Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

11. Die Ellipse.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

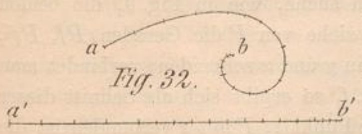
Halbmesser ($m'a$, mb) ist, zeichne aus m' an diesen Hilfskreis die Tangenten $m'k$, ml, verbinde m mit k und l und ziehe zu $m'k$ und ml aus m' die Senkrechten $m'p$, $m'o$, welche zu mk und ml parallel sind, so ergeben sich die auf verschiedenen Seiten liegenden Berührungspunkte; zeichnet man durch diese die Tangenten, so schneiden sich diese in einem Punkte s der Centralen; ebenso würden auch die Tangenten fh, gi, wenn hinlänglich verlängert, sich in der nach links verlängert gedachten Centralen mm' schneiden.

§ 67. In Fig. XIII soll die Länge der Peripherie eines gegebenen Kreises auf eine Gerade ausgestreckt, d. h. rectificirt werden.*)

Man theile den Durchmesser ab in sieben gleiche Theile und trage auf eine Gerade, welche hier als eine Tangente an den Kreis gezeichnet wurde, $3^1/_7$ Durchmesser gleich 22 Theilen auf.

Das Theilen des Durchmessers wurde hier nach der in § 12 (Tafel I, Fig. XII) angegebenen Methode bewerkstelligt. Auf der tangirenden Geraden cd, deren Länge gleich dem Kreisumfange ist, wurde der Durchmesser von a aus einmal nach links in ac, dann zweimal nach rechts in af und fe, sowie $^1/_7$ des Durchmessers gleich $a1'$ von e nach d getragen.

*) Eine allgemeine Methode, nach welcher die Länge einer jeden Curve auf eine andere gegebene Curve oder Gerade, oder auch die Länge einer Geraden auf eine Curve übertragen werden kann, ist folgende: Man theile jene Curve, welche übertragen werden soll, in eine Anzahl beliebiger Theile, deren Abstand jedoch so klein angenommen werden muss, dass jedes zwischen zwei Theilpunkten liegende Curvenstück praktisch als eine Gerade bezeichnet werden kann; diese Theile trage man auf die andere gegebene Curve oder Gerade über (siehe Fig. 32); je gekrümmter die Curve ist, welche auf eine andere Linie übertragen werden soll, um so kleiner müssen die Theile darauf angenommen werden. Sollte umgekehrt die Länge einer Geraden auf eine gegebene Curve übertragen werden, so müsste natürlich die Gerade in um so kleinere Abschnitte getheilt werden, je mehr die gegebene Curve gekrümmt ist, d. h. je kleiner ihr Krümmungs-Radius ist.



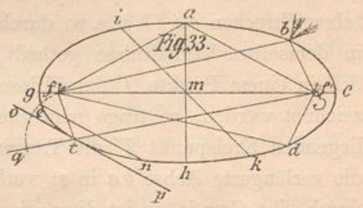
Die Ellipse.

§ 68. Die Ellipse ist eine ebene, geschlossene Curve, welche dadurch entsteht, dass ein Punkt um zwei feststehende Punkte sich derart bewegt, dass die Summe seiner Entfernungen stets gleich einer gegebenen Strecke ist. Um von dem eben Gesagten eine klare Vorstellung zu erhalten, denke man sich in zwei beliebigen Punkten f, f' (Fig. 33) die beiden Enden einer Schnur befestigt, welche länger ist als der Abstand der beiden Punkte, nehme einen Stift und bewege denselben, die Schnur anspannend, so vorwärts, dass diese um den Stift aussen herum gleitet. Die auf solche Weise beschriebene Curve ist eine Ellipse.

Während der Bewegung des Stiftes wird die Schnur die verschiedenen Lagen von faf', fbf', fcf', fdf', fgf' u. s. w. angenommen haben; da nun in der Lage fcf' die kleinere Strecke cf' mit der grösseren Strecke fc zusammenfällt, das gleiche aber auch bei der Lage $f'gf$ der Fall sein wird, so folgt daraus, dass $fc + cf' = f'g + gf = fa + af' \ldots$ gleich gc, d. h. gleich dem grössten Durchmesser der Ellipse ist.

Bezeichnet man nun die beiden Punkte f, f' als die Brennpunkte (Foci*), die Strecken fa, af', fb, bf', fc, cf' . . . als die Brennstrahlen oder Fahrstrahlen (Vectoren), gc oder den grössten Durchmesser, welcher durch die beiden Brennpunkte geht, als die grosse Achse, so ergibt sich der Satz, dass in einer Ellipse die Summe der beiden Fahrstrahlen stets gleich der grossen Achse ist, oder mit anderen Worten: die Summe der Entfernungen eines jeden Punktes der Ellipse von den beiden Brennpunkten ist gleich einer gegebenen Strecke, d. i. gleich der grossen Achse.

§ 69. Errichtet man auf der Mitte m der grossen Achse eine Rechtwinklige amh, so heisst dieser kleinste Durchmesser die kleine Achse. Die Endpunkte der Achsen, welche je paarweise von dem Mittelpunkte m gleichweit entfernt sind, heissen die Scheitelpunkte der Ellipse. Der Schnittpunkt der beiden Achsen heisst Mittelpunkt, die Curve selbst die Peripherie oder der Umfang; jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte (i, k) der Peripherie verbindet, heisst Durchmesser, en eine Sehne und op eine Tangente.



In einer Ellipse heissen die gleichen Entfernungen mf mf' die Excentricität der Ellipse; je weiter die Brennpunkte von dem Mittelpunkte entfernt sind, desto excentrischer, d. i. desto länglicher ist die Ellipse; je mehr sich die beiden Brennpunkte nähern, desto mehr nähert sie sich der Kreisform; sie wird ein Kreis, wenn beide Brennpunkte zusammenfallen. Eine Tangente an einem Punkte t der Ellipse halbirt den durch die Verlängerung eines Fahrstrahles entstandenen Winkel ftq.

Jene beiden Brennstrahlen, welche nach einem Scheitelpunkte der kleinen Achse gezogen werden, haben gleiche Länge (z. B. $fa = af'$). Die Ellipse kann auch als die Projection einer Kugel oder eines Kreises betrachtet werden; so kann z. B. der Schatten

*) Focus, der Brennpunkt.

einer Kugel oder eines Kreises eine Ellipse bilden, wobei die Lichtstrahlen als die projicirenden Linien zu denken sind. Die Constructionen der Figuren I, II, IV und VI, Tafel VI, beruhen auf dieser Annahme.

Aufgaben über Ellipsen.

Tafel VI. Figur I—VI.

§ 70. Gegeben ist die Gerade $a\,b$ (Fig. I) als die grosse, $d\,c$ als die kleine Achse.

Um Punkte der Ellipse zu finden, durch welche dann die Curve mit freier Hand gezeichnet wird, beschreibe man um $a\,b$ als Durchmesser aus m einen Kreis, verlängere die kleine Achse, bis sie den Kreis in e und g schneidet, errichte ferner in symmetrischen Abständen von m rechts und links der kleinen Achse Senkrechte zu $a\,b$, welche zugleich Sehnen des Kreises, wie auch der Ellipse bilden. Nun trage man $m\,e$ oder $m\,g$ auf eine Gerade $h\,k$ in Fig. I^a und beschreibe mit dieser Grösse als Radius einen Bogen aus h, nehme $m\,c$ oder $m\,d$ in den Zirkel, trage diese Strecke als Sehne auf den Bogen in Fig. I^a von k nach i und ziehe $h\,i$; beschreibt man nun mit den Strecken $e\,n$, $f\,h$ u. s. w. aus h in Fig. I^a Bögen, und trägt die zwischen dem Winkel liegenden Sehnen in Fig. I von der grossen Achse nach oben und unten in entsprechender Ordnung an, so ergeben sich die Ellipsenpunkte; es sind dabei die einzelnen Strecken $e\,n$, $f\,h$ u. s. w. durch die Ellipsenpunkte in demselben Verhältnisse getheilt, wie $m\,e$ durch c. Soll in einem Punkte T der Ellipse eine Tangente gezeichnet werden, so trage man zuerst an den darüber liegenden Kreispunkt T' die Tangente; diese schneidet die verlängerte Achse $b\,a$ in s; verbindet man T mit s durch eine Gerade, so ist diese die verlangte Tangente.

Um nachträglich die beiden Brennpunkte f, f' zu bestimmen, nehme man $a\,m$ oder $b\,m$ in den Zirkel und beschreibe damit als Radius aus c (oder auch aus d) einen Bogen, welcher die grosse Achse in den beiden Brennpunkten schneidet (siehe § 68).

§ 71. In Fig. II sind $a\,b$, $c\,d$ als die beiden Achsen gegeben; man beschreibe um beide als Durchmesser Kreise, theile den grössern Kreis in eine Anzahl gleicher Theile*) und verbinde diese Theilpunkte mit m, wodurch auch der kleinere Kreis gleich dem grössern getheilt ist; ziehe aus den Theilpunkten des grössern Kreises Senkrechte zur grossen Achse, z. B. $g\,i$, $n\,l$ u. s. w., sowie aus den Theilpunkten des kleinern Kreises Senkrechte zur kleinen Achse, z. B. die Geraden $h\,i$, $k\,l$ u. s. w., so ergeben sich ausser den schon anfänglich vorhandenen Scheitelpunkten noch weitere Ellipsenpunkte (hier z. B. 12). Das Zeichnen einer Tangente $T\,s$ geschieht wie in Fig. I; errichtet man in T eine Senkrechte $n\,n'$ zu $T\,s$, so heisst diese eine Normale.

§ 72. Gegeben sind in Fig. III $a\,b$ als grosse, $c\,d$ als kleine Achse. Um nun auf eine möglichst einfache Weise und ohne viele Construstionslinien Ellipspunkte zu erhalten, trage man $m\,d$ von m nach e, mache auf einen Papierstreifen die Grösse $p'\,k'$ gleich $a\,m$ und trage die Grösse $a\,e$ von k' aus nach g', so dass also $g'\,k'$ gleich dem Unterschiede der beiden halben Achsen ($a\,m$ — $d\,m$) ist*); diesen Papierstreifen verschiebe man nun derart, dass k' stets auf der kleinen und g' stets auf der grossen Achse liegt, so beschreibt p' eine Ellipse.

Sollten parallel einer gegebenen Geraden $A\,B$ die Tangenten an die Ellipse gelegt werden, so findet man deren Berührungspunkte, wenn man parallel zu $A\,B$ eine Sehne, z. B. $c\,i$, zeichnet, diese in n halbirt und durch m, n einen Durchmesser legt. Die Schnittpunkte T, T' des letztern sind Berührungspunkte, durch welche parallel zu $A\,B$ (siehe § 10) die Tangenten gezeichnet wurden.

§ 73. In Fig. IV sind $a\,b$ und $c\,d$ als die Achsen gegeben, und die Ellipse soll im Ganzen durch acht Punkte nebst den durch diese Punkte gehenden Tangenten bestimmt sein.

Man zeichne durch die Scheitelpunkte a, b, c, d ein Rechteck $h\,n\,l\,o$, dessen Seiten parallel mit den Achsen sind, ziehe die Diagonalen $h\,l$, $o\,n$, zeichne ferner um $a\,b$ als Durchmesser einen Kreis und um diesen ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls parallel den Achsen sind, also gleiche Richtung mit den Rechtecksseiten haben; in das Quadrat zeichne man die Diagonalen und markire deren Schnittpunkte mit dem Kreise; zieht man nun aus diesen Schnittpunkten die Senkrechten zu $a\,b$, so schneiden sie die Diagonalen des Rechteckes in den Punkten k, u, w', w; diese sind Ellipspunkte; zieht man durch k und w' die Parallelen zu $o\,n$, sowie durch u und w die Parallelen zu $h\,l$, so sind letztere, nämlich $p\,u\,s$, $t\,w'\,s$, $p\,k$, $t\,w$, Tangenten der Ellipse; durch die Punkte a, w, d, w', b, u . . . . und berührend an die Tangenten zeichne man die Ellipse.

§ 74. Von einem beliebigen Punkte P soll die Normale gegen die Ellipse gefällt werden.

Fig. IV. Man suche, wie in Fig. I, die beiden Brennpunkte f, f', ziehe von P die Geraden $P\,f$, $P\,f'$, welche die Ellipse in y und x schneiden; verbindet man y mit f' und x mit f, so ergibt sich als Schnitt dieser beiden Geraden der Punkt z; P mit z verbunden ist die verlangte Normale und eine Senkrechte dazu in dem Punkte T eine Tangente an dem gleichen Punkte.

---

*) Dass die Theile auf den Kreisen gleich sind, ist zwar nicht unbedingt nothwendig, jedoch besser, da man durch symmetrisch liegende Punkte die Curve leichter zeichnet.

*) Einfacher noch erhält man auf dem Papierstreifen die Grössen $k'\,g'$, $k'\,p'$, wenn man denselben an $a\,m$ legt, die Grösse $p'\,k'$ gleich $a\,m$ markirt, sodann den Streifen mit p' an d in der Richtung $d\,m$ legt, und die Grösse $d\,m$ von $p'\,k'$ abzieht; es ist slso $p'\,k'$ gleich $a\,m$ und $p'\,g'$ gleich $d\,m$, $k'\,g'$; daher gleich $a\,m$ weniger $d\,m$.