Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

13. Das Oval; Aufgaben über Ovale und elliptische Bögen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

§ 75. In Fig. V sind ab, cd als die beiden Achsen gegeben. Um Punkte der Curve zu bestimmen, suche man zunächst die Brennpunkte f, f', beschreibe sodann mit beliebigem Halbmesser $f'e$ aus f' und f Bögen in der Nähe des Umfanges, trage $f'e$ von b nach 1, nehme nunmehr $1a$ in den Zirkel und beschreibe mit dieser Grösse aus f, f' weitere Bögen, wodurch sich vier Punkte der Ellipse ergeben; in gleicher Weise beschreibe man aus f' und f mit beliebigem Halbmesser $f'g$ Bögen, trage $f'g$ von b nach 2, nehme $a2$ in den Zirkel und beschreibe mit diesem Halbmesser aus f und f' weitere Bögen, durch welche man abermals vier Punkte erhält u. s. w.

Diese Methode beruht auf den in § 68 angeführten Eigenschaften der Fahrstrahlen; es ist nämlich $f'e = b1$, $fe = 1a$, daher $fe + ef' = a1 + 1b = ab$; in Worten: die Summe der beiden Fahrstrahlen ist gleich der grossen Achse (ab); dasselbe gilt auch für die beiden Fahrstrahlen $fg, f'g$ u. s. w.

§ 76. Von einem gegebenen Punkte P sollen die Tangenten an die Ellipse gelegt werden.

Man beschreibe mit dem Halbmesser Pf aus P einen Bogen fi, aus f' mit dem Halbmesser gleich der grossen Achse ab einen zweiten Bogen, welcher den ersten fi in i schneidet, verbinde i mit f', so ergibt sich auf dem Umfange T als der Berührungspunkt; verbindet man T mit f, so ist fTi der durch die Fahrstrahlen gebildete Aussenwinkel, welcher durch die Tangente PT halbirt wird. In gleicher Weise findet man den Berührungspunkt T'', indem man mit einem Halbmesser, gleich Pf', aus P einen Bogen beschreibt*), diesen durch einen zweiten Bogen, dessen Radius gleich ab, aus f schneidet u. s. w.

§ 77. In Fig. VI sind zwei beliebige, zu einander schief stehende Durchmesser ab, cd gegeben; es sollen Punkte der Peripherie, sowie nachträglich die grosse und kleine Achse AB, CD gefunden werden.

Man beschreibe zunächst um den grössern Durchmesser ab einen Kreis, dessen Mittelpunkt m zugleich Mittelpunkt der Ellipse ist (siehe § 69), ziehe emf senkrecht zu ab, verbinde e mit c und f mit d; nun theile man mb in eine beliebige Anzahl von Theilen $m1$, $12, 23 \ldots$ und trage dieselben Theile von m nach links auf. Durch diese Theilpunkte zeichne man Senkrechte zu ab, welche den Kreis schneiden; zeichnet man nunmehr aus den Schnittpunkten $1, 2, 3 \ldots$ die Parallelen zu cd, sowie aus den Schnittpunkten des Kreises, z. B. $1', 2', 3' \ldots$, die Parallelen zu ec, fd, so ergeben sich hierdurch Punkte des Umfanges, z. B. $1'', 2'', 3'' \ldots$, durch welche die Curve mit freier Hand gezogen wird. Um nachträglich die grosse und kleine Achse zu bestimmen, markire man die Punkte, in welchen der Kreis den Umfang der Ellipse schneidet, z. B. a, h, b, g; ziehe hmg (amb ist als Durchmesser schon vorhanden), und halbire die Winkel amh ($= gmb$) und amg ($= hmb$), so sind diese Halbirungslinien die verlangten Achsen AB, CD.*)

*) Diese Construction ist hier nicht mehr angegeben.

Das Oval.

§ 78. Das Oval, obgleich scheinbar der Ellipse ähnlich, ist lediglich die Nachahmung einer solchen durch Kreisbögen. Grundbedingung ist hiebei, dass die Kreisbögen, aus denen ein Oval zusammengesetzt ist, sich berühren.

Aufgaben über Ovale und elliptische Bögen.

Tafel VII. Figur I—IX.

In Fig. I ist ab als grösster Durchmesser angenommen. Man theile denselben in drei gleiche Theile, zeichne aus den Theilpunkten 1 und 2 mit dem Halbmesser gleich $1a$ oder $2b$ Kreise, und beschreibe aus den Schnittpunkten 3 und 4 mit dem Halbmesser $4c$ (gleich $4d$) und $3e$ (gleich $3f$) die Bögen ef und cd, welche die vorhin gezeichneten Kreise in den gleichen Punkten e, f, c, d berühren.**)

§ 79. In Fig. II sind der grösste und kleinste Durchmesser ab, cd rechtwinklig zu einander gegeben. Man ziehe ac, trage die Differenz der beiden Halbmesser von c nach g (d. i. $ma - mc = ac$) auf, errichte über der Strecke ag das Mittelloth, so schneidet dieses zwei Zirkelpunkte 1 und 4 ab. Trägt man den Abstand $1m$ von m nach 3, und ebenso den Abstand $m4$ von m nach 2, so erhält man die weiteren Zirkelpunkte.

§ 80. In Fig. III sind ebenso wie vorher die beiden Achsen ab, cd gegeben.

Man zeichne über am ein gleichseitiges Dreieck ams, trage mc nach mn, ziehe cno und aus dem Schnittpunkte o parallel mit der Dreiecksseite sm, so ergeben sich die Zirkelpunkte 2 und 3.***) Man mache nun $m4$ gleich $m2$, und $m1$ gleich $m3$ u. s. w.; $o, f \ldots$ sind Berührungspunkte der Kreisbögen.

§ 81. In Fig. IV sind die Achsen ab, cd gegeben. Man ziehe ac und ergänze amc zu einem Rechteck $amce$, halbire die Winkel eac und eca, so schneiden sich die Halbirungslinien in g; aus g fälle man eine Senkrechte zu ac, welche auf den beiden Achsen die Zirkelpunkte 2 und 3 ergibt. Im übrigen verfahre man wie bei Fig. II und III. Bei dem Eirund (Fig. V) sind

*) Man hätte statt des schon vorhandenen Kreises $aebf$, ebenso gut einen andern Kreis, welcher die Ellipse in vier Punkten schneidet, zeichnen, und damit wie oben verfahren können.

**) Die übrigen parallelen Kreise innerhalb des Umrisses wurden in den Figuren I, II, III, IV, V und IX aus den gleichen Zirkelpunkten beschrieben.

***) 3 und 1 fallen hier zufällig mit c, d zusammen.

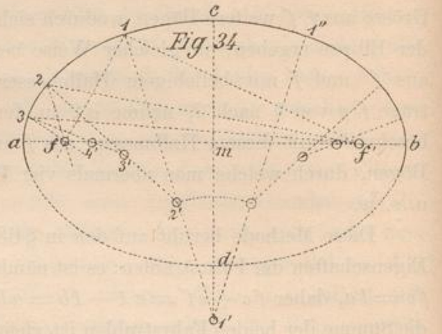
m, a, b und n Zirkelpunkte, im übrigen ist die Construction dieser Figur aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

§ 82. In Fig. VI ist ein elliptischer Bogen über $a\,b$ als grossem und $m\,c$ als halbem, kleinstem Durchmesser mit freier Hand gezeichnet. Um Hilfspunkte i, k . . . zu erhalten, theile man $c\,e$ sowie $b\,e$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. drei, und $c\,d$ sowie $a\,d$ in die gleiche Anzahl gleicher Theile, verbinde a, $2'$, 1, $1'$, 2, c, ebenso b, $2'''$, $1''$, $1'''$, $2''$, c, so ergeben sich auf jeder Seite je zwei Zwischenpunkte der Curve, z. B. i, k . . . Ferner sei ausserhalb des Bogens ein beliebiger Punkt P gewählt, und es soll von diesem die Normale, d. i. die Senkrechte zur Curve gefällt werden. Man suche zunächst die Brennpunkte f, f'' der halben Ellipse (siehe § 74), ziehe sodann Pf, Pf'', sowie aus den sich ergebenden Schnittpunkten i, k die Fahrstrahlen if'', kf und zeichne durch den Schnittpunkt s der letzteren aus P die Normale Ps.

In Fig. VII ist der schiefe Durchmesser $a\,b$ als Sehne, mc als die Höhe eines sog. hängenden Bogens*) gegeben. Um die Curvenpunkte $1'$, $2'$, $1''$, $2''$ zu finden, beschreibe man mit mc als Radius aus m einen Viertelskreis $c\,b''$, theile denselben in beliebig viele gleiche Theile, z. B. drei, fälle von den Punkten 1, 2 die Senkrechten bis $b''m$, ziehe aus b'' nach b eine Gerade und aus d und e Parallele zu $b''\,b$, bis diese $a\,b$ schneiden; aus letzteren Schnittpunkten errichte man Senkrechte und mache sie gleich den Strecken $d2$, $e1$, so ergeben sich die Curvenpunkte $1''$, $2''$ u. s. w.; die Senkrechten, welche durch $1'$, $2'$ gehen, haben von $m\,c$ die gleichen Abstände und gleichen Höhen wie $e1''$, $d2''$. Sollten ausser den Punkten $1'$, $1''$, $2'$, $2''$ auch noch die betreffenden Tangenten an diese gezeichnet werden, so zeichne man zuerst die Tangenten an 1 und 2, welche die nach oben verlängerte Gerade mc in s'', s schneiden; aus s'' und s können sodann die Tangenten an $1'$, $1''$ und $2'$, $2''$ gezogen werden. Fig. VIII zeigt dieselbe Aufgabe in einer Lösung, wie sie ähnlich bei Fig. VI schon ausgeführt wurde.**)

Fig. IX zeigt ein Verfahren, nach welchem ein Oval aus mehr als vier Zirkelpunkten construirt werden kann.

Es wurden zunächst $a\,b$, $c\,d$ als die Achsen einer Ellipse angenommen, sodann ein Viertelsbogen, etwa $c\,a$, mit freier Hand gezeichnet. Man wähle nun auf diesem solche Abschnitte, wie z. B. $c\,1$, $1\,2$, $2\,3$, $3\,a$ (vergl. Fig. 34), welche ihrer Krümmung nach als Kreisbögen betrachtet werden können; aus 1, 2, 3 ziehe man alsdann die Fahrstrahlen nach den Brennpunkten f, f' und halbire die Winkel*), welche je zwei Fahrstrahlen an einem Punkte innerhalb der Ellipse bilden, so ergibt eine erste Halbirungslinie $1\,2'\,1'$ auf der verlängerten kleinen Achse $c\,d$ einen Zirkelpunkt $1'$, auswelchem



mit $1'c$ als Radius der Bogen $1'c\,1$ gezogen wurde. Die Halbirungslinie aus 2 ergibt auf $1\,1'$ einen zweiten Zirkelpunkt $2'$, aus welchem mit dem Radius $2'\,1$ ein Bogen $1\,2$ gezeichnet wurde, u. s. w. Die Halbirungslinien sind zugleich die Normalen zur Curve. Hat man, wie in Fig. 34 gezeigt wurde, die Punkte 1, $2''$, $3''$, $4''$ der Fig. IX gefunden, so sind nur noch die Punkte 2, 3, 4, $3'$, $2'$, $1'$ und $2'''$, $3'''$ in gleicher Ordnung innerhalb der rechten Winkel $d\,m\,b$, $b\,m\,c$, $c\,m\,a$ anzutragen, und durch 1, 2, 2, 3, 3, 4 sowie $1'$, $2'$, $2'$, $3'$, $3'$, 4 . . . die entsprechenden Geraden zu ziehen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung (Fig. IX) unschwer zu ersehen.

Die Spirale.

§ 83. Die Spirale ist eine offene Curve, welche entsteht, wenn ein Punkt sich um ein Centrum dreht, und dabei radial fortschreitend sich nach einem bestimmten Gesetze entfernt, oder umgekehrt sich von aussen her dem Centrum nähert.

Man unterscheidet zwei Hauptarten von Spiralen:

1. die gewöhnliche oder Archimedische Spirale,
2. die Schneckenspirale oder Schneckenlinie.

1. Die Archimedische Spirale entsteht, wenn das Verhältniss der fortschreitenden zur drehenden Bewegung sich stets gleich bleibt; in diesem Falle ist die Gangweite $a\,c$ oder $c\,d$ (siehe Fig. I, Tafel VIII) immer dieselbe. Das Curvenstück $a\,o\,T\,c$ heisst ein Umgang der Spirale; die Spirale in Fig. I hat somit drei Umgänge.

2. Eine Schneckenlinie entsteht, wenn das Verhältniss oder die Geschwindigkeit der fortschreitenden zur drehenden Bewegung vom Centrum aus nach aussen hin zunimmt, oder umgekehrt von aussen nach innen

*) Diese Figur ist eine halbe Ellipse, wobei $a\,b$ als ein schiefer Durchmesser und $m\,c$ als ein schiefer Halbmesser gegeben sind. Das Gleiche gilt auch von den Geraden $a\,b$, $m\,c$ in Figur VIII.

**) Dieses Verfahren zur Bestimmung einer Ellipse könnte z. B. auch angewendet werden, wenn der Mittelpunkt derselben aus irgend welchem Grunde unzugänglich ist, in welchem Falle dann das umschliessende Rechteck oder schiefwinklige Parallelogramm statt der Achsen zu geben wäre.

*) Diese Construction ist in Fig. IX nicht angegeben.