Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

7. Das Vieleck.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

man Meter, Decimeter und Centimeter auf einmal abmessen kann. Die einzelnen zwischen der Senkrechten *0 0* und der Transversalen *1 0* liegenden Abschnitte enthalten von unten nach oben je 1, 2, 3, 4 ... Centimeter; die zwischen zwei Transversalen liegenden gleichen Strecken sind Decimeter.

Soll daher z. B. eine Länge von 2,270 m diesem Massstabe entnommen werden, so nehme man auf derjenigen Horizontalen, welche durch den Punkt *7* geht, die Strecke b' bis a' (b' bis $7 = 2$ m, 7 bis $a' =$ 7 cm + 2 dm) in den Zirkel. Zur besseren Veranschaulichung ist diese Länge auf eine Gerade in Fig. IX übertragen worden.

Das Vieleck (Polygon).

§ 44. Unter einem Vielecke (Polygon) versteht man eine durch mehrere Strecken begrenzte Flächenfigur; jede Strecke heisst eine Seite des Vieleckes; es heisst je nach der Zahl der Seiten oder Ecken ein Fünf-, Sechs-, Siebeneck u. s. w. Die Anzahl der Winkel und Seiten ist gleich. Eine jede Gerade, welche zwei Ecken verbindet und nicht Seite ist, heisst Diagonale. In jedem Vieleck ist die Summe der innern Winkel $= n \,.\, 2 - 4$ Rechten; n bedeute hier irgend eine bestimmte Zahl von Seiten oder Ecken, z. B. sechs, so ist $6 \,.\, 2 - 4 = 8$ Rechten. Ein Sechseck enthält somit als Winkelsumme acht Rechte gleich 720°.

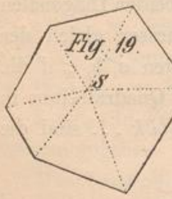


Fig. 19.

Um sich davon zu überzeugen, wähle man innerhalb des Sechseckes einen beliebigen Punkt S (Fig. 19), ziehe von den Ecken Gerade nach S, wodurch das Polygon in sechs Dreiecke zerlegt wird. Nun ist nach § 17 die Winkelsumme eines Dreieckes gleich zwei Rechten; die Winkelsumme der sechs Dreiecke somit gleich $6 \,.\, 2$ Rechten; davon sind aber die um S liegenden Winkel, welche zusammen vier Rechte ausmachen und nicht zu den Vieleckswinkeln gehören, abzuziehen; somit verbleiben noch acht Rechte. Demnach enthält ein Siebeneck zehn Rechte, ein Achteck zwölf Rechte u. s. w.*)

Vielecke können eingetheilt werden in gleichseitige, gleichwinklige, regelmässige (reguläre) und unregelmässige (irreguläre). Ein Vieleck ist nur dann regulär, wenn es gleiche Seiten und gleiche Winkel hat; alle andern sind irregulär. In Verbindung mit dem Kreis heisst ein Polygon, dessen Ecken in der Peripherie eines Kreises liegen und dessen Seiten somit Sehnen desselben bilden, ein Sehnenvieleck. Ein Vieleck, dessen Seiten als Tangenten erscheinen, heisst ein Tangentenvieleck; im erstern Falle heisst der Kreis umschrieben, im zweiten einbeschrieben.

Jedes reguläre Vieleck ist zugleich Sehnenvieleck und Tangentenvieleck, da ein Kreis sowohl umschrieben als einbeschrieben werden kann (Fig. 20). Das Centrum des Kreises ist zugleich das Centrum des Polygons.*)

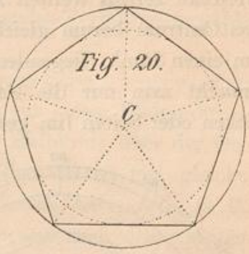


Fig. 20.

Gerade, welche von dem Mittelpunkte eines regulären Polygons nach den Ecken gezogen werden, haben gleiche Länge und zerlegen dasselbe in congruente, gleichschenklige Dreiecke.

Aus dem bisher Gesagten ergibt sich für die Construction eines regulären Vieleckes mittels des sogenannten Transporteurs ein allgemein giltiges Verfahren; z. B. es soll 1. ein reguläres Polygon, etwa ein Achteck construirt werden, wenn die Länge einer Seite $a\,b$ gegeben ist, oder es soll 2. ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

1. Man berechne nach § 44 die Winkelsumme des Polygons, welche in diesem Falle = 12 Rechten = 1080° ist, theile dieselbe durch die Zahl der Seiten oder Ecken, in diesem Falle also durch acht, so ergibt sich die Grösse des Winkels, welchen zwei Seiten einschliessen (hier gleich 135°).

Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 21 unschwer zu ersehen; sind einmal zwei Seiten eines regulären Polygons in ihrer Neigung zu einander bekannt, so lässt sich der Mittelpunkt eines durch die Ecken gehenden umschriebenen (oder auch eines einbeschriebenen) Kreises dadurch finden, dass man auf der Mitte einer jeden Seite Senkrechte errichtet, welche sich im Mittelpunkte C des zu

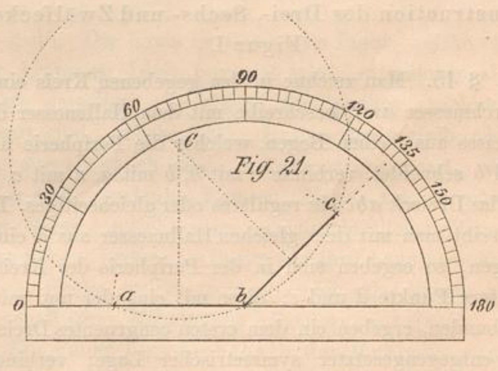


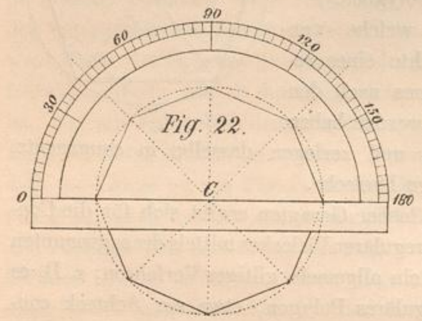
Fig. 21.

*) Ebenso kann auch die Summe der Aussenwinkel eines Polygons, welche stets gleich vier Rechten ist, berechnet werden (z. B. $6 \,.\, 2$ Rechte = 12 Rechte − 8 = 4 Rechte, siehe § 17).

*) Je grösser in einem regulären Polygone die Anzahl der Seiten ist, desto mehr nähert es sich der Kreisform; ein reguläres Polygon mit unendlich vielen Seiten kann als ein Kreis betrachtet werden.

umschreibenden Kreises schneiden (siehe Fig. 21). Auf diesen letztern trage man die Seitengrösse wiederholt an; sie wird in diesem Falle achtmal ohne Rest enthalten sein.

2. Da jedes Polygon in gleichschenklige, congruente Dreiecke zerlegt werden kann, und deren Winkel um das Centrum herum gleich sind, und die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel gleich 360° ist, so braucht man nur die Zahl 360 mit der Anzahl der Ecken oder Seiten (im gegebenen Falle 8) zu dividiren, um diejenige Winkelgrösse zu erhalten, welche von je zwei Schenkeln eines solchen Dreieckes eingeschlossen wird (in diesem Falle $\frac{360}{8}$



$= 45^0$). Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 22 ersichtlich.

(Ueber weitere Constructionsmethoden siehe Aufgaben Taf. IV.)

Aufgaben über reguläre Vielecke (Polygone).

Tafel IV. Figur I—XIII.

Es soll (Fig. I—V) ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

Construction des Drei-, Sechs- und Zwölfeckes, Figur I.

§ 45. Man zeichne in den gegebenen Kreis einen Durchmesser *amf*, beschreibe mit dem Halbmesser des Kreises aus *f* einen Bogen, welcher die Peripherie in *c* und *b* schneidet, verbinde *c* mit *b*, *b* mit *a*, *a* mit *c*, so ist das Dreieck *abc* ein reguläres oder gleichseitiges. Beschreibt man mit dem gleichen Halbmesser aus *a* einen Bogen, so ergeben sich in der Peripherie des Kreises weitere Punkte *d* und *e*; diese mit einander und mit *f* verbunden, ergeben ein dem ersten congruentes Dreieck in entgegengesetzter symmetrischer Lage; verbindet man die auf der Peripherie liegenden Punkte *a, d, d, e, e, f* . . ., so erhält man das reguläre Sechseck.

Die symmetrisch liegenden Dreiecke *abc*, *def* bilden ein reguläres Sternpolygon und im Innern desselben ein zweites reguläres Sechseck. Halbirt man die Bögen *da*, *ae* u. s. w., oder verlängert man die Diagonalen des im Innern der beiden Dreiecke entstandenen Sechseckes bis zur Peripherie, so ergeben sich die Punkte *i* und *k*, und diese mit je zwei auf der Peripherie nächstliegenden Punkten verbunden bilden die Zwölfecksseiten. (Das Zwölfeck ist hier nur zur Hälfte ausgeführt.)

Der Winkel, den zwei Dreiecksseiten bilden, beträgt 60°, der Winkel, den zwei Sechsecksseiten bilden, 120° u. s. w. (Siehe § 44.)

Construction des Vier-, Acht- und Sechszehneckes.

§ 46. In den gegebenen Kreis (Fig. II) zeichne man zwei zu einander senkrechte Durchmesser, z. B. *ac*, *bd*, und verbinde *a, b, b, c, c, d, d, a*, so erhält man das reguläre Viereck (Quadrat); halbirt man die durch die Diagonalen *ac*, *db* gebildeten vier rechten Winkel, so schneiden die Halbirungslinien auf der Peripherie vier weitere Punkte *e, g, h, f*, und diese als Seiten verbunden ergeben ein zweites Quadrat *efgh*, dessen Seiten mit den Diagonalen *ac*, *bd* des ersten Quadrates parallel sind; verbindet man nun *a* mit *h*, *h* mit *d*, *d* mit *g* u. s. w., so erhält man das reguläre Achteck; durch Halbiren der 45° Winkel *hma*, *ame* . . . erhält man ein Sechszehneck u. s. w. Der Winkel, den zwei Achtecksseiten mit einander bilden, ist gleich 135° (= 8 . 2 Rechten — 4 Rechten. Siehe § 44); den Winkel, den ein gleichschenkliges Dreieck *imh* bei *m* bildet, ist gleich 45° ($\frac{360}{8} = 45$).

§ 47. In einem gegebenen Quadrat *abcd* (Fig. III) soll ein reguläres Achteck so eingezeichnet werden, dass vier Seiten desselben mit den Quadratseiten zusammenfallen.

Man zeichne in das Quadrat die beiden Diagonalen *ac*, *bd*, beschreibe mit einem Halbmesser gleich der halben Diagonalen aus den Eckpunkten *a, b, c, d* die Viertelskreise, welche die gegebenen Quadratseiten in *e, k, d, g, f, i, h, l* schneiden; *gh*, *hi*, *ik* . . . sind die Achtecksseiten.

Construction des Fünf- und Zehneckes.

§ 48. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. IV) einen Durchmesser *ab*, errichte in dem Mittelpunkte *m* eine Senkrechte *mc*, halbire *am* in *n*, beschreibe mit dem Halbmesser *nc* aus *n* einen Bogen, welcher den Durchmesser in *d* schneidet, so ist die Strecke *cd* gleich einer Fünfecksseite und die Strecke *md* gleich einer Zehnecksseite; die Strecke *cd* trage man wiederholt auf die Peripherie, in welcher sie dann genau fünfmal als Sehne enthalten ist. Zieht man von einem Fünfeckspunkte *g* oder *f* durch *m*, so erhält man gleichfalls Punkte für das Zehneck und ist *ck* und *ci* gleich *md*, gleich einer Zehnecksseite.

Construction eines regulären Vieleckes mit beliebiger Seitenzahl (n Eck).*)

§ 49. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. V) zwei Durchmesser senkrecht zu einander, und verlängere jeden derselben von *a* und *d* über die Peripherie hinaus,

*) *n* bedeutet hier irgend eine beliebige Seitenzahl.