Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

10. Aufgaben über Kreise.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

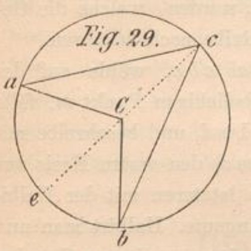
Fig. 23 angedeutet, folgende: Da nämlich der Kreis die Tangente cd in a berühren muss, der Halbmesser von dem betreffenden Berührungspunkte aber senkrecht zur Tangente steht, so ist die Senkrechte in a ein geometrischer Ort für alle Kreismittelpunkte, deren Peripherien die Gerade cd in a berühren sollen; zeichnet man daher noch den zweiten geometrischen Ort (nämlich das Mittelloth zu ab), so ist der Schnittpunkt beider das gesuchte Centrum.

Eigenschaften der im Kreise vorkommenden Winkel.

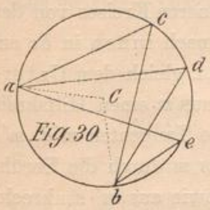
§ 56. Von diesen sollen hier nur die für das Projectionszeichnen wichtigsten erwähnt werden; solche sind:

1. Ein Peripheriewinkel ist halb so gross, als der mit ihm auf gleichem Bogen stehende Centriwinkel.

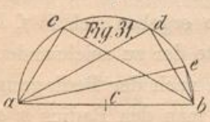
Zieht man von zwei beliebigen Punkten a, b eines Kreises (Fig. 29) nach einem beliebigen Punkte c der Peripherie zwei Gerade, so bilden diese bei c den auf der Peripherie liegenden Winkel (Peripheriewinkel); zieht man ferner von a und b nach dem Kreiscentrum, so ist der Winkel bei C ein Centriwinkel über dem gleichen Bogen ab, und Winkel acb ist halb so gross, wie Winkel aCb, oder Winkel aCb ist doppelt so gross wie acb. Beweis: Man ziehe die Gerade cCe, so sind nun aCc und bCc gleichschenklige Dreiecke, und deren Winkel an der Basis also gleich (siehe § 15); da nun ferner die Winkel aCe, bCe als Aussenwinkel dieser Dreiecke so gross sind wie je zwei an der Basis eines solchen gleichschenkligen Dreieckes liegende Winkel (siehe § 17), so folgt daraus, dass Winkel acC gleich der halben Grösse von Winkel aCe, und ebenso Winkel bcC gleich der halben Grösse von Winkel bCe, mithin Winkel acb halb so gross ist als Winkel aCb.



2. Alle über einem Bogen stehenden Peripheriewinkel haben gleiche Grösse; die Winkel acb, adb, aeb in Fig. 30 sind also gleich. Der Beweis folgt aus dem vorhergehenden Satz.



3. Alle Peripheriewinkel, deren Schenkel durch die Endpunkte eines Durchmessers gehen, welche also auf einem Halbkreise stehen, sind rechte Winkel; der dazugehörige Centriwinkel aCb ist ein flacher, also gleich zwei Rechten. Die Winkel acb, adb u. s. w. in Fig. 31 sind also rechte Winkel. Ein Peripheriewinkel ist ein spitzer, wenn er auf einem Bogen steht, der kleiner ist als ein Halbkreis, und ein stumpfer, wenn er auf einem Bogen steht, der grösser als ein Halbkreis ist.



Aufgaben über Kreise.

Tafel V. Figur I—XIII.*)

§ 57. In einem gegebenen Kreise soll der Mittelpunkt gefunden werden.

Angenommen, es sei in einem Kreise der Mittelpunkt nicht bekannt, so zeichne man eine beliebige Sehne ab (Fig. I), errichte darauf das Mittelloth und halbire die innerhalb der Peripherie liegende Strecke, d. i. den Durchmesser; m ist sodann der gesuchte Mittelpunkt; oder man zeichne eine beliebige zweite Sehne bc, errichte darauf ebenfalls das Mittelloth, so ergibt sich in dem Schnittpunkte der beiden Mittellothe der gleiche Punkt m.

§ 58. In dem Punkte a eines gegebenen Kreises (Fig. II) soll die Tangente gezeichnet werden.

Man verbinde a mit dem Mittelpunkte m und errichte in a die Senkrechte zu ma (siehe § 9). Soll eine Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden bc gezeichnet werden, so fälle man aus m die Senkrechte zu bc (siehe § 9), welche die Peripherie in a' schneidet; durch a' construire man die Parallele zu bc (siehe § 10).

§. 59. In Fig. III sollen mehrere Kreise gezeichnet werden, welche sich in einem gegebenen Punkte a berühren.

Die Halbmesser der Kreise können beliebig gross gewählt werden, die Kreismittelpunkte müssen jedoch auf einer Geraden $mm'm''$ liegen, welche durch den Punkt a geht; zeichnet man durch a eine Senkrechte zu $m'm''m'$, so ist diese eine gemeinschaftliche Tangente sämmtlicher Kreise (siehe § 55); wählt man auf letzterer einen beliebigen Punkt P und zieht man von P die Tangenten Pb, Pd, Pc an sämmtliche Kreise, so sind die Entfernungen Pb, Pd, Pc gleich der Strecke Pa (siehe § 55, Fig. 23).

Eine Anzahl Kreise von verschiedenem Halbmesser sollen sich in zwei beliebig gewählten Punkten einer Geraden PR schneiden (Fig. IV).

Man errichte in m'' das Mittelloth zwischen den beiden gegebenen Punkten; auf diesem liegen sodann die Mittelpunkte der zu zeichnenden Kreise; zeichnet man aus P Tangenten an dieselben, so sind auch hier, wie bei Fig. III, die Entfernungen von P bis zu den Berührungspunkten gleich. Die Gerade PR bildet eine gemeinschaftliche Secante.

§ 60. Durch die Eckpunkte eines gegebenen Dreieckes soll ein Kreis gezeichnet werden (Fig. V).

Man errichte über jeder Dreiecksseite das Mittelloth; diese schneiden sich im Punkte M, dessen Abstand von a, b und c gleich ist (siehe § 55).

*) In Tafel V sind die Flächen der zunächst gegebenen Kreise zur bessern Unterscheidung gelb, die übrigen grau abgetont.

§ 61. An einen Kreis sollen von einem gegebenen Punkte P aus die Tangenten gelegt werden (Fig. VI).

Um die Berührungspunkte c, d im Voraus zu bestimmen, zeichne man über mP als Durchmesser einen Kreis; dieser schneidet den gegebenen Kreis in den beiden Berührungspunkten c und d*); die Tangenten Pd, Pc bilden mit den Halbmessern dm, cm rechte Winkel (siehe § 55).

§ 62. In einem gegebenen Kreissector (siehe § 2) abc (Fig. VII) soll ein die Seiten desselben berührender Kreis gezeichnet werden.

Man halbire den Winkel bac, zeichne im Schnittpunkte h die Tangente an den Bogen, verlängere ab bis e, ac bis d und halbire die Winkel aed und ade; diese drei Mediane schneiden sich im Mittelpunkte m des zu zeichnenden Kreises; die Berührungspunkte g, f auf den Geraden ab, ac ergeben sich, wenn man mit dh als Radius aus d und e Bögen beschreibt. Diese Aufgabe ist identisch mit derjenigen, in ein gegebenes Dreieck einen Kreis einzubeschreiben.

In einen Kreis (Fig. VIII) sollen mehrere Kreise, z. B. drei, einbeschrieben werden, welche denselben, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man zerlege den Kreis in so viel congruente Sectoren, als man Kreise einbeschreiben will, z. B. drei, und verfahre wie bei Fig. VII, wodurch sich m''' als Mitte eines Kreises agi ergibt; die übrigen Mittelpunkte m', m'' liegen auf den Halbirungslinien der Sectoren und werden durch einen Kreis, dessen Radius gleich mm''' ist, abgeschnitten; g, h, i, sowie a, c, e sind Berührungspunkte der Kreise.

§ 63. Um einen gegebenen Kreis $abcd\ldots$ (Fig. IX) soll eine beliebige Anzahl congruenter Kreise gezeichnet werden, welche den gegebenen, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man zerlege den gegebenen Kreis in so viele gleiche Sectoren, als man Kreise daran zeichnen will, z. B. sechs, halbire die Winkel derselben, ziehe an einen Punkt a eines Sectors die Tangente sa und halbire den Aussenwinkel aso, oder trage die Strecke sa von s nach o, und errichte in o über mo eine Senkrechte; diese schneidet die Halbirungslinie des Sectors in einem Punkte 1; zieht man nun mit dem Halbmesser $m1$ aus m einen Kreis, so schneidet dieser sämmtliche Mittelpunkte $2, 3, 4, 5\ldots$ auf den übrigen Medianen ab; $a, b, c, d\ldots$ sowie h, i, k, l . . . sind Berührungspunkte der Kreise.

§ 64. Eine Anzahl Kreise, deren Halbmesser beliebig sind, sollen aneinander gelegt werden (sich berühren).

Man zeichne aus den Mittelpunkten m, m' (Fig. X) Kreise, welche sich berühren (siehe § 55); soll nun ein dritter Kreis, dessen Mittelpunkt n' ist, die gegebenen berühren, so trage man dessen beliebig gewählten Halbmesser von b aus nach beiden Seiten auf die Centrale, ziehe durch die so erhaltenen Punkte aus m und m' Bögen, welche den Mittelpunkt n' des zu zeichnenden Kreises ergeben; verbindet man n' mit m und m' durch Gerade, so sind die Schnittpunkte t, t' der letztern mit den gegebenen Kreisen die Berührungspunkte.

Der Halbmesser eines zu zeichnenden Kreises, welcher die Kreise aft'' . . . und $tt'''d$ . . . berühren soll, hätte auch von der Peripherie der beiden Kreise nach aussen auf zwei beliebig aus m und n' gezeichnete Gerade mg, ne, in fg und de angetragen werden können; man hätte alsdann durch Ziehen der Bögen, deren Halbmesser gleich mg und ne ist, den Mittelpunkt n erhalten u. s. w.

§ 65. Innerhalb zweier gegebener Geraden (Fig. XI), welche sich unter einem beliebigen Winkel abc schneiden, sollen Kreise gezeichnet werden, welche die Geraden, sowie sich selbst der Reihe nach berühren.

Man halbire den Winkel abc, wähle auf der Halbirungslinie zuerst einen beliebigen Punkt m, fälle von m die Senkrechten mg und md, und beschreibe mit dem Halbmesser mg (gleich md) den ersten Kreis aus m; an den Schnittpunkt des letzteren mit der Halbirungslinie zeichne man eine Tangente. Halbirt man nun den Winkel, den letztere mit einer gegebenen Geraden ba oder bc bildet, oder verfährt man ähnlich wie bei Fig. VII, so ergibt sich der Mittelpunkt m' eines zweiten Kreises, welcher den gegebenen Kreis sowie die Geraden berührt, und zwar letztere in h und e u. s. w.

§ 66. An zwei gegebene Kreise (Fig. XII) sollen die Tangenten gezeichnet werden. Es sind hier vier Tangenten möglich, und zwar:

1. zwei, welche die Kreise auf gleichen Seiten, und
2. zwei, welche sie auf verschiedenen Seiten berühren.

Man verbinde zunächst die beiden Mittelpunkte m, m' durch eine Gerade (Centrale). Sollten nun zwei Tangenten nach der Bedingung 1. gezeichnet und deren Berührungspunkte im Voraus bestimmt werden, so trage man den Halbmesser $m'a$ des kleineren Kreises von der Peripherie des grösseren Kreises nach innen in bc an, beschreibe mit dem Radius mc, d. i. gleich dem Unterschiede der beiden Halbmesser, aus m einen Hilfskreis und zeichne aus m' an diesen die Tangenten $m'd$, $m'e$ (siehe Fig. VI); zieht man nun aus m durch die Berührungspunkte d, e die Geraden, sowie aus m' senkrecht zu $m'e$ und $m'd$ die Parallelen, so ergeben sich in f, h und g, i je zwei Berührungspunkte der zu zeichnenden Tangenten. Sollten die Tangenten nach der Bedingung 2. gezeichnet werden, so trage man den Radius $m'a$ von der Peripherie des grösseren Kreises, d. i. von b aus nach aussen an und beschreibe aus m einen Hilfskreis, dessen Radius gleich der Summe der beiden

*) Die Construction beruht auf dem geometrischen Satze, dass alle Winkel, welche auf dem Durchmesser eines Halbkreises stehen und deren Ecken in der Peripherie desselben liegen, Rechte sind. (Siehe § 56.)

Halbmesser ($m'a$, mb) ist, zeichne aus m' an diesen Hilfskreis die Tangenten $m'k$, ml, verbinde m mit k und l und ziehe zu $m'k$ und ml aus m' die Senkrechten $m'p$, $m'o$, welche zu mk und ml parallel sind, so ergeben sich die auf verschiedenen Seiten liegenden Berührungspunkte; zeichnet man durch diese die Tangenten, so schneiden sich diese in einem Punkte s der Centralen; ebenso würden auch die Tangenten fh, gi, wenn hinlänglich verlängert, sich in der nach links verlängert gedachten Centralen mm' schneiden.

§ 67. In Fig. XIII soll die Länge der Peripherie eines gegebenen Kreises auf eine Gerade ausgestreckt, d. h. rectificirt werden.*)

Man theile den Durchmesser ab in sieben gleiche Theile und trage auf eine Gerade, welche hier als eine Tangente an den Kreis gezeichnet wurde, $3^1/_7$ Durchmesser gleich 22 Theilen auf.

Das Theilen des Durchmessers wurde hier nach der in § 12 (Tafel I, Fig. XII) angegebenen Methode bewerkstelligt. Auf der tangirenden Geraden cd, deren Länge gleich dem Kreisumfange ist, wurde der Durchmesser von a aus einmal nach links in ac, dann zweimal nach rechts in af und fe, sowie $^1/_7$ des Durchmessers gleich $a1'$ von e nach d getragen.

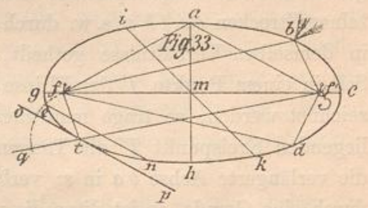
Die Ellipse.

§ 68. Die Ellipse ist eine ebene, geschlossene Curve, welche dadurch entsteht, dass ein Punkt um zwei feststehende Punkte sich derart bewegt, dass die Summe seiner Entfernungen stets gleich einer gegebenen Strecke ist. Um von dem eben Gesagten eine klare Vorstellung zu erhalten, denke man sich in zwei beliebigen Punkten f, f' (Fig. 33) die beiden Enden einer Schnur befestigt, welche länger ist als der Abstand der beiden Punkte, nehme einen Stift und bewege denselben, die Schnur anspannend, so vorwärts, dass diese um den Stift aussen herum gleitet. Die auf solche Weise beschriebene Curve ist eine Ellipse.

Während der Bewegung des Stiftes wird die Schnur die verschiedenen Lagen von faf', fbf', fcf', fdf', fgf' u. s. w. angenommen haben; da nun in der Lage fcf' die kleinere Strecke cf' mit der grösseren Strecke fc zusammenfällt, das gleiche aber auch bei der Lage $f'gf$ der Fall sein wird, so folgt daraus, dass $fc + cf' = f'g + gf = fa + af' \ldots$ gleich gc, d. h. gleich dem grössten Durchmesser der Ellipse ist.

Bezeichnet man nun die beiden Punkte f, f' als die Brennpunkte (Foci*), die Strecken fa, af', fb, bf', fc, cf' . . . als die Brennstrahlen oder Fahrstrahlen (Vectoren), gc oder den grössten Durchmesser, welcher durch die beiden Brennpunkte geht, als die grosse Achse, so ergibt sich der Satz, dass in einer Ellipse die Summe der beiden Fahrstrahlen stets gleich der grossen Achse ist, oder mit anderen Worten: die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich einer gegebenen Strecke, d. i. gleich der grossen Achse.

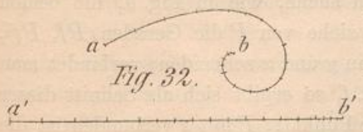
§ 69. Errichtet man auf der Mitte m der grossen Achse eine Rechtwinklige amh, so heisst dieser kleinste Durchmesser die kleine Achse. Die Endpunkte der Achsen, welche je paarweise von dem Mittelpunkte m gleichweit entfernt sind, heissen die Scheitelpunkte der Ellipse. Der Schnittpunkt der beiden Achsen heisst Mittelpunkt, die Curve selbst die Peripherie oder der Umfang; jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte (i, k) der Peripherie verbindet, heisst Durchmesser, en eine Sehne und op eine Tangente.



In einer Ellipse heissen die gleichen Entfernungen mf mf' die Excentricität der Ellipse; je weiter die Brennpunkte von dem Mittelpunkte entfernt sind, desto excentrischer, d. i. desto länglicher ist die Ellipse; je mehr sich die beiden Brennpunkte nähern, desto mehr nähert sie sich der Kreisform; sie wird ein Kreis, wenn beide Brennpunkte zusammenfallen. Eine Tangente an einem Punkte t der Ellipse halbirt den durch die Verlängerung eines Fahrstrahles entstandenen Winkel ftq.

Jene beiden Brennstrahlen, welche nach einem Scheitelpunkte der kleinen Achse gezogen werden, haben gleiche Länge (z. B. $fa = af'$). Die Ellipse kann auch als die Projection einer Kugel oder eines Kreises betrachtet werden; so kann z. B. der Schatten

*) Eine allgemeine Methode, nach welcher die Länge einer jeden Curve auf eine andere gegebene Curve oder Gerade, oder auch die Länge einer Geraden auf eine Curve übertragen werden kann, ist folgende: Man theile jene Curve, welche übertragen werden soll, in eine Anzahl beliebiger Theile, deren Abstand jedoch so klein angenommen werden muss, dass jedes zwischen zwei Theilpunkten liegende Curvenstück praktisch als eine Gerade bezeichnet werden kann; diese Theile trage man auf die andere gegebene Curve oder Gerade über (siehe Fig. 32); je gekrümmter die Curve ist, welche auf eine andere Linie übertragen werden soll, um so kleiner müssen die Theile darauf angenommen werden. Sollte umgekehrt die Länge einer Geraden auf eine gegebene Curve übertragen werden, so müsste natürlich die Gerade in um so kleinere Abschnitte getheilt werden, je mehr die gegebene Curve gekrümmt ist, d. h. je kleiner ihr Krümmungs-Radius ist.



*) Focus, der Brennpunkt.

3*