Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

3. Projection des Punktes, der Geraden und Fläche.

übrigen Schnittpunkte ergaben sich dann dadurch, dass man aus a parallel zu BD, sowie aus a parallel zu BH zog u. s. w.; die Parallelen bh, df schneiden, wenn hinlänglich verlängert, die Projectionsachse $I\ II$ in den Punkten 1 und 2. Errichtet man hierin die Senkrechten und zieht man aus den Eckpunkten des Körpers die Parallelen zu $a1$, $c2$, d. i. die Senkrechten zur verticalen Tafel, so ergeben sich in derselben die Projectionen der Eckpunkte, wobei, wie dieses auch im Grundrisse der Fall war, wieder je zwei Punkte, z. B. A, G, B, H, $D, F \ldots$ in $a'g'$, b', h', $d', f' \ldots$ zusammenfallen.

$ab\ \ cd\ \ ef\ \ gh$ heisst eine Horizontalprojection (Grundriss), $a'g'\ \ e'c'\ \ f'd'\ \ b'h'$ eine Verticalprojection (Aufriss) des Körpers; aus ersterer ist Länge und Breite, aus der zweiten die Höhe, und in diesem speciellen Falle der Parallelstellung auch die Breite zu entnehmen.

§ 98. In vielen Fällen genügen zwei Projectionen; verlangt man aber in Folge der Beschaffenheit oder Lage des Körpers noch eine dritte Ansicht, so könnte durch Annahme einer dritten Projectionstafel, welche in der Regel senkrecht zur einen oder andern der schon vorhandenen beiden Projectionsebenen angenommen wird, diesem Verlangen entsprochen werden. Die Tafel $II\ III\ VII\ V$ mit der darin enthaltenen dritten Projection $a''c''\ b''d''\ h''f''\ g''e''$ veranschaulicht die Lösung dieser Aufgabe, wobei die Projicirenden Aa'', Cc'', Bb'', Dd'' etc., welche hier wieder paarweise zusammenfallen, ebenfalls als Senkrechte zur Tafel $II\ III\ VII\ V$ zu betrachten sind. Diese dritte Projection heisst auch ein Seitenriss, und kann aus demselben Länge und Höhe des Körpers in diesem Falle unmittelbar entnommen werden. (Z. B. $a''b'' = AB$, $a''g'' = AG =$ der wahren Höhe und Länge des Körpers.*)

Fig. III[a] zeigt die angenommene Richtung der drei von einem Punkte S ausgehenden Projectionsstrahlen SR, SR', SR'', welche in S als senkrecht zu einander stehend zu betrachten sind, und welchen parallel auch die Tafelkanten, sowie die Kanten des Körpers angenommen wurden.

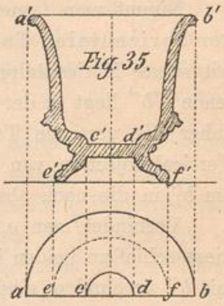
Fig. VII zeigt, wie schon erwähnt, Grund und Aufriss eines Würfels, wenn die beiden Projectionstafeln in einer Ebene liegen (siehe § 101); ab, $bc \ldots$, sowie $a'e'$, $b'f' \ldots$ entsprechen der wahren Länge einer Würfelkante.

Weitere Ausführungen zur rechtwinkligen Projectionsart.

§ 99. Wie schon in § 92 erwähnt, eignet sich die rechtwinklige Projectionsart für Zeichnungen, aus denen die einzelnen Masse unmittelbar oder doch möglichst leicht entnommen werden sollen. Nach dem oben Gesagten sind hierzu zum mindesten zwei Projectionen (Grundriss und Aufriss), mitunter auch eine dritte Projection (Seitenriss) nöthig; diese Projectionen liegen aber auf verschiedenen Projectionsebenen.

Da jedoch die Fläche, worauf man zeichnet, nur eine Ebene bildet, und es sich demnach darum handelt, diese verschiedenen Körperansichten in einer Ebene darzustellen, so können die Projectionsebenen ihre natürliche Lage im Raume nicht mehr beibehalten, sondern müssen so umgelegt werden, dass sie in eine Ebene fallen oder nur eine Ebene bilden. Eine Projectionsebene wird dabei um ihre Schnittkante so gedreht, bis sie in die Verlängerung der andern fällt. Der Vorgang ist in Tafel X, Fig. I mit zwei Projectionstafeln nebst den darinliegenden Projectionen eines Dreieckes veranschaulicht.

§ 100. Sehr oft ist zur genauern Kenntniss eines Körpers noch nöthig, dass man sich denselben nicht nur nach seinen Aussenseiten dargestellt, sondern auch von einer Ebene durchschnitten denkt und einen solchen Durchschnitt graphisch zur Darstellung bringt. Soll z. B. die Dicke der Wandung irgend eines Gefässes aus der Zeichnung ersichtlich sein, so würde etwa ein Verticalschnitt durch die Mitte des Körpers, d. i. durch dessen Achse, wie ihn Fig. 35 veranschaulicht, diesem Verlangen entsprechen. Die vordere Hälfte denke man sich weggenommen, so dass die Schnittfigur sichtbar wird; solche Schnitte heissen auch Profile oder Querschnitte.



Projection des Punktes, der Geraden und Fläche.

Tafel X. Figur I—X.

§ 101. Es seien in Fig. I die beiden Projectionstafeln wie in Fig. II oder III, Tafel IX, rechtwinklig zu einander gegeben. PP ist die Projectionsachse, und a ein Punkt im Raume.*) Zieht man nun von a die projicirende senkrecht gegen die horizontale Tafel und bestimmt an beliebiger Stelle innerhalb ihrer Grenzen ihren Schnittpunkt a', so kann a' als die Horizontalprojection des Punktes a betrachtet werden.

Zieht man ferner aus a die Senkrechte zur verticalen Tafel, so ist deren Schnittpunkt a'' eine Verticalprojection des Punktes a. Um die Verticalprojection a'' zu finden, welche, nachdem a' einmal bestimmt war, nicht mehr beliebig gewählt werden konnte, ziehe man aus a' parallel mit aa'' und aus dem Schnittpunkte,

*) Bei der angenommenen Lage dieses Körpers sind je vier Kanten zu einer der drei Tafeln parallel, wesshalb auch deren Projectionen die wahre Länge enthalten.

*) Man betrachte vorerst die Ecke a als einen für sich gegebenen Punkt ohne Rücksicht auf die Dreiecksfläche.

welcher auf der Projectionsachse sich ergibt, die Senkrechte, so schneidet letztere aa'' in a'' (vergl. § 97).

Bis jetzt sind die Projectionen des Punktes a räumlich ausgeführt worden, indem man die beiden Tafeln als senkrecht zu einander betrachtete. Damit es nun möglich werde, die gleiche Aufgabe in einer Ebene anszuführen, denke man sich die eine oder andere der beiden Tafeln, etwa die horizontale mit der darin liegenden Projection a', um die Projectionsachse PP nach abwärts geklappt, bis sie mit der Verticalen in eine und dieselbe Ebene $A\,B\,C'\,D'$ zu liegen kommt; die Horizontalprojection a' fällt sodann nach a''' und die beiden Projectionen a''', a'' liegen nunmehr in einer projicirenden Geraden $a'''a''$, welche zur Projectionsachse senkrecht steht (d. h. als senkrecht zu denken ist). Die Strecke a''' bis zur Projectionsachse bedeutet dabei den Abstand des Punktes a von der verticalen, die Strecke a'' bis zur Projectionsachse den Abstand des Punktes a von der horizontalen Tafel.

Nimmt man ferner einen zweiten Punkt b' als in der horizontalen Tafel liegend an, so fällt derselbe mit seiner Horizontalprojection zusammen; die Projicirende $b'b''$ liegt in der horizontalen Tafel und schneidet daher die verticale Tafel in der Achse. b'' ist die Verticalprojection von b', die Strecke $b''b'$ lege man um b'' in die nach abwärts geklappte Tafel nach b'''.

Verbindet man a, b' durch eine Gerade, so steht diese schief zu beiden Tafeln, und a' mit b', sowie a'' mit b'' verbunden, sind Projectionen der Geraden, wie dieselben räumlich zu denken sind ($a'''b'''$, $a''b''$); aber die in einer Ebene liegenden gleichen Projectionen. Aehnlich verhält es sich mit dem Punkte c'', welcher in der verticalen Tafel liegt, daher mit seiner Verticalprojection zusammenfällt, dessen horizontale Projection deshalb in die Achse nach c' fällt. Bei dem Umklappen der horizontalen Tafel bleibt c' unverändert liegen. Verbindet man noch a mit c'', und b' mit c'', so erhält man nachträglich ein zu beiden Tafeln schief stehendes Dreieck $ab'c''$, dessen eine Ecke a im Raume und dessen andere Ecken b' und c'' in der horizontalen und verticalen Projectionsebene liegen. $a'b'c'$ ist ein Grundriss (Horizontalprojection), $a''b''c''$ ein Aufriss (Verticalprojection) und $a'''b'''c'$ der mit der Tafel um die Achse geklappte Grundriss. $a'''b'''c'$ und $a''b''c''$ liegen in einer Ebene und die Projicirenden $a'''a''$, $b'''b''$, $c'c''$ stehen auf der Projectionsachse senkrecht. Liegt endlich ein Punkt in der Projectionsachse selbst, also zugleich in beiden Tafeln, so fällt er mit seinen beiden Projectionen, z. B. P', P'', zusammen, ist also zugleich seine Horizontal- und Verticalprojection.

Fig. II zeigt die in einer Ebene liegenden Projectionstafeln mit den darin enthaltenen Projectionen in gerader Ansicht, d. h. wenn man sich die beiden Tafeln als mit der Zeichnungsfläche identisch denkt. Die Buchstaben haben dabei die gleiche Bedeutung wie in Fig. I.

§ 102. Fig. III zeigt die Projectionen einer Geraden*), welche zu beiden Tafeln parallel ist. Der Abstand der beiden Endpunkte a', b' von der Projectionsachse ist gleich dem Abstande der Geraden von der horizontalen Tafel und ebenso verhält es sich mit der Horizontalprojection ab der beiden Endpunkte, welche ebenfalls gleichen Abstand von der Projectionsachse, mithin von der verticalen Tafel haben. Die Linie zeigt sich in beiden Projectionen nach ihrer wahren Länge.

§ 103. In Fig. IV sind (ab, $a'b'$) die beiden Projectionen einer Geraden, welche zur horizontalen Tafel senkrecht steht, zur verticalen Tafel daher parallel ist. Der Grundriss erscheint als ein Punkt, indem a und b senkrecht übereinander liegen; im Aufrisse ist $a'b'$ die wahre Länge der Geraden. Umgekehrt hätte man die Gerade senkrecht zur verticalen Tafel annehmen können, wodurch der Aufriss als Punkt und der Grundriss als eine Senkrechte zur Achse sich dargestellt hätten.

§ 104. In Fig. V sind (ab, $a'b'$) die beiden Projectionen einer Geraden, welche zur verticalen Tafel parallel, zur horizontalen Tafel schief oder geneigt ist. Ihr Neigungswinkel zu letzterer ist gleich dem Winkel, welcher durch die Verlängerung von $b'a'$ mit der Projectionsachse entstehen würde; ihre wahre Länge zeigt sich in $a'b'$.

Dasselbe ist jedoch umgekehrt mit den beiden Projectionen (ab, $a'b'$) Fig. VI der Fall. Die Gerade ist parallel zur horizontalen und schief zur verticalen Tafel. ab ist daher gleich der wahren Länge.

Da nun in den Figuren III bis VI die Lage einer Geraden stets parallel zu einer der Tafeln angenommen wurde, so ergab sich in der betreffenden einen Tafel auch immer die wahre Länge der Linie (siehe Bem. zu § 98). Nimmt man dagegen wie in Fig. VII die Endpunkte (ab, $a'b'$) in ungleichen Abständen von der Projectionsachse, d. i. von den Tafeln an, so steht die Gerade schief zu beiden Projectionsebenen und wird daher in keiner derselben nach ihrer wahren Grösse, sondern mehr oder weniger verkürzt erscheinen.**) Soll nun die wahre Länge einer solchen Geraden gefunden werden, so muss dieselbe parallel

---

*) Die gegebenen Projectionen der Geraden wurden hier zur bessern Veranschaulichung als dünne Stäbchen gezeichnet, ihre Umlegungen in Fig. VII—IX als feine Linien ausgezogen.

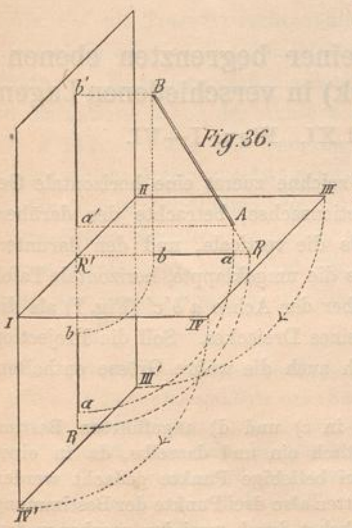
**) Die Projection einer Geraden erscheint umsomehr verkürzt, je grösser ihr Neigungswinkel zur Projectionsebene ist. Der grösste Neigungswinkel ist 90°, in welchem Falle die Gerade sich zu einem Punkte verkürzt (siehe Fig. IV). Unter dem Neigungswinkel einer Geraden mit einer Ebene versteht man den kleinsten Winkel, den diese Gerade mit der Ebene bildet, und die durch den Winkel gebildete zweite Ebene steht senkrecht zur ersten.

zu einer der beiden Tafeln gedreht, oder in eine der beiden Tafeln umgelegt werden.

Man wähle zu diesem Zwecke auf der Geraden $(ab,\ a'b')$ einen beliebigen Punkt, etwa den Endpunkt a' der verticalen Projection, betrachte denselben als feststehend und drehe die Strecke $a'b'$ um a', bis sie in $a'b''$ zur Projectionsachse, d. h. zur horizontalen Tafel parallel geworden ist, fälle von b'' die Senkrechte herab und ziehe aus b eine Parallele zur Achse, so schneiden sich diese in b'''; a mit b''' durch eine Gerade verbunden ist die wahre Länge der Linie $(ab,\ a'b')$. Während dieser Drehung ist, wie schon gesagt, $(a,\ a')$ der feste Punkt, während $(b,\ b')$ bei dieser Drehung stets die gleiche Entfernung von der verticalen Tafel behielt, so dass also der zurückgelegte Weg im Aufrisse als ein Kreisbogen, im Grundrisse aber dieser Bogen als die Gerade bb''' erscheint; $(b,\ b')$ also in einer zur verticalen Tafel parallelen Ebene sich fortbewegt hat. Die Gerade $(ab,\ a'b')$ ist damit in $(a'b'',\ ab''')$ zur horizontalen Projectionstafel parallel geworden und erscheint desshalb bei ab''' in ihrer wahren Länge (vergl. Fig. VI).

In ähnlicher Weise hätte die gegebene Gerade $(ab,\ a'b')$ auch zur verticalen Tafel parallel gedreht werden können, indem man ab um a nach ab^4 drehte, aus b^4 eine Senkrechte und aus b' eine Wagrechte zeichnete, welche sich in b^5 schneiden; $a'b^5$ ist nun wieder gleich der wahren Grösse, also auch gleich ab''' (vergl. Fig. V). Statt um a oder a' hätte man auch ebenso gut um b oder b' die Drehung vornehmen können, z. B. um b, so dass nun a nach a'', a' nach a''' zu liegen kommt, und $a'''b'$ nun ebenfalls parallel zur verticalen Tafel und daher gleich der wahren Grösse ist.

§ 105. Einen besonderen Fall, in welchem die gegebene Gerade gleichfalls schief zu beiden Tafeln steht, zeigt Figur VIII, in welcher die beiden Projectionen einer Geraden $(ab,\ a'b')$ als Senkrechte zur Projectionsachse sich darstellen; die Gerade, deren Projectionen $(ab,\ a'b')$ sind, lässt sich nunmehr in einer Ebene denken, welche zu den beiden Tafeln senkrecht steht (vergl. Fig. 36).



Durch Drehung um einen Endpunkt a parallel zur verticalen Tafel ergibt sich in $a'b'''$, d. i. im Aufriss, und ebenso durch Drehung oder Umlegen um einen Punkt a' parallel zur horizontalen Tafel in ab^5, d. i. im Grundriss, wieder die wahre Grösse.

Man drehe daher ab in ab'' parallel zur Projectionsachse, zeichne aus b'' eine Senkrechte und aus b' eine Wagrechte, so schneiden sich beide in b'''.

Oder man mache $a'b^4$ gleich $a'b'$, fälle aus b^4 die Senkrechte nach abwärts und ziehe aus b parallel zur Projectionsachse, wodurch sich b^5 ergibt; $a'b'''$ sowie ab^5 sind gleich der wahren Länge. Ferner ist in diesem Falle der Winkel bab^5 gleich dem Neigungswinkel, den die Gerade mit der horizontalen Tafel einschliesst, und der Winkel bei b''', welcher durch die Senkrechte aus b''' und durch $b'''a'$ gebildet wird, gleich dem Neigungswinkel, welchen die Gerade, wenn hinlänglich verlängert, mit der verticalen Projectionsebene bildet; ebenso ist in diesem speciellen Falle auch der Winkel bb^5a gleich dem Winkel bei b'''.

§ 106. In Fig. IX sind wiederholt, wie in Fig. VII, die beiden Projectionen $(ab,\ a'b')$ einer Geraden gegeben; es soll nicht nur die wahre Grösse derselben, sondern auch deren Neigungswinkel zu jeder der beiden Tafeln gefunden werden.

Man denke sich vorerst durch die Horizontalprojection ab eine Ebene gelegt, welche zur horizontalen Tafel senkrecht stehe; ihre horizontale Projection fällt mit der Projection ab zusammen, d. h. die Ebene erscheint von oben gesehen als Linie. Diese Ebene schneidet die horizontale Tafel nach einer Geraden, deren Projection, wie die Ebene selbst, mit der Richtung ab zusammenfällt. Um diese Schnittkante denke man sich die Ebene mit der darinliegenden Geraden in die horizontale Tafel umgelegt; die beiden Endpunkte der Geraden beschreiben sodann während des Umlegens Viertelskreise, deren Ebenen senkrecht zur horizontalen Tafel stehen, mithin im Grundrisse als die zu ab rechtwinkligen Geraden aa''', bb''' sich darstellen. Da nun die Entfernungen der Punkte a und b von der horizontalen Tafel gleich den Entfernungen a' und b' von der Projectionsachse sind (siehe § 101), so ergibt sich für die Auffindung der wahren Grösse folgendes Verfahren.

Man errichte zu ab die Senkrechten aa''', bb''', nehme die Abstände der Punkte a', b' von der Projectionsachse in den Zirkel und trage sie von a nach a''' und von b nach b'''; $a'''b'''$ ist sodann die verlangte wirkliche Länge der gegebenen Geraden. Verlängert man $b'a'$ und ba in der Richtung gegen a', a, also nach abwärts, so schneidet die Gerade $(ab,\ a'b')$ die horizontale Tafel in $(R,\ R')$, und bRb''' ist der Neigungswinkel, welchen die gegebene Gerade mit der Horizontalebene bildet.

In ganz der gleichen Weise hat man auch die Gerade um ihre verticale Projection $a'b'$ umlegen können*), indem man die Abstände a und b von der Projectionsachse (d. i. von der verticalen Tafel) von a' nach a'' und von b' nach b'' auf die zu $a'b'$ rechtwinkligen Geraden $a'a''$, $b'b''$ trägt.

Die Strecke $a''b''$ ist nun ebenso wie $a'''b'''$ gleich der wirklichen Länge; der Neigungswinkel der Geraden (ab, $a'b'$) zur verticalen Tafel ist gleich dem Winkel, welcher durch die Verlängerung von $a'b'$ und $a''b''$ rechts oben entstehen würde.

§ 107. In Fig. X sind zwei Punkte durch ihre Projectionen (a, a'), (b, b') in der horizontalen Tafel angenommen: es sollen aus diesen zwei Gerade gezeichnet werden, welche sich in einem Punkte (s, s') schneiden.

Man bestimme zunächst aus (a, a') die Lage der einen Geraden (ac, $a'c'$) beliebig und ziehe z. B. aus dem Grundrisse b die Gerade bd, welche ac in s schneidet. Soll nun s ein Schnittpunkt zweier Geraden sein, so ist damit die Verticalprojection s' vollständig bestimmt, da nach § 101 die Projectionen eines Punktes stets in einer Senkrechten (Projicirenden) zur Achse liegen müssen, der Schnittpunkt aber auch auf der zuerst gegebenen Geraden (ac, $a'c'$) liegen muss. Man ziehe also aus s eine Senkrechte, bis sie $a'c'$ in s' schneidet, und verbinde b' mit s', so sind (ac, $a'c'$), (bd, $b'd'$) die Projectionen der sich schneidenden Geraden. Denkt man sich ferner eine dritte Gerade, welche z. B. in wagrechter Lage durch die beiden gegebenen Geraden nach abwärts gleitet, so erzeugt diese eine Ebene, welche die horizontale Tafel in der Richtung (ab, $a'b'$) schneidet. Der Schnitt einer Ebene mit einer der beiden Projectionstafeln heisst die Spur oder Trace der Ebene; so ist die punktirte Gerade ab eine horizontale Trace, deren verticale Projection $a'b'$ mit der Projectionsachse zusammenfällt.

Die ebene Fläche (Ebene).

§ 108. Eine ebene Fläche kann entweder begrenzt oder auch unbegrenzt gedacht werden; eine unbegrenzte ebene Fläche heisst einfach eine Ebene; zu den begrenzten ebenen Flächen gehören: das Dreieck, das Parallelogramm, die Kreis- und Ellipsfläche u. s. w. Eine Ebene entsteht, wenn auf zwei sich schneidenden oder zwei parallelen Geraden eine dritte Gerade fortgleitet, oder wenn eine Gerade durch einen Punkt und eine feststehende Gerade sich bewegt. Eine Ebene ist somit, abgesehen von ihrer Ausdehnung oder Begrenzung, durch folgende Elemente ihrer Lage nach bestimmt:

a) durch zwei sich schneidende Gerade;
b) durch zwei parallele Gerade;
c) durch eine Gerade und einen Punkt, welcher nicht in der Verlängerung der Geraden liegt;
d) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.*)

In Bezug auf die Lage, welche eine Ebene oder ebene begrenzte Fläche gegen zwei Projectionstafeln einnehmen kann, unterscheidet man folgende Fälle:

1. Eine Ebene kann zu einer der beiden Tafeln parallel sein, in welchem Falle sie dann zur andern immer senkrecht steht; ihre Projectionen stellen sich in der ersten Tafel als eine Ebene, oder wenn man sich die Fläche durch Gerade allseitig begrenzt denkt, als eine Flächenfigur nach ihrer wahren Grösse und Gestalt dar; in der zweiten Tafel projicirt sie sich als eine zur Projectionsachse parallele Gerade (siehe Fig. I, Tafel XI).

2. Eine ebene begrenzte Fläche (Figur) kann zu einer der beiden Tafeln senkrecht, zur andern schief sein, in welchem Falle sie in der ersten als gerade Linie, in der zweiten als verkürzte Flächenfigur erscheint (siehe Fig. I^a, II, III und IV, Tafel XI).

3. Eine ebene Fläche kann zu beiden Projectionstafeln senkrecht stehen, in welchem Falle sie in beiden als eine Gerade erscheint, welche zur Projectionsachse senkrecht steht (siehe abc, $a'b'c'$ in Fig. V, Tafel XI).

4. Eine ebene Fläche kann endlich zu beiden Tafeln eine schiefe Lage haben; beide Projectionen sind sodann Flächenfiguren, deren jede mehr oder weniger verkürzt erscheint (siehe abc, $a'b'c$ in Fig. VI, Tafel XI).

Die wahre Grösse und Gestalt einer Fläche ist also nach dem oben Gesagten nur dann aus einer ihrer Projectionen ersichtlich, wenn sie parallel zu einer Tafel ist; in allen übrigen Lagen erscheint sie verkürzt.

Darstellung einer begrenzten ebenen Fläche (Dreieck) in verschiedenen Lagen.

Tafel XI. Figur I—VI.

§ 109. Man zeichne zuerst eine horizontale Gerade als die Projectionsachse, betrachte den darüberliegenden Raum als die verticale, und den darunterliegenden Raum als die umgeklappte, horizontale Tafel, bestimme sodann über der Achse $a'b'c'$ (Fig. I) als die Verticalprojection eines Dreieckes. Soll die Projection $a'b'c'$ nun zugleich auch die wahre Grösse enthalten,

*) Man wende für einen Augenblick die Zeichnung, betrachte $a'b'$ als Grundriss und verfahre damit wie vorhin mit der Projection ab.

*) Die beiden in c) und d) angeführten Bestimmungen sind eigentlich ein und dasselbe, da in einer Geraden immer zwei beliebige Punkte gedacht werden können, mit dem dritten also drei Punkte der Bestimmung d) bilden, und umgekehrt durch zwei der gegebenen drei Punkte immer eine Gerade gelegt werden kann, wodurch die Bestimmung d) mit Bestimmung c) identisch wird.