Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

2. Das Dreieck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

Abschnitte $1''0$, $1''0$ beliebig, aber gleich oft in entgegengesetzter Richtung auf (z. B. viermal) und verbinde die äusseren Punkte (*4, 4*) durch eine Gerade miteinander, wodurch sich *s* als der Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden bestimmt.

In Fig XVI ist ein Decimeter = $^1/_{10}$ Meter in $^2/_3$ natürlicher Grösse aufgetragen*); um eine gemischte Zahl, z. B. Centimeter und Millimeter, leicht entnehmen zu können, trägt man zunächsä von dem Punkte *0* aus zehn Centimeter nach rechts, sowie einen Centimeter nach links auf; letzterer wird wieder in zehn Theile, welche Millimeter bedeuten, getheilt; will man nun z. B. mit dem Zirkel eine Grösse von 7 cm und 8 mm diesem Massstabe entnehmen, so setze man die eine Spitze in 7 ein und greife mit demselben, indem man den Zirkel von rechts nach links öffnet, 7 cm + 8 mm = 78 mm; in Fig. XVI sind auch die Centimeter nochmals halbirt worden, so dass ein kleinster, rechts von *0* liegender Theil = $^1/_2$ cm = 5 mm ist.

Das Dreieck.

§ 15. Das Dreieck ist eine durch drei Strecken begrenzte Figur; eine Strecke heisst eine Seite des Dreieckes; jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel; Dreiecke unterscheidet man:

a) nach ihren Seiten,

b) nach ihren Winkeln.

a) Ein Dreieck heisst gleichseitig, wenn es drei gleich lange Seiten hat, gleichschenklig, wenn es zwei gleich lange Seiten hat; die gleichlangen Seiten heissen Schenkel; die dritte Seite, welche kleiner oder grösser sein kann, heisst die Basis oder Grundlinie; die der Grundlinie gegenüber liegende Ecke heisst die Spitze des gleichschenkligen Dreieckes.

Ein Dreieck heisst ungleichseitig, wenn keine Seite der andern gleich ist.

b) Ein Dreieck heisst spitzwinklig, wenn es drei spitze Winkel hat. Es heisst rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel enthält; ein jeder der beiden andern Winkel ist dann spitz.

Ein Dreieck heisst stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel enthält. Im rechtwinkligen Dreieck heissen die beiden Seiten, welche den rechten Winkel bilden, die Katheten (Senkrechten); diejenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst die Hypotenuse (Schräge). Unter einem rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke versteht man ein solches, dessen Katheten gleich lang sind; ist von den Katheten eines Dreieckes die Rede, so kann es nur ein rechtwinkliges sein; ist von den Schenkeln eines Dreieckes die Rede, so ist es gleichschenklig.

*) Die Ausführung der Blätter seitens des Lernenden ist um die Hälfte grösser gedacht; der Massstab ist daher in seiner wahren Grösse zu zeichnen.

Die Transversalen.

§ 16. Unter der Transversalen eines Dreieckes versteht man eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreieckes oder deren Verlängerungen schneidet; es kann dieses in drei oder auch in zwei Punkten geschehen, in welch letzterem Falle zwei Punkte in einen, und zwar an der Spitze des Dreieckes zusammenfallen, oder die Transversale schneidet die dritte, verlängerte Seite erst in unendlicher Entfernung, d. h. sie ist parallel zu einer Seite. Man unterscheidet vier specielle Arten von Transversalen; diese sind: a) Höhen, b) Medianen, c) Mittellothe, d) Flächenhalbirungslinien oder kurz Transversalen.

a) Unter der Höhe versteht man eine Senkrechte, welche von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seite gefällt wird (siehe Fig. VI, Tafel II); da das Dreieck drei Seiten und drei Winkel hat, so hat es im Allgemeinen auch drei Höhen; die zur Höhe rechtwinklige Seite heisst deren Basis oder Grundlinie.

b) Unter der Mediane (mittlere Linie) versteht man eine Gerade, welche den Winkel eines Dreieckes halbirt, also eine Winkelhalbirungslinie; in jedem Dreiecke können drei Medianen verzeichnet werden; diese schneiden sich in einem Punkte innerhalb des Dreieckes, dessen kleinster Abstand von den drei Seiten gleich ist. (Siehe Fig. VII, Tafel II.)

c) Unter Mittelloth versteht man eine Gerade, welche senkrecht (lothrecht) auf der Mitte einer Dreiecksseite steht; der Punkt, in welchem sich die drei Mittellothe schneiden, hat gleichen Abstand von den Spitzen des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

d) Unter einer Transversalen im engeren Sinne versteht man eine Gerade, welche den Flächenraum eines Dreieckes theilt oder halbirt; zieht man von der Spitze eines Dreieckes zur gegenüberliegenden Seitenmitte eine Gerade, so ist diese eine Transversale; sie halbirt die Fläche ihrem Inhalte nach*); solche Transversalen treffen sich in der Mitte der Fläche; der Schnittpunkt dreier Transversalen ist der Schwerpunkt des Dreieckes. (Siehe Fig. VIII, Tafel II.)

Höhen und Mittellothe können sowohl innerhalb wie ausserhalb eines Dreieckes, sowie im Umfange desselben sich schneiden; so z. B. liegt der Schnittpunkt der Höhen im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb desselben, im rechtwinkligen fällt derselbe mit der Spitze des rechten Winkels, und zwei der Höhen fallen mit den Katheten zusammen, im stumpfwinkligen liegt er ausserhalb der Dreiecksfigur in der Verlängerung der Höhen.

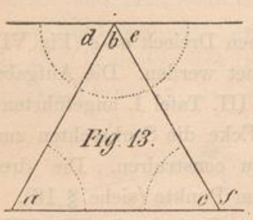
*) Theilt man die Seite eines Dreieckes in drei, vier, fünf gleiche Theile und zieht von diesen Theilpunkten nach der gegenüberliegenden Spitze, so wird das Dreieck in drei, vier, fünf inhaltlich gleiche Theile zerlegt.

Zwei Höhen treffen hierbei senkrecht auf die Verlängerung jener Seiten, welche den stumpfen Winkel bilden. Der Schnittpunkt der Mittellothe liegt im spitzwinkligen Dreiecke innerhalb der Figur; im rechtwinkligen auf der Mitte der Hypotenuse und im stumpfwinkligen ausserhalb der Figur. Im rechtwinkligen Dreiecke heisst insbesondere jene Gerade die Höhe, welche von der Spitze des rechten Winkels gegen die Hypotenuse gefällt wird; im gleichschenkligen jene, welche von der Spitze gegen die Basis gefällt wird; man spricht somit bei dem rechtwinkligen und bei dem gleichschenkligen Dreiecke nur von einer Höhe. Mediane und Transversalen schneiden sich stets innerhalb des Dreieckes.

Im gleichschenkligen Dreiecke halbirt die Höhe sowohl den Winkel an der Spitze, als auch die Basis, und bildet zugleich Mediane, Transversale und Mittelloth. Im gleichseitigen Dreiecke fallen Höhen, Mediane, Mittelloth und Transversalen zusammen; der Schnittpunkt (siehe Fig. X, Tafel II) hat also von den Ecken, sowie von den Seiten gleichen Abstand.

Dreiecksgesetze.

§ 17. In einem jeden Dreiecke ist die Summe der inneren Winkel = zwei Rechten = 180°. Der Beweis für diesen Satz ist leicht zu erbringen. Man denke sich durch eine beliebige Spitze b des Dreieckes abc (Fig. 13) eine Parallele zur gegenüber liegenden Seite ac gelegt; so sind: ad Wechselwinkel, daher Winkel d = Winkel a, ebenso Winkel e = Winkel c; die drei Winkel dbe sind aber, da ihre Summe einen Halbkreis bildet, = zwei Rechten = 180°, und daher auch $a = d$, $b = b$, $c = e$ oder $a + b + c$ = zwei Rechten.



Der Aussenwinkel f eines Dreieckes, welcher durch die Verlängerung einer Dreiecksseite entsteht, ist so gross wie jene beiden inneren Dreieckswinkel, welche seinem Nebenwinkel c gegenüberliegen. Der Beweis ist auch hier leicht ersichtlich; denn es sind cf als Nebenwinkel = zwei Rechten, $a + b + c$ = zwei Rechten, daher $f = a + b$; daraus folgt auch, dass die Summe der Aussenwinkel eines Dreieckes (= 3 . 2 R. — 2 R. = 4 R.) gleich vier Rechten ist. Im gleichseitigen Dreiecke sind die Winkel einander gleich, daher jeder $\left(= \frac{180^0}{3} = 60^0\right)$ gleich $^2/_3$ eines Rechten.

Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe derjenigen Winkel, welche an der Hypotenuse liegen, gleich einem Rechten; ist daher in einem rechtwinkligen Dreiecke ausser dem rechten Winkel noch ein anderer bekannt, so kennt man auch die Grösse des dritten; dasselbe gilt auch für jedes beliebige Dreieck, in welchem zwei Winkel ihrer Grösse nach bekannt sind; z. B. in einem Dreiecke enthalte ein Winkel 60°, der andere 45°, so ist, da die Winkelsumme eines Dreieckes 180° beträgt, der dritte Winkel gleich 75°.

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich (siehe Fig. III, Tafel II); ist daher in einem solchen ein Winkel seiner Grösse nach bekannt, so sind es auch die beiden anderen.

Im gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel, welche an der Hypotenuse liegen, jeder gleich einem halben Rechten = 45°.

In einem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte; die Differenz oder der Unterschied zweier Seiten kleiner als die dritte; der grösseren Seite liegt auch immer der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt.

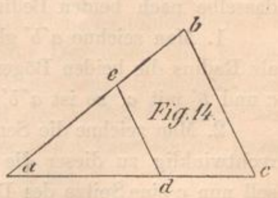
Congruenz der Dreiecke.

§ 18. Zwei Dreiecke, welche zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben, decken sich gegenseitig und sind daher congruent, d. h. an Grösse und Form einander gleich. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite und die beiden daranliegenden Winkel gleich haben.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie alle drei Seiten gleich haben. In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber. Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Seite gleich haben. Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie einen Schenkel und einen anliegenden Winkel, oder die Basis und einen anliegenden Winkel gleich haben. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind congruent, wenn sie zwei Katheten oder eine Kathete und die Hypotenuse gleich haben. Zwei rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie eine Kathete oder eine Hypotenuse gleich haben.

Aehnlichkeit der Dreiecke.

§ 19. Zwei Dreiecke, welche an Form einander gleich, der Grösse nach aber verschieden sind, heissen ähnlich; zieht man z. B. in einem schon vorhandenen Dreiecke abc (Fig. 14) zu irgend einer Seite eine Parallele, so entsteht ein zweites Dreieck ade, welches dem ersten (grösseren) ähnlich ist.



Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Winkel des einen Dreieckes einzeln den drei Winkeln des andern Dreieckes gleich sind.

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Seiten des einen mit den drei Seiten des andern gleich proportionirt sind. In ähnlichen Dreiecken nennt man die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleichliegende Seiten.

In ähnlichen Dreiecken stehen die gleichliegenden Seiten mit einander in gleichem Verhältniss (Proportion).

Aufgaben über Dreiecke.

Tafel II, Fig. I—X.

§ 20. Ein Dreieck ist im Allgemeinen seiner Grösse und Form nach bestimmt, wenn von den drei Seiten und den drei Winkeln eines solchen drei Stücke davon, z. B. drei Seiten, oder zwei Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel gegeben sind; eine Seite ist immer nothwendig. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch Schenkel und Basis, oder Basis und anliegende Winkel, ein rechtwinkliges Dreieck durch zwei Katheten oder eine Kathete und Hypotenuse bestimmt. Das gleichseitige Dreieck ist durch eine Seite oder auch seine Höhe bestimmt.

§ 21. Gegeben sind drei Strecken ab, bc, ca (Fig. I); es soll aus diesen ein Dreieck construirt werden.

Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit einem Halbmesser gleich bc aus b' einen Bogen über $a'b'$, nehme ferner die Strecke ac in den Zirkel und beschreibe aus a' damit einen zweiten Bogen; beide schneiden sich im Punkte c'; $a'b'c'$ ist das verlangte Dreieck.

Hätte man mit der Strecke bc als Radius den Bogen statt aus b' aus a' beschrieben, und demgemäss auch mit der Strecke ac als Radius den Bogen aus b' beschrieben, so wäre das Dreieck $a'b'c''$ wohl seiner Lage nach verschieden, an Form und Grösse aber dem ersten vollständig gleich (congruent). Die durch den Schnittpunkt der beiden Dreiecksseiten $a'c'$, $a'c''$ gehende Senkrechte heisst die Symmetrieachse beider Dreiecksfiguren.

§ 22. Gegeben ist 1. eine Strecke ab (Fig. II), als die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes, oder 2. die Höhe H eines gleichseitigen Dreieckes; es soll dasselbe nach beiden Bedingungen gezeichnet werden.

1. Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit $a'b'$ als Radius die beiden Bögen $a'c$, $b'c$, verbinde a' mit c und b' mit c, so ist $a'b'c$ das gleichseitige Dreieck.

2. Man zeichne die Senkrechte H' gleich der Höhe, rechtwinklig zu dieser die beiden Parallelen $a'b'$, dc; soll nun c eine Spitze des Dreieckes sein, so beschreibe man mit beliebigem Halbmesser cd einen Viertelskreis und mit gleichem Halbmesser aus d den Bogen ce, ziehe von c durch e eine Gerade, bis sie die untere Parallele in a' schneidet; zieht man jetzt noch mit dem Halbmesser $a'c$ aus a' den Bogen cb', so ist b' ein dritter Eckpunkt und $a'b'c$ das verlangte Dreieck. In Fig. II sind beide Constructionen angegeben.

§ 23. Gegeben sind in Fig. III B als Basis, S als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Man zeichne B' gleich B, beschreibe aus den Endpunkten der Basis mit dem Halbmesser des Schenkels S zwei Bögen über der Grundlinie, so ist deren Schnittpunkt die Spitze des verlangten gleichschenkligen Dreieckes, B' die Basis und $S'S''$ sind die beiden Schenkel.

§ 24. Gegeben sind (Fig. IV): 1. die Strecke K als die Kathete, die Strecke H als die Hypotenuse, oder 2. K, K' (Fig. V) als die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes.

1. Man zeichne K' gleich K, errichte in einem der Endpunkte die Senkrechte und beschreibe aus dem andern Endpunkte mit einem Halbmesser, welcher gleich der Hypotenusenlänge ist, einen Bogen, welcher die Senkrechte schneidet; verbindet man letzteren Schnittpunkt mit dem Endpunkte der Kathete (hier rechts), so ergibt sich das rechtwinklige Dreieck; oder man zeichne H' gleich H, beschreibe über H' als Durchmesser einen Halbkreis und mit einem Halbmesser gleich K aus dem einen oder andern Endpunkte der Hypotenuse (hier von dem Endpunkte rechts) einen Bogen, so ergibt sich das gleiche Resultat.*)

Beide Constructionsarten sind in Fig. IV angedeutet.

2. Man zeichne K'' gleich K (Fig. V), errichte in einem Endpunkte von K'' die Senkrechte und mache sie gleich lang K' etc.

§ 25. In einem gegebenen Dreieck abc (Fig. VI) sollen die Höhen eingezeichnet werden. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. II und III, Tafel I, angeführten; es sind nämlich von jeder Ecke die Senkrechten zur gegenüber liegenden Seite zu construiren. Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte (siehe § 16).

§ 26. In einem gegebenen Dreieck abc (Fig. VII) sind die Medianen oder Winkelhalbirungslinien einzuzeichnen; die Aufgabe ist gleich der in Fig. VI, Tafel I, ausgeführten. Die Medianen schneiden sich in m; dieser Schnittpunkt hat gleichen Abstand von den drei Seiten des Dreieckes; werden zwei Seiten eines Dreieckes über eine Ecke hinaus verlängert und einer der hierdurch entstandenen Nebenwinkel, z. B. bcd, ebenfalls halbirt, so steht letztere Mediane senkrecht zu mc. Dieses gilt selbstverständlich auch für die übrigen Ecken.

§ 27. In einem gegebenen stumpfwinkligen Dreiecke abc (Fig. VIII) sollen 1. die Mittellothe und 2. die Flächenhalbirungslinien oder Transversalen gezeichnet werden.

*) Die letztere Construction beruht auf dem geometrischen Satz, dass alle Winkel, welche über dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Scheitel in der Peripherie liegen, Rechte sind.