Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

14. Darstellung eines senkrechten und eines schiefen Cylinders mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzbestimmung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

achse $s\,r$ der Verticalprojection nach der in § 132, Fig. VII, Taf. XVII angeführten Methode gefunden.

Da nun nach § 133 die übrigen Kreisprojectionen ähnliche Ellipsen sind, so ist die weitere Ausführung dieselbe wie bei Fig. II.

Darstellung eines senkrechten und eines schiefen Cylinders mit schräger Schnittfläche, sowie deren Netzbestimmung.

Tafel XX. Figur I—II[a].

§ 139. Eine Cylinderfläche wird erzeugt, wenn sich eine Gerade als Erzeugende über irgend einer Curve als Leitlinie so bewegt, dass sie stets parallel ihrer ursprünglichen Lage, d. i. parallel mit sich selbst bleibt. Eine Cylinderfläche kann aber auch entstehen, wenn man die Curve als Erzeugende auf der Geraden als Leitlinie so fortgleiten lässt, dass sie dieselbe stets in dem gleichen Punkte berührt, und die Lage der Curve oder deren Ebene stets parallel mit sich selbst bleibt. Cylinderflächen theilen sich wieder in zwei Hauptgattungen, nämlich in senkrechte und schiefe Cylinderflächen. Die senkrechte Cylinderfläche entsteht, wenn die Gerade als Erzeugende senkrecht zur Ebene der Leitlinie steht; die schiefe Cylinderfläche, wenn die gerade Erzeugende schief zur Ebene der Leitlinie steht. Ist die Leitlinie ein Kreis, und steht die Erzeugende senkrecht zur Kreisebene, so erzeugt sie durch ihre Fortbewegung einen senkrechten Kreis- oder Rotationscylinder. Dabei kann man sich die Cylinderfläche auch durch Rotiren der Erzeugenden um eine Gerade als Achse entstanden denken, soferne die rotirende (sich drehende) Gerade stets parallel zu der Cylinderachse bleibt. Ebenso wird auch ein Kreiscylinder entstehen, wenn ein Kreis mit seinem Mittelpunkte durch eine Gerade gleitet und seine Ebene stets rechtwinklig zu dieser Geraden bleibt. Der Schnitt einer Ebene, welche rechtwinklig zu den geraden Erzeugenden steht, heisst ein Normalschnitt des Cylinders. Je nach der Gestalt des Normalschnittes wird auch die Cylinderfläche benannt. Ist z. B. dieser Normalschnitt ein Kreis, eine Ellipse oder Spirale etc., so heisst die Cylinderfläche eine kreisförmige, elliptische oder spiralförmige.

Die Cylinderfläche ist gleich den Mantelflächen der Prismen eine abwickelbare, da zwei sehr nahe oder unendlich nahe liegende Erzeugende ein ebenes Flächenelement bilden, d. h. man kann den Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen und kleinen Seiten betrachten.

§ 140. In Fig. I ist ein senkrechter Kreiscylinder dargestellt, dessen Basisfläche in der horizontalen Tafel liegt. Die schräge Schnittfläche steht senkrecht zur verticalen Tafel und ist zur horizontalen unter 45^0 geneigt; $r'\,r\,R$ ist die horizontale Trace der schneidenden Ebene, welche den Cylinder nach einer Ellipse durchschneidet, deren Horizontalprojection mit der gleichen Projection der Basisfläche zusammenfällt, sich also zu einem Kreise verkürzt. Ihre wahre Grösse $a'''\,b'''\,c'''\,d'''\ldots$ wurde durch Aufstellen um den fixen Punkt (d, d'') parallel zur verticalen Tafel gefunden.

Um die wahre Grösse der schrägen Schnittfigur zu bestimmen, ziehe man $a''\,a'''$, $b''\,b'''\,m'''$, $c''\,c'''\,l'''$ senkrecht zu $a''\,b''\,c''\ldots$, mache $a''\,a'''$ und $g''\,g'''$ gleich $o\,d$ oder $o\,k$ der Horizontalprojection, und ziehe $a'''\,g'''$, so ist $a'''\,o'''\,g'''$ die grosse und $d''\,o'''\,k'''$ (gleich $d\,o\,k$) die kleine Achse der Ellipse. Die weiteren Curvenpunkte $b''', c''', e''', f'''\ldots$ wurden gefunden, indem man die Entfernungen $b, c, e, f\ldots$ von dem Durchmesser $a\,g$ (Grundriss) von der grossen Achse $a'''\,g'''$ aus auf die entsprechenden Projicirenden nach $b''', c''', e''', f'''\ldots$ antrug. So ist z. B. $b'''\,m'''$ gleich $b\,m$, $c'''\,l'''$ gleich $c\,l$ u. s. w.

§ 141. Die Netzbestimmung dieses Cylinders ist ähnlich wie bei dem Prisma in Fig. I[a] Taf. XV. Man denke sich nämlich den Cylinder als ein Prisma von sehr vielen gleichen Seiten (der Kürze halber sind hier nur zwölf angenommen) und trage die wahre Breite dieser Seiten*) $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ in Fig. I[a], z. B. von a aus, auf eine Gerade**) in $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ und $a\,m$, $m\,l\ldots$ nach beiden Seiten an, errichte über diesen Punkten Senkrechte, mache $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'\ldots$, sowie $m\,m'$, $l\,l'$, $k\,k'\ldots$ in Fig. I[a] gleich den wahren Längen der betreffenden Erzeugenden, und verbinde g, h, i, k, l, m, a, b, $c\ldots$ durch eine stetige Curve. Die Erzeugende $(g, g'\,g'')$ bildet hierbei die Trennungslinie der Mantelfläche. An die abgewickelte Basislinie $g\,a\,g$ lege man ferner die Basisfläche, d. i. den Kreis $a\,b\,c\ldots$; derselbe berührt hier den Mantel in einem beliebigen Punkte f. Ferner ist die Ellipse mit irgend einem beliebigen Punkt an den entsprechend gleichen Punkt des Mantelumrisses zu legen.

Angenommen, es solle die Ellipse mit einem Scheitelpunkte d'' den Mantelumriss in d'' berühren, so hat man, um die Lage der kleinen Achse $d''\,k''$ (Fig. I[a]) bestimmen zu können, zuerst an die Curve $a'\,b'\,c'\,d''\,e'\ldots$, und zwar in d'', eine Tangente zu zeichnen. Um diese Tangente $d''\,r'$ genau zu bestimmen, lege man in Fig. I durch den Punkt (d, d'') eine tangirende Ebene an die Cylinderfläche, welche diese nach der Erzeugenden $(d, d'\,d'')$ berührt, daher senkrecht zur horizontalen Tafel steht, und

---

*) Da ein solches Bogenstück, z. B. ab, zu gross ist, um als eine Gerade betrachtet werden zu können, so thut man gut, dasselbe noch einmal zu halbiren und diese Hälfte dann zweimal im Netze anzutragen, wodurch sich die Strecken $a\,b$, $b\,c$, $c\,d\ldots$ in Fig. I[a] genauer ergeben.

**) Diese Gerade $g\,g$ ist hier in der Projectionsachse angenommen worden.

deren Trace $d\,R$ mit der Horizontalprojection dieser Ebene zusammenfällt. Da nun (R, R') sowohl auf der Trace der berührenden, wie auch auf der Trace der schrägen schneidenden Ebene liegt, so ist (R, R') ein Punkt, welcher beiden Ebenen gemeinschaftlich angehört; dasselbe gilt auch von dem Punkte (d, d''), welcher ebenfalls sowohl auf der schneidenden, als berührenden Ebene liegt. Denkt man sich nun (d, d'') mit (R, R') verbunden, so bildet diese Gerade ihrerseits wieder die Schnittkante der beiden erwähnten Ebenen und damit die Tangente an den Punkt (d, d'') (vgl. Fig. 43); deren Projectionen sind $(d\,R,\ d''\,R)$.

Man mache daher in Fig. I^a $d\,r'$ gleich $d\,R$ in Fig. I und ziehe von d'' nach r'' (Fig. I^a), so ist diese die verlangte Tangente. Zu dieser rechtwinklig steht

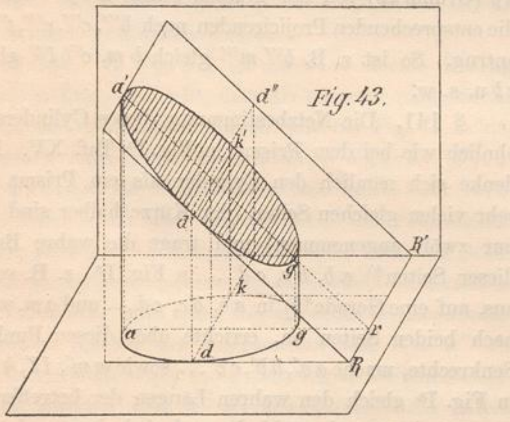

Fig. 43.

die kleine Achse $d''\,o''\,k''$ u. s. w. $d''\,r'$ bildet dabei zugleich auch die Tangente an den gleichen Punkt d'' der Ellipse.

Da bei der Netzentwicklung die tangirende Ebene, bezw. das begrenzte Stück $d\,d''\,r'$ derselben mit der gleichen Ebene zusammenfällt, in welche die Cylinderfläche ausgebreitet wurde, so ist aus diesem Grunde auch $d\,d''$, $d\,r'$, $d''\,r'$ in Fig. I^a gleich $d'\,d''$, $d'\,R'$ (oder $d\,R$) und $d''\,R'$ in Fig. I.

Dass man in gleicher Weise auch an irgend einen andern Punkt, etwa f des Mantelumrisses, die Tangente hätte legen können, ist nach dem Gesagten nicht besonders schwer zu ersehen. So bildet z. B. $f\,r'$ die Trace einer die Cylinderfläche in $(f, f'\ f'')$ berührenden Ebene, wobei $(f\,r',\ f''\,R')$ zugleich die Projectionen der betreffenden Tangente sind. Würde man daher aus Fig. I die Strecke $f\,r'$ von f in Fig. I^a nach rechts antragen und Punkt f' mit dem so erhaltenen Punkte rechts verbinden, so hätte man damit die Tangente für f' in Fig. I^a gefunden.*) Die Ellipse wäre nun, falls sie in f' berührend mit Punkt f'' angelegt werden sollte, in eine solche Lage zu bringen, dass eine in f' berührende Gerade (Tangente) mit der in f''' die Ellipse berührenden zusammenfällt.

*) Diese Construction ist hier nicht ausgeführt.

In Fig. I wurde die Ellipstangente in f''' auf projectivem Wege gefunden; man dachte sich nämlich auch die horizontale Trace der schneidenden Ebene in die verticale Tafel in $R'\,r'''\,r^4$ aufgestellt, verlängerte sodann die Projectionen $(a\,g,\ a'''\,g''')$ der grosen Ellipsachse bis (r, r'''), machte $r'''\,r^4$ gleich $r\,r'$ und zeichnete durch $f'''\,r^4$ die verlangte Tangente. Eine in f''' zu $f'''\,r^4$ senkrechte Gerade heisst die Normale der Curve.

§ 142. Fig. II ist die Darstellung eines schiefen Cylinders in Parallelstellung zur verticalen Tafel. Die Basisfläche wurde als ein Kreis zuerst, und die Erzeugenden darauf schief zur horizontalen und parallel zur verticalen Tafel angenommen. Der Cylinder wurde oben durch eine schiefe Ebene $(a''\,k''\,g''\,d'',\ a'''\,k'''\,g'''\,d''')$, deren horizontale Trace $R'''\,R''$ ist, geschnitten. Der Normalschnitt $(a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'\,h'\ldots,\ a\,b\,c\,d\,e\,f\,g)\ldots$ bildet eine Ellipse, deren wahre Grösse $a''\,b''\,c''\,d''\,e''\,f''\,g''\ldots$ durch Drehen um die kleine Achse $(a'\,g',\ a\,g)$ parallel zur verticalen Tafel gefunden wurde (siehe § 129). Die nach abwärts verlängerte Gerade $R\,R'$ ist die horizontale Trace der Normalebene.

Bei der Netzentwicklung wird die Ellipse des Normalschnittes zu einer Geraden $g''\,g$ werden (vgl. § 122). Betrachtet man $(7\,g''',\ 7'\,g'')$ als diejenige Erzeugende, in welcher die Cylinderfläche auseinander geschnitten wurde, so bildet diese in Fig. II^a die Trennungslinie des Mantels.

§ 143. Um den Mantel zu bestimmen, verstrecke man die Bogenstücke $a'\,b''$, $b''\,c''$, $c''\,d''\ldots$ in Fig. II^a von einem Punkte a aus nach rechts und links auf die Gerade $g''\,g$*), errichte in den Theilpunkten g'', h, i, k, l, m, a, $b\ldots$ die Senkrechten, trage die wahren Grössenabschnitte $a'\,a''$, $a\,1'\ldots\ d'\,d''$, $d'\,4'\ldots$ der Erzeugenden von den entsprechenden Punkten der Geraden $g''\,g$ aus nach aufwärts und abwärts an und verbinde die Punkte $7, 8, 9, 10, 11, 12\ldots$, sowie oben $g'\ldots a''\ldots g'$ durch eine stetige Curve; lege sodann an 1 berührend die kreisförmige Basisfläche und ebenso in a'' die Ellipse des obern Cylinderschnittes an die Mantelfläche. Die Ellipse wurde hier mittels ihrer beiden Achsen bestimmt, wobei $a''\,g''$ und $d''\,k''$ in Fig. II^a gleich $a''\,g''$ und $d'''\,k'''$ in Fig. II angenommen wurde.**) Sollte in Fig. II an einen Punkt (b, b') des Normalschnittes eine Tangente gelegt werden, so zeichne man zuerst $2\,R$, d. i. die Kreistangente an den Basispunkt $(2, 2')$ der Erzeugenden $(b\,2,\ b'\,2')$ und ziehe sodann $(b\,R,\ b'\,R')$ als die verlangte Tangente, deren verticale Projection $b'\,R'$ mit der Verticalprojection der Normalebene zusammenfällt. Die

*) Da hier die Basis in gleiche Theile getheilt ist, so ergeben sich in der Ellipse die Theile symmetrisch, z. B. $a'\,b''$, $b''\,c''$, $c''\,d'' = g''\,f''$, $f''\,e''$, $e''\,d''$ u. s. w.

**) Das Netz des schiefen Cylinders fällt hier des mangelnden Raumes halber zum Theil in das Netz Fig. I^a und ist das Ganze so ausgeführt, als wenn das erste Netz theilweise unter dem zweiten liegen würde.

Gerade $2\,R$ bildet die horizontale Trace einer den Cylinder in der Erzeugenden $(b\,2, b'\,2')$ berührenden Ebene, $R\,R'$ die horizontale Trace der Normalebene; (R, R'), wie auch (b, b') liegen daher wieder gemeinschaftlich in beiden erwähnten Ebenen, daher ist $(b, R,\ b'\,R')$ die verlangte Tangente (siehe § 141, Fig. 43). Ebenso verhält es sich mit einer Tangente, deren Horizontalprojection $T\,R''$ ist.

Darstellung eines senkrechten Kreiskegels mit schräger Schnittfläche und dessen Netzbestimmung.

Tafel XXI. Fig. I – IIª.

§ 144. Eine Kegelfläche wird erzeugt, wenn eine Gerade als Erzeugende über eine Curve als Leitlinie sich derart fortbewegt, dass sie dabei stets durch einen ausserhalb der Linie liegenden festen Punkt geht. Denkt man sich die Erzeugende über den Punkt hinaus verlängert, so entsteht durch ihre Bewegung eine vollständige Kegelfläche mit zwei Mantelflächen, welche in dem gegebenen Punkte S (Spitze oder Scheitelpunkt) zusammenstossen (vgl. Fig. 44).

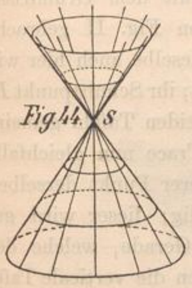

Fig. 44.

Auch die Kegelfläche kann man sich auf eine zweite Art entstanden denken, indem man nämlich die Leitende mit der Erzeugenden verwechselt, d. h. die Curve als Erzeugende über die Gerade als Leitende so hingleiten lässt, dass sie diese stets mit demselben Punkte berührt, parallel sich selbst bleibt, und in dem Verhältnisse sich verkleinert, als sie sich dem festen Punkte oder Scheitelpunkte nähert. Kegelflächen theilt man wieder in zwei Hauptgattungen, nämlich in senkrechte und schiefe Kegelflächen. Zur ersten Gattung gehört streng genommen nur die senkrechte Kreiskegelfläche oder auch Rotationskegelfläche, welche entsteht, wenn die gerade Erzeugende um eine andere Gerade als Drehungsachse rotirt, d. i. in allen Lagen zu dieser stets den gleichen Winkel am Scheitelpunkte bildet. Jede hierbei zur Drehungsachse senkrechte Ebene schneidet die Kegelfläche nach einem Kreise. Alle andern Kegelflächen heissen schief, und ausserdem je nach Gestalt der Leitlinie elliptische, spiralförmige etc.; schiefe Kegelflächen gibt es also unendlich viele, weil es unendlich viele Curven als Leitlinien geben kann.*)

§ 145. In Fig. I ist ein Kreiskegel dargestellt, welcher durch eine Ebene, die zur verticalen Tafel senkrecht und zur horizontalen unter 45° geneigt ist, geschnitten wird. Die Basis liegt in der horizontalen Tafel, die schneidende Ebene ergibt als Schnittfigur eine Ellipse, deren wahre Grösse durch Aufstellen parallel zur verticalen Tafel gefunden wurde. Man zeichne zuerst die beiden Projectionen $(a\,b\,c\,d\,e \ldots S,\ a'\,b'\,c'\,d'\,e' \ldots S')$ des Kegels**), d. h. man theile zuerst den Basiskreis in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. acht, und ziehe aus diesen Punkten und deren Verticalprojectionen die Erzeugenden $(a\,S,\ b\,S,\ c\,S,\ d\,S \ldots$ und $a'\,S',\ b'\,S',\ c'\,S',\ d'\,S' \ldots)$, bestimme sodann die schneidende Ebene, deren Tracen $R\,R'$, $1'\,R'$ sind. Die Horizontalprojection des Schnittes ergibt sich durch die Projicirenden aus $1', 2', 3', T', 4' \ldots$, auf den Erzeugenden $a\,S,\ b\,S,\ c\,S,\ d\,S \ldots$ und ist eine Ellipse, deren grosse Achse die Gerade $1\ 5$ bildet.

Da hier die Projicirenden aus $3'$ und $7'$ mit den Projectionen der Erzeugenden $(c\,S,\ g\,S)$, $(c'\,S',\ g'\,S')$ zusammenfallen, somit die Horizontalprojectionen 3 und 7 hierdurch nicht direct bestimmt werden können, so wird es nöthig, die Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ mit den darin liegenden Punkten um den Scheitelpunkt (S, S') parallel zur verticalen Tafel, etwa gegen (a, a') zu drehen (vgl. § 125, Fig. II, Taf. XVI), so dass nun die um (S, S') gedrehten Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ mit $(a\,S,\ a'\,S')$ zusammenfallen und die Punkte $3', 7'$, nach i' zu liegen kommen. Fällt man nun von i' die Projicirende, so ergibt sich i als Horizontalprojection, und diese mit den betreffenden Erzeugenden, welche wie schon gesagt, mit $(a\,S, a'\,S')$ zusammenfallen, in ihre ursprüngliche Lage nach $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ zurückgedreht, ergibt die Punkte 3 und 7 der Horizontalprojection. Da die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ gleiche Höhe im Raume haben, so liegt 3 und 7 in dem Halbkreise, welcher aus S durch i gezeichnet wurde; oder man denke sich durch die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ eine Hilfsebene parallel zur Basis gelegt, welche den Kegel nach einem Kreise schneidet***), dessen linke Hälfte $(3\,i\,7,\ 3'\,i'\,7')$ ist; die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ liegen daher sowohl auf diesem Kreise, als auch auf den Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$. In gleicher Weise konnten auch die Punkte $T, u, 4, 6 \ldots$ der Horizontalprojection gefunden werden. Dieselben haben wie ersichtlich, je paarweise gleichen Abstand von der horizontalen Tafel. Die Punkte x und y, welche nur dazu dienen, die Ellipse genauer zeichnen zu können, wurden von der kleinen Achse $T\,u$ in gleiche Entfernung, wie 2 und 8 auf den Geraden $2\,x$ und $8\,y$ bestimmt. Um die wahre Grösse der Schnittfigur (Ellipse) zu bestimmen, errichte man

*) Wir haben für unsere Zwecke in diesem Werke nur den Rotationskegel mit seinen charakteristischen Schnittfiguren, Ellipse, Hyperbel und Parabel, zur Darstellung gebracht.

**) Es ist hier nur der Kegel mit einer Mantelfläche in Betracht gezogen; die zweite Mantelfläche würde entstehen, wenn die Erzeugenden über (S, S') hinaus verlängert würden.

***) Parallele Schnitte ergeben im Kegel ähnliche Figuren, wesshalb auch hier jede zur Basis parallele Ebene den Kegel nach einem Kreise schneidet.