Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

15. Aufgaben über Spiralen.

abnimmt, so dass die äusseren Gangweiten grösser als die inneren sind (siehe Fig. II).

Aufgaben über Spiralen.

(Construction derselben.)

Tafel VIII. Fig. I—VIII.

§ 84. Gegeben ist in Fig. I der umschriebene Kreis, dessen Durchmesser *ab* ist, sowie die Anzahl der Umgänge. Es soll von *a* aus die Archimedische Spirale in den Kreis eingezeichnet werden.

Man theile den Radius *ea* in so viel gleiche Theile, als man Umgänge innerhalb des Kreises haben will, z. B. in drei; alsdann theile man die Gangweiten *ac*, *cd*, *de* in je vier gleiche Theile und ebenso den Kreis in dieselbe Anzahl gleicher Theile, ziehe die Halbmesser *2'e*, *be*, *6e* und beschreibe aus dem Centrum *e* durch jeden der auf *ea* liegenden Theilpunkte Kreise, so sind, *a* als Anfangspunkt genommen, *a*, *o*, *2''*, *T*, *c* Spiralenpunkte eines ersten Umganges. In gleicher Weise findet man auch die Punkte der übrigen Umgänge; wollte man statt der vier Hilfspunkte *o*, *2''*, *T*, *c* deren acht, so hätte man den Kreis statt in vier, in acht gleiche Theile zu theilen, und dasselbe hätte dann auch mit je einer Gangweite *ac*, *cd*, *de* geschehen müssen.*)

§ 85. An irgend einem Punkte *T* soll eine Tangente gezeichnet werden.

Man wähle auf dem Curvenstück a *o T* der Spirale irgend einen Punkt *o*, welcher zugleich auf einem der Parallelkreise liegt, ziehe durch den gegebenen Punkt *T* aus *e* einen Halbmesser und zeichne in *t*, d. i. da, wo der durch *o* gehende Kreis den Halbmesser schneidet, die Kreistangente *t 4'''*, auf diese trage man die Länge des Kreisbogens *to* von *t* aus nach abwärts, ziehe *4''' T*, so ist letztere die verlangte Tangente. Die Richtung, nach welcher die Kreistangente *t 4'''* gezeichnet werden muss, ist stets gleich der Richtung, welche der Kreis von dem Punkte *t* aus gegen *o* hat.

§ 86. In Fig. II ist *abeg* der umschriebene Kreis, in welchen von *a* aus eine Schneckenlinie mit drei Umgängen eingezeichnet werden soll.

Man theile zunächst den Kreis in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. acht, und ziehe die Halbmesser *am*, *cm*, *bm*..., zeichne sodann eine Gerade *ab***) und theile dieselbe in so viel gleiche Theile, als man Umgänge haben will, also drei. Nun nehme man auf dem Halbmesser *am* eine erste Gangweite *a 1* beliebig, jedoch grösser als ein Drittheil von *am* an, und ziehe aus *I* durch *1* eine Gerade, bis dieselbe die Horizontale *bg* in *F* schneidet. Zieht man nunmehr *II F*, so schneidet diese *am* in *2*, und die Abschnitte *a1*, *12*, *2m* sind die gegen das Centrum abnehmenden Gangweiten. Theilt man ferner die Strecke *a I* in acht gleiche Theile und zieht aus diesen Theilpunkten nach *F*, so ergeben sich auf *a1* die gegen *1* abnehmenden Theile, welche nun in ihrer Reihenfolge von aussen nach innen, von *m* aus auf die Halbmesser *mc*, *mb*, *md*... übertragen werden; für die zweite und dritte Gangweite *12*, *2m* wurde *I II* und *IIb* nur in vier gleiche Theile getheilt, aus diesen nach *F* gezogen, und die Abschnitte zwischen *1*, *2* und *2*, *m* auf die Halbmesser *mb*, *me*, *mg* wie vorher übertragen, wodurch sich für den zweiten und dritten Umgang nur je vier Curvenpunkte ergeben haben.

Sollte an irgend einem Punkte *T* der Schneckenlinie eine Tangente gezeichnet werden, so könnte sie ähnlich wie bei Fig. I gefunden werden. Kürzer jedoch ist folgendes Verfahren: Man schneide aus *T* mit sehr kleiner Zirkelöffnung auf der Spirale zwei von *T* gleich entfernte Punkte ab, setze in diese den Zirkel ein und beschreibe mit gleichen Halbmessern die Bögen bei *v* und *w*; *vw* ist sodann eine Normale und eine in *T* zu *vw* senkrecht stehende Gerade *tu* die verlangte Tangente.

§ 87. Fig. III und IV sind Nachahmungen einer gewöhnlichen Spirale durch Kreisbögen.

In Fig. III wurde zunächst das kleine Quadrat *0'1'2'3'* gegeben, sodann mit dem Halbmesser *1'0'* aus *1'* der Viertelskreis *0'1*, aus *2'* mit dem Radius *2'1* der Viertelskreis *12*, aus *3'* der Viertelskreis *23* u. s. w. gezeichnet. Eine Gangweite *0'4* oder *15* . . . ist dann gleich der vierfachen Länge einer Quadratseite *0'1'*; ein um das Quadrat gezeichneter Kreis heisst das Auge der Spirale.

In Fig. IV ist die Spirale aus den Halbkreisen *01*, *12*, *23* . . ., deren Mittelpunkte *b* und *a* sind, zusammengesetzt; die Kreise berühren sich auf der Horizontalen, welche durch *ab* geht, und die Gangweiten *b1*, *13* . . . sind gleich der doppelten Grösse *ab*.

§ 88. Fig. V und VI sind Constructionen der sog. jonischen Schneckenlinie, welche die charakteristische Grundform des jonischen Kapitäls bildet und im Bauzeichnen öfters in Anwendung kommt.*) Bei Fig. V wurde zunächst die Entfernung des Anfangspunktes *o* bis zum Mittelpunkte *9* beliebig gewählt und diese Strecke in neun gleiche Theile getheilt, mit einem Theil als Radius sodann aus *9* ein Kreis, das sog. Schneckenauge gezeichnet, in demselben ein Quadrat über Eck stehend und in dieses ein zweites eingezeichnet, dessen Ecken auf den Seitenmitten des erst gezeichneten liegen (in

*) In Fig. I wurde eine Gangweite bloss in vier, der Kreis dagegen in acht gleiche Theile getheilt, und der auf den Halbmessern *1e*, *3e*, *5e*, *7e* zwischen je zwei Parallelkreisen liegende kleine Abschnitt halbirt, wodurch man ebenfalls acht Punkte für je einen Umgang erhielt.

**) Die Gerade *ab* könnte von *a* aus irgend eine beliebige Lage haben, soferne nur der eine Punkt *b* auf der Horizontalen *Fb* liegt.

*) Die Construction in Fig. V ist nach Vignola, die in Fig. VI nach Goldmann.

Fig. V[a] ist das Auge etc. vergrössert dargestellt). Theilt man nun eine jede halbe Diagonale *m 1*, *m 2* . . . des innern Quadrates (siehe Fig. V[a]) in drei gleiche Theile und zieht durch diese Theilpunkte die Geraden *4 5*, *5 6*, *6 7*, *7 8*, *8 9*..., so sind *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*... Zirkelpunkte, aus denen die in *I*, *II*, *III*, *IV*... sich berührenden Kreise gezeichnet werden, und zwar aus *1* mit dem Halbmesser *1 0* (Fig. V) der Kreisbogen *0 I*, aus *2* mit dem Halbmesser *2 I* der Bogen *I II*, aus *3* mit dem Halbmesser *3 II* der Bogen *II III*, aus 4 mit dem Halbmesser *4 III* der Bogen *III IV* u. s. w.; der letzte Bogen *XI XII* berührt das Schneckenauge oben in dem Punkte *8* (*8* fällt hier mit *XII* zusammen).

Fig. VI zeigt dieselbe jonische Schneckenlinie, jedoch bei anderer Anordnung der Zirkelpunkte.

In dem Auge, welches hier ebenfalls in Fig. VI[a] vergrössert dargestellt ist, wurden zunächst in *8''* und *c'* die horizontalen Tangenten *8'' a*, *c' b''* gezeichnet, sodann aus *m* eine Parallele dazu gezogen, und wo diese den Kreis schneidet, eine weitere Tangente a b'' gezeichnet, so dass der Halbkreis rechts durch das Rechteck *8'' a b'' c'* eingeschlossen ist; ferner theile man die Rechtecksseite *a b* in vier gleiche Theile und ziehe aus den Theilpunkten *2* und *3* die Parallelen zu *a 8''*, *b'' c'*, so entsteht das Rechteck *1 2 3 4**). In letzterem werden die Zirkelpunkte dadurch bestimmt, dass man aus dem Mittelpunkte *m* des Auges die Geraden *m 2*, *m 3* zieht, letztere in je drei gleiche Theile zerlegt, und aus diesen die Parallelen zu den Vierecksseiten, nämlich *5 6*, *6 7*, *7 8*... zeichnet. *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*... sind nun der Reihe nach die Zirkelpunkte, aus denen mit den Halbmessern *1 0*, *2 I*, *3 II*, *4 III*, *5 IV*... (siehe Fig. VI) die Bögen *0 I*, *I II*, *II III*, *III IV*... gezogen werden. Die Punkte *I*, *II*, *III*... sind Berührungspunkte je zweier Bögen, da je zwei Mittelpunkte desselben auf einer Geraden liegen (s. § 55).

§ 89. Fig. VII zeigt eine in der Praxis leicht anwendbare Methode, nach welcher die Hauptpunkte einer Schneckenlinie gefunden werden können. Angenommen, es sei der Schnittpunkt der beiden zu einander senkrecht stehenden Geraden *a c*, *b d* das Centrum, *a* ein Punkt der Spirale über demselben und *b* ein zweiter beliebiger Punkt links auf der Horizontalen, dessen Abstand vom Centrum jedoch kleiner ist als der Abstand des Punktes *a*, so findet man weitere Punkte *c*, *d*, *e*, *f*, *g*..., indem man *a*, *b* durch eine Gerade verbindet, zu dieser in *b* eine rechtwinklige errichtet, welche die durch das Centrum gehende Senkrechte in *c* schneidet, und aus *c* parallel zu *b a* die Gerade *c d*, aus *d* parallel zu *c b* die Gerade *d e* u. s. w. zeichnet. Durch die Punkte *a*, *b*, *c*, *d*... wird die Curve mit freier Hand gezeichnet. *a b*, *b c*, *c d*... bilden Sehnen der Schneckenlinie und stehen senkrecht zu einander.

In Fig. VIII sind *a c* als ein Durchmesser, *q**) als das Centrum und *q b* als der grösste Halbmesser einer gedrückten Schneckenspirale gegeben. Um die weitern Punkte *d*, *e*, *f*, *g*... zu erhalten, verbinde man *a* mit *b*, *b* mit *c*, ziehe aus *c* parallel mit *b a*, aus *d* parallel mit *c b* u. s. w.

*) Sollte die Schneckenlinie die Lage wie Fig. V haben, so würden die Zirkelpunkte auf der andern Seite des Durchmessers *8'' c'* in dem Rechtecke *1 d e 4* liegen.

*) Die Strecke *aq* muss natürlich grösser als *qc* sein

II. Theil.

Das projective Zeichnen (Projectionslehre).

§. 90. Haben wir im ersten Theile nur solche Aufgaben behandelt, welche unmittelbar in einer Ebene ausgeführt und gedacht werden konnten, so werden wir im zweiten Theile nur räumliche, bezw. körperliche Gebilde zur Darstellung bringen. Die Aufgabe der Projectionslehre besteht somit darin, Gegenstände des Raumes von drei Dimensionen oder dreifacher Ausdehnung auf einer Bildfläche, welche nur zwei Ausdehnungen hat, graphisch so darzustellen, dass daraus deren Grösse und Form ersichtlich ist. Unter einer Projection**) versteht man daher das Bild eines wirklich vorhandenen oder gedachten Gegenstandes.

Das Mittel zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass man von den einzelnen Punkten des Gegenstandes sich gerade Linien (Projicirende) nach einem bestimmten Gesetze gegen die angenommene Bildfläche (Projectionsebene) gezogen denkt; die Durchschnitte solcher Linien mit der Bildfläche sind Projectionen. Werden z. B. von allen Ecken eines Körpers solche Projicirende gegen eine Bildfläche gezogen und die betreffenden Durchschnittspunkte in gleicher Ordnung wie bei dem Körper verbunden, so ergibt sich die Projection sämmtlicher Ecken und Kanten.

**) Projection, gleichbedeutend mit Hinwurf, Entwurf.