# Das projective Zeichnen

**Kleiber, Max**

**Stuttgart, [1886]**

9. Darstellung eines senkrechten und eines schiefen Prismas mit schrägen Schnittflächen und deren Netzbestimmung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

In Fig. II ist der Aufriss von Fig. I in eine schiefe Stellung gebracht, so dass der Pfosten auf einer der Achteckskanten ($d\,e$, $d'\,e'$) ruht und die achteckige Grundfläche unter 45° zur horizontalen Tafel geneigt ist. Zwei der Achteckskanten, nämlich ($d e$, $d' e'$) und ($a h$, $a' h'$), sowie zwei Kanten des Quadrates ($I\ IV$, $I'\ IV'$) und ($II\ III$, $II'\ III'$) stehen hierbei senkrecht zur verticalen Tafel. Als Stütze wurde im Aufrisse Fig. II zuerst ein Balken von beliebiger Dicke, sowie dessen Grundriss gezeichnet. Mittels der Projicirenden aus dem Aufrisse der Fig. II und dem Grundrisse der Fig. I ergibt sich die Horizontalprojection der Fig. II. Die Horizontalprojection Fig. III ist gleich der in Fig. II, jedoch in schräger Lage zur verticalen Tafel (vergl. Fig. II. Taf. XIII).

Durch Errichten und Ziehen der Projicirenden aus dem Grundrisse Fig. III und dem Aufrisse Fig. II aus jedem der Eckpunkte u. s. w. ergibt sich schliesslich der Aufriss von Fig. III. Zur Vollendung dieses Aufrisses ist jedoch folgendes Verfahren einfacher:

Man denke sich den Pfosten vorerst ohne Abschrägung als einen einfachen Block, dessen Projectionen ($A\,B\,C\,D\ I\ II\ III\ IV$, $A'\,B'\,C'\,D'\ I'\ II'\ III'\ IV'$) sind; ($B\,C$, $B'\,C'$) bildet sonach eine Quadratseite, welche mit der Achtecksseite ($d\,e$, $d'\,e'$) zusammenfällt.*) In das Quadrat $A'\,B'\,C'\,D'$ zeichne man die Diagonalen $A'\,C'$, $B'\,D'$, ziehe ferner aus $b'\,g'$, $c'\,f'$ der Fig. II die Projicirenden, welche auf den Quadratseiten $A'\,B'$, $D'\,C'$, die Punkte $b'$, $c'$, $g'$, $f'$ als Achteckspunkte abschneiden.

Die weitern Achteckspunkte $a'\,d'\,h'\,e'$ ergeben sich, wenn man durch je zwei Schnittpunkte der letztgenannten Projicirenden mit den Diagonalen die Parallelen zu $A'\,B'$ oder $D'\,C'$ zieht. Aus den Achteckspunkten $a', b', c', d', e' \ldots$ ziehe man nun die Parallelen zu $A'\,I'$, d. i. zu den Längenkanten des Blockes, sowie aus den Punkten $a''$, $h''$, $q'$, $p'$, $1'$, $4' \ldots$ der Fig. II die Projicirenden, so ergeben sich in Fig. III auf den vorher gezeichneten Parallelen $h'\,h''$, $a'\,a''$, sowie auf $A'\,I'$, $D'\,IV'$ die entsprechenden Punkte $a''$, $h''$, $q'$, $p'$ und $1'$, $4' \ldots$ Die Hilfspunkte $p'$, $q'$ für die Curven $4'\,p'\,h''$, $1'\,q'\,a''$ liegen dabei jedesmal in der Mitte je zweier Parallelen $A'\,I'$, $a'\,a''$, $D'\,IV'$, $h'\,h''$, da diese Hilfspunkte gleich anfänglich in Fig. I und II so angenommen wurden. Um die übrigen Punkte $i'$, $b''$, $2'$, $k'$, $c''$, $l'$, $d'' \ldots$ zu erhalten, ziehe man die Geraden $1'\,2'$, $2'\,3'$, $3'\,4'$, ferner $v\,i'\,k'$, $l'\,m'$, $n'\,o'$ und $b''\,c''$, $d''\,e''$, $f''\,g''$ parallel zu den Quadratseiten $I'\,II'$, $II'\,III' \ldots$ u. s. w.

*) Im Grundrisse der Fig. III wurden die unsichtbaren Seiten des Achteckes nicht weiter angegeben, da bei obiger Abkürzung des Verfahrens diese zur Herstellung der Verticalprojection nicht unbedingt nöthig waren. (Vergl. übrigens die Grundrisse Fig. II und III.)

## Darstellung eines senkrechten und schiefen Prismas mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzbestimmung (Entwicklung der Oberfläche).

Tafel XV, Fig. I—II$^a$.

§ 119. Prismen werden eingetheilt in senkrechte und schiefe, je nachdem die Seitenflächen senkrecht oder schief auf den Grundflächen stehen. Bei senkrechten bilden die Seitenflächen mit der Grundfläche (Basis) rechte Winkel, bei schiefen bilden sie spitze bezw. stumpfe Winkel. Die Grundfläche kann bei beiden Gattungen ein beliebiges regelmässiges oder unregelmässiges Polygon sein; je nach der Seitenzahl des Polygones unterscheidet man drei-, vier-, sechs- und mehrseitige Prismen. Ein Prisma heisst regelmässig, wenn seine Seitenflächen senkrecht zur Basis stehen und diese Basis ein reguläres Polygon ist*); in allen andern Fällen heisst das Prisma unregelmässig (irregulär).

Fig. I zeigt die Darstellung eines senkrechten und regulären sechsseitigen Prismas, welches durch eine schiefe Ebene, deren Lage senkrecht zur verticalen Tafel ist, geschnitten wird; ihr Neigungswinkel zur horizontalen Tafel wurde hier gleich 45° angenommen. $R\,R'$ bildet die horizontale, $R'\,4'\,3' \ldots$ die verticale Spur der schneidenden Ebene. Die Grundfläche des Prismas liegt in der horizontalen Tafel und bildet in derselben das reguläre Polygon $a\,b\,c\,d\,e\,f$. Die horizontale Projection $1\,2\,3\,4\,5\,6$ der schrägen Schnittfläche fällt hierbei mit der Grundfläche zusammen, da die Kanten des Prismas zugleich die Projicirenden sind. Um die wahre Grösse und Form der schrägen Schnittfläche zu bestimmen, verfahre man entweder, wie bei § 110 (Taf. XI, Fig. II) gezeigt wurde, oder ist, wie hier, der Raum dazu nicht vorhanden, so zeichne man eine Gerade $I\ IV\ b \ldots$ parallel zur Achse, betrachte diese als die Projection einer zur verticalen Tafel parallelen Ebene und klappe die Schnittfigur in dieselbe um den fixen Punkt ($2$, $2'$) nach aufwärts. Man errichte also über $1'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ die Senkrechten, mache $1'\,1''$ gleich $I\,1$, $3'\,3''$ gleich $III\,3$, $4'\,4''$ gleich $IV\,4$ u. s. w., so ist $1''\ 2''\ 3''\ 4''\ 5''\ 6''$ die verlangte wahre Grösse der Schnittfigur.

### Entwicklung oder Netzbestimmung des senkrechten Prismas.

§ 120. Fig. I$^a$ zeigt das Netz oder die in eine Ebene gelegten Körperflächen. Eine solche Netzbestim-

*) Hierbei ist keineswegs nöthig, dass eine der Querflächen, welche das Prisma an beiden Enden begrenzen, ein reguläres Polygon ist, da das Prisma an beiden Seiten durch schiefe Ebenen abgeschnitten sein könnte, sondern das Prisma ist immer regulär, wenn ein Durchschnitt (Normalschnitt), welcher zu den Längenkanten senkrecht steht, ein reguläres Polygon bildet.

mung ist z. B. dann nöthig, wenn der Körper aus Blech, Pappe u. dgl. gebildet werden soll. Bei eckigen Körpern, welche durch Ebenen begrenzt sind, bietet die Netzentwicklung keine weitern Schwierigkeiten, da man nur alle Flächen in ihrer wahren Grösse und in gleicher Ordnung, wie bei dem Körper, auf eine Ebene auszubreiten braucht.

Die Netzbestimmung in Fig. I[a] erhält man auf folgende Weise: Man ziehe die Gerade *e f a b* ..., mache *a b*, *b c*, *c d* ... gleich den Seiten *a b*, *b c*, *c d* ... der Basis (in Fig. I), errichte über *a*, *b*, *c*, *d* ... Senkrechte, mache diese gleich lang den entsprechenden Kanten *a′ 1′*, *b′ 2′*, *c′ 3′* ... in Fig. I und verbinde *1*, *2*, *2*, *3*, *3*, *4* durch Gerade. *e 5* wurde hierbei als Trennungskante betrachtet, d. h. als jene Kante, nach welcher man sich den (etwa hohlen) Körper aufgeschnitten dachte. Die auf solche Weise neben einander gelegten Seitenflächen heissen der Mantel. An diesen lege man die Grundfläche mit einer ihrer Seiten, z. B. *c d*, an die gleich benannte Strecke des Mantels, und ebenso die Deckfläche mit einer ihrer Seiten, z. B. *3″ 4″* (Fig. I), nach *3 4* in Fig. I[a]. Das unregelmässige Sechseck *1″ 2″ 3″ 4″ 5″ 6″* wurde zuerst in vier Dreiecke zerlegt und diese Dreiecke dann in entsprechend gleicher Ordnung in Fig. I[a] von der Geraden *3 4* aus aneinander gelegt.*)

§ 121. Fig. II zeigt die Darstellung eines schiefen Prismas, dessen Basisfläche *a b c d e f*, ein reguläres Sechseck, in der horizontalen Tafel liegt. Die Kanten (*a 1*, *a′ 1′*), (*b 2*, *b′ 2′* ...) sind parallel zur verticalen und schief zur horizontalen Tafel; ihr Neigungswinkel zu letzterer wurde hier gleich $60^0$ angenommen. Die Lage einer schiefen, das Prisma schneidenden Ebene *1′ R′* wurde hier ebenfalls unter $60^0$ zur horizontalen Tafel gegeben, so dass das Prisma durch die Ebene symmetrisch (antiparallel) zur Grundfläche geschnitten wird. Da gleichliegende (parallele) und ebenso symmetrisch liegende Schnittebenen bei einem Prisma congruente Schnittfiguren ergeben, so ist die Schnittfigur (*1 2 3 4 5 6*, *1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′*) in Wirklichkeit congruent der Basisfläche; desgleichen würde auch, wenn das Prisma durch eine zur Basisfläche parallele Ebene *1′ x* geschnitten würde, letzte Figur congruent der Basisfläche sein. Das in Wirklichkeit reguläre Sechseck verkürzt sich seiner Lage entsprechend im Grundrisse zu einem länglichen Sechseck *1 2 3 4 5 6*. Die Gerade *1′ R′* bildet die verticale, *R″ R* die horizontale Trace der schneidenden Ebene, wobei man sich die über die Projectionsachse hinausgehende Verlängerung der horizontalen Trace als in der gleichfalls über die Achse hinaus verlängerten horizontalen Tafel zu denken hat.

*) Der Anfänger thut gut, wenn er sich ein solches Netz ausschneidet und um die gezeichneten Kanten umbiegt: es entsteht sodann das plastische Modell dieses Körpers.

## Entwicklung oder Netzbestimmung des schiefen Prismas.

§ 122. Da bei diesem Prisma weder die Grundfläche noch die obere Schnittfigur zu den Kanten desselben senkrecht steht, so wird sich auch der Umfang der Basis bei der Entwicklung, ebenso wie dieses bei der obern Schnittfigur der Fall ist, in eine unbestimmte gebrochene Gerade verwandeln. Man muss daher, um das Netz bestimmen zu können, das Prisma durch eine Hilfsebene schneiden, welche zu den Kanten desselben senkrecht steht (Normalschnitt oder Normalebene). Dadurch wird das schiefe Prisma in zwei Senkrechte — mit schief abgeschnittenen Endflächen — zerlegt, die nun ebenso wie Fig. I entwickelt werden können. Diese Hilfsebene, deren Projectionen (*g′ h′ i′ k′ l′ m′*) und (*g h i k l m*) sind, wurde durch die Mitte des Körpers gelegt, so dass die Ebene jede der Kanten halbirt*), mithin das schiefe Prisma in zwei congruente Hälften zerlegt.**)

Nun bestimme man die wahre Grösse dieser senkrechten Durchschnittsfigur, indem man dieselbe etwa um ihre zur verticalen Tafel parallele Diagonale (*g k*, *g′ k′*) dreht, bis sie parallel zur verticalen Tafel ist, d. h. man mache *h′ h″*, *m′ m″* gleich den Entfernungen, welche *h* und *m* von der Diagonalen *g k* haben. Dasselbe gilt auch für die Auffindung der Punkte *i″*, *l″*. Das Sechseck *g′ h″ i″ k′ l″ m″* ist nun die wahre Grösse des Normalschnittes.

Die Ausführung des Netzes Fig. II[a] ist ähnlich wie bei Fig. I[a].

Man zeichne nämlich die Gerade *k k* (Fig. II[a]) vorerst von unbestimmter Länge, wähle auf dieser irgend einen Punkt, z. B. *g*, beliebig, trage von *g* aus die Seitenlängen *g′ h″*, *h″ i″*, *i″ k′* aus Fig. II auf die Gerade in Fig. II[a] nach rechts, und ebenso die Längen *g′ m″*, *m″ l″*, *l′ k′* von *g* auf die Gerade nach links über; errichte in *k*, *l*, *m*, *g*, *h*, *i*, *k* Senkrechte und mache *g 1* gleich *g′ 1′* in Fig. I, ebenso *g a* gleich *g′ a′*, *h 2* gleich *h′ 2′* u. s. w.; *d k 4* bildet hierbei die Trennungskante der Mantelfläche: endlich sind zur Vollendung des Netzes noch die beiden Querflächen mit je einer beliebigen Seite an die Mantelfläche anzufügen. Da beide Querflächen reguläre Sechsecke sind, so sind auch die einzelnen

*) Dieses wäre nicht unbedingt nöthig, sondern es könnte die Hilfsebene an beliebiger Stelle durch den Körper gelegt werden.

**) Die verticale Trace *g′ R′* dieser Normalebene fällt hierbei wieder mit der Richtung der Verticalprojection *g′ h′ i′ k′ l′ m′* zusammen und ihre horizontale Trace fällt in die schon vorhandene der oberen Schnittfläche, so dass also beide Schnittflächen eine gemeinschaftliche horizontale Trace haben. In diesem Falle haben je drei nach einerlei Richtung gehende und symmetrisch liegende Kanten der drei Schnittflächen, z. B. (*cd*, *c′d′*), (*ik*, *i′k′*), (*3 4*, *3′ 4′*) u. s. w. einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt (*R*, *R′*), welcher in der horizontalen Trace liegt.

Strecken $a\,b$, $1\,2$, $b\,c$, $2\,3$ . . . der gebrochenen Linien von der gleichen Länge einer Sechsecksseite; es ist daher in diesem Falle gleichgiltig, wo oder mit welcher Seite man die Polygone anlegt. Die punktirte gebrochene Linie $x''\ 1\ x'$ zeigt die Mantelfläche des Prismas, wenn dasselbe aus dem Punkte $1'$ durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geschnitten wird.

## Darstellung einer senkrechten, regelmässigen, und einer schiefen, unregelmässigen Pyramide mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzentwicklung.

Tafel XVI. Fig. I—II[a].

§ 123. Pyramiden werden ebenso wie die Prismen in senkrechte und schiefe, mit regelmässiger und unregelmässiger Basisfläche eingetheilt. Eine Pyramide heisst nur dann senkrecht oder regelmässig, wenn ihre Basis ein reguläres Polygon und die Seitenflächen congruente gleichschenklige Dreiecke sind; jede andere Pyramide heisst schief oder unregelmässig. Je nach der Seitenzahl der Grundfläche heisst auch die Pyramide eine drei-, vier-, sechs- oder mehrseitige (vielseitige) Pyramide.

In Fig. I ist eine senkrechte, regelmässige Pyramide dargestellt; deren Basis $(a\,b\,c\,d\ \ldots,\ a'\,b'\,c'\,d'\ \ldots)$ ist ein regelmässiges, in der horizontalen Projectionstafel liegendes Sechseck; $m'\,S'$ heisst die Höhe der Pyramide und $(S, S')$ liegt senkrecht über der Mitte der Grundfläche; $(a\,b\,S,\ a'\,b'\,S')$, $(b\,c\,S,\ b'\,c'\,S')$ . . . heisst je eine Seite der Pyramide. Die schneidende Ebene ist unter einem Winkel von $45^0$ zur horizontalen und senkrecht zur verticalen Tafel angenommen und durchschneidet die Pyramide nach einem unregelmässigen Sechseck, dessen Verticalprojection $1'\,2'\,3'\,4'$ . . . eine Gerade und dessen Horizontalprojection die verkürzte Flächenfigur $1\,2\,3\,4$ . . . bildet. $1'\,R$, $R'\,r$ sind die beiden Tracen der schneidenden Ebene. Je zwei in einer Pyramidenseite liegende Kanten, z. B. $(b\,c, b'\,c')$, $(2\,3, 2'\,3')$, treffen sich, wenn verlängert, in einem Punkte $r'''$ der horizontalen Trace; $r, r, r'$ . . . sind weitere solche Punkte, in welchen sich je zwei Seiten der Grund- und Schnittfläche in ihrer Verlängerung schneiden. Die wahre Grösse der schiefen Schnittfigur $(1\,2\,3 \ldots 1'\,2'\,3')$ wurde durch Umlegen der verticalen Tafel, wie bei Fig. II, Tafel XI, gefunden, d. h. die Entfernungen $1'\,1''$, $2'\,2''$, $3'\,3''$ . . . wurden gleich gemacht den Entfernungen, welche die Punkte $1, 2, 3$ . . . von der Achse haben; $1''\,2''\,3''\,4''$ . . . ist die wahre Grösse der Schnittfigur.

### Entwicklung oder Netzbestimmung der senkrechten Pyramide.

§ 124. Da die Seitenkanten der Pyramide sich im Allgemeinen sowohl horizontal, als vertical verkürzt projiciren, so müsste, falls nicht wie in Fig. I eine der Kanten in ihrer wahren Länge erscheint, diese wahre Länge erst durch Drehung gefunden werden. Bei der Stellung jedoch, welche hier die Pyramide zur verticalen Tafel einnimmt, zeigt sich die wahre Länge einer Kante sowohl bei $a'\,S'$, als auch bei $d'\,S'$, da $(a\,S, a'\,S')$ und ebenso $(d\,S, d'\,S')$ parallel zur verticalen Tafel ist; $a'\,S'$ gibt nun auch die wahre Länge der übrigen Seitenkanten an.*)

Man beschreibe daher aus einem beliebigen Punkte $S$ (Fig. I[a]) mit dem Radius $S'\,a'$ (Fig. I) einen Kreisbogen, trage auf diesen die wahren Grössen der Basisseiten (d. i. $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$ . . , in Fig. I[a] $=$ $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$ . . . in Fig. I) als Sehnen in gleicher Ordnung auf und verbinde die Punkte $a, b, c, d$ . . . durch Gerade, so ist $S\,f\,a\,b\,c\,d\,e\,f$ die Mantelfläche. Legt man die Basis mit einer beliebigen Seite, z. B. $b\,c$ an die gleichbenannte Seite der Mantelfläche, so bildet diese in Verbindung mit dem Mantel das Netz der nicht abgestumpften Pyramide. Soll das Netz der abgestumpften Pyramide, wie hier in der Zeichnung angegeben ist, ausgeführt werden, so mache man die Strecken $a\,1$, $b\,2$, $c\,3$ . . . des Netzes gleich den wahren Grössen der Kanten $(a\,1, a'\,1')$, $(b\,2, b'\,2')$, $(c\,3, c'\,3')$ . . . . Um diese wahren Grössen zu erhalten, denke man sich jede der Seitenkanten um ihren gemeinschaftlichen Scheitelpunkt $(S, S')$ nach $(S\,a, S'\,a')$ gedreht, so werden damit auch die Punkte $2'$, $6'$, $3'$, $5'$ nach $2'''$, $(6''')$, $3'''$, $(5''')$ zu liegen kommen, und $a'\,2'''$, $a'\,3'''$ . . . sind die wahren Grössen der betreffenden Kanten, welche nun in Fig. I[a] von den Punkten $b, c, d$ . . . aus übertragen werden können. Legt man endlich die Schnittfigur mit einer beliebigen Seite, z. B. $3''\,4''$ an die gleiche Seite $3\,4$ des Mantelumfanges, so ist damit das Netz der abgestumpften Pyramide bestimmt.

§ 125. Die Darstellung der schiefen unregelmässigen Pyramide, wie sie Fig. II zeigt, bietet nichts wesentlich Neues. Der Unterschied ist hier nur der, dass die Seitenfläche nicht mehr congruent, sondern Dreiecke von verschiedener Grösse sind. Die Basis kann dabei regulär**), oder wie im gegebenen Falle (Fig. II) irregulär sein.

In Fig. II wurde, um alle vorkommenden Fälle anzudeuten, eine Seitenkante $(a\,S,\ a'\,S')$ parallel zur verticalen Tafel, und eine Seitenkante $(e\,S,\ e'\,S')$ so angenommen, dass ihre beiden Projectionen senkrecht zur Achse stehen, d. i. mit ihren Projicirenden zusammen-

*) Man betrachte zunächst die Pyramide als nicht durch die schiefe Fläche abgestumpft und zeichne das Netz der ganzen Pyramide ohne Rücksicht auf die schiefe Schnittfigur.

**) Wäre die Basis ein reguläres Polygon, die Spitze oder der Scheitelpunkt aber nicht senkrecht über der Mitte dieser Basis, so ist die Pyramide ungeachtet der regelmässigen Basisfläche dennoch schief, d. i. unregelmässig.