Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

3. Aufgaben über Dreiecke.

Zwei Dreiecke sind einander ähnlich, wenn die drei Seiten des einen mit den drei Seiten des andern gleich proportionirt sind. In ähnlichen Dreiecken nennt man die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten gleichliegende Seiten.

In ähnlichen Dreiecken stehen die gleichliegenden Seiten mit einander in gleichem Verhältniss (Proportion).

Aufgaben über Dreiecke.

Tafel II, Fig. I—X.

§ 20. Ein Dreieck ist im Allgemeinen seiner Grösse und Form nach bestimmt, wenn von den drei Seiten und den drei Winkeln eines solchen drei Stücke davon, z. B. drei Seiten, oder zwei Seiten und ein Winkel, oder eine Seite und zwei Winkel gegeben sind; eine Seite ist immer nothwendig. Ein gleichschenkliges Dreieck ist durch Schenkel und Basis, oder Basis und anliegende Winkel, ein rechtwinkliges Dreieck durch zwei Katheten oder eine Kathete und Hypotenuse bestimmt. Das gleichseitige Dreieck ist durch eine Seite oder auch seine Höhe bestimmt.

§ 21. Gegeben sind drei Strecken ab, bc, ca (Fig. I); es soll aus diesen ein Dreieck construirt werden.

Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit einem Halbmesser gleich bc aus b' einen Bogen über $a'b'$, nehme ferner die Strecke ac in den Zirkel und beschreibe aus a' damit einen zweiten Bogen; beide schneiden sich im Punkte c'; $a'b'c'$ ist das verlangte Dreieck.

Hätte man mit der Strecke bc als Radius den Bogen statt aus b' aus a' beschrieben, und demgemäss auch mit der Strecke ac als Radius den Bogen aus b' beschrieben, so wäre das Dreieck $a'b'c''$ wohl seiner Lage nach verschieden, an Form und Grösse aber dem ersten vollständig gleich (congruent). Die durch den Schnittpunkt der beiden Dreiecksseiten $a'c'$, $a'c''$ gehende Senkrechte heisst die Symmetrieachse beider Dreiecksfiguren.

§ 22. Gegeben ist 1. eine Strecke ab (Fig. II), als die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes, oder 2. die Höhe H eines gleichseitigen Dreieckes; es soll dasselbe nach beiden Bedingungen gezeichnet werden.

1. Man zeichne $a'b'$ gleich ab, beschreibe mit $a'b'$ als Radius die beiden Bögen $a'c$, $b'c$, verbinde a' mit c und b' mit c, so ist $a'b'c$ das gleichseitige Dreieck.

2. Man zeichne die Senkrechte H' gleich der Höhe, rechtwinklig zu dieser die beiden Parallelen $a'b'$, dc; soll nun c eine Spitze des Dreieckes sein, so beschreibe man mit beliebigem Halbmesser cd einen Viertelskreis und mit gleichem Halbmesser aus d den Bogen ce, ziehe von c durch e eine Gerade, bis sie die untere Parallele in a' schneidet; zieht man jetzt noch mit dem Halbmesser $a'c$ aus a' den Bogen cb', so ist b' ein dritter Eckpunkt und $a'b'c$ das verlangte Dreieck. In Fig. II sind beide Constructionen angegeben.

§ 23. Gegeben sind in Fig. III B als Basis, S als Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks.

Man zeichne B' gleich B, beschreibe aus den Endpunkten der Basis mit dem Halbmesser des Schenkels S zwei Bögen über der Grundlinie, so ist deren Schnittpunkt die Spitze des verlangten gleichschenkligen Dreieckes, B' die Basis und S' S'' sind die beiden Schenkel.

§ 24. Gegeben sind (Fig. IV): 1. die Strecke K als die Kathete, die Strecke H als die Hypotenuse, oder 2. K, K' (Fig. V) als die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes.

1. Man zeichne K' gleich K, errichte in einem der Endpunkte die Senkrechte und beschreibe aus dem andern Endpunkte mit einem Halbmesser, welcher gleich der Hypotenusenlänge ist, einen Bogen, welcher die Senkrechte schneidet; verbindet man letzteren Schnittpunkt mit dem Endpunkte der Kathete (hier rechts), so ergibt sich das rechtwinklige Dreieck; oder man zeichne H' gleich H, beschreibe über H' als Durchmesser einen Halbkreis und mit einem Halbmesser gleich K aus dem einen oder andern Endpunkte der Hypotenuse (hier von dem Endpunkte rechts) einen Bogen, so ergibt sich das gleiche Resultat.*)

Beide Constructionsarten sind in Fig. IV angedeutet.

2. Man zeichne K'' gleich K (Fig. V), errichte in einem Endpunkte von K'' die Senkrechte und mache sie gleich lang K' etc.

§ 25. In einem gegebenen Dreieck abc (Fig. VI) sollen die Höhen eingezeichnet werden. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. II und III, Tafel I, angeführten; es sind nämlich von jeder Ecke die Senkrechten zur gegenüber liegenden Seite zu construiren. Die drei Höhen schneiden sich in einem Punkte (siehe § 16).

§ 26. In einem gegebenen Dreieck abc (Fig. VII) sind die Medianen oder Winkelhalbirungslinien einzuzeichnen; die Aufgabe ist gleich der in Fig. VI, Tafel I, ausgeführten. Die Medianen schneiden sich in m; dieser Schnittpunkt hat gleichen Abstand von den drei Seiten des Dreieckes; werden zwei Seiten eines Dreieckes über eine Ecke hinaus verlängert und einer der hierdurch entstandenen Nebenwinkel, z. B. bcd, ebenfalls halbirt, so steht letztere Mediane senkrecht zu mc. Dieses gilt selbstverständlich auch für die übrigen Ecken.

§ 27. In einem gegebenen stumpfwinkligen Dreiecke abc (Fig. VIII) sollen 1. die Mittellothe und 2. die Flächenhalbirungslinien oder Transversalen gezeichnet werden.

*) Die letztere Construction beruht auf dem geometrischen Satz, dass alle Winkel, welche über dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Scheitel in der Peripherie liegen, Rechte sind.

1. Die Aufgabe ist gleich der in Fig. X, Tafel I, angeführten; es ist nämlich jede der Dreiecksseiten durch Construction zu halbiren und jede der Halbirungslinien bis zu ihrem Schnittpunkte S, welcher hier ausser dem Dreiecke liegt, zu verlängern. S hat gleichen Abstand von den Ecken a, b, c; verbindet man die Ecken mit je einem Mittelpunkte m, m', m'' der gegenüberliegenden Dreiecksseite, so erhält man die Transversalen; m''' ist der Schwerpunkt des Dreieckes etc. (siehe § 16).

In dem gegebenen rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. IX) fällt der Schnittpunkt der Mittellothe auf die Mitte m' der Hypotenuse; ein Mittelloth $b\,m'$ fällt mit der Höhe dieses Dreieckes zusammen.

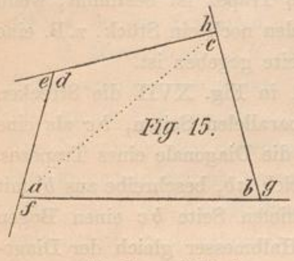
In dem gegebenen gleichseitigen Dreiecke $a\,b\,c$ (Fig. X) fallen Höhen, Medianen, Mittellothe und Transversalen zusammen; der Schnittpunkt derselben liegt in der Mitte des Dreieckes, und sein Abstand von den Ecken wie von den Seiten ist gleich.

Das Viereck.

Parallelogramm, Trapez, Trapezoid.

§ 28. Das Viereck ist eine durch vier Strecken begrenzte Figur. Die Strecken heissen Seiten des Viereckes; das Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Eine Gerade, welche zwei Ecken mit einander verbindet und nicht Seite ist, heisst eine Diagonallinie oder kurz Diagonale. Jede Diagonale theilt das Viereck in zwei Dreiecke; die innere Winkelsumme eines jeden Viereckes ist gleich vier Rechten gleich 360°; da nämlich jedes Dreieck zwei rechte Winkel enthält, das Viereck aber in zwei Dreiecke zerlegt werden kann, so enthält dasselbe $2 \cdot 180^0 = 360^0$. Die Aussenwinkel e, f, g, h (Fig. 15) eines Viereckes betragen zusammen ($4 \cdot 2 = 8$ Rechte — Winkel $a + b + c + d$) vier Rechte. (Siehe Dreiecke.)



Vierecke werden eingetheilt in:

a) Parallelogramme,

b) Trapeze,

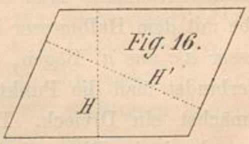
c) Trapezoide.

a) Ein Viereck heisst ein Parallelogramm, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten parallel und von gleicher Länge sind. Im Parallelogramm sind je zwei schräg gegenüberliegende Winkel gleich. Die Diagonalen halbiren sich gegenseitig. Unter der Höhe eines Parallelogrammes versteht man den Abstand zweier paralleler Seiten, und kann jede derselben als die Basis betrachtet werden. Bei dem Parallelogramm unterscheidet man noch vier besondere Arten: nämlich Quadrat, Rechteck, Rhombus und Rhomboid.

Ein Parallelogramm heisst ein Quadrat oder Gevierte, wenn es vier gleiche Seiten und einen rechten Winkel hat; die drei übrigen Winkel sind ebenfalls rechte. Die beiden Diagonalen haben gleiche Länge, halbiren die vier Winkel und stehen senkrecht zu einander. (Siehe Fig. XIII, Tafel II.) Ein Parallelogramm heisst Oblong oder Rechteck, wenn es einen rechten Winkel hat; die drei übrigen Winkel sind ebenfalls rechte. (Siehe Fig. XIV Tafel II.) Ein Parallelogramm heisst Rhombus oder Raute, wenn es, wie das Quadrat, vier gleiche Seiten, aber nur je ein paar gleiche Winkel hat; die Diagonalen halbiren ebenso, wie bei dem Quadrat, die Winkel und stehen senkrecht zu einander, sind jedoch ungleich lang. (Siehe Fig. XVI, Tafel II.) Ein Parallelogramm, welches nur je zwei Seiten gleich hat und keinen rechten Winkel enthält, heisst auch Rhomboid, das eigentliche Parallelogramm. (Siehe Fig. XI, Tafel II.) Das Parallelogramm hat im Allgemeinen zwei verschiedene Höhen (H, H', Fig. 16). Im Quadrat fallen die Höhen mit den Seiten zusammen, und da diese alle gleich sind, so gibt es hierfür nur einerlei, d. h. eine Höhe.

Im Rechteck sind die Seiten den Höhen gleich, d. h. fallen mit diesen zusammen.

Im Rhombus oder der Raute sind die beiden Höhen H, H' einander gleich (Fig. 17).



b) Ein Viereck heisst ein Trapez, wenn es nur zwei parallele Seiten hat; die beiden übrigen Seiten, welche schief heissen, können beliebig zu einander geneigt sein. Die Diagonalen sind im Allgemeinen ungleich lang; eine Ausnahme hiervon bildet das gleichschenklige Trapez, dessen beide schiefe Seiten zu den Parallelen gleich oder symmetrisch geneigt sind (siehe Fig. XIX, Tafel II); ihr Convergenzpunkt befindet sich bei entsprechender Verlängerung über der Mitte der beiden Parallelen; fällt man aus dem Convergenzpunkt eine Senkrechte zu den Parallelen, so bildet diese die Symmetrieachse der Figur; die Diagonalen sind in diesem Falle gleich lang. Bei dem Trapez bezeichnet man allgemein nur den Abstand der beiden Parallelen als die Höhe, und jede der Parallelen kann als die Basis oder Grundlinie betrachtet werden.

c) Ein Viereck, in welchem keine Seite der andern parallel ist, heisst Trapezoid.

Winkel und Diagonalen sind im Allgemeinen ungleich gross (siehe Fig. XX und XXI, Tafel II); es