Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

11. Darstellung des Kreises in verschiedenen Lagen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

fallen*) (siehe § 105, Tafel X, Fig. VIII). Die übrigen Seitenkanten sind schief zu beiden Tafeln. Die schneidende Ebene, deren Tracen $R'' R''' R'$ und $R' 1' 2' \dots$ sind, steht wie bei Fig. I senkrecht zur verticalen Tafel und ist zur horizontalen unter einem Winkel von 30^0 angenommen. Die wahre Grösse der Schnittfigur wurde hier in gleicher Weise wie bei Fig. I durch Umlegen in die verticale Tafel gefunden.

Abwicklung des Netzes der schiefen Pyramide.

§ 126. Zur Bestimmung des Netzes müssen, wie bei Fig. I^a, die Seitenflächen der Pyramide nach ihrer wahren Grösse und in derselben Ordnung wie bei dem Körper neben einander gelegt werden. Die Basiskanten zeigen sich im Grundriss bei ab, bc, $cd \dots$ in ihrer wahren Grösse, ebenso ist $a' S'$ die wahre Länge einer Seitenkante, die übrigen Seitenkanten wurden durch Drehung um den gemeinschaftlichen Scheitelpunkt und zwar parallel zur verticalen Tafel**) in ihrer wahren Grösse bestimmt. So ist z. B. $b^3 S'$ die wahre Grösse der Kante ($b S, b' S'$), $e^3 S'$ die wahre Grösse der Kante ($e S$, $e' S'$) u. s. w. Dasselbe gilt auch von den Strecken $a' 1'$, $b^3 2'''$, $e^3 5''$ u. s. w. Aus den wahren Grössen derjenigen Strecken, welche je eine vollständige oder abgestumpfte Pyramidenseite begrenzen, werden nunmehr die einzelnen Seiten des Netzes in Fig. II^a gebildet und um S herum aneinander gelegt. Das Anlegen der Schnittfigur geschieht wie bei Fig. I^a.***)

Darstellung des Kreises, bezw. der Kreisfläche in verschiedenen Lagen.†)

Tafel XVII. Fig. I—IX.

§ 127. Die beiden Projectionen eines Kreises können sich darstellen:

1. als Kreis und Gerade, in welchem Falle die Kreisebene parallel zu einer Tafel ist;

2. als zwei Gerade von gleicher Länge, in welchem Falle die Kreisebene senkrecht zu beiden Tafeln ist;

3. als Gerade und Ellipse, in welchem Falle die Kreisebene senkrecht zu einer und schief zur andern Tafel ist;

4. als zwei Ellipsen, deren grosse Achsen gleiche Länge haben, in welchem Falle die Kreisebene schief zu beiden Tafeln steht (s. Taf. XVII).

Die Projectionen der Kreislinie werden, wie dies überhaupt bei jeder Curve der Fall ist, dadurch bestimmt, dass man eine Anzahl von Punkten auf derselben annimmt, und deren Projectionen durch eine stetige krumme Linie aus freier Hand verbindet. Ist die Curve, wie dies bei dem Kreise der Fall ist, eine gleichförmig gekrümmte, so theilt man am besten dieselbe in gleiche Theile. Die Summe der projicirenden Linien, welche von einer Kreislinie oder sonstigen Curve gegen eine Projectionstafel gezogen werden, bilden dabei eine projicirende Cylinderfläche*) und der Durchschnitt dieser Cylinderfläche mit der Projectionstafel ist die Projection des Kreises oder der Curve (s. Fig. 37.)

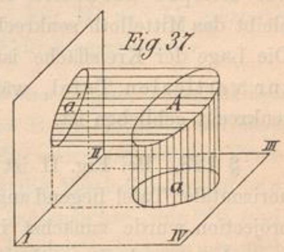


Fig 37.

In Fig. I sind zunächst die beiden Projectionen ($abcd \dots$, $a'b'c'd' \dots$) einer Kreisfläche in paralleler Stellung zur verticalen Tafel gegeben; die Kreisfläche erscheint daher oben in ihrer wahren Grösse, unten als eine Gerade, deren Länge gleich dem Kreisdurchmesser ist. Eine zum Mittelpunkte der Kreisebene senkrecht stehende Gerade (Mittelloth der Kreisfläche) projicirt sich im Grundrisse als die zu $abcd \dots$ senkrecht stehende Gerade mL, im Aufrisse als ein Punkt m'. Soll nun die Kreisfläche in eine andere Lage oder Stellung gebracht werden, so theile man den Umfang zuerst in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. zwölf**); ($a', b', c', d' \dots$ $a, b, c, d \dots$) sind solche Theilpunkte. Dreht man nun die Kreisfläche um den Punkt (g, g'), so dass sie zur horizontalen Tafel stets senkrecht bleibt, so wird ihre Horizontalprojection einmal senkrecht zur Projections-

---

*) Um hier den Punkt e in der Horizontalprojection bestimmen zu können, muss man zuvor die Kante (eS, $e'S'$) um (S, S') parallel zur verticalen Tafel nach ($S'e''$, $S'e^3$) drehen; der Punkt $5'$ fällt alsdann im Aufriss in die gedrehte Kante nach $5''$. Fällt man von $5''$ die Projicirende, so ergibt sich im Grundriss $5'''$; den so erhaltenen Punkt $5'''$ denke man sich mit der Kante ($e''S$, e^3S') wieder in die ursprüngliche Lage nach (eS, $e'S'$) zurückgedreht, wodurch sich Punkt 5 in der Horizontalprojection ergeben hat. Ausserdem könnte Punkt 5 auch gefunden werden, indem man ea bis R''' verlängert und aus R''' durch 1 eine Gerade zieht, welche eS in 5 schneidet.

**) Die Seitenflächen der Pyramide könnten auch ebenso gut um ihre Basiskanten, z. B. ab, $bc \dots$ in die horizontale Tafel gelegt werden. Dieses Verfahren ist hier jedoch nicht angegeben, da es in diesem Falle weniger zur Anwendung kommt.

***) Die Basisfläche wurde in Fig. II^a wegen Mangel an Raum weggelassen.

†) Die Darstellung des Kreises oder der Kreisfläche mit der auf dem Mittelpunkte der Kreisfläche senkrecht stehenden Achse (Mittelloth der Kreisebene) findet bei dem projectiven Zeichnen eine so vielseitig praktische Verwerthung, dass wir dieses Blatt dem Studium des Anfängers ganz besonders empfehlen.

---

*) Wenn eine Gerade auf irgend einer krummen Linie fortgleitet und dabei zu ihrer ursprünglichen Lage parallel bleibt, so heisst die durch die Gerade erzeugte Fläche eine Cylinderfläche, die Gerade eine Erzeugende und die gegebene krumme Linie die Leitlinie.

**) Der Kürze halber wurde der Kreis so getheilt, dass immer je zwei Punkte, z. B. m', b' und l', $c' \dots$, ebenso l', i' und m', h' u. s. w. in eine Projicirende und somit deren Horizontalprojectionen zusammenfallen.

achse stehen, so dass die Projicirenden aus a'', b'', c'', d'' . . . in eine Gerade fallen, somit die Verticalprojection ebenfalls eine Gerade wird, deren Länge $d''' k'''$ gleich dem Durchmesser ist. Die Kreisfläche steht somit senkrecht zu beiden Tafeln, und das Mittelloth steht senkrecht zu den beiden Projectionen. Setzt man die Drehung um (g, g') nach rechts weiter fort, bis die Horizontalprojection die Lage von $a^4 b^4 c^4 d^4$ . . . angenommen hat, und zeichnet man aus diesen Punkten, sowie aus a', m', l', k', i', h' . . . die Projicirenden, so ergeben diese in $a^5 m^5 l^5 k^5 i^5 h^5$. . . den zur Ellipse verkürzten Kreisumfang oder die zur Ellipse verkürzte Kreisfläche.

Das Mittelloth $m^5 L$ der Kreisfläche steht hierbei senkrecht auf dem in wahrer Grösse erscheinenden Kreisdurchmesser $d^5 m^5 k^5$, welcher sich geometrisch betrachtet als die grosse Achse der Ellipse darstellt; in der Horizontalprojection bleibt das Mittelloth senkrecht zur Horizontalprojection. Die Lage der Kreisfläche ist im letzten Falle schief zur verticalen Tafel, während sie zur horizontalen senkrecht geblieben ist.

§ 128. Bei Fig. II ist die Kreisfläche als in der horizontalen Tafel liegend angenommen. Die Horizontalprojection wurde zunächst in acht gleiche Theile $a b$, $b c$, $c d$ . . . getheilt, und die Theilpunkte gemäss der Annahme nach a', b', c', d', e', f' . . . in die Achse projicirt, wobei in der Verticalprojection wieder je zwei Punkte b, h in b', h', c, g in c', g' u. s. w. zusammenfallen. An die Punkte a, b, c, d . . . der Horizontalprojection wurden ferner Tangenten gelegt, welche zwei symmetrisch liegende Quadrate bilden, in welche der Kreis eingeschlossen ist. Denkt man sich nun den Kreis sammt den ihn umschliessenden Quadraten oder Tangenten um (e, e') als fixen Punkt erhoben, so dass seine Lage zur verticalen Tafel stets gleich, also senkrecht bleibt, so kommt hier die Kreisfläche einmal in eine zu beiden Tafeln senkrechte Stellung $(a'' m'' e')$, $(c''' e g''')$, wie dieses bei Fig. I der Fall war.

Wird die Drehung weiter fortgesetzt, d. h. bringt man die Verticalprojection $a' b' c' d'$ . . . in die Lage von $a^4 b^4 c^4 d^4$ . . ., so erscheint deren Horizontalprojection wieder als Ellipse $a^5 b^5 c^5 d^5$ . . ., und die den Kreis tangirenden Quadrate projiciren sich als Rechteck und Raute und bilden, geometrisch betrachtet, die Tangenten an die Ellipse. So sind z. B. $s'' b^5$, $s'' d^5$ die Projectionen der Kreistangenten $s b$, $s d$ u. s. w.

Die Tangenten $s'' b^5$, $s'' d^5$, $s' h^5$ u. s. w. können am einfachsten dadurch gefunden werden, dass man in das die Ellipse einschliessende und tangirende Rechteck, dessen Seiten parallel den Ellipsachsen sind, die Diagonalen zieht; ferner mittels der Projicirenden aus b, d, h, f . . . auf den Diagonalen die Punkte b^5, d^5, h^5, f^5 . . . abschneidet und durch letztere parallel mit den Diagonalen die Tangenten zeichnet.*)

Das Mittelloth $(L' m^4, L m^5)$ steht auch hier, wie in den vorigen Figuren, senkrecht zu den sich nicht verkürzenden Projectionen des Durchmessers $c^5 g^5$ und $e' a^4$ **)

§ 129. In Fig. III wurde die Gerade $a' c'$ als die Verticalprojection eines Kreises gegeben. Die Länge dieser Geraden $a' c'$ ist, wie schon erwähnt, zugleich die wahre Grösse des Kreisdurchmessers; derselbe muss daher in der Horizontalprojection parallel der Projectionsachse liegen. Man nehme daher $a c$ innerhalb der Projicirenden aus $a' c'$ in beliebiger Entfernung von der Projectionsachse und parallel zu derselben an; die Projicirende aus m' ergibt unten den Mittelpunkt m dieses Durchmessers. Ein zweiter zu $(a c, a' c')$ rechtwinkliger Durchmesser projicirt sich oben in $b' m' d'$ als ein Punkt, ist somit parallel zur horizontalen Tafel und erscheint desshalb in letzterer nach seiner wahren Länge $(b d = a' c')$. Macht man daher $m b$ gleich $a' m'$, $m d$ gleich $a' m'$ oder $m' c'$, so sind a, b, c, d die vier Scheitelpunkte der Ellipse; um weitere Punkte derselben, z. B. *1*, *2*, *3*, *4*, zu erhalten, denke man sich etwa die Hälfte des Kreises um den Durchmesser $(a c, a' c')$ parallel zur verticalen Tafel in $a' b'' c'$ aufgestellt, halbire die Viertelsbögen $a' b''$, $b'' c'$ durch $1''$ und $4''$, ziehe aus $1''$ und $4''$ die Projicirenden $1'' 1'$, $4'' 4'$, fälle ebenso aus $1'$ und $4'$ die Projicirenden herab und trage die Entfernungen $1' 1''$, $4' 4''$ von dem Durchmesser $a c$ aus nach *1* und *4* an. Dieselbe Grösse kann auch von dem Durchmesser $a c$ aus nach *2* und *3* getragen werden. Man hat damit acht Punkte, nämlich a, *1*, b, *4*, c . . . erhalten, durch welche die Ellipse mit freier Hand gezeichnet wird.***)

Man bringe ferner den Grundriss von Fig. III in die schiefe Lage des Grundrisses Fig. IV, ziehe aus a'', b'', c'', d'' (Fig. IV) und a', b', c', d' (Fig. III) die Projicirenden, so ergeben sich die Curvenpunkte a''',

*) Mit Hilfe von Tangenten lässt sich eine Curve stets leichter und genauer zeichnen, als dieses durch Punkte allein möglich ist.

**) Der in der Verticalprojection sich nicht verkürzende Durchmesser $e' a^4$ fällt in derselben mit der Projection der Kreisfläche zusammen, weshalb $L' m^4$ sowohl zur Projection der Kreisfläche, als auch zu dem Durchmesser $e' a^4$ senkrecht erscheint. In der Horizontalprojection dagegen erscheint das Mittelloth senkrecht zu dem Durchmesser $c^5 g^5$, dessen Verticalprojection $c^4 g^4$ sich als ein Punkt darstellt. $(c^5 g^5, c^4 g^4)$ ist parallel zur horizontalen, $(e a^5, e' a^4)$ parallel zur verticalen Tafel, wesshalb jeder der betreffenden Durchmesser in derjenigen Tafel, zu welcher er parallel ist, sich nach seiner wahren Grösse projicirt (vergl. § 102 und 104, Fig. III und V, Tafel X).

***) $(o' n', o'' n'')$ kommen hier vorerst noch nicht in Betracht.

b''', c''', d''' der Verticalprojection von Fig. IV*), und die Geraden $a'''m'''c'''$, $b'''m'''d'''$ bilden, geometrisch betrachtet, zwei schiefe Durchmesser der Ellipse. Angenommen aber, man verlange im Aufrisse nicht nur eine Anzahl von Hilfspunkten, sondern hauptsächlich die Scheitelpunkte der Ellipse, oder mit anderen Worten: man will den grössten und kleinsten Durchmesser, d. h. die Ellipsachsen, erhalten, so ziehe man durch den Mittelpunkt m'' der Horizontalprojection einen zur Projectionsachse parallelen Durchmesser $om''n$, denke sich ferner die Horizontalprojection mit dem darin enthaltenen neuen Durchmesser $om''n$ nach Fig. III in ihre ursprüngliche Lage zurückgebracht, aus $o'n'$ in Fig. III die Verticalprojectionen $o''n''$ bestimmt, aus letzteren die Wagrechten und aus on der Fig. IV die Senkrechten gezogen, so ergibt sich in der Verticalprojection (Fig. IV) $o'''m'''n''$ als ein unverkürzter Durchmesser, oder geometrisch genommen, $o'''m'''n''$ als die grosse Ellipsachse. ($om''n$, $o'''m'''n'''$) ist nämlich ein zur verticalen Tafel paralleler, und ($b''m''d''$, $b'''m'''d'''$) ein zur horizontalen Tafel paralleler Kreisdurchmesser, wesshalb $o'''m'''n''$ gleich $b''m''d''$ gleich der wahren Grösse dieses Kreisdurchmessers ist.

Zur Bestimmung des kleinsten Durchmessers (kleine Ellipsachse) kann folgendes Verfahren dienen:

Man beschreibe um $o'''n'''$ als Durchmesser einen Kreis, ziehe aus einem der vorhin erhaltenen Ellipspunkte, z. B. aus b''', eine ihrer Lage nach zu $o'''n'''$ rechtwinklige Gerade $b'''f$, welche den Kreis in f schneidet, zeichne den Radius fm''', sowie aus b''' eine Parallele zu $n'''o'''$, so wird fm''' durch letztere in g geschnitten; $m'''g$ ist dann gleich der halben kleinen Achse, welche Strecke man nur rechtwinklig zur grossen Achse von m''' aus nach beiden Seiten anzutragen braucht. Das Verfahren ist ähnlich, wie schon in § 71 (Fig. II, Tafel VI) angedeutet.**) Da hier die Kreisfläche in beiden Projectionen als eine mehr oder weniger excentrische Ellipse erscheint, so folgt daraus, dass ihre Lage schief zu beiden Tafeln ist (siehe § 127).

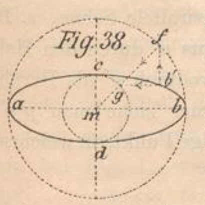
Das Mittelloth der Kreisebene projicirt sich dabei stets senkrecht zu dem in wahrer Grösse erscheinenden Durchmesser. Zeichnet man parallel mit den Projicirenden an eine der Kreisprojectionen die Tangenten, so müssen diese auch die andere Kreisprojection berühren. In der Praxis handelt es sich oft darum, die Projectionen von Kreisen auf möglichst einfache Art zu zeichnen. Hierzu bietet obiges Verfahren, nämlich die Bestimmung der als Ellipsen sich projicirenden Kreise durch ihre Achsen, den einfachsten Weg, weil, wenn einmal diese beiden Achsen bekannt sind, die Ellipse selbst, etwa nach einer der in Tafel VI angegebenen Methoden, z. B. wie bei Fig. III, mittels des Papierstreifens leichter gezeichnet werden kann*), als dieses durch die projective Bestimmung einzelner Curvenpunkte möglich ist. Die folgenden Figuren zeigen, auf welche Weise das oben bei Fig. III und IV erörterte Verfahren noch weiter abgekürzt werden kann.

§ 130. In Fig. V ist die Ellipse, deren Achsen ac, bd sind, beliebig als die Horizontalprojection eines Kreises gegeben. Da ac die wahre Grösse des Kreisdurchmessers ist, so muss die Verticalprojection $a'c'$ ebenfalls parallel zur Projectionsachse sein**), (vgl. Fig. III, Tafel X) und es handelt sich jetzt nur noch darum, die Verkürzung des zweiten Kreisdurchmessers bd, d. i. $b'd'$, in der Verticalprojection zu bestimmen. Man denke sich hierzu durch den Mittelpunkt (m, m') eine Ebene senkrecht zu beiden Tafeln gelegt: diese Ebene schneidet die Kreisfläche sodann nach dem Durchmesser (bd, $b'd'$). Denkt man sich ferner diese Hilfsebene mit dem in seiner wahren Grösse darin liegenden Durchmesser (bd, $b'd'$) um den Mittelpunkt (m, m') parallel zur horizontalen Tafel gedreht, so muss dieser Durchmesser in der umgedrehten Hilfsebene (Seitenriss) nach seiner wahren Grösse enthalten sein. $b''md''$ ist dieser Seitenriss und $b''md''$ gleich amc gleich der wahren Grösse. Um die Lage von $b''md''$ zu bestimmen, ziehe man aus b und d die Projicirenden bb'', dd'' in paralleler Richtung zur Projectionsachse, nehme den Halbmesser am (oder mc) und schneide mit demselben von m aus auf dd'' und bb'' die Punkte d'' und b'' ab. Denkt man sich nun etwa (d, d') als den höher liegenden und (b, b') als den tiefer liegenden Punkt, so ist die Strecke dd'' in die Verticalprojection von m' nach d' aufwärts, und ebenso

---

*) Dass man auch die Verticalprojectionen der Punkte $1''$, $2''$, $3''$ . . . auf gleiche Weise wie $a'''b'''$ . . . finden könnte, braucht wohl nicht weiter ausgeführt zu werden.

**) Ist nämlich, wie in Fig. 38, ab die grosse, cd die kleine Achse einer Ellipse, so konnte ein weiterer Punkt b' gefunden werden, indem man um ab und cd als Durchmesser Kreise beschrieb, aus m einen Halbmesser durch beide Kreise legte und aus den Schnittpunkten g und f die Parallelen zu ab und cd zeichnete, welche in b' einen Ellipspunkt ergaben. Ist jedoch statt der kleinen Achse Punkt b' angenommen, so ergibt sich umgekehrt die halbe Grösse der kleinen Achse, wenn man aus b' in rechtwinkliger Lage zu ab die Gerade $b'f$, ferner fm, sowie aus b' parallel mit ab, oder was dasselbe ist, senkrecht zur Richtung der kleinen Achse zieht.



---

*) Bei einiger Uebung im Zeichnen wird es auch nicht allzu schwer fallen, eine Ellipse allein mittels ihrer beiden Achsen und ohne weitere Hilfspunkte zu zeichnen, wenn diese nicht allzu gross ist.

**) Diese Gerade $a'c'$ konnte in beliebiger Entfernung von der Projectionsachse gewählt werden.

$m'b'$ gleich bb'' nach abwärts anzutragen*), wodurch in der Verticalprojection die Verkürzung $b'd'$ des zweiten Durchmessers gefunden ist.

Statt anfangs die Projection $abcd$ zu geben, hätte man ebenso gut zuerst den Seitenriss $b''md''$ seiner Lage nach (etwa unter einem Winkel von 30^0 zur horizontalen Tafel) bestimmen können; das Resultat wäre dann das gleiche gewesen.

§ 131. In Fig. VI ist die Ellipse $abcd$ als die Horizontalprojection eines Kreises gegeben. Die grosse Ellipsachse ab ist als der unverkürzte, cd als ein verkürzter Kreisdurchmesser zu betrachten. Die Kreisfläche denke man sich mit dem Punkte (c, c') in der horizontalen Tafel liegend. Man bestimme zunächst den Seitenriss $cm''d''$, indem man aus d eine Projicirende rechtwinklig zu cd errichtet und sodann mit dem unverkürzten Durchmesser ab aus c einen Bogen beschreibt, welcher die in d errichtete Projicirende in d'' schneidet. Man denke sich dabei, ähnlich wie in Fig. V, durch cd eine zur horizontalen Tafel senkrechte Hilfsebene und diese mit der darin enthaltenen wahren Grösse des Durchmessers $(cd, c'd')$ in die horizontale Tafel umgelegt (siehe § 106), so dass nunmehr cmd nach $cm''d''$ zu liegen kommt und $cb''d''a''m''$ auch zugleich eine Projection der Kreisfläche darstellt. Die Strecken dd'', mm'', aa'' ... sind nun gleich den Entfernungen, welche die Punkte (d, d'), (m, m'), (a, a')... von der horizontalen Tafel haben. Um daher die Verticalprojection der Fig. VI zu bestimmen, ziehe man aus c, a, b, m, d die Projicirenden nach aufwärts und mache die Entfernungen, welche d', m', a', b' ... von der Projectionsachse haben, gleich den Strecken dd'', ma'', $(mb''$, $mm'')$ u. s. w. $(ma'' = mb'' = mm'')$. Dadurch ergeben sich in der Verticalprojection a', c', b', d' als Curvenpunkte. Um in derselben die grosse Achse der Ellipse zu erhalten, ziehe man in der Horizontalprojection fe parallel zur Projectionsachse, errichte über f und e die Projicirenden und beschreibe mit der wahren Grösse des Halbmessers aus m' einen Kreis, so schneidet dieser die Projicirenden in f' und e'.**) Die kleine Achse wird wie bei Fig. IV bestimmt, indem man $d'h$ parallel $e'f'$, $d'g$ parallel $m'h'L'$ (d. i. senkrecht zu $e'f'$) und den Radius gm' zieht, wodurch sich h als Schnittpunkt und $m'h'$ gleich $m'h$ als halbe kleine Achse ergibt. Die Richtung des Mittellothes $(Lm, L'm')$ fällt, wie schon bekannt, senkrecht zu ab und $e'f'$, also mit der Richtung der kleinen Ellipsachse in jeder der Projectionen zusammen.

*) Der Vorgang wird erklärlich, wenn man bedenkt, dass, wie aus dem Seitenriss ersichtlich ist, (d, d') um die Strecke dd'' höher und (b, b') um die gleiche Strecke bb'' tiefer als (m, m') liegt.

**) Die Abstände der Punkte e' und f' von der Projectionsachse sind übrigens gleich den Abständen, welche e'' und f'' von der Geraden cd im Seitenriss haben u. s. w.

§ 132. In Fig. VII sind zuerst $(AB, A'B')$ als die Projectionen einer Geraden, sowie in derselben (m, m') als Mittelpunkt eines Kreises bestimmt. Dessen Ebene soll zu der gegebenen Geraden senkrecht stehen, oder mit anderen Worten: $(AB, A'B')$ bilde das Mittelloth einer Kreisfläche, deren Mittelpunkt (m, m') ist.

Man ziehe durch m und m' rechtwinklig zu den Projectionen des Mittellothes je eine Gerade $a'b'$, cd, trage die wahre Grösse des Kreishalbmessers in jeder der Projectionen von m und m' nach beiden Seiten auf, d. h. man mache $m'a'$ gleich $m'b'$ gleich mc gleich md, d. i. gleich der wahren Grösse des Kreishalbmessers. Nun muss, weil $a'b'$ gleich der wahren Grösse ist, die Horizontalprojection dieses Durchmessers durch m parallel zur Projectionsachse gehen; ab ist die Horizontalprojection von $a'b'$. Damit sind aber ausser der grossen Achse cd noch zwei Ellipspunkte a und b gegeben, wodurch sich auf die schon erwähnte Weise die kleine Achse der Ellipse bestimmen lässt. (Siehe Fig. IV und VI.)

In gleicher Weise findet man auch in der Verticalprojection die kleine Achse, da c', d' (Verticalprojectionen von c, d) zwei Ellipspunkte sind.

§ 133. Fig. VIII zeigt als ein Beispiel der Anwendung einen hohlen Cylinder, dessen Wandung eine bestimmte Dicke hat. Die Stellung des Cylinders ist schief zu beiden Tafeln, und sollen hierbei zuerst die Projectionen einer Geraden $(AB, A'B')$ als die Achse des Cylinders und Punkt (n, n') als der Mittelpunkt eines im Raume liegenden und zur Achse senkrechten Kreises gegeben sein. Man bestimme die Kreisprojectionen $clbd$ ..., $a'hb'd'g$ ..., wie bei Fig. VII ($n'a'$ oder $n'b'$ und ebenso nc oder nd sind gleich dem wahren Kreishalbmesser), denke sich nun den Kreis parallel seiner angenommenen Lage in der Cylinderachse $(AB, A'B')$ nach abwärts geschoben, bis derselbe die horizontale Tafel in (p, p'') berührt, so ist durch das Abwärtsgleiten dieses Kreises ein Cylinder erzeugt worden, welcher mit einem Punkte (p, p'') seiner Basis in der horizontalen Projectionsebene ruht.*) Um diesen Punkt (p, p''), sowie die Lage von (m, m') in beiden Projectionen zu bestimmen, ziehe man parallel zur Projectionsachse an den verkürzten Kreis in p' eine Tangente. Damit man den Berührungspunkt p' genau erhalte, zeichne man eine zur Tangente parallele Sehne, z. B. ho, halbire dieselbe und ziehe aus n' durch den Halbirungspunkt die Gerade $n'p'$, wodurch p' als Berührungspunkt festgestellt ist. Ferner ziehe man $p'p''$ parallel mit $B'A'$, so ist p'' derjenige Punkt, in welchem

*) Der Kreis ist in diesem Falle die Erzeugende und die Gerade $(AB, A'B')$ die Leitlinie. Der Kreis gleitet mit seinem Mittelpunkte auf der geraden Leitlinie fort und bleibt dabei parallel seiner ursprünglichen Lage.

der herabgeschobene Kreis die horizontale Tafel berührt. Um den Mittelpunkt m' des letzteren zu finden, ziehe man $p''m'$ parallel zu $p'n'$; m' ist nun der Mittelpunkt und $m'b''$ der Halbmesser u. s. w. Punkt m' herab projicirt ergibt m der Horizontalprojection. Da der untere Kreis parallele Lage mit dem obern hat, so sind auch seine Verkürzungen in jeder der Projectionen gleichartig, d. h. die Ellipsen haben gleiche Achsenverhältnisse, sind also in jeder Projection paarweise congruent u. s. w.

Die Dicke der Cylinderwandung kann in jeder der Projectionen in wahrer Grösse direct angegeben werden. So ist cr und ebenso $a'q$ gleich dieser wahren Dicke. Die Projectionen der innern Kreise haben ebenso wie die äussern je paarweise gleiche Achsenverhältnisse. Man ziehe daher, um deren halbe kleine Achsen zu bestimmen, z. B. rs, parallel cl und ebenso in der Verticalprojection aus q parallel zu $a'g$ u. s. w.

Fig. IX zeigt das gleiche Verfahren bei Kreisen, deren Radien ma, $n1$ ungleich gross sind. Es verhält sich hierbei $n1$ zu $n3$ wie ma zu mc u. s. w.

Fig. X zeigt den verticalen Cylinderdurchschnitt in gerader oder geometrischer Ansicht. Die wahre Höhe desselben wurde dadurch ermittelt, dass man die Achse (mn, $m'n'$) in Fig. VIII um ihre Horizontalprojection nach $m''n''$ umklappte ($mm'' = m'1$ und $nn'' = n'2$), und die Höhe $m'n'$ in Fig. X gleich $m''n''$ in Fig. VIII machte. (Siehe Fig. IX Taf. X.)

Darstellung eines Säulenstückes mit darunterliegender quadratischer Platte.

Tafel XVIII. Figur I—II^a.

§ 134. In Fig. I ist zuerst der Aufriss, sodann der Grundriss der Säule nebst der Platte gegeben. Auf der Mantelfläche wurden Linien in der Form von Caneluren angegeben. Der Grundriss von Fig. I wurde sodann in eine schiefe Lage (hier rechts) gebracht und bildet derselbe nunmehr die Hilfsfigur zur Ausführung des Seitenrisses Fig. II und des Aufrisses Fig. II^a. Zweck der Aufgabe ist, die Säule in Fig. II^a so darzustellen, dass auch die horizontalen Flächen als solche zur Anschauung kommen, die Säule also eine nach vorwärts geneigte Stellung erhält. Um allzu viele Constructionslinien zu vermeiden, wurde hier der cylindrische Theil des Grundrisses in der schiefen Stellung aufs neue und zwar so eingetheilt: dass, wie bei Fig. I, wieder je zwei Punkte, z. B. *1, 7*, *2, 6* . . . ., sowie *14, 1*, *13, 2* . . . in eine Projicirende fielen. Man konnte sich dabei die auf der Platte stehende Säule um ihre Achse in dieser Stellung gedreht denken. Zur Ausführung der Fig. I^a ist zunächst Seitenriss Fig. II nothwendig.

Man denke sich bei dem schief gedrehten Grundriss die unterste Fläche $a\,b\,c\,d$ in der horizontalen Tafel liegend, zeichne rechtwinklig zur Projectionsachse die Gerade $a'' \ldots c'$, betrachte diese als die Projection einer dritten Tafel und die Fläche rechts davon als ihre Umlegung. Nun projicire man a nach a'', b nach b', c nach c', d nach d' und denke sich dieses Quadrat $abcd$, dessen Seitenriss in der Achse der dritten Tafel $a''b'c'd'$ ist, um den feststehenden Punkt $a(a'')$ erhoben, so dass $c''a''c'$ geometrisch betrachtet, der Winkel ist, unter welchem die Grundfläche zur horizontalen Tafel geneigt ist. Mit der Grundfläche denke man sich auch den ganzen Körper erhoben. Die Ausführung des Seitenrisses ist leicht. Man mache nur die Grössen $a''e''$, $b''f''$, $c''g''$ ... (in Fig. II) gleich $a'e'$, $b'f'$, $c'g'$ ... (in Fig. I) u. s. w. Ferner ziehe man aus a, b, c, d, e, f, g, h . . . die Projicirenden nach aufwärts und mache die Entfernungen der Punkte b''', c''', d''', e''', f''', g''', h''' . . . u. s. w. von der Projectionsachse gleich den Entfernungen, welche b'', c'', d'', e'', f'', g'', h'' von der horizontalen Tafel haben. Durch die Projicirenden aus dem Seitenrisse ist der Vorgang veranschaulicht; die Abstände der projicirenden Linien von der horizontalen Tafel wurden, wie aus der Zeichnung ersichtlich, in die verticale Projection Fig. II^a aufgestellt. Das vierkantige Prisma, welches hier den Körper stützt, wurde nachträglich in den betreffenden Projectionen bestimmt. Ferner sei noch erwähnt, dass der in schiefe Lage gebrachte Grundriss nicht als die Horizontalprojection des schief auf der Ecke stehenden Körpers, sondern lediglich als eine Hilfsfigur zu betrachten ist, vermittelst welcher im Verein mit Fig. II die Projection Fig. II^a bestimmt wurde. Die in Fig. II^a vorkommenden Ellipsen, bezw. verkürzten Kreise, konnten nach der in § 133 angegebenen Methode, d. i. mittels der beiden Achsen u. s. w., gezeichnet werden. Die kleine Achse q^4p^4 eines ersten Kreises, z. B. $n'q^4 4'p^4$, wurde, wie ersichtlich, aus dem Seitenriss abgeleitet; alle weiteren Ellipsen haben nun nach dem in § 133 Gesagten gleiche Achsenverhältnisse. Ferner sind in Wirklichkeit gleiche Längen auch in ihren Verkürzungen unter sich gleich, z. B. $a'''e'''$ gleich $b'''f'''$ gleich $c'''g'''$ u. s. w.

§ 135. Da es häufig vorkommt, dass aus einem gemeinschaftlichen Mittelpunkt mehrere ähnliche Ellipsen zu zeichnen sind, so sei in Fig. III ein Verfahren angegeben, nach welchem man diese Aufgaben lösen kann.

Angenommen, die äussere Ellipse $acbd$ sei gegeben, ebenso die grosse Achse hp einer zweiten Ellipse, welche den gleichen Mittelpunkt hat, und es sollen für diese zweite Ellipse mehrere Curvenpunkte gefunden werden, so zeichne man zunächst in die erste Ellipse beliebige Durchmesser el, ko, ziehe die Sehnen ae, ec, co... und z. B. aus h anfangend zu diesen parallel hg,