Das projective Zeichnen

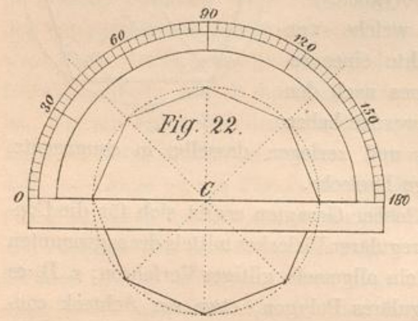
Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

8. Aufgaben über reguläre Vielecke.

umschreibenden Kreises schneiden (siehe Fig. 21). Auf diesen letztern trage man die Seitengrösse wiederholt an; sie wird in diesem Falle achtmal ohne Rest enthalten sein.

2. Da jedes Polygon in gleichschenklige, congruente Dreiecke zerlegt werden kann, und deren Winkel um das Centrum herum gleich sind, und die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel gleich 360^0 ist, so braucht man nur die Zahl 360 mit der Anzahl der Ecken oder Seiten (im gegebenen Falle 8) zu dividiren, um diejenige Winkelgrösse zu erhalten, welche von je zwei Schenkeln eines solchen Dreieckes eingeschlossen wird (in diesem Falle $\frac{360}{8} = 45^0$). Das Antragen dieses Winkels mittels des Transporteurs ist aus Fig. 22 ersichtlich.



(Ueber weitere Constructionsmethoden siehe Aufgaben Taf. IV.)

Aufgaben über reguläre Vielecke (Polygone).

Tafel IV. Figur I—XIII.

Es soll (Fig. I—V) ein reguläres Polygon construirt werden, wenn der umschriebene Kreis gegeben ist.

Construction des Drei-, Sechs- und Zwölfeckes, Figur I.

§ 45. Man zeichne in den gegebenen Kreis einen Durchmesser amf, beschreibe mit dem Halbmesser des Kreises aus f einen Bogen, welcher die Peripherie in c und b schneidet, verbinde c mit b, b mit a, a mit c, so ist das Dreieck abc ein reguläres oder gleichseitiges. Beschreibt man mit dem gleichen Halbmesser aus a einen Bogen, so ergeben sich in der Peripherie des Kreises weitere Punkte d und e; diese mit einander und mit f verbunden, ergeben ein dem ersten congruentes Dreieck in entgegengesetzter symmetrischer Lage; verbindet man die auf der Peripherie liegenden Punkte a, d, d, e, e, f . . ., so erhält man das reguläre Sechseck.

Die symmetrisch liegenden Dreiecke abc, def bilden ein reguläres Sternpolygon und im Innern desselben ein zweites reguläres Sechseck. Halbirt man die Bögen da, ae u. s. w., oder verlängert man die Diagonalen des im Innern der beiden Dreiecke entstandenen Sechseckes bis zur Peripherie, so ergeben sich die Punkte i und k, und diese mit je zwei auf der Peripherie nächstliegenden Punkten verbunden bilden die Zwölfecksseiten. (Das Zwölfeck ist hier nur zur Hälfte ausgeführt.)

Der Winkel, den zwei Dreiecksseiten bilden, beträgt 60^0, der Winkel, den zwei Sechsecksseiten bilden, 120^0 u. s. w. (Siehe § 44.)

Construction des Vier-, Acht- und Sechszehneckes.

§ 46. In den gegebenen Kreis (Fig. II) zeichne man zwei zu einander senkrechte Durchmesser, z. B. ac, bd, und verbinde a, b, b, c, c, d, d, a, so erhält man das reguläre Viereck (Quadrat); halbirt man die durch die Diagonalen ac, db gebildeten vier rechten Winkel, so schneiden die Halbirungslinien auf der Peripherie vier weitere Punkte e, g, h, f, und diese als Seiten verbunden ergeben ein zweites Quadrat $efgh$, dessen Seiten mit den Diagonalen ac, bd des ersten Quadrates parallel sind; verbindet man nun a mit h, h mit d, d mit g u. s. w., so erhält man das reguläre Achteck; durch Halbiren der 45^0 Winkel hma, ame . . . erhält man ein Sechszehneck u. s. w. Der Winkel, den zwei Achtecksseiten mit einander bilden, ist gleich 135^0 (= 8 . 2 Rechten — 4 Rechten. Siehe § 44); den Winkel, den ein gleichschenkliges Dreieck imh bei m bildet, ist gleich 45^0 ($\frac{360}{8} = 45$).

§ 47. In einem gegebenen Quadrat $abcd$ (Fig. III) soll ein reguläres Achteck so eingezeichnet werden, dass vier Seiten desselben mit den Quadratseiten zusammenfallen.

Man zeichne in das Quadrat die beiden Diagonalen ac, bd, beschreibe mit einem Halbmesser gleich der halben Diagonalen aus den Eckpunkten a, b, c, d die Viertelskreise, welche die gegebenen Quadratseiten in e, k, d, g, f, i, h, l schneiden; gh, hi, ik . . . sind die Achtecksseiten.

Construction des Fünf- und Zehneckes.

§ 48. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. IV) einen Durchmesser ab, errichte in dem Mittelpunkte m eine Senkrechte mc, halbire am in n, beschreibe mit dem Halbmesser nc aus n einen Bogen, welcher den Durchmesser in d schneidet, so ist die Strecke cd gleich einer Fünfecksseite und die Strecke md gleich einer Zehnecksseite; die Strecke cd trage man wiederholt auf die Peripherie, in welcher sie dann genau fünfmal als Sehne enthalten ist. Zieht man von einem Fünfeckspunkte g oder f durch m, so erhält man gleichfalls Punkte für das Zehneck und ist ck und ci gleich md, gleich einer Zehnecksseite.

Construction eines regulären Vieleckes mit beliebiger Seitenzahl (n Eck).*)

§ 49. Man zeichne in den gegebenen Kreis (Fig. V) zwei Durchmesser senkrecht zu einander, und verlängere jeden derselben von a und d über die Peripherie hinaus,

*) n bedeutet hier irgend eine beliebige Seitenzahl.

theile einen der Durchmesser, z. B. *a b*, in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will*), z. B. sieben, trage einen solchen Theil von der Peripherie aus nach aussen in *ac*, *de* auf die verlängerten Durchmesser an und ziehe die Gerade *c e*, welche die Peripherie in zwei Punkten schneidet; verbindet man nun denjenigen Schnittpunkt *f*, welcher dem getheilten Durchmesser am nächsten liegt, mit dem zunächst liegenden dritten Theilpunkte *3*, so ist *f 3* gleich einer n-Ecksseite; im gegebenen Falle also, da der Durchmesser *a b* in sieben Theile getheilt wurde, gleich einer Siebenecksseite, welche daher als Sehne siebenmal ohne Rest auf die Peripherie getragen werden kann.

Es soll ein reguläres Polygon construirt werden, wenn die Länge einer Seite gegeben ist.

§ 50. In Fig. VI ist die Seite eines Sechseckes gegeben.

Man mache *ab* gleich der Strecke *a′ b′*, welche als Seitenlänge eines Sechseckes gegeben ist, beschreibe aus *a* und *b* mit dem Halbmesser gleich der Seitenlänge die Bögen *a m c*, *b m f*, beschreibe aus *m* den Kreis durch *a b*, so ist in diesem *a b* sechsmal als Sehne enthalten.

§ 51. In Fig. VII ist *a b* gleich *a′ b′* als die Seite eines Achteckes gegeben.

Man beschreibe über *ab* einen Halbkreis, zeichne in denselben das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck *a n b*, trage eine Kathetenlänge *a n* oder *b n* von *n* nach *m*, beschreibe aus *m* durch *ab* einen Kreis, so ist in letzterem die Strecke *a b* achtmal enthalten und braucht nur herumgetragen zu werden.

§ 52. In Fig. VIII ist *a b* gleich *a′ b′* als Fünfecksseite gegeben.

Man beschreibe aus einem Endpunkte, z. B. *b*, mit dem Radius *b a* den Bogen *a c f n*, errichte in *b* eine Senkrechte *b c*, halbire *a b* in *m*, und ziehe *m c*; die Strecke *m c* lege man von *m* aus in *m d* nieder und beschreibe aus *a* und *b* mit dem Halbmesser *a d* Bögen, welche sich in *e*, d. i. über der Mitte von *a b* schneiden. Die Geraden *a e*, *b e* sind Diagonalen des Fünfeckes, *e* die der Seite *a b* gegenüberliegende Spitze. Zieht man aus *e* mit dem Halbmesser gleich *a b* einen weitern Bogen, so ergibt dieser die Eckpunkte *g* und *f*.

Wäre *a′ b′* als eine Zehnecksseite bestimmt worden, so würde diese in einem Kreise, welcher aus *e* durch *ab* beschrieben wird, zehnmal als Sehne enthalten sein.

§ 53. In Fig. IX ist *a b* gleich *a′ b′* als Zwölfecksseite gegeben.

Um den Kreis zu erhalten, in welchem *a b* zwölfmal als Sehne enthalten ist, zeichne man über *a b* ein gleichseitiges Dreieck *a n b*, errichte über der Mitte von *a b* eine Senkrechte und trage *a n* oder *b n* von *n* nach *m*; *m* ist der Mittelpunkt und *m a* oder *m b* der Halbmesser des gesuchten Kreises, auf welchem die Strecke zwölfmal herumgetragen werden kann.

*) Das Verfahren kann nur vom Sechsecke aufwärts angewendet werden; bei einem Sechsecke ist die Gerade *c e* Tangente.

§ 54. Sollte ein reguläres Vieleck gezeichnet werden, dessen Seitenzahl gleich n, d. h. eine beliebige sein kann, so könnte etwa folgendes Verfahren gewählt werden.

Man verlängere die gegebene Seite *a b* gleich *a′ b′* (Fig. X) nach links, beschreibe aus einem Endpunkte *a* mit dem Halbmesser *a b* einen Halbkreis über der Geraden *b a 7*, und theile denselben in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will, z. B. sieben. Zieht man nun von *a* aus nach dem zweiten Theilpunkt über *7* die Gerade *a g*, so ist diese eine zweite Seite und *g a b* der Winkel, unter welchem die beiden Seiten eines Siebeneckes zu einander geneigt sind. Der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe, welche über den Seiten *a b*, *a g* errichtet wurden.

In Fig. XI ist ein Sternpolygon, die sog. Windrose, dargestellt, wie selbe ähnlich auf einem Compasse angegeben ist. Die acht Hauptspitzen sind nach den Himmelsrichtungen, z. B. *N* Nord, *W* West, *NW* Nordwest u. s. w. bezeichnet.

Fig. XII und XIII sind Netzwerke, welche mittels der Reissschiene und eines sog. 60° Winkels gezeichnet werden können, und sind die Constructionen der Figur XI, sowie der Figuren XII und XIII aus der Zeichnung unschwer ersichtlich.

Der Kreis.

§ 55. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie begrenzt wird, in welcher alle Punkte derselben von einem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind. (Siehe § 2.) Kreise, deren Halb- oder Durchmesser gleich sind, heissen congruent; alle Kreise sind ähnliche Figuren; Kreise von verschiedener Grösse, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heissen in Bezug auf ihre Lage concentrisch; Kreise, welche sich schneiden, also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, excentrisch.

Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Centrum kleiner ist, als dessen Halbmesser; er liegt auf der Peripherie, wenn sein Abstand gleich dem Halbmesser, und ausserhalb, wenn sein Abstand grösser ist als der Halbmesser; das gleiche gilt auch von einer Geraden, welche im ersten Falle den Kreis in zwei Punkten schneidet (Secante), im zweiten berührt und im dritten ausserhalb des Kreises liegt. Je näher eine Sehne dem Mittelpunkte liegt, desto grösser ist sie, und umgekehrt; die grösste Sehne heisst Durchmesser (siehe § 2).

Eine Senkrechte, welche von dem Mittelpunkte