Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

5. Darstellung einer begrenzten Fläche (Dreieck) in verschiedenen Lagen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

nen*), indem man die Abstände a und b von der Projectionsachse (d. i. von der verticalen Tafel) von a' nach a'' und von b' nach b'' auf die zu $a'b'$ rechtwinkligen Geraden $a'a''$, $b'b''$ trägt.

Die Strecke $a''b''$ ist nun ebenso wie $a'''b'''$ gleich der wirklichen Länge; der Neigungswinkel der Geraden (ab, $a'b'$) zur verticalen Tafel ist gleich dem Winkel, welcher durch die Verlängerung von $a'b'$ und $a''b''$ rechts oben entstehen würde.

§ 107. In Fig. X sind zwei Punkte durch ihre Projectionen (a, a'), (b, b') in der horizontalen Tafel angenommen: es sollen aus diesen zwei Gerade gezeichnet werden, welche sich in einem Punkte (s, s') schneiden.

Man bestimme zunächst aus (a, a') die Lage der einen Geraden (ac, $a'c'$) beliebig und ziehe z. B. aus dem Grundrisse b die Gerade bd, welche ac in s schneidet. Soll nun s ein Schnittpunkt zweier Geraden sein, so ist damit die Verticalprojection s' vollständig bestimmt, da nach § 101 die Projectionen eines Punktes stets in einer Senkrechten (Projicirenden) zur Achse liegen müssen, der Schnittpunkt aber auch auf der zuerst gegebenen Geraden (ac, $a'c'$) liegen muss. Man ziehe also aus s eine Senkrechte, bis sie $a'c'$ in s' schneidet, und verbinde b' mit s', so sind (ac, $a'c'$), (bd, $b'd'$) die Projectionen der sich schneidenden Geraden. Denkt man sich ferner eine dritte Gerade, welche z. B. in wagrechter Lage durch die beiden gegebenen Geraden nach abwärts gleitet, so erzeugt diese eine Ebene, welche die horizontale Tafel in der Richtung (ab, $a'b'$) schneidet. Der Schnitt einer Ebene mit einer der beiden Projectionstafeln heisst die Spur oder Trace der Ebene; so ist die punktirte Gerade ab eine horizontale Trace, deren verticale Projection $a'b'$ mit der Projectionsachse zusammenfällt.

Die ebene Fläche (Ebene).

§ 108. Eine ebene Fläche kann entweder begrenzt oder auch unbegrenzt gedacht werden; eine unbegrenzte ebene Fläche heisst einfach eine Ebene; zu den begrenzten ebenen Flächen gehören: das Dreieck, das Parallelogramm, die Kreis- und Ellipsfläche u. s. w. Eine Ebene entsteht, wenn auf zwei sich schneidenden oder zwei parallelen Geraden eine dritte Gerade fortgleitet, oder wenn eine Gerade durch einen Punkt und eine feststehende Gerade sich bewegt. Eine Ebene ist somit, abgesehen von ihrer Ausdehnung oder Begrenzung, durch folgende Elemente ihrer Lage nach bestimmt:

a) durch zwei sich schneidende Gerade;
b) durch zwei parallele Gerade;
c) durch eine Gerade und einen Punkt, welcher nicht in der Verlängerung der Geraden liegt;
d) durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen.*)

In Bezug auf die Lage, welche eine Ebene oder ebene begrenzte Fläche gegen zwei Projectionstafeln einnehmen kann, unterscheidet man folgende Fälle:

1. Eine Ebene kann zu einer der beiden Tafeln parallel sein, in welchem Falle sie dann zur andern immer senkrecht steht; ihre Projectionen stellen sich in der ersten Tafel als eine Ebene, oder wenn man sich die Fläche durch Gerade allseitig begrenzt denkt, als eine Flächenfigur nach ihrer wahren Grösse und Gestalt dar; in der zweiten Tafel projicirt sie sich als eine zur Projectionsachse parallele Gerade (siehe Fig. I, Tafel XI).

2. Eine ebene begrenzte Fläche (Figur) kann zu einer der beiden Tafeln senkrecht, zur andern schief sein, in welchem Falle sie in der ersten als gerade Linie, in der zweiten als verkürzte Flächenfigur erscheint (siehe Fig. I[a], II, III und IV, Tafel XI).

3. Eine ebene Fläche kann zu beiden Projectionstafeln senkrecht stehen, in welchem Falle sie in beiden als eine Gerade erscheint, welche zur Projectionsachse senkrecht steht (siehe abc, $a'b'c'$ in Fig. V, Tafel XI).

4. Eine ebene Fläche kann endlich zu beiden Tafeln eine schiefe Lage haben; beide Projectionen sind sodann Flächenfiguren, deren jede mehr oder weniger verkürzt erscheint (siehe abc, $a'b'c$ in Fig. VI, Tafel XI).

Die wahre Grösse und Gestalt einer Fläche ist also nach dem oben Gesagten nur dann aus einer ihrer Projectionen ersichtlich, wenn sie parallel zu einer Tafel ist; in allen übrigen Lagen erscheint sie verkürzt.

Darstellung einer begrenzten ebenen Fläche (Dreieck) in verschiedenen Lagen.

Tafel XI. Figur I—VI.

§ 109. Man zeichne zuerst eine horizontale Gerade als die Projectionsachse, betrachte den darüberliegenden Raum als die verticale, und den darunterliegenden Raum als die umgeklappte, horizontale Tafel, bestimme sodann über der Achse $a'b'c'$ (Fig. I) als die Verticalprojection eines Dreieckes. Soll die Projection $a'b'c'$ nun zugleich auch die wahre Grösse enthalten,

*) Man wende für einen Augenblick die Zeichnung, betrachte $a'b'$ als Grundriss und verfahre damit wie vorhin mit der Projection ab.

*) Die beiden in c) und d) angeführten Bestimmungen sind eigentlich ein und dasselbe, da in einer Geraden immer zwei beliebige Punkte gedacht werden können, mit dem dritten also drei Punkte der Bestimmung d) bilden, und umgekehrt durch zwei der gegebenen drei Punkte immer eine Gerade gelegt werden kann, wodurch die Bestimmung d) mit Bestimmung c) identisch wird.

so muss (nach § 108) die Horizontalprojection der Fläche eine zur Achse parallele Gerade $a\,b\,c$ sein. Die Fläche ist also parallel zur verticalen und senkrecht zur horizontalen Tafel. Bringt man die Horizontalprojection $a\,b\,c$ in die Lage von $a''\,b''\,c''$ (Fig. I[a]), so ändert die Fläche ihre Lage nur zur verticalen Tafel, und die Entfernungen der Punkte a''', b''', c''' von der Achse bleiben demnach die gleichen. Man ziehe daher aus a'', b'', c'' die Senkrechten, sowie aus a', b', c' (Fig. I) die Wagrechten, so ergibt sich der Aufriss a''', b''', c'''. Die Fläche erscheint sodann auch im Aufriss verkürzt, da sie zur verticalen Tafel schief steht.

§ 110. In Fig. II zeichne man zunächst das reguläre Fünfeck $a\,b\,c\,d\,e$ (siehe § 48) und errichte aus dessen Eckpunkten die Senkrechten (Projicirenden). Angenommen, es würden nun sämmtliche Verticalprojectionen der Ecken a, b, c, d, e in der Achse oder in einer Parallelen zur Achse liegen, so würde damit die Fünfecksfläche in der horizontalen Tafel oder parallel zu derselben liegen, und die Fläche wäre in Wirklichkeit ein reguläres Fünfeck.

Nimmt man dagegen, wie dies in Fig. II der Fall ist, die Verticalprojectionen in einer zur Achse geneigten Geraden $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ an, so ist die Fläche schief oder geneigt zur horizontalen und senkrecht zur verticalen Tafel; in ersterer erscheint sie deshalb als eine verkürzte Flächenfigur*), in der zweiten als eine Gerade. Ihr Neigungswinkel zur horizontalen Tafel ist gleich dem Winkel, welchen die Gerade $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ mit der Projectionsachse bildet.

Soll nun die wahre Grösse der Fläche gefunden werden, so muss dieselbe parallel zu einer der beiden Tafeln gedreht oder in eine der Tafeln umgelegt werden. Man nehme die Entfernungen der Punkte a, b, c, d, e von der Achse, denke sich dieselbe perpendiculär über a', b', c', d, e im Raume und sodann um die Gerade $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ als Trace**) rechtwinklig umgelegt, so ergibt sich in $a''\,b''\,c''\,d''\,e''$ die wahre Grösse der Fünfecksfläche. Es ist demnach die Entfernung $a'\,a''$ gleich der Entfernung a von der Achse u. s. w.

§ 111. In Fig. III sind die Projectionen ($a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$) einer Dreiecksfläche gegeben. (Ihre Stellung zu den Tafeln ist ähnlich wie bei Fig. I[a].) Um die wahre Grösse derselben zu finden, trage man $c\,b\,a$ von c'' aus parallel zur Achse (vgl. Fig. I) in $c''\,b''\,a''$ an, ziehe aus diesen Punkten die Senkrechten und aus c', a', b' die Wagrechten, so ergibt sich $a'''\,b'''\,c'$ als die wahre Dreiecksgrösse, oder kürzer: man ziehe die Senkrechte $c\,c'\,1\,2$, ferner aus a', b' die Horizontalen vorläufig unbestimmt lang, trage aus dem Grundrisse $c\,b$ von 2 nach links in $2\,b'''$, und ebenso $c\,a$ von 1 nach a''' an, so ergibt sich das gleiche Dreieck $a'''\,b'''\,c'$ als die zur verticalen Tafel parallel gestellte Dreiecksfläche.*)

Das Dreieck $a^4\,b^4\,c^4$ ist die um die horizontale Trace $c\,b\,a$ umgelegte Figur ($a\,a^4$ gleich dem Abstande a von der Achse, b, b^4 gleich dem Abstande b' von der Achse u. s. w., vgl. Fig. II).

§ 112. In Fig. IV sind ($a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$) als die Projectionen eines in der horizontalen Tafel liegenden Dreieckes gegeben. Durch Erheben desselben um den fixen Punkt (c, c') und zwar so, dass die Ecken stets gleichen Abstand von der verticalen Tafel behalten, erhält es z. B. im Aufrisse zuerst die Lage von $a''\,b''\,c'$; durch Fällen der Senkrechten aus a'', b'', sowie durch Ziehen der zur Achse parallelen Geraden $a\,a''', b\,b'''$ ergibt sich die verkürzte Fläche $a'''\,b'''\,c$. Bei fortgesetzter Drehung um (c, c') wird das Dreieck im Aufrisse einmal die Lage von $a^4\,b^4\,c'$ einnehmen, und die projicirenden Senkrechten aus a^4, b^4, c' fallen nunmehr in eine Gerade zusammen, weshalb sich das Dreieck auch im Grundriss als eine Gerade $a^5\,c\,b^5$ darstellt. Die Dreiecksfläche steht somit senkrecht zu beiden Projectionstafeln. (Siehe § 108.) Die verticalen Tracen der verschiedenen Stellungen fallen hierbei mit den Projectionen $a''\,b''\,c'$ und $a^4\,b^4\,c'$, sowie die horizontale Trace der beiden letzten Lagen mit $a^5\,c\,b^5$ zusammen. Bei der letzten Stellung bilden also die Geraden $a^4\,b^4\,c'$ und $a^5\,c\,b^5$ zugleich die Projection des Dreieckes, wie auch die horizontale und verticale Trace der Dreiecksebene.

Wären, wie in Fig. V, die beiden Projectionen ($a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$) einer zu beiden Tafeln senkrecht stehenden Dreiecksfläche schon vorhanden, so könnte die wahre Grösse derselben durch Umlegen in die horizontale Tafel (wodurch man eine der Fig. IV ähnliche Zeichnung erhielte) gefunden werden, oder man legt die Fläche um ihre verticale Trace $c'\,b'\,a'$ in die verticale Tafel um, d. h. man mache $c'\,c''$ gleich dem Abstande c von der Achse, $a'\,a''$ gleich dem Abstande a von der Achse u. s. w.

§ 113. Fig. VI zeigt die beiden Projectionen ($a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$) eines Dreieckes in beliebig schiefer Stellung zu beiden Tafeln. Das Dreieck erscheint dabei in jeder Projection als verkürzte Flächenfigur; die Eckpunkte (a, a'), (b, b'), (c, c') konnten beliebig gewählt werden, sofern nur je zwei Punkte (a, a'), (b, b'...) in einer Senkrechten (Projicirenden) liegen (siehe § 101), da durch

*) Die Fläche ist also in diesem Falle kein reguläres Fünfeck, sondern erscheint nur im Grundrisse als ein solches.

**) Denkt man sich die Fünfecksfläche gegen die verticale Tafel verlängert, so schneidet sie diese nach der Geraden $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$, d. h. die Trace fällt mit der Verticalprojection der Fläche zusammen und die Entfernungen der einzelnen Fünfeckspunkte von der Trace sind gleich den Entfernungen der Punkte a, b, c, d, e von der Achse.

*) Diese Abkürzung des Verfahrens ist leicht erklärlich, indem ja $2\,b'' = c''\,b'' = c\,b$, $1\,a''' = c''\,a'' = c\,a$ ist. Man hat also hierbei lediglich die Gerade $c''\,b''\,a''$, sowie die Senkrechten $a''\,a'''$, $b''\,b'''$ erspart.

drei Punkte stets nur eine Ebene gelegt werden kann. (Siehe § 108.)

Um die wahre Grösse der Dreiecksfläche zu erhalten, muss zunächst eine der beiden Tracen, z. B. die horizontale, gefunden werden. Man verlängere hierzu irgend eine Gerade, welche der Dreiecksebene angehört und die horizontale Tafel noch schneidet, z. B. die Kante $(b'\,c',\ b\,c)$, bis sie in (R', R) die horizontale Tafel schneidet, so sind (R', R) die beiden Projectionen eines Tracenpunktes; da nach der gegebenen Zeichnung die Ecke (a, a') schon in der horizontalen Tafel liegt, so bildet (a, a') einen weitern Tracenpunkt, und a mit R verbunden ist eine horizontale Trace oder Spur der Dreiecksebene, um welche ähnlich wie bei den vorhergehenden Figuren IV und V die Fläche umgelegt werden kann. Hierzu ist jedoch die Annahme einer dritten Projectionstafel nöthig, welche zu der betreffenden Trace rechtwinklig stehen muss. Die Gerade $b^4\,a''\,3'\,2'$ stellt diese Tafel vor, welche senkrecht zur horizontalen Projectionsebene zu denken ist. Zu dieser dritten Tafel steht nun die Dreiecksebene senkrecht*), und projicirt sich daher in dieser dritten Tafel als eine Gerade. Um diese Projection auf einer und derselben Zeichnungsfläche darstellen zu können, ist ferner nothwendig, dass man die dritte Tafel um ihre Basis (Projectionsachse), welche mit ihrer Projection zusammenfällt, in die horizontale Tafel umklappt; die dritte Projection $a''\,c''\,b''$ der Fläche ist nun in der nach rechts umgeklappten Tafel zu denken.

Um die Lage von $a''\,c''\,b''$ zu bestimmen, denke man sich b in der Entfernung $b', 2$ perpendiculär über b im Raume, b von da aus nach rechts, senkrecht gegen die dritte Tafel projicirt und von $2'$ aus rechtwinklig, d. h. mit der Tafel nach b'' umgelegt. Da a in der horizontalen Tafel liegt, trifft seine dritte Projection in die Achse nach a'', und a'' mit b'' verbunden ist die verlangte dritte Projection (Kreuzriss oder Seitenriss). Ist die Zeichnung genau ausgeführt, so muss auch $3'\,c''$ gleich $3\,c'$ sein, indem ja $2'\,b''$ ebenfalls gleich $2\,b'$ bestimmt wurde.

Die wahre Grösse der Dreiecksfläche ergibt sich nun durch Umlegen dieser dritten Projection um einen fixen Punkt, etwa (a, a'') in gleicher Weise wie bei Fig. IV, indem man nur $b^4\,a''\,2'\ldots$ als Projectionsachse, $a''\,b''\,c''$ als Vertical- und $a\,b\,c$ als Horizontalprojection zu betrachten braucht, $a''\,c''\,b''$ um a'' nach $a''\,c^4\,b^4$ legt, aus $c^4\,b^4$, parallel $R\,a$, und aus b und c parallel mit $2'\,a''\,b^4$, d. h. mit der Projectionsachse zieht. (Vgl. Fig. IV.) $a\,b'''\,c'''$ ist die wahre Grösse der Dreiecksfläche.

§ 114. Ist P als ein in der Dreiecksfläche liegender Punkt zuerst im Grundriss bestimmt, so findet sich sein Aufriss P' dadurch, dass man durch P irgend eine Gerade legt, welche der Dreiecksfläche angehört, dieselbe also in ihren Kanten in zwei Punkten schneidet; diese Punkte sodann hinauf projicirt und oben verbindet, so liegt P' in der Verticalprojection dieser Geraden. Man zeichne daher z. B. aus der Ecke c durch P die Gerade $c\,P\,n$, projicire n nach n' und ziehe $c'\,n'$. Die Verticalprojection P' liegt nun auf der Geraden $c'\,n'$ und auf der Projicirenden aus P. Das Auffinden der Projectionen P'', P''' ist nach dem bisher Gesagten aus der Zeichnung leicht zu ersehen.

*) Um sich davon eine richtige Vorstellung zu machen, nehme der Lernende irgend eine Fläche (Karton oder Kartenblatt) zur Hand und stelle sie senkrecht über der Geraden $b''\,a''\,3'\,2'$ auf, so versinnlicht diese die dritte Tafel. Legt man nun ein zweites Kartenblatt mit einer Kante nach $a\,R$, so steht die Ebene des letzteren zur ersten Ebene senkrecht, gleichviel welche Neigung die durch $a\,R$ gehende Ebene zur horizontalen Tafel auch haben mag.

Projection der Körper.

§ 115. Unter einem Körper versteht man einen allseitig durch Flächen begrenzten Raum. Die Körper sind entweder eckige oder runde. Unter den eckigen Körpern versteht man im Allgemeinen solche, die von lauter Ebenen begrenzt werden; unter den runden aber solche, welche ganz oder zum grössten Theil von krummen Flächen begrenzt sind. Zu den eckigen Körpern gehören z. B. Prismen und Pyramiden; zu den runden der Cylinder, der Kegel, die Kugel u. s. w. Da eckige Körper im Allgemeinen leichter darzustellen sind als runde, so machen wir mit jenen den Anfang.

Darstellung eines hohlen vierseitigen*) Prismas mit quadratischer Grundfläche.

Tafel XII. Figur I—VI.

§ 116. Man zeichne im Grundriss (Fig. I) zuerst das Quadrat $a\,b\,c\,d$, dessen Fläche in der horizontalen Tafel liegen soll, dessen verticale Projection somit in der Achse liegt (vgl. Fig. IV, Taf. XI). Ueber a', b', c', d' senkrecht errichte man die Kanten. Da bei der Parallelstellung des Körpers a', d' und b', c' im Aufrisse zusammenfallen, so ist dies auch mit den über diesen Punkten errichteten Kanten der Fall.**)

Der Körper steht also parallel zur verticalen Tafel, d. h. gewisse Flächen desselben sind parallel mit dieser. Nun bringe man die Verticalprojection von Fig. I in die Lage von Fig. II, so dass die Grundfläche $(a\,b\,c\,d,\ a'\,b'\,c'\,d')$ zur horizontalen Tafel etwa unter 30^0 geneigt ist, wodurch die Stellung des Körpers lediglich

*) Darunter sind natürlich nicht alle, sondern nur die Höhen oder Längenseiten zu verstehen.

**) Man denke sich vorerst den Körper massiv, also nicht hohl, wie in der Zeichnung angegeben ist.