI. Gegeben sind: die Strecken ab, bc als zwei Seiten, ac als die Diagonale eines schiefwinkligen Parallelogrammes. Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit dem Halbmesser bc aus b' und mit dem Halbmesser ac aus a' Bögen, welche sich in c' schneiden; verbindet man die Punkte a', b', c', so erhält man zunächst ein Dreieck. Da nun ein jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt wird, so braucht man nur über der Diagonalen, ein zweites mit $a'b'c'$ congruentes Dreieck zu construiren, indem man mit dem Halbmesser $a'b'$ aus c' und mit dem Halbmesser $b'c'$ aus a' weitere Bögen beschreibt, welche sich in d schneiden; $a'b'c'd$ ist der Rhombus.*)

§ 31. Gegeben ist: 1. die Strecke ab (Fig. XII) als eine Seite, oder 2. die Strecke ab (Fig. XIII) als die Diagonale eines Quadrates.

1. Man zeichne $a'b'$ gleich ab, errichte in b' eine Senkrechte zu $a'b'$, mache sie gleich lang $a'b'$ und schneide durch Bögen, deren Halbmesser gleich der Quadratseite ist, aus a' und c den Punkt d ab; oder 2. man errichte zu der in $a'b'$ übertragenen Diagonalen ab (Fig. XIII) das Mittelloth cmd und beschreibe mit dem Halbmesser ma' aus m den Kreis, so schneidet dieser in c und d weitere Eckpunkte des Quadrates ab.

*) Die weiteren Constructionen nach den in § 29 angegebenen Bedingungen sind hier nicht ausgeführt, da es nicht schwer sein dürfte, die Art der Constructionen durch eigenes Nachdenken zu finden.

§ 32. Gegeben sind: 1. die Strecken ab, bc (Fig. XIV) als die Seiten, oder: 2. (Fig. XV) die Strecke ab als Seite, ac als Diagonale eines Rechteckes.

1. Man mache $a'b'$ gleich ab, errichte in b' eine Senkrechte und mache sie gleich bc, beschreibe aus c' und a' mit dem Halbmesser ab und bc Bögen, welche sich in d schneiden;

2. oder man trage ab nach $a'b'$ (Fig. XV), errichte in b' eine Senkrechte vorläufig von unbestimmter Länge und schneide aus a' mit dem Halbmesser ac den Punkt c' auf derselben ab; zieht man ferner aus a' und c' mit dem Radius $a'b'$, $b'c'$ die weitern Bögen, so ergibt sich d als der vierte Punkt.

§ 33. Gegeben ist in Fig. XVI die Strecke ab als Seite, ac als Diagonale einer Raute.

Man zeichne zuerst die Diagonale $a'c'$ gleich ac, nehme dann ab in den Zirkel und beschreibe aus a' und c' nach jeder Seite der Diagonalen je zwei Bögen, welche sich in b' und d schneiden; a', b', c' d sind die vier Eckpunkte der Raute.

Construction des Trapezes.

Tafel II. Figur XVII—XIX.

§ 34. Ein Trapez ist seiner Form und Grösse nach bestimmt, wenn von den darin enthaltenen vier Seiten, vier Winkeln, zwei Diagonalen und der einen Höhe ausser den beiden Parallelen (siehe § 28) noch zwei Stücke, z. B. die Diagonale und eine schiefe Seite, oder die Höhe und eine schiefe Seite, oder die schiefe Seite und ein anliegender Winkel*), im Ganzen also vier Stücke gegeben sind.

Das gleichschenklige Trapez ist bestimmt, wenn ausser den beiden Parallelen noch ein Stück, z. B. eine Höhe oder eine schiefe Seite gegeben ist.

§ 35. Gegeben sind in Fig. XVII die Strecken ab, dc als die beiden parallelen Seiten, bc als eine schiefe Seite und ac als die Diagonale eines Trapezes.

Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe aus b' mit dem Halbmesser der schiefen Seite bc einen Bogen über $a'b'$ und mit dem Halbmesser gleich der Diagonalen ac aus a' einen Bogen. Beide schneiden sich in c', man verbinde b' mit c'; aus c' ziehe man die Parallele zu $a'b'$ und mache diese gleich dc, so ist $a'b'c'd'$ das durch drei Seiten und eine Diagonale bestimmte Trapez.

§ 36. Gegeben sind: 1. die beiden parallelen Seiten und die Höhe (Fig. XVIII) oder: 2. die beiden parallelen Seiten und die schiefe Seite eines gleichschenkligen Trapezes (Fig. XIX).

1) Man zeichne $a'b'$ (Fig. XVIII) gleich ab, errichte auf der Mitte m' derselben eine Senkrechte, mache

*) Letzterer Fall ist hier nicht ausgeführt.

diese gleich der Höhe *H* und zeichne durch deren Endpunkt *m* eine Parallele zu *a′b′*, halbire die gegebene Strecke *dc* und trage eine solche Hälfte von *m* aus nach rechts und links auf, verbinde *a′* mit *d′* und *b′* mit *c′*, so ist *a′b′c′d′* das gleichschenklige Trapez.

2. Man zeichne *a′b′* (Fig. XIX) gleich der gegebenen Strecke *ab*, errichte über der Mitte *m* eine Senkrechte, halbire die als Parallele gegebene Strecke *dc* und trage eine solche von *m* aus nach *1* und *2*, errichte in *1* und *2* Senkrechte, beschreibe ferner aus *a′* und *b′* mit dem Halbmesser der schiefen Seite *bc* Bögen, welche die beiden Senkrechten aus *1* und *2* in *d′* und *c′* schneiden, so ist *a′b′c′d′* das gleichschenklige Trapez.

Construction des Trapezoides.

Tafel II. Figur XX und XXI.

§ 37. Ein Trapezoid ist seiner Form und Grösse nach bestimmt, wenn von den vier Seiten, zwei Diagonalen und vier Winkeln, welche ein Viereck enthält, vier Seiten und eine Diagonale, oder vier Seiten und der von zwei bestimmten Seiten eingeschlossene Winkel, oder drei Seiten und der von je zwei Seiten eingeschlossene Winkel*), im Ganzen also fünf Elemente gegeben sind.

§ 38. Gegeben sind: 1. die Strecken *ab*, *bc*, *cd*, *da* (Fig. XX) als die Seiten, die Strecke *bd* als die Diagonale, 2. die Strecken *ab*, *bc*, *cd*, *da* (Fig. XXI) als die Seiten, und ein durch die Seiten *ab*, *bc* eingeschlossener Winkel gleich 75°.

1) Man zeichne die Seite *a′b′* gleich *ab* (Fig. XX), beschreibe mit dem Halbmesser *ad* einen Bogen aus *a′* und mit dem Halbmesser der Diagonalen *bd* einen Bogen aus *b′*, beide schneiden sich in *d′*; beschreibt man ferner aus *d′* mit dem Halbmesser *dc*, sowie aus *b′* mit dem Halbmesser *bc* zwei Bögen, so schneiden sich diese in *c′*: *a′b′c′d′* ist das Trapezoid.

2. Man zeichne *a′b′* (Fig. XXI) gleich *ab*, construire an dem Endpunkte *b′* den gegebenen Winkel *abc* gleich 75° (= 60 + 30 — 15) (siehe Blatt I, Fig. X), mache den Schenkel *b′c′* desselben gleich der Strecke *bc* und beschreibe aus *c′* mit dem Halbmesser *cd*, sowie aus *a′* mit dem Halbmesser *ad* die beiden Bögen, welche sich in *d′* schneiden, so ist *a′b′c′d′* das verlangte Trapezoid.

Aufgaben über das Zeichnen ähnlicher Figuren.

(Vergrössern und Verkleinern einer gegebenen Figur.) Auftragen verschiedener Massstäbe etc.

Tafel III. Figur I—X^a.

§ 39. Da jede Figur in eine Anzahl Dreiecke zerlegt und in ähnlichen Figuren ähnliche Dreiecke gezeichnet werden können (siehe Fig. I, Tafel III), ebenso das Theilverhältniss einer Strecke auf eine andere grössere oder kleinere übertragen werden kann (siehe Fig. XII, Tafel I), so kann man auf Grund dieser Aehnlichkeitsgesetze mit Hilfe von sog. Proportional- oder Winkelmassstäben (ähnliche Dreiecke) eine gegebene Figur leicht in eine grössere oder kleinere umwandeln, d. h. eine gegebene Figur grösser oder kleiner zeichnen.

In Fig. I ist z. B. das Dreieck *abc* gegeben; es soll 1. in ähnliche, oder 2. in congruente Dreiecke zerlegt werden.

1. Man theile irgend eine Seite, etwa *ab*, zuerst in beliebig viele gleiche oder ungleiche Theile (hier wurden drei gleiche Theile angenommen) und ziehe aus den Theilpunkten *1* und *2* die Parallelen zu einer Seite *ac*, welche die Seite *bc* in den Punkten *1′*, *2′* schneiden, so sind die Dreiecke *b11′*, *b22′* *bac* einander ähnlich, da sie je gleich liegende Winkel gleich haben und gleich liegende Seiten gleich proportionirt sind. Dasselbe gilt auch von den Dreiecken *c1′2″*, *c2′1″* u. s. w.

2. Da die beiden Seiten *ac*, *bc* durch die aus den Theilpunkten *1* und *2* gezogenen Parallelen ebenfalls in drei gleiche Theile getheilt wurden, so zerfällt, wenn man zuletzt noch aus *1′*, *2′* oder *1″*, *2″* die Parallelen zu *ab* zieht, das gegebene Dreieck in neun congruente Dreiecke, welche sämmtlich dem gegebenen *abc* ähnlich sind.

Fig. II. Gegeben ist das Fünfeck *abcde*; es soll ein kleineres und dem gegebenen ähnliches gezeichnet werden, dessen eine gleichliegende Seite mit *ae* zusammenfällt und deren Grösse gleich *a′e* bestimmt wird.

Man ziehe die Diagonalen *eb*, *ec* (welche man gleich über *e* hinaus verlängern kann), ziehe aus *a′* parallel zu *ab*, aus *b′* parallel zu *bc* u. s. w., so ist das Fünfeck *a′b′c′d′e* dem gegebenen ähnlich. Das aussen liegende kleinere Fünfeck *a″b″c″d″e* ist dem gegebenen gleichfalls ähnlich; hierbei wurde *a″b″* als die mit *ab* gleichliegende oder ähnliche Seite bestimmt, *a″b″* daher parallel mit *ab*, *b″c″* parallel mit *bc* u. s. w. gezogen.

§ 40. In Fig. III ist ein Gesimsprofil gegeben; es soll dasselbe verkleinert werden, nachdem irgend eine Seite, z. B. *b′c′* in Fig. III^b kleiner angenommen ist.

Man zeichne eine Gerade *de* (Fig. III^a), beschreibe mit dem Halbmesser *bc* aus *d* einen Bogen *ef*, trage auf diesen die in Fig. III^b gegebene Strecke *b′c′* von *e* aus als Sehne auf, verbinde *d* mit *f*, so ist der Kreissector *def* der für die Verkleinerung benützbare Proportionalmassstab. Um nun z. B. die Strecke *b′a′* zu finden, entnehme man aus Fig. III die gleichliegende Strecke *ba*, beschreibe mit dieser als Halbmesser aus *d* einen Bogen und trage dessen Sehne nach *b′a′* in Fig. III^b über; ebenso verfährt man, um die übrigen Punkte zu finden.

§ 41. In Fig. IV ist die Ansicht eines Postamentes

*) Die Construction nach der letzten Bedingung ist hier nicht weiter ausgeführt.

gegeben; dasselbe soll 1. kleiner, 2. grösser gezeichnet werden.

1. Man betrachte die Senkrechte $a'b'$ in Fig. IV^a als die verkleinerte Symmetrieachse, zeichne dieselbe nebenan etwa in $a''b''$ auf der gleichen Grundlinie, auf welcher $a'b'$ steht, ziehe die Horizontale $b''b'$, beschreibe mit der aus Fig. IV entnommenen Grösse ab aus a'' einen Bogen, welcher die Gerade $b''b'$ in d schneidet, und verbinde a'' mit d. Trägt man nunmehr die einzelnen Höhenabschnitte aus Fig. IV auf die Gerade $a''d$ in gleicher Ordnung von a'' aus über und zieht aus den entsprechenden Theilpunkten die Horizontalen, so wird damit die Symmetrieachse $a'b'$ in demselben Verhältniss getheilt, wie ab durch die Wagrechten getheilt ist. Um mit Hilfe desselben Dreieckes $a''b''d$ auch die entsprechenden Breiten antragen zu können, nehme man z. B. die Länge ac aus Fig. IV in den Zirkel, trage sie von d aus nach r, setze sodann die Zirkelspitze in r ein und schliesse den Zirkel, bis ein Bogen die Gerade $b''d$ berührt. Die so erhaltene Grösse trage man von a' aus nach beiden Seiten der Fig. IV^a an; in gleicher Weise findet man sämmtliche Breiten.*)

2. Man betrachte die Senkrechte $a'''b'''$ in Fig. IV^b als die vergrösserte Symmetrieachse, beschreibe mit derselben als Radius aus a''' einen Bogen $b'''b^4$, ziehe aus dem Punkte b der Fig. IV eine Horizontale, welche den Bogen in b^4 schneidet, und verbinde a''' mit b^4. Zieht man nun aus sämmtlichen Höhenabschnitten der Fig. IV die Horizontalen, bis sie die Schräge $a'''b^4$ schneiden, und denkt man sich letztere mit den darauf erhaltenen Abschnitten wieder in ihre ursprüngliche Lage nach $a'''b'''$ zurückgedreht, so ist damit $a'''b'''$ in demselben Verhältniss getheilt, wie ab in Fig. IV oder auch wie $a'b'$ in Fig. IV^a. Um die entsprechenden Breiten für die Fig. IV^b zu finden, stelle man z. B. ac in Fig. IV senkrecht in ac' auf, ziehe von c' die Horizontale $c'c'''$ und lege die Strecke $a'''c'''$ von a''' aus nach $a'''c^4$ nieder, oder man verlängere in Fig. IV^b die Symmetrieachse, etwa nach aufwärts, entnehme aus Fig. IV die entsprechenden Breiten und trage sie auf die verlängerte Symmetrieachse in Fig. IV^d von einem beliebig gewählten Punkte a aus nach aufwärts, ziehe aus a eine Parallele zu $a'''b^4$ und ziehe aus den vorhin aufgetragenen Abschnitten die Wagrechten, welche auf $a'b$ die vergrösserten Breiten ergeben. Letztere trage man in Fig. IV^b in entsprechender Ordnung an.

§ 42. In Fig. V ist ein unregelmässiges Viereck gegeben. Es soll ein ähnliches kleineres oder grösseres gezeichnet werden.

Ist $a'b'$ (Fig. V^a) als eine verkleinerte, mit ab in Fig. V gleichliegende Seite bestimmt, so construire man an den Endpunkten a' und b' die gleichen Winkel, wie bei a und b, und zeichne die Schenkel vorerst unbestimmt lang, ziehe in Fig. V eine Diagonale ac und unter gleichem Winkel (cab) aus a' die Diagonale $a'c'$; diese schneidet die Gerade aus b' in c'; das Dreieck $a'b'c'$ in Fig. V^a ist ähnlich dem Dreiecke abc in Fig. V; zieht man ferner $c'd'$ unter dem gleichen Winkel zu $c'b'$ wie cd zu cb in Fig. V, so schneidet $c'd'$ die vorher gezogene Gerade $a'd'$ in d'. Beide Vierecke sind ähnlich, da sie aus ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind (siehe § 19).

In den ähnlichen Rechtecken Fig. X und X^a ist ein gegebenes Blattornament mittelst der in jedem der ähnlichen Rechtecke eingezeichneten Quadrate oder kleinen Rechtecke verkleinert worden. Die Anzahl der Quadrate ist in jedem der Rechtecke gleich.

Das Antragen verjüngter Massstäbe.

§ 43. Da ein Gegenstand nur höchst selten in seiner wahren Grösse gezeichnet werden kann, so bedient man sich zu technischen Zeichnungen fast immer sog. verjüngter Massstäbe, d. h. man setzt an die Stelle der wirklichen Grösse irgend eine kleinere Masseinheit. Wird z. B. statt eines ganzen Meters nur 1 dm oder 1 cm genommen, so ist damit ausgedrückt, dass ein Gegenstand in $^1/_{10}$ oder $^1/_{100}$ seiner wirklichen Grösse, d. i. im Massstabe von 1 : 10 oder 1 : 100 (sprich Eins zu zehn oder Eins zu hundert) gezeichnet ist; ein Meter bedeutet also in diesen beiden Fällen 10 oder 100 Meter.

Soll z. B. ein Gegenstand in einem Zwanzigstel seiner natürlichen Grösse oder im Massstab von 1 : 20 gezeichnet werden, so sind an Stelle eines Meters 5 cm (Fig. VI) zu setzen. Man findet die Zahl 5, indem man die hundert cm, welche ein Meter enthält, durch 20 dividirt (z. B. $\frac{100}{20} = 5$ cm). In Fig. VII ist ein Massstab gleich 1 : 25 gefertigt ($1 : 25 = \frac{100}{25} = 4$).

Fig. VIII zeigt einen sogenannten Transversalmassstab im Verhältniss von 1 : 10, d. h. 10 cm gleich 1 Meter.

Man zeichne zuerst auf der obersten Geraden einen einfachen Massstab gleich 1 : 10*), ziehe im Endpunkte links eine Senkrechte nach abwärts und trage darauf zehn beliebige, aber gleiche Theile, ziehe aus diesen Theilpunkten Parallele mit der ersten eingetheilten Geraden, endlich ziehe man aus den Punkten *0*, *1*, *2* . . . ebenfalls die Senkrechten und theile die unterste Strecke von *0* nach links ebenso wie oben. Zieht man nun von *1* nach dem Punkte *0* die Transversale und mit dieser parallel aus *2*, *3*, *4* . . . die Parallelen nach den unteren Theilpunkten, so ist dies ein Massstab, auf welchem

*) Die gleiche Aufgabe hätte auch nach der in Fig. III und III^b angegebenen Methode gelöst werden können. Die letztere ist jedoch die kürzere und einfachere.

*) Die ganzen Meter sind hier nochmals halbirt worden.

man Meter, Decimeter und Centimeter auf einmal abmessen kann. Die einzelnen zwischen der Senkrechten *0 0* und der Transversalen *1 0* liegenden Abschnitte enthalten von unten nach oben je 1, 2, 3, 4 ... Centimeter; die zwischen zwei Transversalen liegenden gleichen Strecken sind Decimeter.

Soll daher z. B. eine Länge von 2,270 m diesem Massstabe entnommen werden, so nehme man auf derjenigen Horizontalen, welche durch den Punkt *7* geht, die Strecke *b′* bis *a′* (*b′* bis *7* = 2 m, *7* bis *a′* = 7 cm + 2 dm) in den Zirkel. Zur besseren Veranschaulichung ist diese Länge auf eine Gerade in Fig. IX übertragen worden.

Das Vieleck (Polygon).

§ 44. Unter einem Vielecke (Polygon) versteht man eine durch mehrere Strecken begrenzte Flächenfigur; jede Strecke heisst eine Seite des Vieleckes; es heisst je nach der Zahl der Seiten oder Ecken ein Fünf-, Sechs-, Siebeneck u. s. w. Die Anzahl der Winkel und Seiten ist gleich. Eine jede Gerade, welche zwei Ecken verbindet und nicht Seite ist, heisst Diagonale. In jedem Vieleck ist die Summe der innern Winkel $= n \,.\, 2 - 4$ Rechten; n bedeute hier irgend eine bestimmte Zahl von Seiten oder Ecken, z. B. sechs, so ist $6 \,.\, 2 - 4 = 8$ Rechten. Ein Sechseck enthält somit als Winkelsumme acht Rechte gleich 720°.

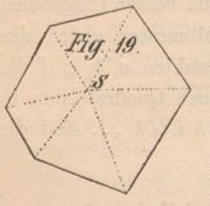


Fig. 19.

Um sich davon zu überzeugen, wähle man innerhalb des Sechseckes einen beliebigen Punkt *S* (Fig. 19), ziehe von den Ecken Gerade nach *S*, wodurch das Polygon in sechs Dreiecke zerlegt wird. Nun ist nach § 17 die Winkelsumme eines Dreieckes gleich zwei Rechten; die Winkelsumme der sechs Dreiecke somit gleich 6 . 2 Rechten; davon sind aber die um *S* liegenden Winkel, welche zusammen vier Rechte ausmachen und nicht zu den Vieleckswinkeln gehören, abzuziehen; somit verbleiben noch acht Rechte. Demnach enthält ein Siebeneck zehn Rechte, ein Achteck zwölf Rechte u. s. w.*)

Vielecke können eingetheilt werden in gleichseitige, gleichwinklige, regelmässige (reguläre) und unregelmässige (irreguläre). Ein Vieleck ist nur dann regulär, wenn es gleiche Seiten und gleiche Winkel hat; alle andern sind irregulär. In Verbindung mit dem Kreis heisst ein Polygon, dessen Ecken in der Peripherie eines Kreises liegen und dessen Seiten somit Sehnen desselben bilden, ein Sehnenvieleck. Ein Vieleck, dessen Seiten als Tangenten erscheinen, heisst ein Tangentenvieleck; im erstern Falle heisst der Kreis umschrieben, im zweiten einbeschrieben.

Jedes reguläre Vieleck ist zugleich Sehnenvieleck und Tangentenvieleck, da ein Kreis sowohl umschrieben als einbeschrieben werden kann (Fig. 20). Das Centrum des Kreises ist zugleich das Centrum des Polygons.*)

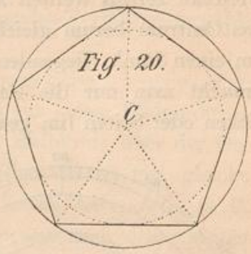


Fig. 20.

Gerade, welche von dem Mittelpunkte eines regulären Polygons nach den Ecken gezogen werden, haben gleiche Länge und zerlegen dasselbe in congruente, gleichschenklige Dreiecke.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich für die Construction eines regulären Vieleckes mittels des sogenannten Transporteurs ein allgemein giltiges Verfahren; z. B. es soll 1. ein reguläres Polygon, etwa ein Achteck construirt werden, wenn die Länge einer Seite *a b* gegeben ist, oder es soll 2. ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

1. Man berechne nach § 44 die Winkelsumme des Polygons, welche in diesem Falle = 12 Rechten = 1080° ist, theile dieselbe durch die Zahl der Seiten oder Ecken, in diesem Falle also durch acht, so ergibt sich die Grösse des Winkels, welchen zwei Seiten einschliessen (hier gleich 135°).

Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 21 unschwer zu ersehen; sind einmal zwei Seiten eines regulären Polygons in ihrer Neigung zu einander bekannt, so lässt sich der Mittelpunkt eines durch die Ecken gehenden umschriebenen (oder auch eines einbeschriebenen) Kreises dadurch finden, dass man auf der Mitte einer jeden Seite Senkrechte errichtet, welche sich im Mittelpunkte *C* des zu

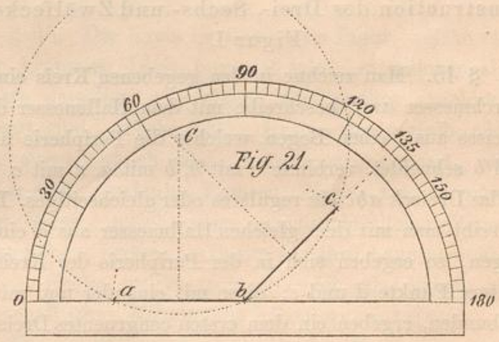


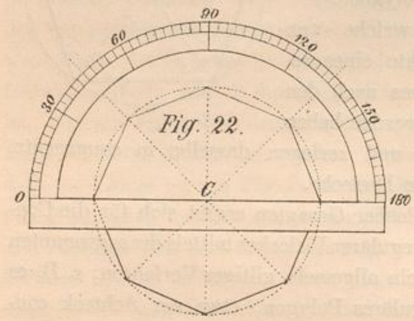
Fig. 21.

*) Ebenso kann auch die Summe der Aussenwinkel eines Polygons, welche stets gleich vier Rechten ist, berechnet werden (z. B. 6 . 2 Rechte = 12 Rechte − 8 = 4 Rechte, siehe § 17).

*) Je grösser in einem regulären Polygone die Anzahl der Seiten ist, desto mehr nähert es sich der Kreisform; ein reguläres Polygon mit unendlich vielen Seiten kann als ein Kreis betrachtet werden.

umschreibenden Kreises schneiden (siehe Fig. 21). Auf diesen letztern trage man die Seitengrösse wiederholt an; sie wird in diesem Falle achtmal ohne Rest enthalten sein.

2. Da jedes Polygon in gleichschenklige, congruente Dreiecke zerlegt werden kann, und deren Winkel um das Centrum herum gleich sind, und die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel gleich 360^0 ist, so braucht man nur die Zahl 360 mit der Anzahl der Ecken oder Seiten (im gegebenen Falle 8) zu dividiren, um diejenige Winkelgrösse zu erhalten, welche von je zwei Schenkeln eines solchen Dreieckes eingeschlossen wird (in diesem Falle $\frac{360}{8} = 45^0$). Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 22 ersichtlich.



(Ueber weitere Constructionsmethoden siehe Aufgaben Taf. IV.)

Aufgaben über reguläre Vielecke (Polygone).

Tafel IV. Figur I—XIII.

Es soll (Fig. I—V) ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

Construction des Drei-, Sechs- und Zwölfeckes, Figur I.

§ 45. Man zeichne in den gegebenen Kreis einen Durchmesser *amf*, beschreibe mit dem Halbmesser des Kreises aus *f* einen Bogen, welcher die Peripherie in *c* und *b* schneidet, verbinde *c* mit *b*, *b* mit *a*, *a* mit *c*, so ist das Dreieck *abc* ein reguläres oder gleichseitiges. Beschreibt man mit dem gleichen Halbmesser aus *a* einen Bogen, so ergeben sich in der Peripherie des Kreises weitere Punkte *d* und *e*; diese mit einander und mit *f* verbunden, ergeben ein dem ersten congruentes Dreieck in entgegengesetzter symmetrischer Lage; verbindet man die auf der Peripherie liegenden Punkte *a*, *d*, *d*, *e*, *e*, *f* . . ., so erhält man das reguläre Sechseck.

Die symmetrisch liegenden Dreiecke *abc*, *def* bilden ein reguläres Sternpolygon und im Innern desselben ein zweites reguläres Sechseck. Halbirt man die Bögen *da*, *ae* u. s. w., oder verlängert man die Diagonalen des im Innern der beiden Dreiecke entstandenen Sechseckes bis zur Peripherie, so ergeben sich die Punkte *i* und *k*, und diese mit je zwei auf der Peripherie nächstliegenden Punkten verbunden bilden die Zwölfecksseiten. (Das Zwölfeck ist hier nur zur Hälfte ausgeführt.)

Der Winkel, den zwei Dreiecksseiten bilden, beträgt 60^0, der Winkel, den zwei Sechsecksseiten bilden, 120^0 u. s. w. (Siehe § 44.)

Construction des Vier-, Acht- und Sechszehneckes.

§ 46. In den gegebenen Kreis (Fig. II) zeichne man zwei zu einander senkrechte Durchmesser, z. B. *ac*, *bd*, und verbinde *a*, *b*, *b*, *c*, *c*, *d*, *d*, *a*, so erhält man das reguläre Viereck (Quadrat); halbirt man die durch die Diagonalen *ac*, *db* gebildeten vier rechten Winkel, so schneiden die Halbirungslinien auf der Peripherie vier weitere Punkte *e*, *g*, *h*, *f*, und diese als Seiten verbunden ergeben ein zweites Quadrat *efgh*, dessen Seiten mit den Diagonalen *ac*, *bd* des ersten Quadrates parallel sind; verbindet man nun *a* mit *h*, *h* mit *d*, *d* mit *g* u. s. w., so erhält man das reguläre Achteck; durch Halbiren der 45^0 Winkel *hma*, *ame* . . . erhält man ein Sechszehneck u. s. w. Der Winkel, den zwei Achtecksseiten mit einander bilden, ist gleich 135^0 (= 8 . 2 Rechten — 4 Rechten. Siehe § 44); den Winkel, den ein gleichschenkliges Dreieck *imh* bei *m* bildet, ist gleich 45^0 ($\frac{360}{8} = 45$).

§ 47. In einem gegebenen Quadrat *abcd* (Fig. III) soll ein reguläres Achteck so eingezeichnet werden, dass vier Seiten desselben mit den Quadratseiten zusammenfallen.

Man zeichne in das Quadrat die beiden Diagonalen *ac*, *bd*, beschreibe mit einem Halbmesser gleich der halben Diagonalen aus den Eckpunkten *a*, *b*, *c*, *d* die Viertelskreise, welche die gegebenen Quadratseiten in *e*, *k*, *d*, *g*, *f*, *i*, *h*, *l* schneiden; *gh*, *hi*, *ik* . . . sind die Achtecksseiten.

Construction des Fünf- und Zehneckes.

§ 48. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. IV) einen Durchmesser *ab*, errichte in dem Mittelpunkte *m* eine Senkrechte *mc*, halbire *am* in *n*, beschreibe mit dem Halbmesser *nc* aus *n* einen Bogen, welcher den Durchmesser in *d* schneidet, so ist die Strecke *cd* gleich einer Fünfecksseite und die Strecke *md* gleich einer Zehnecksseite; die Strecke *cd* trage man wiederholt auf die Peripherie, in welcher sie dann genau fünfmal als Sehne enthalten ist. Zieht man von einem Fünfeckspunkte *g* oder *f* durch *m*, so erhält man gleichfalls Punkte für das Zehneck und ist *ck* und *ci* gleich *md*, gleich einer Zehnecksseite.

Construction eines regulären Vieleckes mit beliebiger Seitenzahl (n Eck).*)

§ 49. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. V) zwei Durchmesser senkrecht zu einander, und verlängere jeden derselben von *a* und *d* über die Peripherie hinaus,

*) *n* bedeutet hier irgend eine beliebige Seitenzahl.

theile einen der Durchmesser, z. B. ab, in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will*), z. B. sieben, trage einen solchen Theil von der Peripherie aus nach aussen in ac, de auf die verlängerten Durchmesser an und ziehe die Gerade ce, welche die Peripherie in zwei Punkten schneidet; verbindet man nun denjenigen Schnittpunkt f, welcher dem getheilten Durchmesser am nächsten liegt, mit dem zunächst liegenden dritten Theilpunkte 3, so ist $f3$ gleich einer n-Ecksseite; im gegebenen Falle also, da der Durchmesser ab in sieben Theile getheilt wurde, gleich einer Siebenecksseite, welche daher als Sehne siebenmal ohne Rest auf die Peripherie getragen werden kann.

Es soll ein reguläres Polygon construirt werden, wenn die Länge einer Seite gegeben ist.

§ 50. In Fig. VI ist die Seite eines Sechseckes gegeben.

Man mache ab gleich der Strecke $a'b'$, welche als Seitenlänge eines Sechseckes gegeben ist, beschreibe aus a und b mit dem Halbmesser gleich der Seitenlänge die Bögen amc, bmf, beschreibe aus m den Kreis durch ab, so ist in diesem ab sechsmal als Sehne enthalten.

§ 51. In Fig. VII ist ab gleich $a'b'$ als die Seite eines Achteckes gegeben.

Man beschreibe über ab einen Halbkreis, zeichne in denselben das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck anb, trage eine Kathetenlänge an oder bn von n nach m, beschreibe aus m durch ab einen Kreis, so ist in letzterem die Strecke ab achtmal enthalten und braucht nur herumgetragen zu werden.

§ 52. In Fig. VIII ist ab gleich $a'b'$ als Fünfecksseite gegeben.

Man beschreibe aus einem Endpunkte, z. B. b, mit dem Radius ba den Bogen $acfn$, errichte in b eine Senkrechte bc, halbire ab in m, und ziehe mc; die Strecke mc lege man von m aus in md nieder und beschreibe aus a und b mit dem Halbmesser ad Bögen, welche sich in e, d. i. über der Mitte von ab schneiden. Die Geraden ae, be sind Diagonalen des Fünfeckes, e die der Seite ab gegenüberliegende Spitze. Zieht man aus e mit dem Halbmesser gleich ab einen weitern Bogen, so ergibt dieser die Eckpunkte g und f.

Wäre $a'b'$ als eine Zehnecksseite bestimmt worden, so würde diese in einem Kreise, welcher aus e durch ab beschrieben wird, zehnmal als Sehne enthalten sein.

§ 53. In Fig. IX ist ab gleich $a'b'$ als Zwölfecksseite gegeben.

Um den Kreis zu erhalten, in welchem ab zwölfmal als Sehne enthalten ist, zeichne man über ab ein gleichseitiges Dreieck anb, errichte über der Mitte von ab eine Senkrechte und trage an oder bn von n nach m; m ist der Mittelpunkt und ma oder mb der Halbmesser des gesuchten Kreises, auf welchem die Strecke zwölfmal herumgetragen werden kann.

§ 54. Sollte ein reguläres Vieleck gezeichnet werden, dessen Seitenzahl gleich n, d. h. eine beliebige sein kann, so könnte etwa folgendes Verfahren gewählt werden.

Man verlängere die gegebene Seite ab gleich $a'b'$ (Fig. X) nach links, beschreibe aus einem Endpunkte a mit dem Halbmesser ab einen Halbkreis über der Geraden $ba7$, und theile denselben in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will, z. B. sieben. Zieht man nun von a aus nach dem zweiten Theilpunkt über 7 die Gerade ag, so ist diese eine zweite Seite und gab der Winkel, unter welchem die beiden Seiten eines Siebeneckes zu einander geneigt sind. Der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe, welche über den Seiten ab, ag errichtet wurden.

In Fig. XI ist ein Sternpolygon, die sog. Windrose, dargestellt, wie selbe ähnlich auf einem Compasse angegeben ist. Die acht Hauptspitzen sind nach den Himmelsrichtungen, z. B. *N* Nord, *W* West, *NW* Nordwest u. s. w. bezeichnet.

Fig. XII und XIII sind Netzwerke, welche mittels der Reissschiene und eines sog. 60° Winkels gezeichnet werden können, und sind die Constructionen der Figur XI, sowie der Figuren XII und XIII aus der Zeichnung unschwer ersichtlich.

Der Kreis.

§ 55. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie begrenzt wird, in welcher alle Punkte derselben von einem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind. (Siehe § 2.) Kreise, deren Halb- oder Durchmesser gleich sind, heissen congruent; alle Kreise sind ähnliche Figuren; Kreise von verschiedener Grösse, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heissen in Bezug auf ihre Lage concentrisch; Kreise, welche sich schneiden, also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, excentrisch.

Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Centrum kleiner ist, als dessen Halbmesser; er liegt auf der Peripherie, wenn sein Abstand gleich dem Halbmesser, und ausserhalb, wenn sein Abstand grösser ist als der Halbmesser; das gleiche gilt auch von einer Geraden, welche im ersten Falle den Kreis in zwei Punkten schneidet (Secante), im zweiten berührt und im dritten ausserhalb des Kreises liegt. Je näher eine Sehne dem Mittelpunkte liegt, desto grösser ist sie, und umgekehrt; die grösste Sehne heisst Durchmesser (siehe § 2).

Eine Senkrechte, welche von dem Mittelpunkte

*) Das Verfahren kann nur vom Sechsecke aufwärts angewendet werden; bei einem Sechsecke ist die Gerade ce Tangente.

gegen eine Sehne gefällt wird, halbirt dieselbe, und umgekehrt; errichtet man auf der Mitte einer Sehne eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt (siehe Fig. 23).

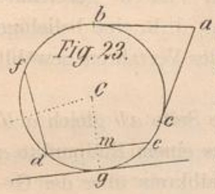


Fig. 23.

Eine Gerade wird zur Tangente, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällte Senkrechte gleich dem Radius ist; die Tangente hat mit der Peripherie nur einen Punkt gemein und steht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht.*) Von einem Punkte a ausserhalb des Kreises können nur zwei Tangenten an denselben gelegt werden; die Entfernungen der Berührungspunkte b, c (Fig. 23) von dem gegebenen Punkte sind gleich.

Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich ist der Summe ihrer Halbmesser; die Berührung heisst in diesem Falle eine äussere (siehe Fig. 24).

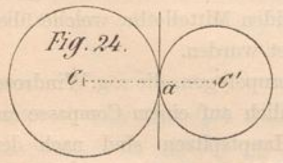


Fig. 24.

Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich ist dem Unterschiede (Differenz) der beiden Halbmesser (siehe Fig. 25); die Berührung heisst in diesem Falle eine innere. Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt immer in der Geraden (Centrale), welche die beiden Mittelpunkte verbindet. Eine Gerade, welche in dem Berührungspunkte der beiden Kreise senkrecht zur Centralen steht, heisst eine gemeinschaftliche Tangente.


Fig. 25.

Ein Kreis ist seiner Grösse nach bestimmt:

a) durch den Radius oder Diameter;

b) durch zwei mit den Endpunkten aneinander stossende Sehnen**);

c) durch eine Sehne und einen Punkt, welcher ausserhalb der Sehne liegt und nicht mit deren Verlängerung zusammenfällt;

d) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen;

*) Die Tangente eines Kreises bezeichnet auch die jeweilige Richtung, welche die Kreislinie an dem betreffenden Punkte einnimmt, d. h., wenn man sich die Kreislinie durch Bewegung eines Punktes entstanden denkt, und der Punkt während derselben von einer bestimmten Stelle an seine Richtung unverändert beibehält (gerade fortschreitet), so fällt letztere mit einer Tangente an dieser Stelle der Curve zusammen.

**) Die Lösung ist nur dann nicht möglich, wenn die beiden Sehnen in eine Gerade zusammenfallen, da in diesem Falle der Radius unendlich gross, und damit auch der Kreis zu einer Geraden wird.

e) durch den Winkel, welchen eine Sehne und eine Tangente an einem Punkte der Peripherie bilden.

Die Auffindung des Kreismittelpunktes nach der Bestimmung b ist schon in Fig. 23 angedeutet. Betrachtet man nämlich ab, ac (Fig. 26) als die aneinander stossenden Sehnen und errichtet man auf der Mitte von ab die Senkrechte (Mittelloth), so liegt auf dieser irgendwo der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises; dieses Mittelloth hat die Eigenschaft, dass die Entfernungen eines jeden Punktes auf demselben von den Endpunkten der Sehne (a, b) stets gleich sind; es könnten somit, soferne man nur die eine Sehne in Betracht zieht, eine Reihe von Kreisen oder Kreisbögen durch ab gezeichnet werden, deren Mittelpunkte sämmtlich auf dem Mittellothe liegen müssen; eine Linie aber, auf welcher das Gesuchte liegen muss, heisst auch ein geometrischer Ort; zeichnet man nun noch das Mittelloth zur Sehne ac, so bildet dieses für die Sehne ac einen weiteren geometrischen Ort; da auf beiden das Gesuchte liegen muss, zwei Gerade sich aber nur in einem Punkte schneiden, so kann der Mittelpunkt eines Bogens, bzw. eines Kreises, welcher durch a, b, c geht, nur in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe (geometrische Oerter) liegen.

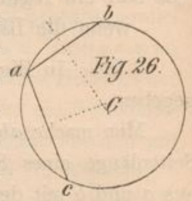


Fig. 26.

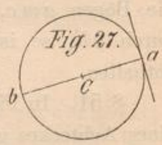


Fig. 27.

c) Dieser Fall führt auf die gleiche Aufgabe b) zurück, wenn man den gegebenen Punkt mit irgend einem Endpunkte als Sehne verbindet und ebenso verfährt wie vorhin.

d) Die Lösung ist gleich den Vorhergehenden, wenn man sich die drei Punkte durch Sehnen verbunden denkt.

e) Der Winkel, den eine Sehne mit einer Tangente bilden kann, ist entweder ein spitzer, bzw. stumpfer, oder ein rechter*); steht die Sehne rechtwinklig zur Tangente, so fällt sie mit dem Durchmesser zusammen (siehe Fig. 27), und das Kreiscentrum liegt auf der Mitte derselben. Ist der Winkel, welcher durch eine Sehne und Tangente gebildet wird (siehe Fig. 28), ein spitzer, bzw. ein stumpfer (je nachdem man den einen oder anderen der beiden Nebenwinkel bad oder bac in Betracht zieht), so ist die Auffindung des Kreismittelpunktes, wie schon in

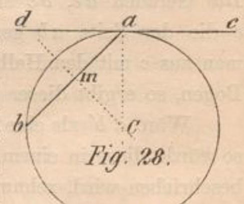


Fig. 28.

*) Würden Sehne und Tangente einen flachen Winkel bilden, oder mit anderen Worten in eine Gerade zusammenfallen, so würden die beiden Geraden, welche die geometrischen Oerter bilden, parallel sein, d. h. sich erst in unendlicher Entfernung schneiden.

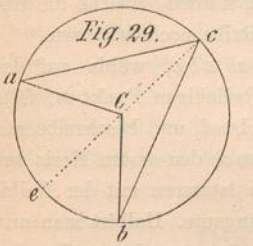
Fig. 23 angedeutet, folgende: Da nämlich der Kreis die Tangente cd in a berühren muss, der Halbmesser von dem betreffenden Berührungspunkte aber senkrecht zur Tangente steht, so ist die Senkrechte in a ein geometrischer Ort für alle Kreismittelpunkte, deren Peripherien die Gerade cd in a berühren sollen; zeichnet man daher noch den zweiten geometrischen Ort (nämlich das Mittelloth zu ab), so ist der Schnittpunkt beider das gesuchte Centrum.

Eigenschaften der im Kreise vorkommenden Winkel.

§ 56. Von diesen sollen hier nur die für das Projectionszeichnen wichtigsten erwähnt werden; solche sind:

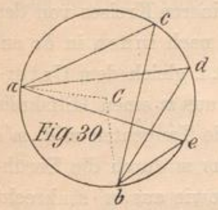
1. Ein Peripheriewinkel ist halb so gross, als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel.

Zieht man von zwei beliebigen Punkten a, b eines Kreises (Fig. 29) nach einem beliebigen Punkte c der Peripherie zwei Gerade, so bilden diese bei c den auf der Peripherie liegenden Winkel (Peripheriewinkel); zieht man ferner von a und b nach dem Kreiscentrum, so ist der Winkel bei C ein Centriwinkel über dem gleichen Bogen ab, und Winkel acb ist halb so gross,

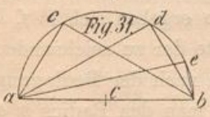


wie Winkel aCb, oder Winkel aCb ist doppelt so gross wie acb. Beweis: Man ziehe die Gerade cCe, so sind nun aCc und bCc gleichschenklige Dreiecke, und deren Winkel an der Basis also gleich (siehe § 15); da nun ferner die Winkel aCe, bCe als Aussenwinkel dieser Dreiecke so gross sind wie je zwei an der Basis eines solchen gleichschenkligen Dreieckes liegende Winkel (siehe § 17), so folgt daraus, dass Winkel acC gleich der halben Grösse von Winkel aCe, und ebenso Winkel bcC gleich der halben Grösse von Winkel bCe, mithin Winkel acb halb so gross ist als Winkel aCb.

2. Alle über einem Bogen stehenden Peripheriewinkel haben gleiche Grösse; die Winkel acb, adb, aeb in Fig. 30 sind also gleich. Der Beweis folgt aus dem vorhergehenden Satz.



3. Alle Peripheriewinkel, deren Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, welche also auf einem Halbkreise stehen, sind rechte Winkel; der dazugehörige Centriwinkel aCb ist ein flacher, also gleich zwei Rechten. Die Winkel acb, adb u. s. w. in Fig. 31 sind also rechte Winkel. Ein Peripheriewinkel ist ein spitzer, wenn er auf einem Bogen steht, der kleiner ist als ein Halbkreis, und ein stumpfer, wenn er auf einem Bogen steht, der grösser als ein Halbkreis ist.



Aufgaben über Kreise.

Tafel V. Figur I—XIII.*)

§ 57. In einem gegebenen Kreise soll der Mittelpunkt gefunden werden.

Angenommen, es sei in einem Kreise der Mittelpunkt nicht bekannt, so zeichne man eine beliebige Sehne ab (Fig. I), errichte darauf das Mittelloth und halbire die innerhalb der Peripherie liegende Strecke, d. i. den Durchmesser; m ist sodann der gesuchte Mittelpunkt; oder man zeichne eine beliebige zweite Sehne bc, errichte darauf ebenfalls das Mittelloth, so ergibt sich in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe der gleiche Punkt m.

§ 58. In dem Punkte a eines gegebenen Kreises (Fig. II) soll die Tangente gezeichnet werden.

Man verbinde a mit dem Mittelpunkte m und errichte in a die Senkrechte zu ma (siehe § 9). Soll eine Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden bc gezeichnet werden, so fälle man aus m die Senkrechte zu bc (siehe § 9), welche die Peripherie in a' schneidet; durch a' construire man die Parallele zu bc (siehe § 10).

§. 59. In Fig. III sollen mehrere Kreise gezeichnet werden, welche sich in einem gegebenen Punkte a berühren.

Die Halbmesser der Kreise können beliebig gross gewählt werden, die Kreismittelpunkte müssen jedoch auf einer Geraden $mm'm''$ liegen, welche durch den Punkt a geht; zeichnet man durch a eine Senkrechte zu $m'm''m'$, so ist diese eine gemeinschaftliche Tangente sämmtlicher Kreise (siehe § 55); wählt man auf letzterer einen beliebigen Punkt P und zieht man von P die Tangenten Pb, Pd, Pc an sämmtliche Kreise, so sind die Entfernungen Pb, Pd, Pc gleich der Strecke Pa (siehe § 55, Fig. 23).

Eine Anzahl Kreise von verschiedenem Halbmesser sollen sich in zwei beliebig gewählten Punkten einer Geraden PR schneiden (Fig. IV).

Man errichte in m'' das Mittelloth zwischen den beiden gegebenen Punkten; auf diesem liegen sodann die Mittelpunkte der zu zeichnenden Kreise; zeichnet man aus P Tangenten an dieselben, so sind auch hier, wie bei Fig. III, die Entfernungen von P bis zu den Berührungspunkten gleich. Die Gerade PR bildet eine gemeinschaftliche Secante.

§ 60. Durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreieckes soll ein Kreis gezeichnet werden (Fig. V).

Man errichte über jeder Dreiecksseite das Mittelloth; diese schneiden sich im Punkte M, dessen Abstand von a, b und c gleich ist (siehe § 55).

*) In Tafel V sind die Flächen der zunächst gegebenen Kreise zur bessern Unterscheidung gelb, die übrigen grau abgetont.

§ 61. An einen Kreis sollen von einem gegebenen Punkte P aus die Tangenten gelegt werden (Fig. VI).

Um die Berührungspunkte c, d im Voraus zu bestimmen, zeichne man über mP als Durchmesser einen Kreis; dieser schneidet den gegebenen Kreis in den beiden Berührungspunkten c und d*); die Tangenten Pd, Pc bilden mit den Halbmessern dm, cm rechte Winkel (siehe § 55).

§ 62. In einem gegebenen Kreissector (siehe § 2) abc (Fig. VII) soll ein die Seiten desselben berührender Kreis gezeichnet werden.

Man halbire den Winkel bac, zeichne im Schnittpunkte h die Tangente an den Bogen, verlängere ab bis e, ac bis d und halbire die Winkel aed und ade; diese drei Mediane schneiden sich im Mittelpunkte m des zu zeichnenden Kreises; die Berührungspunkte g, f auf den Geraden ab, ac ergeben sich, wenn man mit dh als Radius aus d und e Bögen beschreibt. Diese Aufgabe ist identisch mit derjenigen, in ein gegebenes Dreieck einen Kreis einzubeschreiben.

In einen Kreis (Fig. VIII) sollen mehrere Kreise, z. B. drei, einbeschrieben werden, welche denselben, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man zerlege den Kreis in so viel congruente Sectoren, als man Kreise einbeschreiben will, z. B. drei, und verfahre wie bei Fig. VII, wodurch sich m''' als Mitte eines Kreises agi ergibt; die übrigen Mittelpunkte m', m'' liegen auf den Halbirungslinien der Sectoren und werden durch einen Kreis, dessen Radius gleich mm''' ist, abgeschnitten; g, h, i, sowie a, c, e sind Berührungspunkte der Kreise.

§ 63. Um einen gegebenen Kreis $abcd$... (Fig. IX) soll eine beliebige Anzahl congruenter Kreise gezeichnet werden, welche den gegebenen, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man zerlege den gegebenen Kreis in so viele gleiche Sectoren, als man Kreise daran zeichnen will, z. B. sechs, halbire die Winkel derselben, ziehe an einen Punkt a eines Sectors die Tangente sa und halbire den Aussenwinkel aso, oder trage die Strecke sa von s nach o, und errichte in o über mo eine Senkrechte; diese schneidet die Halbirungslinie des Sectors in einem Punkte 1; zieht man nun mit dem Halbmesser $m1$ aus m einen Kreis, so schneidet dieser sämmtliche Mittelpunkte $2, 3, 4, 5$... auf den übrigen Medianen ab; a, b, c, d... sowie h, i, k, l . . . sind Berührungspunkte der Kreise.

§ 64. Eine Anzahl Kreise, deren Halbmesser beliebig sind, sollen aneinander gelegt werden (sich berühren).

Man zeichne aus den Mittelpunkten m, m' (Fig. X) Kreise, welche sich berühren (siehe § 55); soll nun ein dritter Kreis, dessen Mittelpunkt n' ist, die gegebenen berühren, so trage man dessen beliebig gewählten Halbmesser von b aus nach beiden Seiten auf die Centrale, ziehe durch die so erhaltenen Punkte aus m und m' Bögen, welche den Mittelpunkt n' des zu zeichnenden Kreises ergeben; verbindet man n' mit m und m' durch Gerade, so sind die Schnittpunkte t, t' der letztern mit den gegebenen Kreisen die Berührungspunkte.

Der Halbmesser eines zu zeichnenden Kreises, welcher die Kreise aft'' . . . und $tt'''d$ . . . berühren soll, hätte auch von der Peripherie der beiden Kreise nach aussen auf zwei beliebig aus m und n' gezeichnete Gerade mg, ne, in fg und de angetragen werden können; man hätte alsdann durch Ziehen der Bögen, deren Halbmesser gleich mg und ne ist, den Mittelpunkt n erhalten u. s. w.

§ 65. Innerhalb zweier gegebener Geraden (Fig. XI), welche sich unter einem beliebigen Winkel abc schneiden, sollen Kreise gezeichnet werden, welche die Geraden, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man halbire den Winkel abc, wähle auf der Halbirungslinie zuerst einen beliebigen Punkt m, fälle von m die Senkrechten mg und md, und beschreibe mit dem Halbmesser mg (gleich md) den ersten Kreis aus m; an den Schnittpunkt des letzteren mit der Halbirungslinie zeichne man eine Tangente. Halbirt man nun den Winkel, den letztere mit einer gegebenen Geraden ba oder bc bildet, oder verfährt man ähnlich wie bei Fig. VII, so ergibt sich der Mittelpunkt m' eines zweiten Kreises, welcher den gegebenen Kreis sowie die Geraden berührt, und zwar letztere in h und e u. s. w.

§ 66. An zwei gegebene Kreise (Fig. XII) sollen die Tangenten gezeichnet werden. Es sind hier vier Tangenten möglich, und zwar:

1. zwei, welche die Kreise auf gleichen Seiten, und
2. zwei, welche sie auf verschiedenen Seiten berühren.

Man verbinde zunächst die beiden Mittelpunkte m, m' durch eine Gerade (Centrale). Sollten nun zwei Tangenten nach der Bedingung 1. gezeichnet und deren Berührungspunkte im Voraus bestimmt werden, so trage man den Halbmesser $m'a$ des kleineren Kreises von der Peripherie des grösseren Kreises nach innen in bc an, beschreibe mit dem Radius mc, d. i. gleich dem Unterschiede der beiden Halbmesser, aus m einen Hilfskreis und zeichne aus m' an diesen die Tangenten $m'd$, $m'e$ (siehe Fig. VI); zieht man nun aus m durch die Berührungspunkte d, e die Geraden, sowie aus m' senkrecht zu $m'e$ und $m'd$ die Parallelen, so ergeben sich in f, h und g, i je zwei Berührungspunkte der zu zeichnenden Tangenten. Sollten die Tangenten nach der Bedingung 2. gezeichnet werden, so trage man den Radius $m'a$ von der Peripherie des grösseren Kreises, d. i. von b aus nach aussen an und beschreibe aus m einen Hilfskreis, dessen Radius gleich der Summe der beiden

*) Die Construction beruht auf dem geometrischen Satze, dass alle Winkel, welche auf dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Ecken in der Peripherie desselben liegen, Rechte sind. (Siehe § 56.)

Halbmesser ($m'a$, mb) ist, zeichne aus m' an diesen Hilfskreis die Tangenten $m'k$, ml, verbinde m mit k und l und ziehe zu $m'k$ und ml aus m' die Senkrechten $m'p$, $m'o$, welche zu mk und ml parallel sind, so ergeben sich die auf verschiedenen Seiten liegenden Berührungspunkte; zeichnet man durch diese die Tangenten, so schneiden sich diese in einem Punkte s der Centralen; ebenso würden auch die Tangenten fh, gi, wenn hinlänglich verlängert, sich in der nach links verlängert gedachten Centralen mm' schneiden.

§ 67. In Fig. XIII soll die Länge der Peripherie eines gegebenen Kreises auf eine Gerade ausgestreckt, d. h. rectificirt werden.*)

Man theile den Durchmesser ab in sieben gleiche Theile und trage auf eine Gerade, welche hier als eine Tangente an den Kreis gezeichnet wurde, $3^1/_7$ Durchmesser gleich 22 Theilen auf.

Das Theilen des Durchmessers wurde hier nach der in § 12 (Tafel I, Fig. XII) angegebenen Methode bewerkstelligt. Auf der tangirenden Geraden cd, deren Länge gleich dem Kreisumfange ist, wurde der Durchmesser von a aus einmal nach links in ac, dann zweimal nach rechts in af und fe, sowie $^1/_7$ des Durchmessers gleich $a1'$ von e nach d getragen.

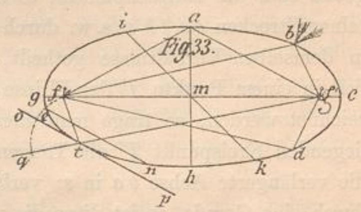
Die Ellipse.

§ 68. Die Ellipse ist eine ebene, geschlossene Curve, welche dadurch entsteht, dass ein Punkt um zwei feststehende Punkte sich derart bewegt, dass die Summe seiner Entfernungen stets gleich einer gegebenen Strecke ist. Um von dem eben Gesagten eine klare Vorstellung zu erhalten, denke man sich in zwei beliebigen Punkten f, f' (Fig. 33) die beiden Enden einer Schnur befestigt, welche länger ist als der Abstand der beiden Punkte, nehme einen Stift und bewege denselben, die Schnur anspannend, so vorwärts, dass diese um den Stift aussen herum gleitet. Die auf solche Weise beschriebene Curve ist eine Ellipse.

Während der Bewegung des Stiftes wird die Schnur die verschiedenen Lagen von faf', fbf', fcf', fdf', fgf' u. s. w. angenommen haben; da nun in der Lage fcf' die kleinere Strecke cf' mit der grösseren Strecke fc zusammenfällt, das gleiche aber auch bei der Lage $f'gf$ der Fall sein wird, so folgt daraus, dass $fc + cf' = f'g + gf = fa + af' \ldots$ gleich gc, d. h. gleich dem grössten Durchmesser der Ellipse ist.

Bezeichnet man nun die beiden Punkte f, f' als die Brennpunkte (Foci*), die Strecken fa, af', fb, bf', fc, cf' . . . als die Brennstrahlen oder Fahrstrahlen (Vectoren), gc oder den grössten Durchmesser, welcher durch die beiden Brennpunkte geht, als die grosse Achse, so ergibt sich der Satz, dass in einer Ellipse die Summe der beiden Fahrstrahlen stets gleich der grossen Achse ist, oder mit anderen Worten: die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich einer gegebenen Strecke, d. i. gleich der grossen Achse.

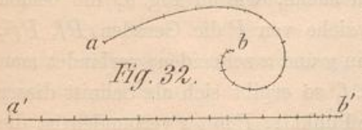
§ 69. Errichtet man auf der Mitte m der grossen Achse eine Rechtwinklige amh, so heisst dieser kleinste Durchmesser die kleine Achse. Die Endpunkte der Achsen, welche je paarweise von dem Mittelpunkte m gleichweit entfernt sind, heissen die Scheitelpunkte der Ellipse. Der Schnittpunkt der beiden Achsen heisst Mittelpunkt, die Curve selbst die Peripherie oder der Umfang; jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte (i, k) der Peripherie verbindet, heisst Durchmesser, en eine Sehne und op eine Tangente.



In einer Ellipse heissen die gleichen Entfernungen mf mf' die Excentricität der Ellipse; je weiter die Brennpunkte von dem Mittelpunkte entfernt sind, desto excentrischer, d. i. desto länglicher ist die Ellipse; je mehr sich die beiden Brennpunkte nähern, desto mehr nähert sie sich der Kreisform; sie wird ein Kreis, wenn beide Brennpunkte zusammenfallen. Eine Tangente an einem Punkte t der Ellipse halbirt den durch die Verlängerung eines Fahrstrahles entstandenen Winkel ftq.

Jene beiden Brennstrahlen, welche nach einem Scheitelpunkte der kleinen Achse gezogen werden, haben gleiche Länge (z. B. $fa = af'$). Die Ellipse kann auch als die Projection einer Kugel oder eines Kreises betrachtet werden; so kann z. B. der Schatten

*) Eine allgemeine Methode, nach welcher die Länge einer jeden Curve auf eine andere gegebene Curve oder Gerade, oder auch die Länge einer Geraden auf eine Curve übertragen werden kann, ist folgende: Man theile jene Curve, welche übertragen werden soll, in eine Anzahl beliebiger Theile, deren Abstand jedoch so klein angenommen werden muss, dass jedes zwischen zwei Theilpunkten liegende Curvenstück praktisch als eine Gerade bezeichnet werden kann; diese Theile trage man auf die andere gegebene Curve oder Gerade über (siehe Fig. 32); je gekrümmter die Curve ist, welche auf eine andere Linie übertragen werden soll, um so kleiner müssen die Theile darauf angenommen werden. Sollte umgekehrt die Länge einer Geraden auf eine gegebene Curve übertragen werden, so müsste natürlich die Gerade in um so kleinere Abschnitte getheilt werden, je mehr die gegebene Curve gekrümmt ist, d. h. je kleiner ihr Krümmungs-Radius ist.



*) Focus, der Brennpunkt.

3*

einer Kugel oder eines Kreises eine Ellipse bilden, wobei die Lichtstrahlen als die projicirenden Linien zu denken sind. Die Constructionen der Figuren I, II, IV und VI, Tafel VI, beruhen auf dieser Annahme.

Aufgaben über Ellipsen.

Tafel VI. Figur I—VI.

§ 70. Gegeben ist die Gerade $a\,b$ (Fig. I) als die grosse, $d\,c$ als die kleine Achse.

Um Punkte der Ellipse zu finden, durch welche dann die Curve mit freier Hand gezeichnet wird, beschreibe man um $a\,b$ als Durchmesser aus m einen Kreis, verlängere die kleine Achse, bis sie den Kreis in e und g schneidet, errichte ferner in symmetrischen Abständen von m rechts und links der kleinen Achse Senkrechte zu $a\,b$, welche zugleich Sehnen des Kreises, wie auch der Ellipse bilden. Nun trage man $m\,e$ oder $m\,g$ auf eine Gerade $h\,k$ in Fig. I^a und beschreibe mit dieser Grösse als Radius einen Bogen aus h, nehme $m\,c$ oder $m\,d$ in den Zirkel, trage diese Strecke als Sehne auf den Bogen in Fig. I^a von k nach i und ziehe $h\,i$; beschreibt man nun mit den Strecken $e\,n$, $f\,h$ u. s. w. aus h in Fig. I^a Bögen, und trägt die zwischen dem Winkel liegenden Sehnen in Fig. I von der grossen Achse nach oben und unten in entsprechender Ordnung an, so ergeben sich die Ellipsenpunkte; es sind dabei die einzelnen Strecken $e\,n, f\,h$ u. s. w. durch die Ellipsenpunkte in demselben Verhältnisse getheilt, wie $m\,e$ durch c. Soll in einem Punkte T der Ellipse eine Tangente gezeichnet werden, so trage man zuerst an den darüber liegenden Kreispunkt T' die Tangente; diese schneidet die verlängerte Achse $b\,a$ in s; verbindet man T mit s durch eine Gerade, so ist diese die verlangte Tangente.

Um nachträglich die beiden Brennpunkte f, f' zu bestimmen, nehme man $a\,m$ oder $b\,m$ in den Zirkel und beschreibe damit als Radius aus c (oder auch aus d) einen Bogen, welcher die grosse Achse in den beiden Brennpunkten schneidet (siehe § 68).

§ 71. In Fig. II sind $a\,b$, $c\,d$ als die beiden Achsen gegeben; man beschreibe um beide als Durchmesser Kreise, theile den grössern Kreis in eine Anzahl gleicher Theile*) und verbinde diese Theilpunkte mit m, wodurch auch der kleinere Kreis gleich dem grössern getheilt ist; ziehe aus den Theilpunkten des grössern Kreises Senkrechte zur grossen Achse, z. B. $g\,i, n\,l$ u. s. w., sowie aus den Theilpunkten des kleinern Kreises Senkrechte zur kleinen Achse, z. B. die Geraden $h\,i, k\,l$ u. s. w., so ergeben sich ausser den schon anfänglich vorhandenen Scheitelpunkten noch weitere Ellipsenpunkte (hier z. B. 12). Das Zeichnen einer Tangente $T\,s$ geschieht wie in Fig. I; errichtet man in T eine Senkrechte $n\,n'$ zu $T\,s$, so heisst diese eine Normale.

§ 72. Gegeben sind in Fig. III $a\,b$ als grosse, $c\,d$ als kleine Achse. Um nun auf eine möglichst einfache Weise und ohne viele Construstionslinien Ellipspunkte zu erhalten, trage man $m\,d$ von m nach e, mache auf einen Papierstreifen die Grösse $p'\,k'$ gleich $a\,m$ und trage die Grösse $a\,e$ von k' aus nach g', so dass also $g'\,k'$ gleich dem Unterschiede der beiden halben Achsen ($a\,m$ — $d\,m$) ist*); diesen Papierstreifen verschiebe man nun derart, dass k' stets auf der kleinen und g' stets auf der grossen Achse liegt, so beschreibt p' eine Ellipse.

Sollten parallel einer gegebenen Geraden $A\,B$ die Tangenten an die Ellipse gelegt werden, so findet man deren Berührungspunkte, wenn man parallel zu $A\,B$ eine Sehne, z. B. $c\,i$, zeichnet, diese in n halbirt und durch m, n einen Durchmesser legt. Die Schnittpunkte T, T' des letztern sind Berührungspunkte, durch welche parallel zu $A\,B$ (siehe § 10) die Tangenten gezeichnet wurden.

§ 73. In Fig. IV sind $a\,b$ und $c\,d$ als die Achsen gegeben, und die Ellipse soll im Ganzen durch acht Punkte nebst den durch diese Punkte gehenden Tangenten bestimmt sein.

Man zeichne durch die Scheitelpunkte a, b, c, d ein Rechteck $h\,n\,l\,o$, dessen Seiten parallel mit den Achsen sind, ziehe die Diagonalen $h\,l, o\,n$, zeichne ferner um $a\,b$ als Durchmesser einen Kreis und um diesen ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls parallel den Achsen sind, also gleiche Richtung mit den Rechtecksseiten haben; in das Quadrat zeichne man die Diagonalen und markire deren Schnittpunkte mit dem Kreise; zieht man nun aus diesen Schnittpunkten die Senkrechten zu $a\,b$, so schneiden sie die Diagonalen des Rechteckes in den Punkten k, u, w', w; diese sind Ellipspunkte; zieht man durch k und w' die Parallelen zu $o\,n$, sowie durch u und w die Parallelen zu $h\,l$, so sind letztere, nämlich $p\,u\,s$, $t\,w'\,s$, $p\,k$, $t\,w$, Tangenten der Ellipse; durch die Punkte a, w, d, w', b, u . . . . und berührend an die Tangenten zeichne man die Ellipse.

§ 74. Von einem beliebigen Punkte P soll die Normale gegen die Ellipse gefällt werden.

Fig. IV. Man suche, wie in Fig. I, die beiden Brennpunkte f, f', ziehe von P die Geraden $P\,f$, $P\,f'$, welche die Ellipse in y und x schneiden; verbindet man y mit f' und x mit f, so ergibt sich als Schnitt dieser beiden Geraden der Punkt z; P mit z verbunden ist die verlangte Normale und eine Senkrechte dazu in dem Punkte T eine Tangente an dem gleichen Punkte.

*) Dass die Theile auf den Kreisen gleich sind, ist zwar nicht unbedingt nothwendig, jedoch besser, da man durch symmetrisch liegende Punkte die Curve leichter zeichnet.

*) Einfacher noch erhält man auf dem Papierstreifen die Grössen $k'\,g'$, $k'\,p'$, wenn man denselben an $a\,m$ legt, die Grösse $p'\,k'$ gleich $a\,m$ markirt, sodann den Streifen mit p' an d in der Richtung $d\,m$ legt, und die Grösse $d\,m$ von $p'\,k'$ abzieht; es ist slso $p'\,k'$ gleich $a\,m$ und $p'\,g'$ gleich $d\,m$, $k'\,g'$; daher gleich $a\,m$ weniger $d\,m$.

§ 75. In Fig. V sind ab, cd als die beiden Achsen gegeben. Um Punkte der Curve zu bestimmen, suche man zunächst die Brennpunkte f, f', beschreibe sodann mit beliebigem Halbmesser $f'e$ aus f' und f Bögen in der Nähe des Umfanges, trage $f'e$ von b nach 1, nehme nunmehr $1a$ in den Zirkel und beschreibe mit dieser Grösse aus f, f' weitere Bögen, wodurch sich vier Punkte der Ellipse ergeben; in gleicher Weise beschreibe man aus f' und f mit beliebigem Halbmesser $f'g$ Bögen, trage $f'g$ von b nach 2, nehme $a2$ in den Zirkel und beschreibe mit diesem Halbmesser aus f und f' weitere Bögen, durch welche man abermals vier Punkte erhält u. s. w.

Diese Methode beruht auf den in § 68 angeführten Eigenschaften der Fahrstrahlen; es ist nämlich $f'e = b1$, $fe = 1a$, daher $fe + ef' = a1 + 1b = ab$; in Worten: die Summe der beiden Fahrstrahlen ist gleich der grossen Achse (ab); dasselbe gilt auch für die beiden Fahrstrahlen fg, $f'g$ u. s. w.

§ 76. Von einem gegebenen Punkte P sollen die Tangenten an die Ellipse gelegt werden.

Man beschreibe mit dem Halbmesser Pf aus P einen Bogen fi, aus f' mit dem Halbmesser gleich der grossen Achse ab einen zweiten Bogen, welcher den ersten fi in i schneidet, verbinde i mit f', so ergibt sich auf dem Umfange T als der Berührungspunkt; verbindet man T mit f, so ist fTi der durch die Fahrstrahlen gebildete Aussenwinkel, welcher durch die Tangente PT halbirt wird. In gleicher Weise findet man den Berührungspunkt T'', indem man mit einem Halbmesser, gleich Pf', aus P einen Bogen beschreibt*), diesen durch einen zweiten Bogen, dessen Radius gleich ab, aus f schneidet u. s. w.

§ 77. In Fig. VI sind zwei beliebige, zu einander schief stehende Durchmesser ab, cd gegeben; es sollen Punkte der Peripherie, sowie nachträglich die grosse und kleine Achse AB, CD gefunden werden.

Man beschreibe zunächst um den grössern Durchmesser ab einen Kreis, dessen Mittelpunkt m zugleich Mittelpunkt der Ellipse ist (siehe § 69), ziehe emf senkrecht zu ab, verbinde e mit c und f mit d; nun theile man mb in eine beliebige Anzahl von Theilen $m1$, 12, 23 ... und trage dieselben Theile von m nach links auf. Durch diese Theilpunkte zeichne man Senkrechte zu ab, welche den Kreis schneiden; zeichnet man nunmehr aus den Schnittpunkten 1, 2, 3 ... die Parallelen zu cd, sowie aus den Schnittpunkten des Kreises, z. B. $1'$, $2'$, $3'$ ..., die Parallelen zu ec, fd, so ergeben sich hierdurch Punkte des Umfanges, z. B. $1''$, $2''$, $3''$ ..., durch welche die Curve mit freier Hand gezogen wird. Um nachträglich die grosse und kleine Achse zu bestimmen, markire man die Punkte, in welchen der Kreis den Umfang der Ellipse schneidet, z. B. a, h, b, g; ziehe hmg (amb ist als Durchmesser schon vorhanden), und halbire die Winkel amh ($= gmb$) und amg ($= hmb$), so sind diese Halbirungslinien die verlangten Achsen AB, CD.*)

*) Diese Construction ist hier nicht mehr angegeben.

Das Oval.

§ 78. Das Oval, obgleich scheinbar der Ellipse ähnlich, ist lediglich die Nachahmung einer solchen durch Kreisbögen. Grundbedingung ist hiebei, dass die Kreisbögen, aus denen ein Oval zusammengesetzt ist, sich berühren.

Aufgaben über Ovale und elliptische Bögen.

Tafel VII. Figur I—IX.

In Fig. I ist ab als grösster Durchmesser angenommen. Man theile denselben in drei gleiche Theile, zeichne aus den Theilpunkten 1 und 2 mit dem Halbmesser gleich $1a$ oder $2b$ Kreise, und beschreibe aus den Schnittpunkten 3 und 4 mit dem Halbmesser $4c$ (gleich $4d$) und $3e$ (gleich $3f$) die Bögen ef und cd, welche die vorhin gezeichneten Kreise in den gleichen Punkten e, f, c, d berühren.**)

§ 79. In Fig. II sind der grösste und kleinste Durchmesser ab, cd rechtwinklig zu einander gegeben. Man ziehe ac, trage die Differenz der beiden Halbmesser von c nach g (d. i. $ma - mc = ac$) auf, errichte über der Strecke ag das Mittelloth, so schneidet dieses zwei Zirkelpunkte 1 und 4 ab. Trägt man den Abstand $1m$ von m nach 3, und ebenso den Abstand $m4$ von m nach 2, so erhält man die weiteren Zirkelpunkte.

§ 80. In Fig. III sind ebenso wie vorher die beiden Achsen ab, cd gegeben.

Man zeichne über am ein gleichseitiges Dreieck ams, trage mc nach mn, ziehe cno und aus dem Schnittpunkte o parallel mit der Dreiecksseite sm, so ergeben sich die Zirkelpunkte 2 und 3.***) Man mache nun $m4$ gleich $m2$, und $m1$ gleich $m3$ u. s. w.; o, f... sind Berührungspunkte der Kreisbögen.

§ 81. In Fig. IV sind die Achsen ab, cd gegeben. Man ziehe ac und ergänze amc zu einem Rechteck $amce$, halbire die Winkel eac und eca, so schneiden sich die Halbirungslinien in g; aus g fälle man eine Senkrechte zu ac, welche auf den beiden Achsen die Zirkelpunkte 2 und 3 ergibt. Im übrigen verfahre man wie bei Fig. II und III. Bei dem Eirund (Fig. V) sind

*) Man hätte statt des schon vorhandenen Kreises $aebf$, ebenso gut einen andern Kreis, welcher die Ellipse in vier Punkten schneidet, zeichnen, und damit wie oben verfahren können.

**) Die übrigen parallelen Kreise innerhalb des Umrisses wurden in den Figuren I, II, III, IV, V und IX aus den gleichen Zirkelpunkten beschrieben.

***) 3 und 1 fallen hier zufällig mit c, d zusammen.

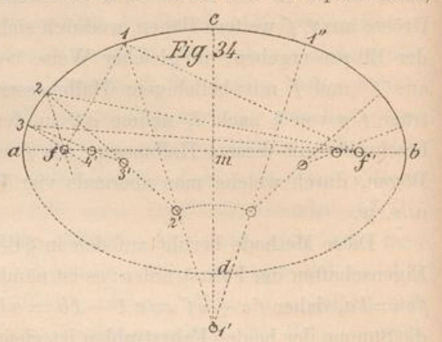
m, a, b und n Zirkelpunkte, im übrigen ist die Construction dieser Figur aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

§ 82. In Fig. VI ist ein elliptischer Bogen über ab als grossem und mc als halbem, kleinstem Durchmesser mit freier Hand gezeichnet. Um Hilfspunkte $i, k \ldots$ zu erhalten, theile man ce sowie be in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. drei, und cd sowie ad in die gleiche Anzahl gleicher Theile, verbinde a, $2'$, 1, $1'$, 2, c, ebenso b, $2'''$, $1''$, $1'''$, $2''$, c, so ergeben sich auf jeder Seite je zwei Zwischenpunkte der Curve, z. B. i, $k \ldots$ Ferner sei ausserhalb des Bogens ein beliebiger Punkt P gewählt, und es soll von diesem die Normale, d. i. die Senkrechte zur Curve gefällt werden. Man suche zunächst die Brennpunkte f, f'' der halben Ellipse (siehe § 74), ziehe sodann Pf, Pf'', sowie aus den sich ergebenden Schnittpunkten i, k die Fahrstrahlen if'', kf und zeichne durch den Schnittpunkt s der letzteren aus P die Normale Ps.

In Fig. VII ist der schiefe Durchmesser ab als Sehne, mc als die Höhe eines sog. hängenden Bogens*) gegeben. Um die Curvenpunkte $1'$, $2'$, $1''$, $2''$ zu finden, beschreibe man mit mc als Radius aus m einen Viertelskreis cb'', theile denselben in beliebig viele gleiche Theile, z. B. drei, fälle von den Punkten 1, 2 die Senkrechten bis $b''m$, ziehe aus b'' nach b eine Gerade und aus d und e Parallele zu $b''b$, bis diese ab schneiden; aus letzteren Schnittpunkten errichte man Senkrechte und mache sie gleich den Strecken $d2$, $e1$, so ergeben sich die Curvenpunkte $1''$, $2''$ u. s. w.; die Senkrechten, welche durch $1'$, $2'$ gehen, haben von mc die gleichen Abstände und gleichen Höhen wie $e1''$, $d2''$. Sollten ausser den Punkten $1'$, $1''$, $2'$, $2''$ auch noch die betreffenden Tangenten an diese gezeichnet werden, so zeichne man zuerst die Tangenten an 1 und 2, welche die nach oben verlängerte Gerade mc in s'', s schneiden; aus s'' und s können sodann die Tangenten an $1'$, $1''$ und $2'$, $2''$ gezogen werden. Fig. VIII zeigt dieselbe Aufgabe in einer Lösung, wie sie ähnlich bei Fig. VI schon ausgeführt wurde.**)

Fig. IX zeigt ein Verfahren, nach welchem ein Oval aus mehr als vier Zirkelpunkten construirt werden kann.

Es wurden zunächst ab, cd als die Achsen einer Ellipse angenommen, sodann ein Viertelsbogen, etwa ca, mit freier Hand gezeichnet. Man wähle nun auf diesem solche Abschnitte, wie z. B. $c1$, 12, 23, $3a$ (vergl. Fig. 34), welche ihrer Krümmung nach als Kreisbögen betrachtet werden können; aus 1, 2, 3 ziehe man alsdann die Fahrstrahlen nach den Brennpunkten f, f' und halbire die Winkel*), welche je zwei Fahrstrahlen an einem Punkte innerhalb der Ellipse bilden, so ergibt eine erste Halbirungslinie $1\,2'\,1'$ auf der verlängerten kleinen Achse cd einen Zirkelpunkt $1'$, auswelchem mit $1'c$ als Radius der Bogen $1''c1$ gezogen wurde. Die Halbirungslinie aus 2 ergibt auf $11'$ einen zweiten Zirkelpunkt $2'$, aus welchem mit dem Radius $2'1$ ein Bogen $1\,2$ gezeichnet wurde, u. s. w. Die Halbirungslinien sind zugleich die Normalen zur Curve.



Hat man, wie in Fig. 34 gezeigt wurde, die Punkte 1, $2''$, $3''$, $4''$ der Fig. IX gefunden, so sind nur noch die Punkte 2, 3, 4, $3'$, $2'$, $1'$ und $2'''$, $3'''$ in gleicher Ordnung innerhalb der rechten Winkel dmb, bmc, cma anzutragen, und durch 1, 2, 2, 3, 3, 4 sowie $1'$, $2'$, $2'$, $3'$, $3'$, $4 \ldots$ die entsprechenden Geraden zu ziehen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung (Fig. IX) unschwer zu ersehen.

Die Spirale.

§ 83. Die Spirale ist eine offene Curve, welche entsteht, wenn ein Punkt sich um ein Centrum dreht, und dabei radial fortschreitend sich nach einem bestimmten Gesetze entfernt, oder umgekehrt sich von aussen her dem Centrum nähert.

Man unterscheidet zwei Hauptarten von Spiralen:

1. die gewöhnliche oder Archimedische Spirale,
2. die Schneckenspirale oder Schneckenlinie.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn das Verhältniss der fortschreitenden zur drehenden Bewegung sich stets gleich bleibt; in diesem Falle ist die Gangweite ac oder cd (siehe Fig. I, Tafel VIII) immer dieselbe. Das Curvenstück $aoTc$ heisst ein Umgang der Spirale; die Spirale in Fig. I hat somit drei Umgänge.

2. Eine Schneckenlinie entsteht, wenn das Verhältniss oder die Geschwindigkeit der fortschreitenden zur drehenden Bewegung vom Centrum aus nach aussen hin zunimmt, oder umgekehrt von aussen nach innen

*) Diese Figur ist eine halbe Ellipse, wobei ab als ein schiefer Durchmesser und mc als ein schiefer Halbmesser gegeben sind. Das Gleiche gilt auch von den Geraden ab, mc in Figur VIII.

**) Dieses Verfahren zur Bestimmung einer Ellipse könnte z. B. auch angewendet werden, wenn der Mittelpunkt derselben aus irgend welchem Grunde unzugänglich ist, in welchem Falle dann das umschliessende Rechteck oder schiefwinklige Parallelogramm statt der Achsen zu geben wäre.

*) Diese Construction ist in Fig. IX nicht angegeben.

abnimmt, so dass die äusseren Gangweiten grösser als die inneren sind (siehe Fig. II).

Aufgaben über Spiralen.

(Construction derselben.)

Tafel VIII. Fig. I—VIII.

§ 84. Gegeben ist in Fig. I der umschriebene Kreis, dessen Durchmesser ab ist, sowie die Anzahl der Umgänge. Es soll von a aus die Archimedische Spirale in den Kreis eingezeichnet werden.

Man theile den Radius ea in so viel gleiche Theile, als man Umgänge innerhalb des Kreises haben will, z. B. in drei; alsdann theile man die Gangweiten ac, cd, de in je vier gleiche Theile und ebenso den Kreis in dieselbe Anzahl gleicher Theile, ziehe die Halbmesser $2'e$, be, $6e$ und beschreibe aus dem Centrum e durch jeden der auf ea liegenden Theilpunkte Kreise, so sind, a als Anfangspunkt genommen, a, o, $2''$, T, c Spiralenpunkte eines ersten Umganges. In gleicher Weise findet man auch die Punkte der übrigen Umgänge; wollte man statt der vier Hilfspunkte o, $2''$, T, c deren acht, so hätte man den Kreis statt in vier, in acht gleiche Theile zu theilen, und dasselbe hätte dann auch mit je einer Gangweite ac, cd, de geschehen müssen.*)

§ 85. An irgend einem Punkte T soll eine Tangente gezeichnet werden.

Man wähle auf dem Curvenstück aoT der Spirale irgend einen Punkt o, welcher zugleich auf einem der Parallelkreise liegt, ziehe durch den gegebenen Punkt T aus e einen Halbmesser und zeichne in t, d. i. da, wo der durch o gehende Kreis den Halbmesser schneidet, die Kreistangente $t4'''$, auf diese trage man die Länge des Kreisbogens to von t aus nach abwärts, ziehe $4'''T$, so ist letztere die verlangte Tangente. Die Richtung, nach welcher die Kreistangente $t4'''$ gezeichnet werden muss, ist stets gleich der Richtung, welche der Kreis von dem Punkte t aus gegen o hat.

§ 86. In Fig. II ist $abeg$ der umschriebene Kreis, in welchen von a aus eine Schneckenlinie mit drei Umgängen eingezeichnet werden soll.

Man theile zunächst den Kreis in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. acht, und ziehe die Halbmesser am, cm, bm..., zeichne sodann eine Gerade ab**) und theile dieselbe in so viel gleiche Theile, als man Umgänge haben will, also drei. Nun nehme man auf dem Halbmesser am eine erste Gangweite $a1$ beliebig, jedoch grösser als ein Drittheil von am an, und ziehe aus I durch 1 eine Gerade, bis dieselbe die Horizontale bg in F schneidet. Zieht man nunmehr IIF, so schneidet diese am in 2, und die Abschnitte $a1$, 12, $2m$ sind die gegen das Centrum abnehmenden Gangweiten. Theilt man ferner die Strecke aI in acht gleiche Theile und zieht aus diesen Theilpunkten nach F, so ergeben sich auf $a1$ die gegen 1 abnehmenden Theile, welche nun in ihrer Reihenfolge von aussen nach innen, von m aus auf die Halbmesser mc, mb, md... übertragen werden; für die zweite und dritte Gangweite 12, $2m$ wurde $I\,II$ und IIb nur in vier gleiche Theile getheilt, aus diesen nach F gezogen, und die Abschnitte zwischen 1, 2 und 2, m auf die Halbmesser mb, me, mg wie vorher übertragen, wodurch sich für den zweiten und dritten Umgang nur je vier Curvenpunkte ergeben haben.

Sollte an irgend einem Punkte T der Schneckenlinie eine Tangente gezeichnet werden, so könnte sie ähnlich wie bei Fig. I gefunden werden. Kürzer jedoch ist folgendes Verfahren: Man schneide aus T mit sehr kleiner Zirkelöffnung auf der Spirale zwei von T gleich entfernte Punkte ab, setze in diese den Zirkel ein und beschreibe mit gleichen Halbmessern die Bögen bei v und w; vw ist sodann eine Normale und eine in T zu vw senkrecht stehende Gerade tu die verlangte Tangente.

§ 87. Fig. III und IV sind Nachahmungen einer gewöhnlichen Spirale durch Kreisbögen.

In Fig. III wurde zunächst das kleine Quadrat $0'1'2'3'$ gegeben, sodann mit dem Halbmesser $1'0'$ aus $1'$ der Viertelskreis $0'1$, aus $2'$ mit dem Radius $2'1$ der Viertelskreis 12, aus $3'$ der Viertelskreis 23 u. s. w. gezeichnet. Eine Gangweite $0'4$ oder 15 . . . ist dann gleich der vierfachen Länge einer Quadratseite $0'1'$; ein um das Quadrat gezeichneter Kreis heisst das Auge der Spirale.

In Fig. IV ist die Spirale aus den Halbkreisen 01, 12, 23 . . ., deren Mittelpunkte b und a sind, zusammengesetzt; die Kreise berühren sich auf der Horizontalen, welche durch ab geht, und die Gangweiten $b1$, 13 . . . sind gleich der doppelten Grösse ab.

§ 88. Fig. V und VI sind Constructionen der sog. jonischen Schneckenlinie, welche die charakteristische Grundform des jonischen Kapitäls bildet und im Bauzeichnen öfters in Anwendung kommt.*) Bei Fig. V wurde zunächst die Entfernung des Anfangspunktes o bis zum Mittelpunkte 9 beliebig gewählt und diese Strecke in neun gleiche Theile getheilt, mit einem Theil als Radius sodann aus 9 ein Kreis, das sog. Schneckenauge gezeichnet, in demselben ein Quadrat über Eck stehend und in dieses ein zweites eingezeichnet, dessen Ecken auf den Seitenmitten des erst gezeichneten liegen (in

*) In Fig. I wurde eine Gangweite bloss in vier, der Kreis dagegen in acht gleiche Theile getheilt, und der auf den Halbmessern $1e$, $3e$, $5e$, $7e$ zwischen je zwei Parallelkreisen liegende kleine Abschnitt halbirt, wodurch man ebenfalls acht Punkte für je einen Umgang erhielt.

**) Die Gerade ab könnte von a aus irgend eine beliebige Lage haben, soferne nur der eine Punkt b auf der Horizontalen Fb liegt.

*) Die Construction in Fig. V ist nach Vignola, die in Fig. VI nach Goldmann.

Fig. V[a] ist das Auge etc. vergrössert dargestellt). Theilt man nun eine jede halbe Diagonale *m 1*, *m 2* . . . des innern Quadrates (siehe Fig. V[a]) in drei gleiche Theile und zieht durch diese Theilpunkte die Geraden *4 5*, *5 6*, *6 7*, *7 8*, *8 9*..., so sind *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*... Zirkelpunkte, aus denen die in *I*, *II*, *III*, *IV*... sich berührenden Kreise gezeichnet werden, und zwar aus *1* mit dem Halbmesser *1 0* (Fig. V) der Kreisbogen *0 I*, aus *2* mit dem Halbmesser *2 I* der Bogen *I II*, aus *3* mit dem Halbmesser *3 II* der Bogen *II III*, aus 4 mit dem Halbmesser *4 III* der Bogen *III IV* u. s. w.; der letzte Bogen *XI XII* berührt das Schneckenauge oben in dem Punkte *8* (*8* fällt hier mit *XII* zusammen).

Fig. VI zeigt dieselbe jonische Schneckenlinie, jedoch bei anderer Anordnung der Zirkelpunkte.

In dem Auge, welches hier ebenfalls in Fig. VI[a] vergrössert dargestellt ist, wurden zunächst in *8″* und *c′* die horizontalen Tangenten *8″ a*, *c′ b″* gezeichnet, sodann aus *m* eine Parallele dazu gezogen, und wo diese den Kreis schneidet, eine weitere Tangente a b″ gezeichnet, so dass der Halbkreis rechts durch das Rechteck *8″ a b″ c′* eingeschlossen ist; ferner theile man die Rechtecksseite *a b* in vier gleiche Theile und ziehe aus den Theilpunkten *2* und *3* die Parallelen zu *a 8″*, *b″ c′*, so entsteht das Rechteck *1 2 3 4**). In letzterem werden die Zirkelpunkte dadurch bestimmt, dass man aus dem Mittelpunkte *m* des Auges die Geraden *m 2*, *m 3* zieht, letztere in je drei gleiche Theile zerlegt, und aus diesen die Parallelen zu den Vierecksseiten, nämlich *5 6*, *6 7*, *7 8*... zeichnet. *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*... sind nun der Reihe nach die Zirkelpunkte, aus denen mit den Halbmessern *1 0*, *2 I*, *3 II*, *4 III*, *5 IV*... (siehe Fig. VI) die Bögen *0 I*, *I II*, *II III*, *III IV*... gezogen werden. Die Punkte *I*, *II*, *III*... sind Berührungspunkte je zweier Bögen, da je zwei Mittelpunkte desselben auf einer Geraden liegen (s. § 55).

§ 89. Fig. VII zeigt eine in der Praxis leicht anwendbare Methode, nach welcher die Hauptpunkte einer Schneckenlinie gefunden werden können. Angenommen, es sei der Schnittpunkt der beiden zu einander senkrecht stehenden Geraden *a c*, *b d* das Centrum, *a* ein Punkt der Spirale über demselben und *b* ein zweiter beliebiger Punkt links auf der Horizontalen, dessen Abstand vom Centrum jedoch kleiner ist als der Abstand des Punktes *a*, so findet man weitere Punkte *c*, *d*, *e*, *f*, *g*..., indem man *a*, *b* durch eine Gerade verbindet, zu dieser in *b* eine rechtwinklige errichtet, welche die durch das Centrum gehende Senkrechte in *c* schneidet, und aus *c* parallel zu *b a* die Gerade *c d*, aus *d* parallel zu *c b* die Gerade *d e* u. s. w. zeichnet. Durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d*... wird die Curve mit freier Hand gezeichnet. *a b*, *b c*, *c d*... bilden Sehnen der Schneckenlinie und stehen senkrecht zu einander.

In Fig. VIII sind *a c* als ein Durchmesser, *q**) als das Centrum und *q b* als der grösste Halbmesser einer gedrückten Schneckenspirale gegeben. Um die weitern Punkte *d*, *e*, *f*, *g*... zu erhalten, verbinde man *a* mit *b*, *b* mit *c*, ziehe aus *c* parallel mit *b a*, aus *d* parallel mit *c b* u. s. w.

*) Sollte die Schneckenlinie die Lage wie Fig. V haben, so würden die Zirkelpunkte auf der andern Seite des Durchmessers *8″ c′* in dem Rechtecke *1 d e 4* liegen.

*) Die Strecke *aq* muss natürlich grösser als *qc* sein

II. Theil.

Das projective Zeichnen (Projectionslehre).

§. 90. Haben wir im ersten Theile nur solche Aufgaben behandelt, welche unmittelbar in einer Ebene ausgeführt und gedacht werden konnten, so werden wir im zweiten Theile nur räumliche, bezw. körperliche Gebilde zur Darstellung bringen. **Die Aufgabe der Projectionslehre besteht somit darin, Gegenstände des Raumes von drei Dimensionen oder dreifacher Ausdehnung auf einer Bildfläche, welche nur zwei Ausdehnungen hat, graphisch so darzustellen, dass daraus deren Grösse und Form ersichtlich ist.** Unter einer Projection**) versteht man daher das **Bild** eines wirklich vorhandenen oder gedachten Gegenstandes.

Das Mittel zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man von den einzelnen Punkten des Gegenstandes sich gerade Linien (Projicirende) nach einem bestimmten Gesetze gegen die angenommene Bildfläche (Projectionsebene) gezogen denkt; die Durchschnitte solcher Linien mit der Bildfläche sind **Projectionen**. Werden z. B. von allen Ecken eines Körpers solche Projicirende gegen eine Bildfläche gezogen und die betreffenden Durchschnittspunkte in gleicher Ordnung wie bei dem Körper verbunden, so ergibt sich die Projection sämmtlicher Ecken und Kanten.

**) Projection, gleichbedeutend mit Hinwurf, Entwurf.