Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

18. Darstellung und Abwicklung der Kugel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

scheinen dagegen mit Ausnahme des Hauptmeridianes ($P t g P'' \ldots$, $P' t' g' P''' \ldots$) als Ellipsen. Die Kreuzungspunkte derselben, d. i. der Meridian- und Parallelkreise, könnten (soferne man die Horizontalprojection von Fig. III hierzu benützen will) mittels der Projicirenden aus den entsprechend gleichbenannten Punkten der Horizontalprojection Fig. III und der Verticalprojection Fig. IV gefunden werden. So z. B. würde eine zur Projectionsachse parallele Gerade aus f (Fig. III) und die projicirende Gerade aus f' (Fig. IV) den Punkt f in der Horizontalprojection der Fig. IV ergeben, u. s. w. Ist jedoch, wie wir annehmen wollen, die Fig. III nicht vorhanden und sollte Fig. IV unabhängig von dieser ausgeführt werden, so wären, nachdem einmal die Verticalprojection von Fig. IV mit den Parallel- und Meridiankreisen gegeben ist (siehe Anmerkung zu § 158), die Horizontalprojectionen derselben auf folgende Weise zu erhalten:

Man trage, nachdem der Hauptmeridian, Polarachse und Kugelumfang in der Horizontalprojection bestimmt sind, die Abschnitte auf dem Durchmesser $a' M' g'$, nämlich $M' c'$, $c' b'$, $b' a'$ (oder $M' e'$, $e' f'$, $f' g'$) von M in der Horizontalprojection nach beiden Seiten auf den Durchmesser $d k$ in $M 1$, $1\, 2$, $2\, k$ und $M 1''$, $1'' 2''$, $2'' d''$ an, so dass also $d k$ durch $2''$, $1''$, M, 1, 2 gerade so getheilt ist, wie $a' M' g'$, geometrisch betrachtet, durch die Meridiane; ziehe sodann durch $2, 1, 1'', 2''$ Parallele zur Projectionsachse, und fälle aus a', g', sowie den hier je paarweise hinter einander liegenden Punkten b', m', c', $l' \ldots$ die Projicirenden, so ergeben sich in der Horizontalprojection a und g auf dem Hauptmeridian, sowie auf den vorher durch $1, 1''$ und $2, 2''$ gezeichneten Geraden die Punkte m und b, l und c, i und $e \ldots$ u. s. w. Diese sind zugleich Hilfspunkte für die Horizontalprojection des Aequators, wie auch Kreuzungspunkte der Meridiane auf demselben.*)

z. B. nur den Viertelskreis $a' A B P'''$ für einen Moment als Grundriss zu betrachten, denselben in drei gleiche Theile $a' A$, $A B$, $B P'''$ zu theilen, aus diesen Theilpunkten die Projicirenden $A b'$ $B c' \ldots$ rechtwinklig gegen den grössten Parallelkreis (Aequator) zu ziehen, um in Fig. IV $d' c'$, $c' b'$, $b' a'$ gleich $d' c'$, $c' b'$, $b' a'$ in Fig. III zu erhalten. Da nun die Parallelkreise sich als Gerade projiciren und dieselben geometrisch betrachtet durch die Ellipsen in demselben Verhältnisse getheilt werden wie der Aequator, so dürfte es nach §§ 39, 40 und 41 nicht schwer sein, auch die weiteren Ellipspunkte auf den Parallelkreisen zu finden. Ist einmal die links von $P' P'''$ liegende Halbkugel eingetheilt, so braucht man diese Eintheilung nur auf die andere Seite von $P' P'''$ überzutragen u. s. w.

*) Da hier die Polarachse ($P P''$, $P' P'''$) zur horizontalen Tafel unter 45° geneigt ist, so fällt damit, wie ersichtlich, die Horizontalprojection des Meridiankreises ($P d P'' k$, $P' d' P''' k'$) mit derselben Projection des Aequators in eine Ellipse zusammen, die Horizontalprojectionen $P d P'' k \ldots$ und $a d g k \ldots$ bilden also eine und dieselbe Ellipse.

In gleicher Weise konnten die übrigen Punkte der Parallel- und Meridiankreise, z. B. die Horizontalprojection von $n' o' p' q' r' \ldots$ gefunden werden. Man mache nämlich auch hier wieder die Entfernungen, welche I, II, m und I'', II'', q von dem Hauptmeridiane $P P''$ haben, gleich den Entfernungen $q' r'$, $q' s'$, $q' t'$ (oder $q' p'$, $q' o'$, $q' n'$), ziehe durch II, I, I'', II'' parallele Gerade zur Projectionsachse und aus $n', o', p', q', r', s', t'$*) die Projicirenden nach abwärts, so ergeben sich auf diese Weise abermals zwölf Punkte, deren vordere Hälfte hier mit n, o, p, q, r, s, t bezeichnet ist u. s. w. Das hier angewendete Verfahren wird erklärlich, wenn man sich die vordere Hälfte des obern Parallelkreises mit seinen darauf liegenden Meridianpunkten (o, p, q, r, s, o', p', q', r', s') um seinen Durchmesser ($n t$, $n' t'$) parallel zur verticalen Tafel aufgestellt denkt. Hierbei wird man nun finden, dass wenn in der aufgestellten geometrischen Figur $n' o'' p'' q'' r'' s'' t'$ je zwei gegenüberliegende Punkte o'', s'', p'', r'' durch Sehnen verbunden werden, diese den Halbmesser $q' q''$ des aufgestellten Halkkreises in demselben Verhältnisse theilen, wie der Halbmesser $q' t'$ (oder $q' n'$) durch die Meridiane getheilt wird, dass also $q' I'$ gleich $q' r'$, $I' II$ gleich $r' s'$ u. s. w. ist; ebenso sind $o' o''$, $s' s''$ und $p' p''$, $r' r''$ gleich $q' I'$ und $q' II'$. Denkt man sich nun die Strecken $o' o''$, $p' p''$, $q' q'' \ldots$ räumlich und perpendiculär über $o', p', q' \ldots$ als die Abstände, welche diese Punkte von dem Kreisdurchmesser ($n t$, $n' t'$) haben, so sind dieselben als Sehnen betrachtet gemäss ihrer Lage parallel zur horizontalen Tafel und projiciren sich daher in dieser nach ihrer wahren Grösse. Also ist die Entfernung (q, q') von der Ebene des Hauptmeridianes gleich $q' q''$, aber auch gleich $q' t'$ (oder $q' n'$), die Entfernung (p, p') und (r, r')... von derselben gleich $p' p''$, $r' r''$, aber auch gleich $q' s'$ (oder $q' o'$) u. s. w.

Diejenigen Parallelkreise, welche je paarweise von gleicher Grösse sind, erscheinen auch in ihren Horizontalprojectionen als congruente Ellipsen.

Darstellung und Entwickelung der Kugel.

Tafel XXIV. Figur I—IV.

§ 159. In Fig. I sind die beiden Projectionen einer Kugel nebst der gleichmässigen Eintheilung in Parallel- und Meridiankreise ähnlich wie in Fig. III, Taf. XXIII gegeben, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Zahl der Parallel- und Meridiankreise um je zwei vermehrt wurde.

*) Die mit o', p', q', r', s' in der Verticalprojection zusammenfallenden und auf der Rückseite der Kugel liegenden Punkte sind hier nicht mehr mit Buchstaben bezeichnet.

Da die Kugelfläche nach allen Seiten gekrümmt ist, also kein ebenes Flächenelement enthält, so ist ihre Abwicklung auch nur annäherungsweise möglich, indem man dieselbe in eine Anzahl sphärischer Kugelzonen oder Ringe eintheilt, eine solche zwischen zwei Parallelkreisen liegende Kugelzone als aus ebenen Flächenelementen zusammengesetzt, d. i. als eine Kegelfläche betrachtet und dieselbe in ähnlicher Weise wie in § 148, in Fig. II zur Abwicklung bringt, oder indem man sich die Kugelfläche durch die Meridiankreise in sphärische Zweiecke zerlegt und dieselben nebeneinander (wie in Fig. IV), oder um den Pol herum (wie in Fig. III) in eine Ebene ausgebreitet denkt. Hierbei sind diese Zweiecke jedoch als Theile von cylindrischen Flächen zu denken.

Je mehr man auf der Kugelfläche solche Parallel- oder Meridiankreise annimmt, um so genauer wird auch das Netz dem einer Kugelfläche entsprechen.

§ 160. Um das Netz Fig. II zu erhalten, ziehe man durch $i' 7'$ eine Gerade, bis sie die nach abwärts verlängerte Polarachse (P, $P'' P'$) in einem Punkte S schneidet*), nehme Si in den Zirkel und beschreibe damit aus einem Punkte S der Fig. II den Bogen $a\,e\,i\,n\,a'$, trage von i aus die wahren Grössen der auf dem Parallelkreise ($a\,b\,c\,d\,e \ldots a'\,b'\,c'\,d'\,e' \ldots$) durch die Meridiane entstandenen Abschnitte, z. B. $i\,h$ u. s. w. je achtmal nach beiden Seiten des Punktes i an, mache ferner $i\,r$ in Fig. II gleich $i' 7'$ in Fig. I, ziehe mit Sr als Radius durch r den Parallelkreis, sowie von a und a' nach S Gerade, bis sie den durch r gehenden Kreis schneiden, so ist damit die zunächst unter ($a\,b\,c\,d \ldots$, $a'\,b'\,c'\,d' \ldots$) liegende Kugelzone als Kegelfläche betrachtet abgewickelt worden. In gleicher Weise ist $12\,r\,12'$ in Fig. II die Abwicklung einer Kegelfläche, deren Basis in Fig. I der Kreis ($12\ 7$, $12'\ 7'$) und deren Scheitelpunkt S' ist u. s. w. Fig. II ist somit das Netz der unteren Halbkugel.

Um das Netz Fig. III zu erhalten, zeichne man in Fig. III eine Gerade PI, trage darauf die wahre Breite einer Kugelzone, z. B. $i' 6'$ oder $i\,h$ aus Fig. I viermal von P aus an und beschreibe durch diese Theilpunkte I, II, $III \ldots$ aus P concentrische Kreise, theile den äussern Kreis in so viel gleiche Theile, als auf der Kugel sphärische Zweiecke angenommen sind, also in sechzehn, ziehe aus diesen Theilpunkten $1, 2, 3, 4, I, 6 \ldots$ nach P Gerade und betrachte diese als die Symmetrieachsen der Zweiecke. Von jeder solchen Symmetrieachse aus trage man nach beiden Seiten die halbe Breite der zwischen zwei Meridianen liegenden Abschnitte der Parallelkreise, mache also in Fig. III z. B. Id', $I\,e$, $6\,e'$, $6\,f$ u. s. w. gleich $I\,d$, ($I\,e$) in Fig. I, ebenso IIr, IIs, $IIIt$, $IIIu \ldots$ gleich IIr, IIs, $IIIt$, $IIIu \ldots$ in Fig. I u. s. w. und verbinde die Punkte d', r, t, v, P, e, s, u, w, P u. s. w. durch eine stetige Curve*); Fig. III ist dann die Abwicklung einer Kugelhälfte, wobei die Zweiecke, bezw. je eine Hälfte derselben, radial um den Punkt P, d. i. um den Pol gelegt wurden.

In Fig. IV sind dieselben Zweiecke so aneinander gelegt, dass sie sich in dem Hauptparallelkreis, d. i. dem Aequator, berühren; es sind also auch hier die Strecken $I\,II$, $II\,III \ldots$ und $I\,II'$, $II'\,III' \ldots$ gleich $i\,6'$, $6\,5 \ldots$ oder $i\,h$, $h\,g \ldots$, und ebenso Id, Ie, IIr, $IIs \ldots$ gleich $1\,d$ ($1\,e$), IIr (IIs) $\ldots$ in Fig. I. Das Netz (Fig. IV) bildet somit zusammengelegt gleichfalls näherungsweise eine Halbkugel.

*) Da hier $i' 7'$ sehr nahe bei einander liegen, so kann schon die kleinste Ungenauigkeit in der Lage von $i' 7'$ einen Fehler in Bezug auf die Lage eines ersten Punktes S ergeben. Um diesem so viel wie möglich vorzubeugen, zeichne man aus dem Kegelcentrum in möglichst grosser Entfernung einen Viertelsbogen $i'' 7'' x$, theile denselben ebenso wie den Viertelsbogen $i' P'$ in vier gleiche Theile, ziehe durch $1'' 7''$ eine Gerade und parallel dazu die Gerade $i' 7'$. Da nämlich die Punkte $1'$, $7'$ grössere Entfernung haben, so ist damit auch die Lage der Geraden genauer bestimmt, als dieses durch zwei sehr nahe liegende Punkte möglich ist. Punkt S fällt hier über die Zeichenfläche hinaus.

*) Die Curven wurden hier nur bis zu dem kleinsten Kreise hin ausgezogen.

Darstellung weiterer Rotationsflächen und ihrer Schnitte.

Tafel XXV. Figur I—III[a].

§ 161. Das Ovid oder die Eiform (Fig. I) ist durch die Rotation einer Eilinie um ihre grosse oder Längenachse entstanden. Der Verticalumriss des Körpers oder des Hauptmeridians $P''\,n''\,a'\,n'\,P \ldots$ wurde aus Kreisbögen in gleicher Weise wie Fig. V, Taf. VII zusammengesetzt, und die Projectionen der Parallel- und Meridiankreise ebenso wie bei der Kugel bestimmt. Die aus S' an $n'\,o'\,p'\,q' \ldots$, sowie aus S'' an $n''\,o''\,p''\,q'' \ldots$ gezeichneten Geraden bilden Tangenten an die gleichen Punkte der Meridiane (siehe Fig. III, Taf. XXIII).

§ 162. In Fig. II sind die beiden Projectionen einer Ringfläche (Annuloid) dargestellt. Eine solche Ringfläche entsteht, wenn sich ein Kreis**) um eine ausserhalb desselben liegende Gerade dreht (rotirt), wobei die Achse in der verlängerten Kreisebene liegt. Alle durch diese Achse gehenden Ebenen schneiden die Ringfläche nach Meridianen, alle zur Drehungsachse senkrechten Ebenen schneiden die Ringfläche nach Parallelkreisen.

Die Projectionen der Parallelkreise gestalten sich hier wie bei der Kugel als Gerade und Kreise. Die Parallelkreise wurden zuerst etwa in gleichen Abständen

**) Statt des Kreises könnte auch ebenso gut eine Ellipse oder sonstige geschlossene Curve als Erzeugende einer Ringfläche genommen werden.