Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

1. Aufgaben über das Zeichnen von Senkrechten zu einander, Antragen und Theilen der Winkel und Linien.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

übereinstimmen, in der Grösse aber verschieden sind, heissen ähnlich; ähnlich sind z. B. alle Quadrate, Kreise, Würfel, Kugeln (das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$).

Gebilde, welche sowohl hinsichtlich der Form, als auch der Grösse nach vollkommen übereinstimmen, heissen congruent (das Zeichen der Congruenz ist $\cong$, aus den Zeichen $=$ und $\backsim$ zusammengesetzt); congruente Gebilde sind z. B. gleich lange Gerade, gleich grosse Quadrate, Kreise von gleichem Halbmesser, gleich grosse Kugeln etc.; congruente Gebilde decken sich gegenseitig.

I. Theil.

Constructionen der Ebene. Tafel I—VIII.

Aufgaben über das Zeichnen von Senkrechten zu einander, Antragen und Theilen der Winkel und Linien.

Tafel I. Figur I—XVI.

§ 9. Gegeben ist eine Gerade *a b* (Fig. I); es soll in *c* eine Senkrechte errichtet werden.

Man schneide aus *c* mit beliebiger Zirkelöffnung (Halbmesser) zwei gleiche Grössen *c* 1, *c* 2 ab, zeichne mit beliebigem, aber gleichem Halbmesser aus 1 und 2 Bögen oberhalb der Geraden, verbinde deren Schnittpunkt *d* mit *c*, so ist diese die verlangte Senkrechte zu *a b*.

Gegeben ist eine Gerade *a b* (Fig. II und III); es soll von einem ausserhalb gelegenen Punkte *c* die Senkrechte zu *a b* gefällt werden.

Man beschreibe von einem beliebigen Punkte *1* auf der gegebenen Geraden mit dem Halbmesser *1 c* den Bogen *c b d*, ebenso von einem zweiten beliebigen Punkte *2* mit dem Halbmesser *2 c* den Bogen *c a d* und verbinde *c*, *d* durch eine Gerade; oder: man beschreibe aus dem gegebenen Punkte *c* (Fig. III) mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die gegebene Gerade *a b* in zwei Punkten *1* und *2* schneidet, beschreibe aus *1* und *2* mit gleichem Halbmesser Bögen, welche sich in *d* schneiden, und verbinde *c* mit *d*, so ist in beiden Fällen *c d* die verlangte Senkrechte.

Gegeben ist eine Gerade *a b* (Fig. IV); es soll an dem Endpunkte *a* eine Senkrechte dazu errichtet werden.

Man wähle einen beliebigen Punkt *m*, welcher voraussichtlich innerhalb des Winkels liegt, beschreibe mit dem Halbmesser *m a* den Halbkreis durch *a*, welcher *a b* in *1* schneidet, ziehe die Gerade *1 m*, welche den Halbkreis in *2* schneidet, ziehe von *a* durch *2*, so bildet *a c* den rechten Winkel zu *a b*;

oder: man beschreibe aus dem Endpunkte *a**) der gegebenen Geraden *a b* mit beliebigem Halbmesser *a 1* den Bogen *1 m*, aus *1* mit dem gleichen Halbmesser den Bogen *a m*, und aus *m* den Halbkreis *1 a 2*, durch *m* eine Gerade, bis sie den halbkreisförmigen Bogen schneidet, ziehe von *a* durch *2*, so ist *a c* die verlangte Senkrechte zu *a b*.

§ 10. Zu einer gegebenen Geraden *a b* (Fig. V) soll von einem Punkte *c* aus die Parallele construirt werden.

Man beschreibe von *c* mit möglichst grossem Halbmesser *c n* einen Bogen *n d*, ebenso von *n* mit gleichem Halbmesser *n c* den Bogen *c e*, nehme die Grösse *e c* als Sehne in den Zirkel und trage sie von *n* aus als Sehne auf den Bogen nach *d*. Die Gerade *c d* ist die verlangte Parallele. Die zweite Parallele aus *f* wurde auf gleiche Weise construirt.

§ 11. Ein gegebener Winkel *a b c* (Fig. VI) soll halbirt werden.

Man beschreibe aus *b* mit beliebigem Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des Winkels in *1* und *2* schneidet, beschreibe aus *1* und *2* weitere Bögen mit beliebigen, aber gleichen Halbmessern; diese schneiden sich in *m*, *b* mit *m* verbunden ist die Halbirungslinie, und die zu beiden Seiten derselben liegenden Winkel sind congruent.

Ein Winkel soll in eine ungleiche Zahl von Theilen (z. B. 3) getheilt werden.

Man beschreibe ebenso, wie bei Fig. VI, einen Bogen, nehme dem Augenmasse nach den dritten Theil des Bogens in den Zirkel und probire, ob derselbe genau als Sehne dreimal im Bogen enthalten ist; wäre die schätzungsweise angenommene Zirkelöffnung zu gross oder zu klein gewesen, so hätte man das plus oder minus sich wieder in drei gleiche Theile getheilt zu denken und wäre die Zirkelöffnung um ein solches Dritttheil zu vergrössern oder zu verkleinern, und damit das Antragen auf's neue zu probiren, bis die Aufgabe gelöst ist; die auf diese Weise erhaltenen Punkte *2* und *1* verbinde man mit *e*, und es sind die drei neben einander liegenden Winkel congruent.

*) Siehe nebenstehende Figur rechts, welche aus Versehen nicht bezeichnet ist.

Es soll der Winkel *def* (Fig. VII) von einem gegebenen grösseren Winkel *ghi* (Fig. VIII) abgezogen werden.

Man beschreibe aus den Scheitelpunkten der beiden Winkel Bögen von gleichen Halbmessern, trage die Sehnenlänge des Bogens aus Fig. VII von *e* nach *o* als Sehne in Fig. VIII auf und ziehe von *h* durch *o*; der dadurch entstandene Winkel *ghk* ist nun gleich dem Unterschiede (Differenz) der beiden Winkel *def* (Fig. VII) und *ghi* (Fig. VIII); auf ähnliche Art könnten auch mehrere Winkel addirt, oder ein Winkel um ein mehrfaches vergrössert werden; jedoch kann die Winkelsumme um einen Punkt nie mehr als vier Rechte, d. h. 360^0 betragen.

Es soll ein Transporteur oder Winkelmesser construirt werden.

Man beschreibe über einer als Durchmesser gegebenen Geraden den Halbkreis (hier der äussere), errichte sodann über dem Mittelpunkte *m* die Senkrechte, so erhält man auf jeder Seite derselben einen rechten Winkel von 90^0; beschreibt man ferner mit dem Halbmesser des Kreises aus den Endpunkten des Durchmessers, sowie aus dem Schnittpunkte der Senkrechten Bögen, so ist damit der Halbkreis in sechs gleiche Theile getheilt, und die Theilpunkte mit *m* verbunden ergeben sechs Winkel von je 30^0; durch weiteres Halbiren erhält man Winkel von je 15^0 u. s. w. In Fig. IX sind zum Theil auch noch die einzelnen Grade eingetragen worden.

Ein Winkel von 30^0 ist gleich $^1/_3$, ein Winkel von 45^0 gleich einem halben, ein Winkel von 60^0 gleich $^2/_3$ eines Rechten.

§ 12. Eine gegebene Strecke *ab* (Fig. X) soll durch fortgesetztes Halbiren in eine Anzahl gleiche Theile getheilt werden. Man beschreibe aus den Endpunkten *ab* mit einem Halbmesser, welcher grösser ist als die halbe Strecke, Bögen, welche sich über und unter der Geraden schneiden; verbindet man nun die beiden Schnittpunkte durch eine Gerade, so halbirt letztere die Strecke *ab* in *m*; wiederholt man das gleiche Verfahren bei den Strecken *am* und *mb*, so erhält man für die ganze Strecke *ab* vier Theile, durch weiteres Halbiren acht Theile u. s. w.

Es soll eine gegebene Strecke *ab* (Fig. XI) in eine ungleiche Anzahl von Theilen getheilt werden, z. B. drei. Man nehme schätzungsweise den dritten Theil der ganzen Strecke in den Zirkel und probire, ob derselbe genau darin enthalten ist. Angenommen, man hätte dieses Drittel zu klein geschätzt, so hätte man den bleibenden Rest *ax* sich in drei gleiche Theile zu denken und die Zirkelöffnung um ein solches Drittel zu vergrössern, und mit dieser die Theilung aufs neue zu probiren u. s. w.

Es soll eine gegebene Strecke *ab* (Fig. XII) nach irgend einem gegebenen Verhältnisse getheilt werden. Angenommen, die Theile seien alternirend, d. h. abwechselnd kleiner und grösser, und es soll sich ein jeder kleinere Theil zum grösseren etwa wie zwei zu drei verhalten, so trage man auf einer unter beliebigem Winkel an einem Endpunkte *a* gezeichneten Geraden erst zwei beliebige, aber gleiche Theile, und von Punkt *2* an dieselben Theile dreimal auf, die Strecken *a 2*, *2 5* werden so oft auf *ac* weiter angetragen, als man dieses Verhältniss auf der Strecke *ab* wiederholen will; verbindet man nun den Endpunkt (z. B. *18*) mit dem Endpunkt *b* und zieht aus den Punkten *2*, *5* u. s. w. die Parallelen zu *18b*, so ergibt sich auf *ab* die gewünschte Theilung.

Die Aufgabe hätte auch lauten können:

Es soll das Theilverhältniss einer gegebenen Strecke auf eine andere grössere oder kleinere Strecke übertragen werden. Die Lösung der Aufgabe bliebe dabei ganz dieselbe.

§ 13. Es soll ein Winkel halbirt werden, dessen Scheitelpunkt unzugänglich ist; oder mit anderen Worten: es soll in der Mitte zweier convergirender Geraden *ab*, *cd* (Fig. XIII) eine dritte *mm''* construirt werden, welche nach dem gleichen Convergenzpunkte geht.

Man verbinde zwei auf *ab* und *cd* beliebig gewählte Punkte *x*, *y* durch eine Gerade, halbire die dadurch entstandenen vier Winkel *ayx*, *byx*, *cxy* und *dxy*, durch die Schnittpunkte *s* je zweier Halbirungslinien lege man die Gerade *mm''*, so geht letztere nach dem gleichen Convergenzpunkte; oder: man zeichne innerhalb *ab*, *cd* in beliebigen, aber gleichen Abständen Parallele; diese schneiden sich in einem Punkte *s''*; halbirt man den hierdurch entstandenen spitzen Winkel bei *s*, welcher gleich ist dem Winkel, unter welchem sich *ab* und *cd*, wenn hinlänglich verlängert, schneiden müssen, so ist, wie aus der Figur ersichtlich, das Resultat das gleiche.

Gegeben sind die beiden Geraden *ab*, *cd* (Fig. XIV), und es sollen von beliebigen Punkten *a'* und *b'* Gerade construirt werden, welche den gleichen Convergenzpunkt haben. Man ziehe eine beliebige Gerade, welche *ab*, *cd* in *e* und *f* schneidet, zu dieser parallel eine zweite Gerade *bd*, verbinde *a'* mit *f* und *e*, ebenso *b'* mit *e* und *f*, ziehe ferner aus *b* und *d* die Parallelen zu *eb'*, *ea'*, *fa'*, *fb'*, so ergeben sich die Schnittpunkte *a''b''*, und die Geraden *a'a''*, *b'b''* gehen nach dem gleichen Punkte, wie *ab* und *cd*.

§ 14. Es soll der Schnittpunkt zweier Geraden (Fig. XV), welche sich unter sehr kleinem Winkel schneiden, genau bestimmt werden.

Schneiden sich zwei Gerade unter sehr spitzem Winkel, so ist es nicht möglich, den Schnittpunkt derselben mit Genauigkeit direkt zu bestimmen.

Man ziehe daher in diesem Falle auf beiden Seiten des Schnittpunktes und in möglichst grossen Abständen von demselben zwei Parallele in beliebiger Richtung; auf diesen trage man die zwischen den Geraden liegenden

Abschnitte $1''0$, $1''0$ beliebig, aber gleich oft in entgegengesetzter Richtung auf (z. B. viermal) und verbinde die äusseren Punkte (*4, 4*) durch eine Gerade miteinander, wodurch sich *s* als der Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden bestimmt.

In Fig XVI ist ein Decimeter $= {}^1/_{10}$ Meter in ${}^2/_3$ natürlicher Grösse aufgetragen*); um eine gemischte Zahl, z. B. Centimeter und Millimeter, leicht entnehmen zu können, trägt man zunächsä von dem Punkte *0* aus zehn Centimeter nach rechts, sowie einen Centimeter nach links auf; letzterer wird wieder in zehn Theile, welche Millimeter bedeuten, getheilt; will man nun z. B. mit dem Zirkel eine Grösse von 7 cm und 8 mm diesem Massstabe entnehmen, so setze man die eine Spitze in 7 ein und greife mit demselben, indem man den Zirkel von rechts nach links öffnet, 7 cm + 8 mm = 78 mm; in Fig. XVI sind auch die Centimeter nochmals halbirt worden, so dass ein kleinster, rechts von *0* liegender Theil $= {}^1/_2$ cm = 5 mm ist.

Das Dreieck.

§ 15. Das Dreieck ist eine durch drei Strecken begrenzte Figur; eine Strecke heisst eine Seite des Dreieckes; jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel; Dreiecke unterscheidet man:

a) nach ihren Seiten,

b) nach ihren Winkeln.

a) Ein Dreieck heisst gleichseitig, wenn es drei gleich lange Seiten hat, gleichschenklig, wenn es zwei gleich lange Seiten hat; die gleichlangen Seiten heissen Schenkel; die dritte Seite, welche kleiner oder grösser sein kann, heisst die Basis oder Grundlinie; die der Grundlinie gegenüber liegende Ecke heisst die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes.

Ein Dreieck heisst ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

b) Ein Dreieck heisst spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat. Es heisst rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel enthält; ein jeder der beiden andern Winkel ist dann spitz.

Ein Dreieck heisst stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält. Im rechtwinkligen Dreieck heissen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, die Katheten (Senkrechten); diejenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst die Hypotenuse (Schräge). Unter einem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke versteht man ein solches, dessen Katheten gleich lang sind; ist von den Katheten eines Dreieckes die Rede, so kann es nur ein rechtwinkliges sein; ist von den Schenkeln eines Dreieckes die Rede, so ist es gleichschenklig.

*) Die Ausführung der Blätter seitens des Lernenden ist um die Hälfte grösser gedacht; der Massstab ist daher in seiner wahren Grösse zu zeichnen.

Die Transversalen.

§ 16. Unter der Transversalen eines Dreieckes versteht man eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreieckes oder deren Verlängerungen schneidet; es kann dieses in drei oder auch in zwei Punkten geschehen, in welch letzterem Falle zwei Punkte in einen, und zwar an der Spitze des Dreieckes zusammenfallen, oder die Transversale schneidet die dritte, verlängerte Seite erst in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist parallel zu einer Seite. Man unterscheidet vier specielle Arten von Transversalen; diese sind: a) Höhen, b) Medianen, c) Mittellothe, d) Flächenhalbirungslinien oder kurz Transversalen.

a) Unter der Höhe versteht man eine Senkrechte, welche von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seite gefällt wird (siehe Fig. VI, Tafel II); da das Dreieck drei Seiten und drei Winkel hat, so hat es im Allgemeinen auch drei Höhen; die zur Höhe rechtwinklige Seite heisst deren Basis oder Grundlinie.

b) Unter der Mediane (mittlere Linie) versteht man eine Gerade, welche den Winkel eines Dreieckes halbirt, also eine Winkelhalbirungslinie; in jedem Dreiecke können drei Medianen verzeichnet werden; diese schneiden sich in einem Punkte innerhalb des Dreieckes, dessen kleinster Abstand von den drei Seiten gleich ist. (Siehe Fig. VII, Tafel II.)

c) Unter Mittelloth versteht man eine Gerade, welche senkrecht (lothrecht) auf der Mitte einer Dreiecksseite steht; der Punkt, in welchem sich die drei Mittellothe schneiden, hat gleichen Abstand von den Spitzen des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

d) Unter einer Transversalen im engeren Sinne versteht man eine Gerade, welche den Flächenraum eines Dreieckes theilt oder halbirt; zieht man von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seitenmitte eine Gerade, so ist diese eine Transversale; sie halbirt die Fläche ihrem Inhalte nach*); solche Transversalen treffen sich in der Mitte der Fläche; der Schnittpunkt dreier Transversalen ist der Schwerpunkt des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

Höhen und Mittellothe können sowohl innerhalb wie ausserhalb eines Dreieckes, sowie im Umfange desselben sich schneiden; so z. B. liegt der Schnittpunkt der Höhen im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb desselben, im rechtwinkligen fällt derselbe mit der Spitze des rechten Winkels, und zwei der Höhen fallen mit den Katheten zusammen, im stumpfwinkligen liegt er ausserhalb der Dreiecksfigur in der Verlängerung der Höhen.

*) Theilt man die Seite eines Dreieckes in drei, vier, fünf gleiche Theile und zieht von diesen Theilpunkten nach der gegenüberliegenden Spitze, so wird das Dreieck in drei, vier, fünf inhaltlich gleiche Theile zerlegt.