Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

9. Der Kreis.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

theile einen der Durchmesser, z. B. *a b*, in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will*), z. B. sieben, trage einen solchen Theil von der Peripherie aus nach aussen in *ac*, *de* auf die verlängerten Durchmesser an und ziehe die Gerade *c e*, welche die Peripherie in zwei Punkten schneidet; verbindet man nun denjenigen Schnittpunkt *f*, welcher dem getheilten Durchmesser am nächsten liegt, mit dem zunächst liegenden dritten Theilpunkte *3*, so ist *f 3* gleich einer n-Ecksseite; im gegebenen Falle also, da der Durchmesser *a b* in sieben Theile getheilt wurde, gleich einer Siebenecksseite, welche daher als Sehne siebenmal ohne Rest auf die Peripherie getragen werden kann.

Es soll ein reguläres Polygon construirt werden, wenn die Länge einer Seite gegeben ist.

§ 50. In Fig. VI ist die Seite eines Sechseckes gegeben.

Man mache *ab* gleich der Strecke *a′ b′*, welche als Seitenlänge eines Sechseckes gegeben ist, beschreibe aus *a* und *b* mit dem Halbmesser gleich der Seitenlänge die Bögen *a m c*, *b m f*, beschreibe aus *m* den Kreis durch *a b*, so ist in diesem *a b* sechsmal als Sehne enthalten.

§ 51. In Fig. VII ist *a b* gleich *a′ b′* als die Seite eines Achteckes gegeben.

Man beschreibe über *ab* einen Halbkreis, zeichne in denselben das gleichschenklige und rechtwinklige Dreieck *a n b*, trage eine Kathetenlänge *a n* oder *b n* von *n* nach *m*, beschreibe aus *m* durch *ab* einen Kreis, so ist in letzterem die Strecke *a b* achtmal enthalten und braucht nur herumgetragen zu werden.

§ 52. In Fig. VIII ist *a b* gleich *a′ b′* als Fünfecksseite gegeben.

Man beschreibe aus einem Endpunkte, z. B. *b*, mit dem Radius *b a* den Bogen *a c f n*, errichte in *b* eine Senkrechte *b c*, halbire *a b* in *m*, und ziehe *m c*; die Strecke *m c* lege man von *m* aus in *m d* nieder und beschreibe aus *a* und *b* mit dem Halbmesser *a d* Bögen, welche sich in *e*, d. i. über der Mitte von *a b* schneiden. Die Geraden *a e*, *b e* sind Diagonalen des Fünfeckes, *e* die der Seite *a b* gegenüberliegende Spitze. Zieht man aus *e* mit dem Halbmesser gleich *a b* einen weitern Bogen, so ergibt dieser die Eckpunkte *g* und *f*.

Wäre *a′ b′* als eine Zehnecksseite bestimmt worden, so würde diese in einem Kreise, welcher aus *e* durch *ab* beschrieben wird, zehnmal als Sehne enthalten sein.

§ 53. In Fig. IX ist *a b* gleich *a′ b′* als Zwölfecksseite gegeben.

Um den Kreis zu erhalten, in welchem *a b* zwölfmal als Sehne enthalten ist, zeichne man über *a b* ein gleichseitiges Dreieck *a n b*, errichte über der Mitte von *a b* eine Senkrechte und trage *a n* oder *b n* von *n* nach *m*; *m* ist der Mittelpunkt und *m a* oder *m b* der Halbmesser des gesuchten Kreises, auf welchem die Strecke zwölfmal herumgetragen werden kann.

§ 54. Sollte ein reguläres Vieleck gezeichnet werden, dessen Seitenzahl gleich n, d. h. eine beliebige sein kann, so könnte etwa folgendes Verfahren gewählt werden.

Man verlängere die gegebene Seite *a b* gleich *a′ b′* (Fig. X) nach links, beschreibe aus einem Endpunkte *a* mit dem Halbmesser *a b* einen Halbkreis über der Geraden *b a 7*, und theile denselben in so viel gleiche Theile, als man Seiten oder Ecken haben will, z. B. sieben. Zieht man nun von *a* aus nach dem zweiten Theilpunkt über *7* die Gerade *a g*, so ist diese eine zweite Seite und *g a b* der Winkel, unter welchem die beiden Seiten eines Siebeneckes zu einander geneigt sind. Der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises liegt in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe, welche über den Seiten *a b*, *a g* errichtet wurden.

In Fig. XI ist ein Sternpolygon, die sog. Windrose, dargestellt, wie selbe ähnlich auf einem Compasse angegeben ist. Die acht Hauptspitzen sind nach den Himmelsrichtungen, z. B. *N* Nord, *W* West, *NW* Nordwest u. s. w. bezeichnet.

Fig. XII und XIII sind Netzwerke, welche mittels der Reissschiene und eines sog. 60^0 Winkels gezeichnet werden können, und sind die Constructionen der Figur XI, sowie der Figuren XII und XIII aus der Zeichnung unschwer ersichtlich.

Der Kreis.

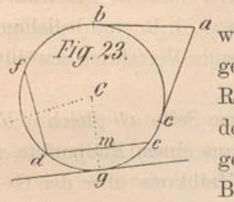
§ 55. Der Kreis ist eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie begrenzt wird, in welcher alle Punkte derselben von einem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind. (Siehe § 2.) Kreise, deren Halb- oder Durchmesser gleich sind, heissen congruent; alle Kreise sind ähnliche Figuren; Kreise von verschiedener Grösse, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heissen in Bezug auf ihre Lage concentrisch; Kreise, welche sich schneiden, also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, excentrisch.

Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn sein Abstand vom Centrum kleiner ist, als dessen Halbmesser; er liegt auf der Peripherie, wenn sein Abstand gleich dem Halbmesser, und ausserhalb, wenn sein Abstand grösser ist als der Halbmesser; das gleiche gilt auch von einer Geraden, welche im ersten Falle den Kreis in zwei Punkten schneidet (Secante), im zweiten berührt und im dritten ausserhalb des Kreises liegt. Je näher eine Sehne dem Mittelpunkte liegt, desto grösser ist sie, und umgekehrt; die grösste Sehne heisst Durchmesser (siehe § 2).

Eine Senkrechte, welche von dem Mittelpunkte

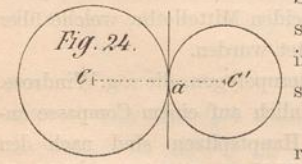
*) Das Verfahren kann nur vom Sechsecke aufwärts angewendet werden; bei einem Sechsecke ist die Gerade *c e* Tangente.

gegen eine Sehne gefällt wird, halbirt dieselbe, und umgekehrt; errichtet man auf der Mitte einer Sehne eine Senkrechte, so geht dieselbe durch den Mittelpunkt (siehe Fig. 23).



Eine Gerade wird zur Tangente, wenn die vom Mittelpunkt auf sie gefällte Senkrechte gleich dem Radius ist; die Tangente hat mit der Peripherie nur einen Punkt gemein und steht auf dem an den Berührungspunkt gezogenen Radius senkrecht.*) Von einem Punkte *a* ausserhalb des Kreises können nur zwei Tangenten an denselben gelegt werden; die Entfernungen der Berührungspunkte *b*, *c* (Fig. 23) von dem gegebenen Punkte sind gleich.

Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich ist der Summe ihrer Halbmesser; die Berührung heisst in diesem Falle eine äussere (siehe Fig. 24).



Zwei Kreise berühren sich, wenn der Abstand der beiden Mittelpunkte gleich ist dem Unterschiede (Differenz) der beiden Halbmesser (siehe Fig. 25); die Berührung heisst in diesem Falle eine innere. Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt immer in der Geraden (Centrale), welche die beiden Mittelpunkte verbindet. Eine Gerade, welche in dem Berührungspunkte der beiden Kreise senkrecht zur Centralen steht, heisst eine gemeinschaftliche Tangente.

Ein Kreis ist seiner Grösse nach bestimmt:

a) durch den Radius oder Diameter;

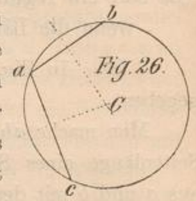
b) durch zwei mit den Endpunkten aneinander stossende Sehnen**);

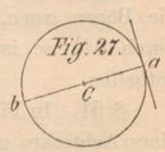
c) durch eine Sehne und einen Punkt, welcher ausserhalb der Sehne liegt und nicht mit deren Verlängerung zusammenfällt;

d) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen;

e) durch den Winkel, welchen eine Sehne und eine Tangente an einem Punkte der Peripherie bilden.

Die Auffindung des Kreismittelpunktes nach der Bestimmung *b* ist schon in Fig. 23 angedeutet. Betrachtet man nämlich *ab*, *ac* (Fig. 26) als die aneinander stossenden Sehnen und errichtet man auf der Mitte von *ab* die Senkrechte (Mittelloth), so liegt auf dieser irgendwo der Mittelpunkt des zu zeichnenden Kreises; dieses Mittelloth hat die Eigenschaft, dass die Entfernungen eines jeden Punktes auf demselben von den Endpunkten der Sehne (a, b) stets gleich sind; es könnten somit, soferne man nur die eine Sehne in Betracht zieht, eine Reihe von Kreisen oder Kreisbögen durch *ab* gezeichnet werden, deren Mittelpunkte sämmtlich auf dem Mittellothe liegen müssen; eine Linie aber, auf welcher das Gesuchte liegen muss, heisst auch ein geometrischer Ort; zeichnet man nun noch das Mittelloth zur Sehne *ac*, so bildet dieses für die Sehne *ac* einen weiteren geometrischen Ort; da auf beiden das Gesuchte liegen muss, zwei Gerade sich aber nur in einem Punkte schneiden, so kann der Mittelpunkt eines Bogens, bzw. eines Kreises, welcher durch *a*, *b*, *c* geht, nur in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe (geometrische Oerter) liegen.

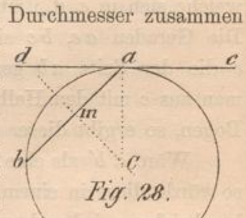




c) Dieser Fall führt auf die gleiche Aufgabe b) zurück, wenn man den gegebenen Punkt mit irgend einem Endpunkte als Sehne verbindet und ebenso verfährt wie vorhin.

d) Die Lösung ist gleich den Vorhergehenden, wenn man sich die drei Punkte durch Sehnen verbunden denkt.

e) Der Winkel, den eine Sehne mit einer Tangente bilden kann, ist entweder ein spitzer, bzw. stumpfer, oder ein rechter*); steht die Sehne rechtwinklig zur Tangente, so fällt sie mit dem Durchmesser zusammen (siehe Fig. 27), und das Kreiscentrum liegt auf der Mitte derselben. Ist der Winkel, welcher durch eine Sehne und Tangente gebildet wird (siehe Fig. 28), ein spitzer, bzw. ein stumpfer (je nachdem man den einen oder anderen der beiden Nebenwinkel *b a d* oder *b a c* in Betracht zieht), so ist die Auffindung des Kreismittelpunktes, wie schon in



*) Die Tangente eines Kreises bezeichnet auch die jeweilige Richtung, welche die Kreislinie an dem betreffenden Punkte einnimmt, d. h., wenn man sich die Kreislinie durch Bewegung eines Punktes entstanden denkt, und der Punkt während derselben von einer bestimmten Stelle an seine Richtung unverändert beibehält (gerade fortschreitet), so fällt letztere mit einer Tangente an dieser Stelle der Curve zusammen.

**) Die Lösung ist nur dann nicht möglich, wenn die beiden Sehnen in eine Gerade zusammenfallen, da in diesem Falle der Radius unendlich gross, und damit auch der Kreis zu einer Geraden wird.

*) Würden Sehne und Tangente einen flachen Winkel bilden, oder mit anderen Worten in eine Gerade zusammenfallen, so würden die beiden Geraden, welche die geometrischen Oerter bilden, parallel sein, d. h. sich erst in unendlicher Entfernung schneiden.

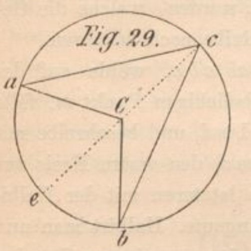
Fig. 23 angedeutet, folgende: Da nämlich der Kreis die Tangente cd in a berühren muss, der Halbmesser von dem betreffenden Berührungspunkte aber senkrecht zur Tangente steht, so ist die Senkrechte in a ein geometrischer Ort für alle Kreismittelpunkte, deren Peripherien die Gerade cd in a berühren sollen; zeichnet man daher noch den zweiten geometrischen Ort (nämlich das Mittelloth zu ab), so ist der Schnittpunkt beider das gesuchte Centrum.

Eigenschaften der im Kreise vorkommenden Winkel.

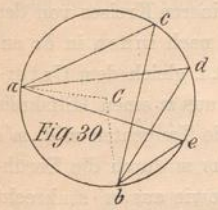
§ 56. Von diesen sollen hier nur die für das Projectionszeichnen wichtigsten erwähnt werden; solche sind:

1. Ein Peripheriewinkel ist halb so gross, als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel.

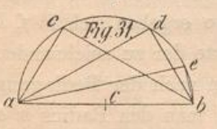
Zieht man von zwei beliebigen Punkten a, b eines Kreises (Fig. 29) nach einem beliebigen Punkte c der Peripherie zwei Gerade, so bilden diese bei c den auf der Peripherie liegenden Winkel (Peripheriewinkel); zieht man ferner von a und b nach dem Kreiscentrum, so ist der Winkel bei C ein Centriwinkel über dem gleichen Bogen ab, und Winkel acb ist halb so gross, wie Winkel aCb, oder Winkel aCb ist doppelt so gross wie acb. Beweis: Man ziehe die Gerade cCe, so sind nun aCc und bCc gleichschenklige Dreiecke, und deren Winkel an der Basis also gleich (siehe § 15); da nun ferner die Winkel aCe, bCe als Aussenwinkel dieser Dreiecke so gross sind wie je zwei an der Basis eines solchen gleichschenkligen Dreieckes liegende Winkel (siehe § 17), so folgt daraus, dass Winkel acC gleich der halben Grösse von Winkel aCe, und ebenso Winkel bcC gleich der halben Grösse von Winkel bCe, mithin Winkel acb halb so gross ist als Winkel aCb.



2. Alle über einem Bogen stehenden Peripheriewinkel haben gleiche Grösse; die Winkel acb, adb, aeb in Fig. 30 sind also gleich. Der Beweis folgt aus dem vorhergehenden Satz.



3. Alle Peripheriewinkel, deren Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, welche also auf einem Halbkreise stehen, sind rechte Winkel; der dazugehörige Centriwinkel aCb ist ein flacher, also gleich zwei Rechten. Die Winkel acb, adb u. s. w. in Fig. 31 sind also rechte Winkel. Ein Peripheriewinkel ist ein spitzer, wenn er auf einem Bogen steht, der kleiner ist als ein Halbkreis, und ein stumpfer, wenn er auf einem Bogen steht, der grösser als ein Halbkreis ist.



Aufgaben über Kreise.

Tafel V. Figur I—XIII.*)

§ 57. In einem gegebenen Kreise soll der Mittelpunkt gefunden werden.

Angenommen, es sei in einem Kreise der Mittelpunkt nicht bekannt, so zeichne man eine beliebige Sehne ab (Fig. I), errichte darauf das Mittelloth und halbire die innerhalb der Peripherie liegende Strecke, d. i. den Durchmesser; m ist sodann der gesuchte Mittelpunkt; oder man zeichne eine beliebige zweite Sehne bc, errichte darauf ebenfalls das Mittelloth, so ergibt sich in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe der gleiche Punkt m.

§ 58. In dem Punkte a eines gegebenen Kreises (Fig. II) soll die Tangente gezeichnet werden.

Man verbinde a mit dem Mittelpunkte m und errichte in a die Senkrechte zu ma (siehe § 9). Soll eine Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden bc gezeichnet werden, so fälle man aus m die Senkrechte zu bc (siehe § 9), welche die Peripherie in a' schneidet; durch a' construire man die Parallele zu bc (siehe § 10).

§. 59. In Fig. III sollen mehrere Kreise gezeichnet werden, welche sich in einem gegebenen Punkte a berühren.

Die Halbmesser der Kreise können beliebig gross gewählt werden, die Kreismittelpunkte müssen jedoch auf einer Geraden $mm'm''$ liegen, welche durch den Punkt a geht; zeichnet man durch a eine Senkrechte zu $m'm''m'$, so ist diese eine gemeinschaftliche Tangente sämmtlicher Kreise (siehe § 55); wählt man auf letzterer einen beliebigen Punkt P und zieht man von P die Tangenten Pb, Pd, Pc an sämmtliche Kreise, so sind die Entfernungen Pb, Pd, Pc gleich der Strecke Pa (siehe § 55, Fig. 23).

Eine Anzahl Kreise von verschiedenem Halbmesser sollen sich in zwei beliebig gewählten Punkten einer Geraden PR schneiden (Fig. IV).

Man errichte in m'' das Mittelloth zwischen den beiden gegebenen Punkten; auf diesem liegen sodann die Mittelpunkte der zu zeichnenden Kreise; zeichnet man aus P Tangenten an dieselben, so sind auch hier, wie bei Fig. III, die Entfernungen von P bis zu den Berührungspunkten gleich. Die Gerade PR bildet eine gemeinschaftliche Secante.

§ 60. Durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreieckes soll ein Kreis gezeichnet werden (Fig. V).

Man errichte über jeder Dreiecksseite das Mittelloth; diese schneiden sich im Punkte M, dessen Abstand von a, b und c gleich ist (siehe § 55).

*) In Tafel V sind die Flächen der zunächst gegebenen Kreise zur bessern Unterscheidung gelb, die übrigen grau abgetont.