Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

15. Darstellung eines senkrechten Kreiskegels mit schräger Schnittfläche und dessen Netzbestimmung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

Gerade $2\,R$ bildet die horizontale Trace einer den Cylinder in der Erzeugenden $(b\,2, b'\,2')$ berührenden Ebene, $R\,R'$ die horizontale Trace der Normalebene; (R, R'), wie auch (b, b') liegen daher wieder gemeinschaftlich in beiden erwähnten Ebenen, daher ist $(b, R,\ b'\,R')$ die verlangte Tangente (siehe § 141, Fig. 43). Ebenso verhält es sich mit einer Tangente, deren Horizontalprojection $T\,R''$ ist.

Darstellung eines senkrechten Kreiskegels mit schräger Schnittfläche und dessen Netzbestimmung.

Tafel XXI. Fig. I – II^a^.

§ 144. Eine Kegelfläche wird erzeugt, wenn eine Gerade als Erzeugende über eine Curve als Leitlinie sich derart fortbewegt, dass sie dabei stets durch einen ausserhalb der Linie liegenden festen Punkt geht. Denkt man sich die Erzeugende über den Punkt hinaus verlängert, so entsteht durch ihre Bewegung eine vollständige Kegelfläche mit zwei Mantelflächen, welche in dem gegebenen Punkte S (Spitze oder Scheitelpunkt) zusammenstossen (vgl. Fig. 44).

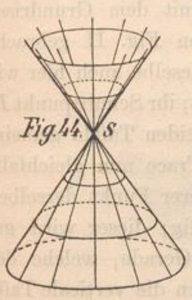


Fig. 44.

Auch die Kegelfläche kann man sich auf eine zweite Art entstanden denken, indem man nämlich die Leitende mit der Erzeugenden verwechselt, d. h. die Curve als Erzeugende über die Gerade als Leitende so hingleiten lässt, dass sie diese stets mit demselben Punkte berührt, parallel sich selbst bleibt, und in dem Verhältnisse sich verkleinert, als sie sich dem festen Punkte oder Scheitelpunkte nähert. Kegelflächen theilt man wieder in zwei Hauptgattungen, nämlich in senkrechte und schiefe Kegelflächen. Zur ersten Gattung gehört streng genommen nur die senkrechte Kreiskegelfläche oder auch Rotationskegelfläche, welche entsteht, wenn die gerade Erzeugende um eine andere Gerade als Drehungsachse rotirt, d. i. in allen Lagen zu dieser stets den gleichen Winkel am Scheitelpunkte bildet. Jede hierbei zur Drehungsachse senkrechte Ebene schneidet die Kegelfläche nach einem Kreise. Alle andern Kegelflächen heissen schief, und ausserdem je nach Gestalt der Leitlinie elliptische, spiralförmige etc.; schiefe Kegelflächen gibt es also unendlich viele, weil es unendlich viele Curven als Leitlinien geben kann.*)

§ 145. In Fig. I ist ein Kreiskegel dargestellt, welcher durch eine Ebene, die zur verticalen Tafel senkrecht und zur horizontalen unter 45° geneigt ist, geschnitten wird. Die Basis liegt in der horizontalen Tafel, die schneidende Ebene ergibt als Schnittfigur eine Ellipse, deren wahre Grösse durch Aufstellen parallel zur verticalen Tafel gefunden wurde. Man zeichne zuerst die beiden Projectionen $(a\,b\,c\,d\,e \ldots S,\ a'\,b'\,c'\,d'\,e' \ldots S')$ des Kegels**), d. h. man theile zuerst den Basiskreis in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. acht, und ziehe aus diesen Punkten und deren Verticalprojectionen die Erzeugenden $(a\,S,\ b\,S,\ c\,S,\ d\,S \ldots$ und $a'\,S',\ b'\,S',\ c'\,S',\ d'\,S' \ldots)$, bestimme sodann die schneidende Ebene, deren Tracen $R\,R'$, $1'\,R'$ sind. Die Horizontalprojection des Schnittes ergibt sich durch die Projicirenden aus $1', 2', 3', T', 4' \ldots$, auf den Erzeugenden $a\,S,\ b\,S,\ c\,S,\ d\,S \ldots$ und ist eine Ellipse, deren grosse Achse die Gerade $1\ 5$ bildet.

Da hier die Projicirenden aus $3'$ und $7'$ mit den Projectionen der Erzeugenden $(c\,S,\ g\,S)$, $(c'\,S',\ g'\,S')$ zusammenfallen, somit die Horizontalprojectionen 3 und 7 hierdurch nicht direct bestimmt werden können, so wird es nöthig, die Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ mit den darin liegenden Punkten um den Scheitelpunkt (S, S') parallel zur verticalen Tafel, etwa gegen (a, a') zu drehen (vgl. § 125, Fig. II, Taf. XVI), so dass nun die um (S, S') gedrehten Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ mit $(a\,S,\ a'\,S')$ zusammenfallen und die Punkte $3', 7'$, nach i' zu liegen kommen. Fällt man nun von i' die Projicirende, so ergibt sich i als Horizontalprojection, und diese mit den betreffenden Erzeugenden, welche wie schon gesagt, mit $(a\,S, a'\,S')$ zusammenfallen, in ihre ursprüngliche Lage nach $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$ zurückgedreht, ergibt die Punkte 3 und 7 der Horizontalprojection. Da die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ gleiche Höhe im Raume haben, so liegt 3 und 7 in dem Halbkreise, welcher aus S durch i gezeichnet wurde; oder man denke sich durch die Punkte $(3\ 7,\ 3'\ 7')$ eine Hilfsebene parallel zur Basis gelegt, welche den Kegel nach einem Kreise schneidet***), dessen linke Hälfte $(3\,i\,7,\ 3'\,i'\,7')$ ist; die Punkte $(3\,7,\ 3'\,7')$ liegen daher sowohl auf diesem Kreise, als auch auf den Erzeugenden $(c\,S,\ c'\,S')$ und $(g\,S,\ g'\,S')$. In gleicher Weise konnten auch die Punkte $T, u, 4, 6 \ldots$ der Horizontalprojection gefunden werden. Dieselben haben wie ersichtlich, je paarweise gleichen Abstand von der horizontalen Tafel. Die Punkte x und y, welche nur dazu dienen, die Ellipse genauer zeichnen zu können, wurden von der kleinen Achse $T\,u$ in gleiche Entfernung, wie 2 und 8 auf den Geraden $2\,x$ und $8\,y$ bestimmt. Um die wahre Grösse der Schnittfigur (Ellipse) zu bestimmen, errichte man

---

*) Wir haben für unsere Zwecke in diesem Werke nur den Rotationskegel mit seinen charakteristischen Schnittfiguren, Ellipse, Hyperbel und Parabel, zur Darstellung gebracht.

**) Es ist hier nur der Kegel mit einer Mantelfläche in Betracht gezogen; die zweite Mantelfläche würde entstehen, wenn die Erzeugenden über (S, S') hinaus verlängert würden.

***) Parallele Schnitte ergeben im Kegel ähnliche Figuren, wesshalb auch hier jede zur Basis parallele Ebene den Kegel nach einem Kreise schneidet.

zunächst über deren Verticalprojection $1'2'3'T'4'5'\ldots$ die Senkrechten zu dieser, zeichne ferner $1''5''$ in beliebiger Entfernung, jedoch parallel zu $1'2'3'T'\ldots$; so ist $1''5''$ gleich $1'5'$ die grosse Ellipsachse, ferner Tu der Horizontalprojection halbirt und von dem Mittelpunkte der Achse $1''5''$ nach beiden Seiten rechtwinklig angetragen, ergibt $T''u''$ gleich Tu als kleine Achse. Die übrigen Curvenpunkte ergeben sich in gleicher Weise, indem man die Abstände $2''$ und $8''$, $3''$ und $7''\ldots$ von der Achse $1''5''$ gleich den Abständen macht, welche 2 und 8, 3 und 7 von der Achse $1\,5$ in der Horizontalprojection haben.

§ 146. Wäre die Aufgabe gestellt, auf projectivem Wege die Brennpunkte der Ellipse in jeder der Projectionen, wie auch in deren Umlegung zu bestimmen, so denke man sich hierzu in jedem der Kegelabschnitte, welche hier durch die schneidende Ebene zu beiden Seiten derselben, d. i. oben und unten entstanden sind, je eine Kugel gelegt, welche sowohl die Kegelfläche, und zwar nach Kreisen, wie auch die schneidende Ebene berühren. Diese letzteren Berührungspunkte F, F'' sind dann die Brennpunkte der Schnittfigur*) (Ellipse). Die Verticalprojectionen solcher Kugeln bilden Kreise, welche geometrisch betrachtet, die Seiten $S'1'$, $1'5'$, $5'S'$ und $a'1'$, $1'5$, $5'e'$ berühren. Die Brennpunkte F''', F^4 ergeben sich in der aufgestellten Ellipse auf deren grosser Achse mittelst der Projicirenden aus F, F''.

§ 147. Fig. II zeigt denselben Kegel mit der gleichen schrägen Schnittfläche, jedoch in einer solchen Stellung, dass die schneidende Ebene nunmehr schief zu beiden Tafeln ist und ihre beiden Tracen RnR' und $R''v'o$ schief zur Projectionsachse stehen und in $R'(R'')$ zusammentreffen.*)

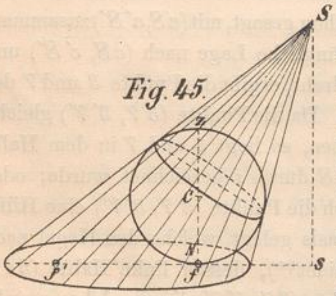
Die Projectionen der Fig. II wurden ausgeführt, indem man zuerst den Grundriss der Fig. I in die Lage des Grundrisses von Fig. II brachte, ferner die Verticalprojectionen der Erzeugenden (aS, bS, $cS\ldots$ in $a'S'$, $b'S'$, $c'S'\ldots$) bestimmte (und zwar (S, S') in gleicher Höhe wie in Fig. I) und sodann mittelst der wagrechten Projicirenden aus $1'2'3'4'\ldots$ der Fig. I, auf den Erzeugenden $a'S'$, $b'S'$, $c'S'$, $d'S'\ldots$ die entsprechenden Punkte $1'$, $2'$, $3'$, $4'\ldots$ abschnitt. Die horizontale Trace RnR' wurde mit dem Grundrisse ebenfalls in die schiefe Lage von Fig. II gebracht (en Fig. II $= en$ Fig. I), so dass dieselbe auch hier wie in Fig. I rechtwinklig zu Sen steht; ihr Schnittpunkt R' mit der Projectionsachse gehört beiden Tafeln gemeinschaftlich an. Soll die verticale Trace nun gleichfalls bestimmt werden, so ist ein weiterer Punkt derselben in der verticalen Tafel nothwendig; dieser wird gefunden, indem man irgend eine Gerade, welche der schneidenden Ebene angehört, gegen die verticale Tafel verlängert und ihren Durchschnittspunkt mit derselben bestimmt. Zeichnet man z. B. durch den Mittelpunkt der Schnittfigur, etwa im Grundrisse, zuerst eine Parallele zu RnR', deren Schnitt mit der Achse, d. i. mit der verticalen Tafel v ist, ebenso deren Verticalprojection, welche aus dem Mittelpunkte der Schnittfigur parallel zur Projectionsachse ist, so ergibt sich (v, v') als ein zweiter Punkt und $R''v'$ ist die verticale Trace.

§ 148. Das Netz des ganzen oder abgestumpften Kegels konnte hier aus jeder der Projectionen Fig. I oder II abgeleitet werden. Fig. I eignet sich jedoch hierzu besser. Die Bestimmung des Netzes ist ähnlich wie bei der Pyramide, indem der Kegel als eine Pyramide mit unendlich vielen und kleinen Seiten betrachtet werden kann. Zwei sehr nahe liegende Erzeugende bilden nämlich, ähnlich wie bei dem Cylinder, ein ebenes Flächenelement, wodurch der Kegel ebenso wie der Cylinder in eine Ebene ausgebreitet werden kann. Man zeichne hierzu mit der wahren Länge einer

---

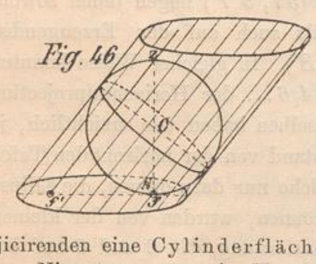
*) Wie schon früher in § 69 angedeutet worden ist, kann eine Ellipse als die Projection einer Kugel oder eines Kreises betrachtet werden. Es kann sowohl die Central- wie auch die Parallelprojection einer Kugel oder eines Kreises eine Ellipse bilden, soferne die Projicirenden schief gegen die Projectionsebene fallen.

Fig. 45.



Bei der centralen Projection einer Kugel oder eines Kreises gegen eine Ebene bilden die Projicirenden, deren Scheitelpunkt das Projectionscentrum ist (siehe Fig. 45), eine Kegelfläche. Bei der Parallelprojection einer Kugel oder eines Kreises bilden die Projicirenden eine Cylinderfläche (siehe Fig. 46).

Fig. 46.



Nimmt man nun eine Kugel als den zu projicirenden Körper an, so wird in beiden Fällen die Kugel von den Projicirenden nach einem Kreise berührt werden (vgl. Fig. 45 mit 46), und es ist gleich, ob wir nun sagen, die Ellipse ist die Projection dieses Kreises oder der Kugel. Die Brennpunkte jedoch sind Projectionen derjenigen beiden Kugelpunkte (z, n), welche von der Projectionsebene die grösste und kleinste Entfernung haben (Zenith und Nadir).

Man könnte die Ellipse als den Schatten der Kugel und die Projicirenden als die Lichtstrahlen betrachten.

*) Die Aufgabe hätte man auch bei Prisma, Pyramide und Cylinder stellen können, was dort jedoch unterblieben ist. Für denjenigen, welcher sich dafür interessirt, dürfte es nicht schwer sein, das hier Gesagte auch auf jene Beispiele anzuwenden.

Erzeugenden*) als Radius aus S in Fig. II einen Kreisbogen, trage auf diesen die Bogentheile ab, bc, cd . . . aus Fig. I über und ziehe aus den so erhaltenen Theilpunkten a, b, c, d . . . die Geraden nach S, trage ferner auf aS von a aus die wahre Länge von ($a1$, $a'1'$), d. i. $a'1'$ und ebenso von b aus die wahre Länge von (bS, $b'S'$) u. s. w. an und verbinde $6, 7, 8, 1, 2$ . . . durch eine stetige Curve; $f6$ ist hierbei die Trennungslinie der Mantelfläche. Da hier das Netz des abgestumpften Kegels als wirklich bestehend gedacht ist, so ist ausser der Basisfläche auch noch die Schnittfigur an die Curve oben anzulegen.

Angenommen, es solle die Schnittfigur mit einem Scheitelpunkte (T, T') den Mantelumriss berühren, so ist die Aufgabe ähnlich wie in Fig. I und II, Taf. XX zu lösen (vgl. Fig. 47).

Man lege nämlich durch (T, T') in Fig. I eine tangirende Ebene an die Kegelfläche, welche dieselbe

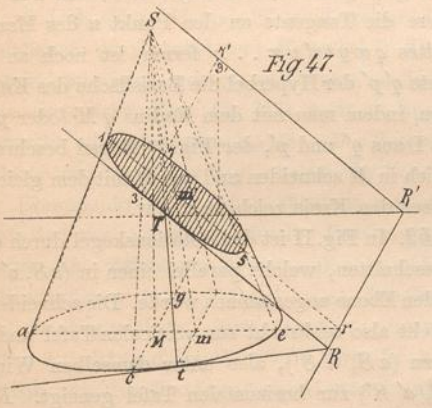


Fig. 47.

nach der Erzeugenden (tTS, $t'T'S'$) berührt und deren horizontale Trace die Kreistangente tR ist und verbinde T mit R. (Die Verticalprojection $T'R'$ dieser Tangente fällt mit der gleichen Projection der schneidenden Ebene zusammen.) Ferner trage man den Punkt t aus Fig. I nach t in Fig. II^a in gleicher Ordnung über und lege durch t die Kreistangente tR, mache tR in Fig. II^a gleich tR in Fig. I und verbinde T mit R, so ist lestztere die verlangte Tangente an den Punkt T der abgewickelten Mantelfläche. Zu dieser Tangente steht die kleine Achse Tu ($= T''u''$ in Fig. I) senkrecht u. s. w. Die Ellipse wurde hier mittels ihrer Brennpunkte F, F' gezeichnet (siehe Fig. V, Tafel VI).

Eine beliebige zweite Tangente ($6R$, $6'R'$), wie auch deren geometrische Lage $6''s'r'$ konnte ebenso gefunden werden.

$R'R'''r'n'$ ist die parallel zur verticalen Tafel aufgestellte horizontale Trace der schneidenden Ebene, in welcher $n'r'$ gleich nR der Horizontalprojection gemacht wurde. Ebenso ist $n'R'''$ gleich nR, und $T''R'''$ die Tangente an den Scheitelpunkt T'' der aufgestellten Ellipse (vgl. Fig. I, Tafel XX).

In gleicher Weise wurde auch in Fig. II an Punkt (T, T'), welcher mit (7, $7'$) identisch ist, eine Tangente gelegt; gR ist hier die Trace der berührenden, RnR' die Trace der schneidenden Ebene, (R, R') und (T, T') Punkte, welche beiden Ebenen gemeinschaftlich angehören, somit (TR, $T'R'$) eine Tangente (vgl. Fig. 47).

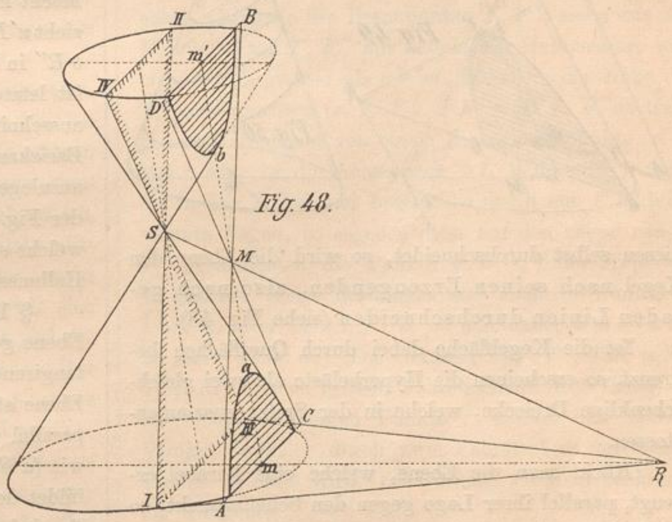


Fig. 48.

Darstellung des Kegels mit den Kegelschnittlinien Hyperbel und Parabel und Netzbestimmung des ersten Kegels.

Tafel XXII. Figur I—II^a.

§ 149. Unter den sog. Kegelschnittlinien versteht man die schon früher erwähnte Ellipse, ferner die Hyperbel und Parabel. Die Ellipse entsteht, wenn die schneidende Ebene sämmtliche Erzeugende eines Kreiskegels durchschneidet (siehe Fig. I und II, Tafel XXI). Liegt eine Ebene so, dass sie alle Erzeugenden unter gleichen Winkeln durchschneidet, so wird dadurch ein Kreis erzeugt; der Kreis kann somit als eine specielle Art von Ellipse betrachtet werden, wobei die beiden Brennpunkte im Centrum zusammenfallen. Der Schnitt einer Rotationskegelfläche und einer Ebene, welcher parallel ist der Drehungsachse, oder allgemeiner ausgedrückt, welcher auch den zweiten Mantel des Kegels durchschneidet, ist eine Hyperbel (vergl. Fig. 48). Die

*) Da hier alle Erzeugenden in der Wirklichkeit gleiche Länge haben, $a'S'$ aber parallel zur verticalen Tafel ist, so repräsentirt $a'S'$ mit den darauf liegenden Punkten l', k', i' . . . sowohl die wahre Länge sämmtlicher Erzeugenden (aS, $a'S'$), (bS, $b'S'$) u. s. w., wie auch die wahren Längen der einzelnen Abschnitte ($a1$, $a'1'$), ($b2$, $b'2'$), ($c3$, $c'3'$) . . . auf denselben, so dass z. B. $a'i'$ die wahre Grösse von ($c3$, $c'3'$) ist u. s. w.