UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

# Das projective Zeichnen

**Kleiber, Max**

**Stuttgart, [1886]**

17. Darstellung der Kugel und ihrer Schnitte.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

Visual Library

Hyperbel, wie leicht ersichtlich, gleichfalls bestimmt und das Resultat dasselbe gewesen.*)

## Darstellung der Kugel und ihrer Schnitte.

Tafel XXIII. Fig. I—IV.

§ 155. Die Kugelfläche gehört ebenso wie Kreiscylinder und Kreiskegel zu den Rotationsflächen**), und entsteht, wenn ein Kreis um seinen Durchmesser rotirt. Der Kreis ist also die Erzeugende, der Durchmesser die Drehungsachse. Die verschiedenen aufeinanderfolgenden Lagen, welche der erzeugende Kreis während der Drehung einnehmen kann, heissen die Meridiane, die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Erzeugenden beschrieben werden, Parallelkreise. (Ueber weitere Umdrehungsflächen siehe § 161.) Die orthogonalen Projectionen einer Kugel stellen sich stets als grösste Kugelkreise dar, da die projicirenden Cylinderflächen dieselben nach einem grössten Kreise berühren. Jeder ebene Schnitt einer Kugel ist ein Kreis.

§ 156. Fig. I zeigt die beiden Projectionen einer Kugel, welche durch zwei Ebenen geschnitten wird, von welchen die eine senkrecht zur verticalen und parallel zur horizontalen Tafel, die andere umgekehrt, senkrecht zur horizontalen und parallel zur verticalen Tafel ist. Die Schnitte projiciren sich, da sie je parallel zu einer Tafel sind, in diesen als geometrische Kreise, in den anderen als Gerade. Ein ebener Kugelschnitt ($abcd$, $a'b'c'd'$), welcher durch die Mitte der Kugel parallel zur horizontalen Tafel gelegt wird, fällt in $abcd$ mit dem Umfang der Horizontalprojection zusammen, und umgekehrt: ein grösster Kugelschnitt ($aecf$, $a'e'c'f'$), dessen Lage mit der verticalen Tafel parallel ist, projicirt sich in dieser ebenfalls als Kugelumfang. Angenommen, es sei $I$ ein in der Horizontalprojection zuerst bestimmter Punkt auf der Kugelfläche, so wird man seine Verticalprojection dadurch erhalten, dass man durch $I$ eine, etwa zur verticalen Tafel parallele Hilfsebene legt, deren Schnitt im Aufriss sich als ein geometrischer Kreis projicirt. Zieht man nun aus $I$ die Projicirende hinauf, so schneidet diese den Kreis in zwei Punkten und $I'$ liegt, je nachdem man sich den Punkt auf der untern oder obern Kugelhälfte denkt, oben oder unten in der Kreislinie. Nimmt man, wie in vorliegender Zeichnung, den Punkt auf der obern Kugelhälfte an, so bestimmt sich die Verticalprojection von $I$ in $I'$ oben. Ebenso hätte man $I'$ auch finden können, indem man durch ($I$, $I'$) die Hilfsebene sich parallel zur horizontalen Tafel gelegt dachte, d. h. aus $m$ mit einem Halbmesser $mI$ einen Kreis beschrieb und diesen in der Verticalprojection verzeichnete; seine Projection ist dann die durch $I'$ gehende wagrechte Gerade u. s. w. ($II$, $II'$) und ($III$, $III'$) sind weitere Projectionen zweier Punkte, wobei ($II$, $II'$) auf dem zur verticalen Tafel parallelen und grössten Kreise oder Meridian und ($III$, $III'$) auf dem zur horizontalen Tafel parallelen und grössten Kreise (Parallelkreis oder Aequator) liegt.

Eine durch das Kugelcentrum gehende und zu beiden Tafeln senkrechte Ebene schneidet die Kugel nach einem grössten Kreise, dessen Projectionen ($debf$, $d'e'b'f'$) sich je als eine Senkrechte zur Projectionsachse darstellen und deren Längen gleich dem Kugeldurchmesser sind.

Die Kreisebenen, deren Projectionen ($abcd$, $a'b'c'd'$), ($aecf$, $a'e'c'f'$) und ($edfb$, $e'd'f'b'$) sind, stehen senkrecht zu einander und schneiden sich je paarweise nach einem Durchmesser.

§ 157. In Fig. II sind zunächst wieder die Projectionen jener senkrecht zu einander stehenden grössten Kreise ($abcd$, $a'b'c'd'$), ($aecf$, $a'e'c'f'$) und ($edfb$, $e'd'f'b'$) bestimmt worden.*)

Man betrachte $e'h'i'g'$ als die zuerst gegebene Verticalprojection eines Kugelschnittes, dessen Lage senkrecht zur verticalen und schief zur horizontalen Tafel ist. Seine Horizontalprojection gestaltet sich zu einer Ellipse $ehig$, deren grosse Achse $hng$ gleich $i'n'e'$ der Verticalprojection, und deren kleine Achse $ine$ mittels der Projicirenden aus $i'$ und $e'$ gefunden wurde.**) Eine aus dem Kugelcentrum gegen die Kreisebene gefällte Senkrechte schneidet die Kreisebene in ihrem Mittelpunkte ($n$, $n'$), bildet also ein Mittelloth zu derselben. Sollten auf projectivem Wege für die Horizontalprojection mehrere Curvenpunkte gefunden werden, so brauchte man nur mehrere Hilfsebenen oder Kugelschnitte etwa parallel zur horizontalen Tafel

---

*) Die schiefe Projection Fig. 48 veranschaulicht die Ableitung der Asymptoten auf projectivem Wege. Denkt man sich nämlich durch den Scheitelpunkt $S$ des Kegels eine zur Hyperbel parallele Ebene, so schneidet diese, wie schon erwähnt, denselben nach den Erzeugenden $I\,II$, $III\,IV$; legt man ferner an diese Erzeugenden tangirende Ebenen (deren horizontale Tracen $IR$, $III\,R$ sind), so schneiden letztere die Ebene der Hyperbel nach den als Asymptoten sich darstellenden Geraden $AB$, $CD$, sowie sich selbst nach der Geraden $SMR$.

**) Eine Rotationsfläche überhaupt wird erzeugt, indem sich irgend eine Linie als Erzeugende um eine feste Gerade als Achse dreht, und zwar so, dass jeder Punkt der Erzeugenden einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Achse steht. Die Erzeugende heisst dabei in ihren verschiedenen Lagen ein Meridian, und die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Erzeugenden beschrieben werden, heissen Parallelkreise. Die Erzeugenden von Rotationscylinder- und Kegelfläche könnten somit ebenfalls als Meridiane bezeichnet werden; doch ist diese Bezeichnung hierfür nicht üblich.

*) Diese drei grössten Kreise sind bei allen Kugelprojectionen gleich anfänglich zu bestimmen.

**) Diese Ellipse könnte nun auch, nachdem die Achsen gefunden sind, nach der in § 72, Fig. III Tafel VI, angegebenen Methode gezeichnet werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zu zeichnen und die Durchschnitte derselben mit dem schiefen Kugelschnitt aus der verticalen in die horizontale Projection zu tragen, um so eine Anzahl von Curvenpunkten der Ellipse zu erhalten.

Von besonderer Wichtigkeit sind hierbei die Uebergangspunkte der Kreislinie von der oberen zur unteren Kugelhälfte. Solche sind $(t,\ u,\ t',\ u')$, welche auf dem grössten horizontalen Kreise $(a\,b\,c\,d,\ a'b'c'd')$ liegen, somit in der horizontalen Projection $t,\ u$ jene Punkte sind, in welchen die Kreisprojection (Ellipse) den Kugelumfang berührt. Ein zweiter Kugelschnitt, dessen Ebene senkrecht zur horizontalen und schief zur verticalen Tafel steht, bildet die gleiche Aufgabe, wie vorhin; man wende nur die Zeichnung und betrachte für einen Augenblick die horizontale Projection als die verticale u. s. w. Der Halbkreis $b\,l''p$ ist die geometrische Hälfte dieses Kreises, welcher um den Durchmesser $(b\,p,\ b'p')$, also parallel zur horizontalen Tafel gelegt wurde. Die Kugelabschnitte, welche hier links und rechts der schneidenden Ebenen liegen, dachte man sich weggenommen, so dass die Schnittflächen selbst sichtbar werden.*)

Fig. III zeigt die Eintheilung einer Kugel in Meridiankreise, deren Abstände $(a\,b\,c\,d\ldots a'b'c'd'\ldots)$ auf dem grössten Polarkreise gleiche sind, deren Ebenen also der Reihe nach gleiche Winkel zu einander bilden, sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser, dessen Projectionen $(P,\ P'P'')$ sind, schneiden und sämmtlich zur horizontalen Tafel senkrecht stehen.

Die Parallelkreise $(n\,1\,3\,5\ldots n'1'3'5'\ldots)$, $(o\,2\,4\,6\ldots o'2'4'6'\ldots)$ etc. wurden auf der Kugelfläche in gleichen Abständen $(a'n' = n'o' = o'P' = a'v'\ldots)$ angenommen und können zugleich als die Hilfskreise für die Ausführung der Meridiane in der Verticalprojection betrachtet werden. Die Eintheilung der Kugel ist dieselbe wie bei einem Erdglobus, indem die Entfernung der Parallelkreise voneinander je $30^0$ beträgt und jeder derselben durch die Meridiane in Bögen von je $30^0$ zerlegt wird. Der grösste Parallelkreis, dessen Projectionen $(abcde\ldots a'b'c'd'e'\ldots)$ sind, kann als der Aequator, die Schnittpunkte $(P,\ P'P'')$ der Meridiane als die Pole betrachtet werden. Je zwei zur verticalen Tafel symmetrisch liegende Meridiane, deren horizontale Projectionen z. B. $cPi$, $ePl$ und $bPh$, $fPm$ sind, bilden in der Verticalprojection je eine Ellipse; $a\,n\,o\,P\,q\,r\ldots$, dessen Verticalprojection $a'n'o'P'q'\ldots$ sich als Kugelumriss darstellt, könnte als der Hauptmeridian bezeichnet werden. Die weitere Ausführung ist nach dem Gesagten aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

Sollte an irgend einen Punkt $(T,\ T')$ eines Meridiankreises eine Tangente gelegt werden, so hätte man sich diesen Meridian zuerst um seine Polarachse $(P,\ P'P'')$ parallel zur verticalen Tafel gedreht zu denken, so dass Punkt $(T,\ T')$ auf demselben etwa nach $(r,\ r')$ zu liegen kommt. An $r'$ lege man sodann die Kreistangente $r'R''$*), fälle aus $R''$ die Projicirende herab, bis sie die nach rechts verlängerte Gerade $Pg$ der Horizontalprojection schneidet**), drehe diesen Schnittpunkt um $P$ nach $R$ und errichte in $R$ die Projicirende, so ergibt sich $R'$ als Verticalprojection, und $T'$ mit $R'$ durch eine Gerade verbunden, ist die Verticalprojection der verlangten Tangente.

Da eine Kreistangente in der Verlängerung der Kreisebene liegt, so fällt demnach ihre Horizontalprojection mit der Verlängerung der Kreisebene $l\,P\,T\,e$ der gleichen Projection zusammen. Da ferner alle Meridiankreise sich in einem gemeinschaftlichen Durchmesser, d. i. in der Polarachse schneiden, so müssen auch alle Tangenten, welche die Meridiankreise in den Kreuzungspunkten des Parallelkreises, d. i. in $(n,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7\ldots,\ n',\ 1',\ 3',\ 5',\ 7'\ldots)$ berühren, einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt in der verlängerten Polarachse haben. Die Verticalprojectionen $R'T'$, $R''r'$ der Tangenten schneiden sich also, wenn genügend verlängert, oberhalb $P'$ in einem Punkte der Polarachse.

Eine an den Parallelkreis durch den gleichen Punkt $(T,\ T')$ gelegte Tangente $(w\,T,\ w'\,T')$ stellt sich in der Horizontalprojection als Kreistangente $w\,T$ in der Verticalprojection als die Gerade $w'\,T'$ dar, welch letztere, wie aus der Zeichnung ersichtlich, mit der gleichen Projection des Kreises, also mit $n'1'3'5'7'9'\ldots$ zusammenfällt. Die Geraden $(T\,R,\ T'R')$, $(w\,T,\ w'\,T')$ bilden auch Tangenten an den Punkt $(T,\ T')$ der Kugelfläche, und da beide Gerade sich in $(T,\ T')$ schneiden, damit auch zugleich nach § 108 eine die Kugel in $(T,\ T')$ berührende Ebene.***)

§ 158. Die beiden Projectionen Fig. IV zeigen dieselbe Kugeleintheilung, jedoch bei veränderter Lage der Kugel. Die Kugel ist so gedreht worden, dass die gleichen Parallel- und Meridiankreise ihre relative Lage zur verticalen Tafel, wie in Fig. III, beibehalten haben, so dass also die Polarachse $(P\,P'',\ P'P''')$ wie in Fig. III, parallel zur verticalen Tafel geblieben, jedoch zur horizontalen unter irgend einem Winkel, z. B. von $45^0$, geneigt ist.

In Folge dieser Stellung projiciren sich die Parallel- und Meridiankreise der Verticalprojection Fig. IV genau so, wie in Fig. III†); ihre Horizontalprojectionen er-

*) Aehnliches ist auch bei Fig. I geschehen.

*) $R''$ ist der Schnittpunkt der Tangente mit der horizontalen Tafel.

**) Diese Verlängerung ist hier nicht angegeben, da sie in den Grundriss der Fig. IV fallen würde.

***) Deren Tracen könnten nach der in § 113 erwähnten Methode unschwer gefunden werden.

†) Die Verticalprojection von Fig. III ist also lediglich in die Lage von Fig. IV zu bringen. Uebrigens hätte man auch ohne Fig. III die Eintheilung der Verticalprojection Fig. IV zeichnen können. Man brauchte hierzu

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

scheinen dagegen mit Ausnahme des Hauptmeridianes ($PtgP''$ . . ., $P't'g'P'''$ . . .) als Ellipsen. Die Kreuzungspunkte derselben, d. i. der Meridian- und Parallelkreise, könnten (soferne man die Horizontalprojection von Fig. III hierzu benützen will) mittels der Projicirenden aus den entsprechend gleichbenannten Punkten der Horizontalprojection Fig. III und der Verticalprojection Fig. IV gefunden werden. So z. B. würde eine zur Projectionsachse parallele Gerade aus $f$ (Fig. III) und die projicirende Gerade aus $f'$ (Fig. IV) den Punkt $f$ in der Horizontalprojection der Fig. IV ergeben, u. s. w. Ist jedoch, wie wir annehmen wollen, die Fig. III nicht vorhanden und sollte Fig. IV unabhängig von dieser ausgeführt werden, so wären, nachdem einmal die Verticalprojection von Fig. IV mit den Parallel- und Meridiankreisen gegeben ist (siehe Anmerkung zu § 158), die Horizontalprojectionen derselben auf folgende Weise zu erhalten:

Man trage, nachdem der Hauptmeridian, Polarachse und Kugelumfang in der Horizontalprojection bestimmt sind, die Abschnitte auf dem Durchmesser $a'M'g'$, nämlich $M'c'$, $c'b'$, $b'a'$ (oder $M'e'$, $e'f'$, $f'g'$) von $M$ in der Horizontalprojection nach beiden Seiten auf den Durchmesser $dk$ in $M1$, $1\,2$, $2k$ und $M1''$, $1''2''$, $2''d''$ an, so dass also $dk$ durch $2''$, $1''$, $M$, $1$, $2$ gerade so getheilt ist, wie $a'M'g'$, geometrisch betrachtet, durch die Meridiane; ziehe sodann durch $2, 1, 1'', 2''$ Parallele zur Projectionsachse, und fälle aus $a', g'$, sowie den hier je paarweise hinter einander liegenden Punkten $b'$, $m'$, $c'$, $l'$ . . . die Projicirenden, so ergeben sich in der Horizontalprojection $a$ und $g$ auf dem Hauptmeridian, sowie auf den vorher durch $1, 1''$ und $2, 2''$ gezeichneten Geraden die Punkte $m$ und $b$, $l$ und $c$, $i$ und $e$ . . . u. s. w. Diese sind zugleich Hilfspunkte für die Horizontalprojection des Aequators, wie auch Kreuzungspunkte der Meridiane auf demselben.*)

z. B. nur den Viertelskreis $a'ABP'''$ für einen Moment als Grundriss zu betrachten, denselben in drei gleiche Theile $a'A$, $AB$, $BP'''$ zu theilen, aus diesen Theilpunkten die Projicirenden $Ab'$ $Bc'$ . . . rechtwinklig gegen den grössten Parallelkreis (Aequator) zu ziehen, um in Fig. IV $d'c'$, $c'b'$, $b'a'$ gleich $d'c'$, $c'b'$, $b'a'$ in Fig. III zu erhalten. Da nun die Parallelkreise sich als Gerade projiciren und dieselben geometrisch betrachtet durch die Ellipsen in demselben Verhältnisse getheilt werden wie der Aequator, so dürfte es nach §§ 39, 40 und 41 nicht schwer sein, auch die weiteren Ellipspunkte auf den Parallelkreisen zu finden. Ist einmal die links von $P'P'''$ liegende Halbkugel eingetheilt, so braucht man diese Eintheilung nur auf die andere Seite von $P'P'''$ überzutragen u. s. w.

*) Da hier die Polarachse ($PP''$, $P'P'''$) zur horizontalen Tafel unter 45° geneigt ist, so fällt damit, wie ersichtlich, die Horizontalprojection des Meridiankreises ($PdP''k$, $P'd'P'''k'$) mit derselben Projection des Aequators in eine Ellipse zusammen, die Horizontalprojectionen $PdP''k$. . . und $adgk$. . . bilden also eine und dieselbe Ellipse.

In gleicher Weise konnten die übrigen Punkte der Parallel- und Meridiankreise, z. B. die Horizontalprojection von $n'o'p'q'r'$ . . . gefunden werden. Man mache nämlich auch hier wieder die Entfernungen, welche $I, II, m$ und $I'', II'', q$ von dem Hauptmeridiane $PP''$ haben, gleich den Entfernungen $q'r'$, $q's'$, $q't'$ (oder $q'p'$, $q'o'$, $q'n'$), ziehe durch $II, I, I'', II''$ parallele Gerade zur Projectionsachse und aus $n', o', p', q', r', s', t'$*) die Projicirenden nach abwärts, so ergeben sich auf diese Weise abermals zwölf Punkte, deren vordere Hälfte hier mit $n, o, p, q, r, s, t$ bezeichnet ist u. s. w. Das hier angewendete Verfahren wird erklärlich, wenn man sich die vordere Hälfte des obern Parallelkreises mit seinen daraufliegenden Meridianpunkten ($o, p, q, r, s$, $o', p', q', r', s'$) um seinen Durchmesser ($nt$, $n't'$) parallel zur verticalen Tafel aufgestellt denkt. Hierbei wird man nun finden, dass wenn in der aufgestellten geometrischen Figur $n'o''p''q''r''s''t'$ je zwei gegenüberliegende Punkte $o'', s''$, $p'', r''$ durch Sehnen verbunden werden, diese den Halbmesser $q'q''$ des aufgestellten Halkkreises in demselben Verhältnisse theilen, wie der Halbmesser $q't'$ (oder $q'n'$) durch die Meridiane getheilt wird, dass also $q'I'$ gleich $q'r'$, $I'II$ gleich $r's'$ u. s. w. ist; ebenso sind $o'o''$, $s's''$ und $p'p''$, $r'r''$ gleich $q'I'$ und $q'II'$. Denkt man sich nun die Strecken $o'o''$, $p'p''$, $q'q''$ . . . räumlich und perpendiculär über $o', p', q'$ . . . als die Abstände, welche diese Punkte von dem Kreisdurchmesser ($nt$, $n't'$) haben, so sind dieselben als Sehnen betrachtet gemäss ihrer Lage parallel zur horizontalen Tafel und projiciren sich daher in dieser nach ihrer wahren Grösse. Also ist die Entfernung ($q, q'$) von der Ebene des Hauptmeridianes gleich $q'q''$, aber auch gleich $q't'$ (oder $q'n'$), die Entfernung ($p, p'$) und ($r, r'$) . . . von derselben gleich $p'p''$, $r'r''$, aber auch gleich $q's'$ (oder $q'o'$) u. s. w.

Diejenigen Parallelkreise, welche je paarweise von gleicher Grösse sind, erscheinen auch in ihren Horizontalprojectionen als congruente Ellipsen.

## Darstellung und Entwickelung der Kugel.

Tafel XXIV. Figur I—IV.

§ 159. In Fig. I sind die beiden Projectionen einer Kugel nebst der gleichmässigen Eintheilung in Parallel- und Meridiankreise ähnlich wie in Fig. III, Taf. XXIII gegeben, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Zahl der Parallel- und Meridiankreise um je zwei vermehrt wurde.

*) Die mit $o', p', q', r', s'$ in der Verticalprojection zusammenfallenden und auf der Rückseite der Kugel liegenden Punkte sind hier nicht mehr mit Buchstaben bezeichnet.