



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

Allgemeine Begriffe über Linie Winkel, Fläche, Gleichheit, Aehnlichkeit und
Congruenz.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77566](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77566)

Einleitung.

Unter Geometrie versteht man diejenige Wissenschaft, welche sich mit den Eigenschaften, der Ausmessung und Darstellung räumlicher Grössen befasst.

Solche Raumgrössen sind: Körper, Flächen und Linien. Je nachdem man die eine oder andere dieser Raumgrössen in Betracht zieht, zerfällt die Geometrie in folgende Haupttheile:

I. Ebene Geometrie oder Planimetrie.

II. Körperliche, bezw. darstellende oder descriptive Geometrie (Projectionslehre).*)

a) Zur Planimetrie gehören nur ebene Gebilde, d. h. solche, welche in einer Ebene liegend gedacht werden können.

b) Unter Projectionslehre versteht man die Darstellung oder das Zeichnen räumlicher (körperlicher) Gegenstände nach ihren drei Dimensionen**) auf einer in der Regel als eben angenommenen Bildfläche.

Die für das Zeichnen wichtigsten Aufgaben der ebenen Geometrie bilden den Anfang unserer Studien.

Diese setzen folgende Grundbegriffe voraus:

1. Ein allseitig begrenzter Raum heisst Körper.
2. Die Grenzen des Körpers heissen Flächen.
3. Die Grenzen der Flächen heissen Kanten oder Linien.
4. Die Grenzen der Linien heissen Punkte.

Körper, Flächen und Linien unterscheiden sich nach ihrer Form, Grösse und Lage. Punkte nur nach ihrer Lage.

Der geometrische Punkt hat keinerlei Ausdehnung und bezeichnet lediglich einen bestimmten Ort im Raume. Eine Linie kann man sich dadurch entstanden denken, dass ein Punkt, sei es im Raume oder in einer ebenen Fläche, sich fortbewegt; die Bahn, welche er zurückgelegt, bildet die Linie.

Eine Fläche kann man sich durch Fortbewegung einer Linie entstanden denken, sofern die Bewegung nicht mit deren Verlängerung zusammenfällt.

Einen Körper kann man sich durch Fortbewegung einer Fläche entstanden denken, sofern die Bewegung nicht mit ihrer eigenen Ausdehnung zusammenfällt.

Allgemeine Begriffe über Linie, Winkel, Fläche, Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz.

Die Linie.

§ 1. Linien unterscheidet und bezeichnet man:

- a) nach ihrer Form,
- b) nach ihrer Lage,
- c) nach ihrer gegenseitigen Verbindung.

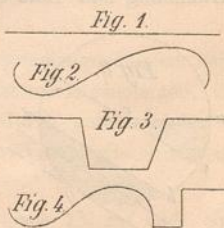
a) Eine gerade Linie (oder kurzweg eine Gerade) entsteht, wenn ein Punkt während seiner Fortbewegung die ursprünglich genommene Richtung unverändert beibehält (Fig. 1). Sie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten. Eine krumme Linie oder Curve entsteht, wenn der Punkt seine Richtung fortwährend ändert

(Fig. 2). Alle weiteren Linienformen lassen sich aus diesen beiden Elementen zusammensetzen; so heisst z. B.

Fig. 3 eine gebrochene, Fig. 4 eine gemischte Linie. Eine Gerade von bestimmter Länge heisst eine Strecke; ihre Grenzen sind die Endpunkte; zu ihrer Benennung dienen in der Regel zwei Buchstaben.

b) Eine Gerade heisst im Allgemeinen senkrecht oder vertical, wenn ihre Richtung mit der eines Lothes oder Senkbleies, wagrecht oder horizontal, wenn ihre Lage mit der einer Wasseroberfläche zusammenfällt. Jede andere Lage heisst schief.

c) Zwei Gerade, welche in allen ihren Punkten gleich weit auseinander sind, also einerlei Richtung verfolgen, heissen gleichlaufende oder Parallel-



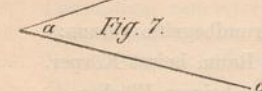
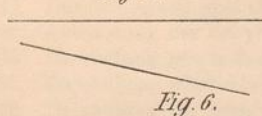
*) Die ebenfalls zur körperlichen Geometrie gehörige Stereometrie oder Raumberechnung ist hier nicht in Betracht gezogen.

**) Dimension heisst Ausdehnung. Ein Körper hat drei Ausdehnungen, Länge, Breite und Tiefe (oder Höhe). Eine Fläche hat zwei Ausdehnungen, Länge und Breite. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge.

Das projective Zeichnen.

linien, Fig. 5 (Parallele). Ungleichlaufende oder nicht parallele Linien sind nach der einen Seite zusammen-

Fig. 5.



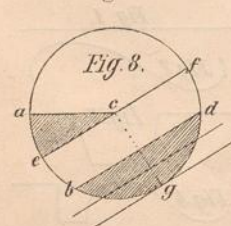
laufend (convergent*), nach der andern Seite auseinander laufend (divergent); wenn hinlänglich verlängert, müssen sie sich, sofern sie in einer Ebene liegen, auf der Seite, nach welcher sie convergiren, schneiden (Fig. 6).

Zwei Gerade, welche in einem Punkte zusammen-treffen, bilden einen Winkel (Fig. 7); die Seiten des-

selben liegen stets in einer Ebene. Unter einem Winkel versteht man also den Richtungsunterschied, den zwei Gerade in einer Ebene haben; die Seiten, welche den Winkelraum einschliessen, heissen Schenkel, der Punkt, in welchem zwei Gerade sich schneiden oder zusammentreffen, Scheitelpunkt. Einen Winkel bezeichnet man entweder durch einen Buchstaben in der Nähe des Scheitelpunktes oder, wenn Verwechselungen möglich sind, mit drei Buchstaben, in welchem Falle der in der Mitte stehende Buchstabe den Winkel bedeutet, z. B. Winkel bac gleichbedeutend mit Winkel bei a (Fig. 7).

Krumme Linien oder Curven gibt es unendlich viele; die wichtigsten darunter sind: der Kreis, die Ellipse, Parabel, Hyperbel, Schraubenlinie etc.**); von diesen wollen wir vorerst nur den Kreis in Betracht ziehen.

§ 2. Die Kreislinie entsteht, indem ein Punkt auf einer Ebene um einen anderen, in der gleichen Ebene liegenden Mittelpunkt (Centrum) sich derart bewegt, dass seine Entfernung von letzterem stets gleich bleibt. Die Kreislinie (Kreisumfang oder Peripherie) ist daher eine ebene, in sich geschlossene, regelmässige Curve, welche in allen ihren Theilen gleiche Krümmung hat. Eine Gerade ac , welche vom Centrum



nach der Peripherie gezogen wird (Fig. 8), heisst Halbmesser oder Radius, eine Gerade bd , welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, ohne dass sie darüber hinaus verlängert wird, heisst Sehne oder Chorde.

Ein jeder der auf beiden Seiten der Sehne liegenden Theile der Peripherie heisst ein Bogen oder Arcus. Eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne ef

*) Gerade Linien, welche nach einem sehr entfernt oder unendlich entfernt liegenden Punkte convergiren, können ebenfalls als Parallele betrachtet werden.

**) Die vier ersten sind ebene, die letzte eine Raumcurve.

heisst ein Durchmesser oder Diameter; wird eine Sehne über die Peripherie hinaus verlängert, so heisst sie eine Schneidelinie oder Secante; eine Secante, welche durch das Centrum geht, heisst eine Centrale. Wird eine Secante gegen die Peripherie hinausgerückt, d. h. vom Centrum entfernt, so werden sich die beiden Schnittpunkte immer mehr nähern, bis sie zuletzt in g zusammenfallen; in letzterem Falle heisst die Gerade eine Berührende oder Tangente. In Bezug auf den von der Peripherie eingeschlossenen Flächenraum heisst derjenige Theil einer Kreisfläche, welcher durch einen Bogen ae und durch zwei Halbmesser ac, ec begrenzt wird, ein Kreisausschnitt oder Sector; derjenige, welcher durch einen Bogen bgd und eine Sehne bd begrenzt wird, ein Kreisabschnitt oder Segment.

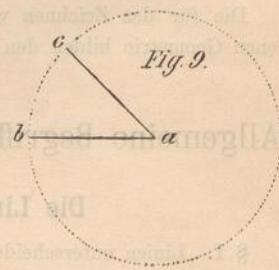
§ 3. Zum Messen von Liniengrössen oder Längen dienen verschiedene Längeneinheiten; die am meisten angewandte ist der Meter mit seinen Unterabtheilungen Decimeter (dm), Centimeter (cm), Millimeter (mm); 1 Meter = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Zum Messen von Winkelgrössen dienen Bogeneinheiten; eine solche Bogeneinheit heisst Grad; das Zeichen für Grad ist eine kleine Null rechts oberhalb der Zahl; kleinere Theile sind noch: Minuten und Sekunden ($1^\circ = 60'$, $1' = 60''$).

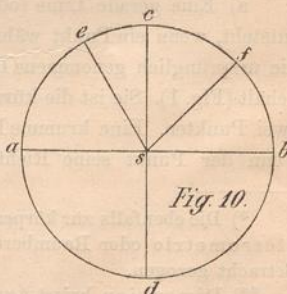
Der Winkel.

§ 4. Um eine richtige Vorstellung über verschiedene Winkelgrössen zu erhalten, denke man sich die Entstehung derselben etwa auf folgende Weise (Fig. 9):

Eine Strecke ab sei unbeweglich, während eine zweite gleich lange und in der gleichen Ebene liegende Strecke ac , deren Lage ursprünglich mit ab zusammenfällt, um a so gedreht wird, dass c einen Kreis beschreibt; während dieser Drehung wird der Winkel stets grösser werden, bis der Schenkel ac mit ab wiederum zusammenfällt, d. h. einen Kreis beschrieben hat; diesen



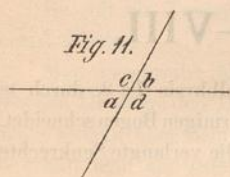
Kreis denke man sich in 360 Theile getheilt; ein solcher Theil heisst Grad. Schneiden sich nun zwei Gerade (ab, cd , Fig. 10) derart, dass die vier Winkel um den Scheitelpunkt (s) einander gleich sind, so ist jeder $\frac{360}{4}$



= 90° ; ein Winkel von 90° heisst ein rechter, und die Geraden ab, cd stehen senkrecht zu einander.

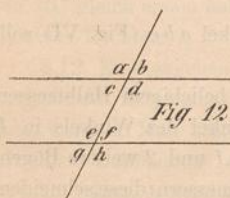
Jeder Winkel, welcher kleiner ist als ein rechter, heisst spitz (z. B. Winkel ase); derjenige, welcher grösser ist als ein rechter und weniger als 180° enthält, heisst stumpf (z. B. asf); liegen die beiden Schenkel in einer Geraden, so heisst der Winkel ein flacher oder gestreckter; ein flacher Winkel ist gleich zwei rechten gleich 180° ; ein Winkel, welcher grösser ist als ein flacher, heisst ein erhabener; spitze, rechte und stumpfe Winkel sind hohl; die Grösse eines Winkels ist unabhängig von der Länge seiner Schenkel und nur bedingt durch die Neigung, welche die beiden Schenkel zu einander haben.

§ 5. Schneiden sich zwei beliebig lange Gerade, so wird die Ebene in vier Winkelräume getheilt; hiervon heissen je zwei gegenüberliegende Winkel ab oder cd Scheitelwinkel (Figur 11). Scheitelwinkel sind einander gleich (Winkel $a = b$, Winkel $c = d$).



Je zwei Winkel, welche auf einer und derselben Seite einer Geraden liegen, heissen Nebenwinkel; z. B. a ist Nebenwinkel zu c oder auch Nebenwinkel zu d ; je ein Paar Nebenwinkel sind zusammen gleich zwei Rechten, da ihre Bogensumme $= 180^\circ$ ist; alle um einen Scheitelpunkt liegenden Winkel betragen zusammen vier Rechte $= 360^\circ$.

§ 6. Werden zwei Parallele durch eine dritte Gerade geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittpunkte acht Winkel oder vier Winkelpaare (Fig. 12). Die vier Winkel, welche innerhalb der Parallelen liegen, heissen innere; die vier anderen dagegen äussere. Die vier Winkelpaare, welche an den Durchschnittpunkten einander gegenüber liegen, heissen Wechselwinkel, Gegenwinkel und gleichliegende oder correspondirende Winkel. Innere Wechselwinkel sind: f und c , e und d , äussere Wechselwinkel g und b , h und a ; sie haben keinen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und liegen auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie. Die Winkel a und f , e und b , g und d , h und c heissen gemischte Wechselwinkel. Innere Gegenwinkel sind c und e , f und d ; äussere Gegenwinkel sind: a und g , h und b ; sie haben keinen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und liegen je paarweise auf einer Seite der schneidenden Geraden. Gleichliegende oder correspondirende Winkel sind: a und e , c und g , b und f , d und h . Sie haben keinen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und liegen je paarweise auf einer Seite der schneidenden Geraden. Je zwei Wechselwinkel sind einander gleich. Gleichliegende Winkel sind einander gleich. Je zwei innere Gegenwinkel und je zwei äussere Gegenwinkel



betragen zusammen zwei Rechte. Zum Messen und Auftragen von Winkelgrössen dient der sogenannte Transporteur oder Winkelmesser, ein aus Metall oder Horn gefertigtes halbkreisförmiges Instrument, auf welchem, wie in Fig. IX Tafel I ersichtlich, die einzelnen Grade, und zwar 180° , aufgetragen sind.

Die Fläche.

§ 7. Die Fläche ist ein Raum, welcher sich nach Länge und Breite ausdehnt. Eine Fläche entsteht, wenn sich eine Linie in anderer Richtung als in ihrer Verlängerung fortbewegt. Im Allgemeinen unterscheidet man ebene und krumme Flächen. Eine Fläche ist eben oder einfach eine Ebene, wenn man in ihr nach jeder beliebigen Richtung eine Gerade ziehen kann; krumm, wenn sich entweder gar keine oder nur nach bestimmten Richtungen Gerade auf ihr ziehen lassen (z. B. die Kugelfläche, Cylinder- und Kegelfläche). Jede krumme Fläche, in ihrer Vertiefung betrachtet, heisst hohl oder concav; im entgegengesetzten Falle erhaben oder convex. Die Linien, welche die Fläche begrenzen, heissen die Seiten derselben.

Zwei sich schneidende oder aneinander stossende Flächen bilden eine Kantenlinie. (Ebene Flächen schneiden sich stets nach einer geraden Kante.) Zwei Kantenlinien, welche in einem Punkte zusammen treffen, bilden einen Kantenwinkel oder ebenen Winkel. Zwei Flächen, welche in einer Kantenlinie zusammentreffen, bilden einen Flächenwinkel. Eine allseitig begrenzte ebene Fläche heisst eine Figur. Es gibt geradlinige, krummlinige und gemischtlinige Figuren (z. B. Dreieck, Viereck, Kreis, Ellipse, Kreisabschnitt, Kreisausschnitt). Man unterscheidet regelmässige (reguläre) und unregelmässige (irreguläre) Figuren.

Eine Figur heisst regelmässig, wenn alle Seiten und Winkel gleich gross oder paarweise gleich gross sind, oder wenn sie durch eine regelmässige Curve begrenzt wird; ist dieses nicht der Fall, so heisst sie unregelmässig.

Alle Seiten einer Figur zusammengenommen, heisst ihr Umfang; alle Winkel zusammengenommen, ihre Winkelsumme. Eine jede durch gerade Linien begrenzte Figur hat ebenso viele Winkel wie Seiten, und umgekehrt.

§ 8. Die Raumgrösse einer Fläche oder eines Körpers, soferne man sie mit einer andern, schon bekannten Grösse oder Masseinheit (z. B. Quadratcm, Kubikcm) ausdrückt, heisst ihr Inhalt.

Zwei ebene oder räumliche Gebilde, welche zwar in der Form verschieden, aber von gleichem Rauminhalt sind, heissen gleich (das Zeichen für gleich ist $=$).

Zwei Gebilde, welche zwar hinsichtlich der Form