



## **Das projective Zeichnen**

**Kleiber, Max**

**Stuttgart, [1886]**

19. Darstellung weiterer Rotationsflächen und ihrer Schnitte.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-77566](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-77566)



Da die Kugelfläche nach allen Seiten gekrümmt ist, also kein ebenes Flächenelement enthält, so ist ihre Abwicklung auch nur annäherungsweise möglich, indem man dieselbe in eine Anzahl sphärischer Kugelzonen oder Ringe eintheilt, eine solche zwischen zwei Parallelkreisen liegende Kugelzone als aus ebenen Flächenelementen zusammengesetzt, d. i. als eine Kegelfläche betrachtet und dieselbe in ähnlicher Weise wie in § 148, in Fig. II zur Abwicklung bringt, oder indem man sich die Kugelfläche durch die Meridiankreise in sphärische Zweiecke zerlegt und dieselben nebeneinander (wie in Fig. IV), oder um den Pol herum (wie in Fig. III) in eine Ebene ausgebreitet denkt. Hierbei sind diese Zweiecke jedoch als Theile von cylindrischen Flächen zu denken.

Je mehr man auf der Kugelfläche solche Parallel- oder Meridiankreise annimmt, um so genauer wird auch das Netz dem einer Kugelfläche entsprechen.

§ 160. Um das Netz Fig. II zu erhalten, ziehe man durch  $i'7'$  eine Gerade, bis sie die nach abwärts verlängerte Polarachse ( $P, P''P'$ ) in einem Punkte  $S$  schneidet\*), nehme  $Si$  in den Zirkel und beschreibe damit aus einem Punkte  $S$  der Fig. II den Bogen  $aeina'$ , trage von  $i$  aus die wahren Grössen der auf dem Parallelkreise ( $abcde...a'b'c'd'e'...$ ) durch die Meridiane entstandenen Abschnitte, z. B.  $ih$  u. s. w. je achtmal nach beiden Seiten des Punktes  $i$  an, mache ferner  $ir$  in Fig. II gleich  $i'7'$  in Fig. I, ziehe mit  $Sr$  als Radius durch  $r$  den Parallelkreis, sowie von  $a$  und  $a'$  nach  $S$  Gerade, bis sie den durch  $r$  gehenden Kreis schneiden, so ist damit die zunächst unter ( $abcd...a'b'c'd'...$ ) liegende Kugelzone als Kegelfläche betrachtet abgewickelt worden. In gleicher Weise ist  $12r12'$  in Fig. II die Abwicklung einer Kegelfläche, deren Basis in Fig. I der Kreis ( $127, 12'7'$ ) und deren Scheitelpunkt  $S'$  ist u. s. w. Fig. II ist somit das Netz der unteren Halbkugel.

Um das Netz Fig. III zu erhalten, zeichne man in Fig. III eine Gerade  $PI$ , trage darauf die wahre Breite einer Kugelzone, z. B.  $i'6'$  oder  $ih$  aus Fig. I viermal von  $P$  aus an und beschreibe durch diese Theilpunkte  $I, II, III...$  aus  $P$  concentrische Kreise, theile den äusseren Kreis in so viel gleiche Theile, als auf der

Kugel sphärische Zweiecke angenommen sind, also in sechzehn, ziehe aus diesen Theilpunkten  $1, 2, 3, 4, I, 6...$  nach  $P$  Gerade und betrachte diese als die Symmetrieachsen der Zweiecke. Von jeder solchen Symmetrieachse aus trage man nach beiden Seiten die halbe Breite der zwischen zwei Meridianen liegenden Abschnitte der Parallelkreise, mache also in Fig. III z. B.  $Id', Ie, 6e', 6f$  u. s. w. gleich  $Id, (Ie)$  in Fig. I, ebenso  $IIr, IIs, IIIr, IIIu...$  gleich  $IIr, IIs, IIIr, IIIu...$  in Fig. I u. s. w. und verbinde die Punkte  $d', r, t, v, P, e, s, u, w, P$  u. s. w. durch eine stetige Curve\*); Fig. III ist dann die Abwicklung einer Kugelhälfte, wobei die Zweiecke, bezw. je eine Hälfte derselben, radial um den Punkt  $P$ , d. i. um den Pol gelegt wurden.

In Fig. IV sind dieselben Zweiecke so aneinander gelegt, dass sie sich in dem Hauptparallelkreis, d. i. dem Aequator, berühren; es sind also auch hier die Strecken  $I II, II III...$  und  $I II', II' III'...$  gleich  $i6', 65...$  oder  $ih, hg...$ , und ebenso  $Id, Ie, IIr, IIs...$  gleich  $Id (Ie), IIr (IIs)...$  in Fig. I. Das Netz (Fig. IV) bildet somit zusammengelegt gleichfalls näherungsweise eine Halbkugel.

## Darstellung weiterer Rotationsflächen und ihrer Schnitte.

Tafel XXV. Figur I—III<sup>a</sup>.

§ 161. Das Ovid oder die Eiform (Fig. I) ist durch die Rotation einer Eillinie um ihre grosse oder Längsachse entstanden. Der Verticalumriss des Körpers oder des Hauptmeridians  $P''n'a'n'P...$  wurde aus Kreisbögen in gleicher Weise wie Fig. V, Taf. VII zusammengesetzt, und die Projectionen der Parallel- und Meridiankreise ebenso wie bei der Kugel bestimmt. Die aus  $S'$  an  $n'o'p'q'...$ , sowie aus  $S''$  an  $n''o''p''q''...$  gezeichneten Geraden bilden Tangenten an die gleichen Punkte der Meridiane (siehe Fig. III, Taf. XXIII).

§ 162. In Fig. II sind die beiden Projectionen einer Ringfläche (Annuloid) dargestellt. Eine solche Ringfläche entsteht, wenn sich ein Kreis\*\*) um eine ausserhalb desselben liegende Gerade dreht (rotirt), wobei die Achse in der verlängerten Kreisebene liegt. Alle durch diese Achse gehenden Ebenen schneiden die Ringfläche nach Meridianen, alle zur Drehungsachse senkrechten Ebenen schneiden die Ringfläche nach Parallelkreisen.

Die Projectionen der Parallelkreise gestalten sich hier wie bei der Kugel als Gerade und Kreise. Die Parallelkreise wurden zuerst etwa in gleichen Abständen

\*) Da hier  $i'7'$  sehr nahe bei einander liegen, so kann schon die kleinste Ungenauigkeit in der Lage von  $i'7'$  einen Fehler in Bezug auf die Lage eines ersten Punktes  $S$  ergeben. Um diesem so viel wie möglich vorzubeugen, zeichne man aus dem Kegelcentrum in möglichst grosser Entfernung einen Viertelsbogen  $i'7''x$ , theile denselben ebenso wie den Viertelsbogen  $i'P'$  in vier gleiche Theile, ziehe durch  $I'7''$  eine Gerade und parallel dazu die Gerade  $i'7'$ . Da nämlich die Punkte  $I', 7'$  grössere Entfernung haben, so ist damit auch die Lage der Geraden genauer bestimmt, als dieses durch zwei sehr nahe liegende Punkte möglich ist. Punkt  $S$  fällt hier über die Zeichenfläche hinaus.

\*) Die Curven wurden hier nur bis zu dem kleinsten Kreise hin ausgezogen.

\*\*) Statt des Kreises könnte auch ebenso gut eine Ellipse oder sonstige geschlossene Curve als Erzeugende einer Ringfläche genommen werden.



$1'2', 2'3', 3'4' \dots$  auf der Ringfläche in der Verticalprojection angenommen; ihre Horizontalprojectionen sind concentrische Kreise, deren Mittelpunkt  $M$  ist. Die Meridiane, welche hier in diesem Falle Kreise sind, stellen sich in der Horizontalprojection als Gerade, in der Verticalprojection als Ellipsen dar und werden wie bei der Kugel gefunden.

§ 163. Die Netzentwicklung der Ringfläche ist ebenfalls ähnlich wie bei der Kugel.

Fig. II<sup>a</sup> zeigt drei solche, von je zwei Meridianen eingeschlossene Flächen in ihrer Abwicklung. Hierbei wurde eine Gerade  $vw$  in acht gleiche Theile, gleich  $1'2'$  oder  $2'3' \dots$  getheilt, durch diese Theilpunkte wagrechte Linien gezogen und von der Mittellinie  $vw$  aus die Grössen  $v1', v2' \dots$  der Fig. II in  $v1', v2' \dots$  der Fig. II<sup>a</sup> in entsprechend gleicher Ordnung angetragen u. s. w.

Durch die Ringfläche wurde ferner eine Ebene parallel zur verticalen Tafel gelegt, welche sowohl die Ringfläche schneidet, als auch in einem auf der Innenseite liegenden Punkte  $e, e'$  berührt. Die Schnittfigur bildet eine Schleife\*) (Lemniscate), deren wahre Grösse und Form aus der Verticalprojection  $a'b'c'd'e'f'g' \dots$  ersichtlich ist.

§ 164. Sollte an irgend einem Punkte  $(k, k')$  der Lemniscate eine Tangente ( $kR'', kR^4$ ) gezeichnet werden, so denke man sich zunächst an einen durch  $(k, k')$

\*) Die Schnittfigur kann je nach der Lage der Ebene sehr verschieden sein. Würde z. B. die schneidende Ebene in Fig. II parallel ihrer Lage weiter nach vorn gerückt,

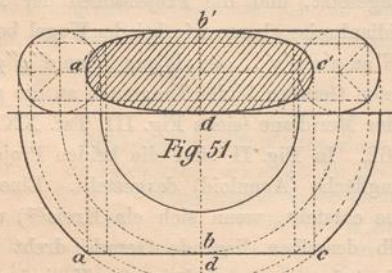


Fig. 51.

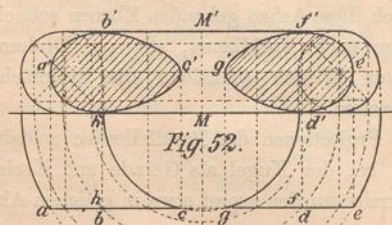


Fig. 52.

so entstände eine Figur, welche mehr oder weniger der Fig. 51 ähnlich wäre. Würde dagegen die schneidende Ebene weiter zurückgeschoben, so würde die Schnittfigur aus zwei getrennten und geschlossenen Curven, ähnlich wie in Fig. 52, bestehen.

gehenden Meridian eine tangirende Ebene in  $(k, k')$ , welche nicht nur den Meridian, sondern auch die Ringfläche in dem gleichen Punkte berühren wird, und deren Tracen  $R''t, t'u'$  sind.

Diese Tracen wurden gefunden, indem man sich den Meridian, auf welchem  $(k, k')$  liegt, parallel zur verticalen Tafel gedreht dachte, so dass  $(k, k')$  nunmehr in der Verticalprojection nach  $k''$  zu liegen kommt, an  $k''$  die Kreistangente zeichnete und deren Schnittpunkt  $R'$  auf der horizontalen Tafel nebst Meridian und Tangente in die ursprüngliche Lage  $MkR''$  zurückdrehte,

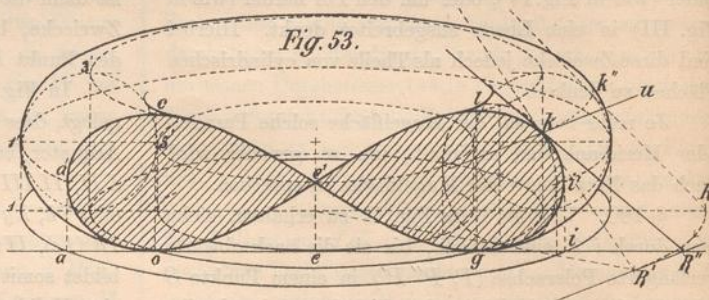


Fig. 53.

so dass nun  $kR''$  die Horizontalprojection dieser Tangente und  $R''$  ein Tracenpunkt in der gleichen Tafel ist. Legt man ferner durch den gleichen Punkt  $(k, k')$  eine Tangente an den durch  $(k, k')$  gehenden Parallelkreis, welche die verticale Tafel in  $(u, u')$  trifft und deren Projectionen  $(ku, k'u')$  sind, so bestimmen beide Tangenten die berührende Ebene (siehe § 108), deren horizontale Trace  $R''t$  parallel zu  $ku$ , und deren verticale Trace  $t'u'$  ist. (Vergl. Fig. 53.)

Da nun ferner  $aeiR'''$  die horizontale Trace der schneidenden Ebene bildet, Punkt  $R'''$  also in beiden Tracen, somit in beiden Ebenen, nämlich der schneidenden und berührenden, liegt, das Gleiche aber auch mit Punkt  $(k, k')$  der Fall ist (siehe § 141), so bildet die Schnittkante beider Ebenen die verlangte Tangente ( $kR'', k'R^4$ ).

Eine durch  $(h, h')$  gehende und zu  $(k, k')$  symmetrische Tangente wurde in der Verticalprojection von  $h'$  durch  $S$  gezeichnet, indem man  $e'i'S$ , geometrisch genommen, als die Symmetrieachse beider Tangenten betrachten konnte. Fig. 53 veranschaulicht die hier erläuterte Aufgabe in schräger Projection.

In Fig. III ist eine sog. Einziehung oder Kehle dargestellt. Dieselbe konnte man sich durch Rotation einer nach aussen concaven halben Ellipse  $XVa'$  entstanden denken, wobei  $(S, S', S'')$  als Rotationsachse auf der convexen Seite der Ellipsfigur, sowie mit derselben in einer Ebene liegend gedacht ist.

Die Parallelkreise wurden auf der Fläche in gleichen Abständen angenommen, ein Hauptmeridian  $a'VX$  der Verticalprojection somit in gleiche Theile  $a'I, I, II, II, III \dots$  getheilt, und durch diese Theilpunkte die Parallelkreise gelegt. Die Meridiane wurden mit Hilfe



dieser, nachdem ihre Horizontalprojectionen bestimmt waren, in der Verticalprojection gefunden. Die Geraden  $n'S'$ ,  $o'S'$ ,  $p'S'$ ... bilden Tangenten der Meridiane in den Punkten  $n'$ ,  $o'$ ,  $p'$ ..., deren gemeinschaftlicher Schnittpunkt  $S'$  wurde in der Verticalprojection dadurch gefunden, dass man zuerst an  $n'$  die Ellipstangente nach der in § 69 angegebenen Methode zeichnete u. s. w.

In Fig. III<sup>a</sup> ist das Netz dreier, von je zwei Meridianen begrenzten Flächen gezeichnet. Die Abwicklung ist ähnlich wie bei Fig. II<sup>a</sup>. Es ist nämlich  $a'a$  in Fig. III<sup>a</sup> gleich der gestreckten halben Ellipse  $XV^a$ ,  $a'g'$ ,  $a'h'$  gleich  $1g$ ,  $1h$  in Fig. III u. s. w.

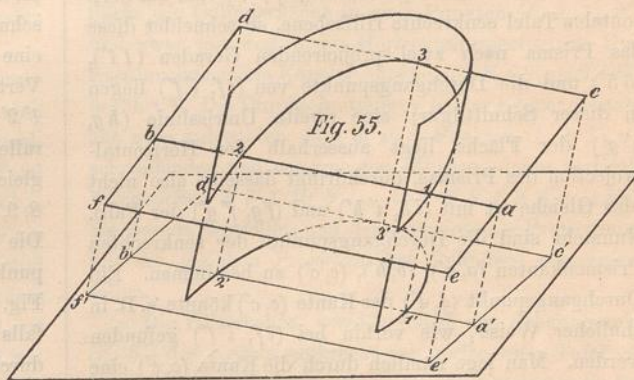
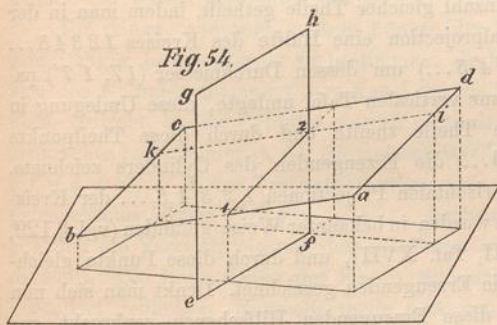
## Schnitte der Körper unter sich oder Durchdringungen.

§ 165. Die Durchdringungen oder gegenseitigen Schnitte von Körpern kommen im Zeichnen sehr häufig vor und bilden daher einen wichtigen Abschnitt desselben. Fast bei allen zusammengesetzten Körper- oder

Die Schnittpunkte irgend einer Geraden  $ab$  mit einer Fläche  $F$  bestimmt man, indem man durch diese Gerade eine Hilfsebene legt, welche die Fläche schneidet und diese Schnittlinie bestimmt. Die Durchschnitte der Geraden und der Schnittlinie, welche durch die Hilfsebene entstanden ist, bilden sodann die Durchgangspunkte 1, 2 einer Geraden  $ab$  durch die gegebene Fläche (siehe Fig. 55).

Hierbei können je nach der Lage der Geraden sich folgende Fälle ergeben:

1. Die Gerade durchschneidet die Schnittfigur in einem oder mehreren Punkten, z. B. in zwei, d. h. sie durchdringt die Fläche (siehe  $ab$  in Fig. 55);
2. die Gerade berührt die durch die Hilfsebene erzeugte Schnittfigur in einem Punkte (3), bildet also eine Tangente an die Fläche\*);
3. die Schnittfigur wird von der Geraden, durch welche die Hilfsebene gelegt wurde, weder durchschnitten noch berührt, in welchem Falle auch die Gerade die Fläche nicht durchdringt. (Siehe  $ef$  in Fig. 55.)



Flächenformen finden Durchdringungen statt. So kann z. B. ein Kreuzgewölbe als Durchdringung zweier Cylinderflächen betrachtet werden; ebenso kommen Durchdringungen bei Holz- und Steinverbindungen etc. vor. Da die Durchschnitte zweier Ebenen stets eine Gerade bilden, so sind die gegenseitigen Schnitte eckiger Körper gebrochene Linien. Die gegenseitigen Schnitte krummer Flächen mit Ebenen oder anderen krummen Flächen sind Curven.

Wenn man von zwei Geraden  $ab$ ,  $ik$  einer begrenzten Ebene  $abcd$  die Durchschnittpunkte 1, 2 durch eine andere Ebene  $efgh$  gefunden hat, und diese durch eine Gerade verbindet, so ist diese letztere Gerade der Schnitt beider Ebenen (siehe Fig. 54).

Aus dem soeben Gesagten geht hervor, dass es sich theoretisch nur darum handelt, die gegenseitigen Durchschnitte von Linien, welche den Körpern oder den Flächen als Erzeugende oder sonst wie angehören, zu bestimmen. Die Summe dieser Durchschnittpunkte der betreffenden Linien bilden sodann in ihrer Verbindung den gegenseitigen Durchschnitt der Körper oder Flächen.

Das projective Zeichnen.

Um also die gegenseitigen Durchschnitte zweier Flächen oder Körper zu bestimmen, denkt man sich ein System von Hilfsebenen durch beide gelegt und die Schnittlinien einer jeden dieser Ebenen mit beiden Flächen oder Körpern construirt. Die gemeinschaftlichen Punkte der beiden Durchschnitlinien derselben Hilfsebene gehören sodann der gesuchten Durchschnittsfläche der beiden sich durchschneidenden Körper oder Flächen an. Werden nun alle auf die angedeutete Weise gefundenen Punkte in gehöriger Ordnung verbunden, so erhält man die verlangte Schnittfigur der sich gegenseitig durchdringenden Flächen oder Körper. Schneiden sich die beiden Schnittlinien derselben Hilfsebene

\*) Ist die Schnittlinie, wie z. B.  $3'3$  in Fig. 55, eine Gerade, welche mit der sie durchschneidenden Geraden  $cd$  eine tangirende Ebene an die Fläche bildet, so ist der Schnittpunkt 3 der Geraden  $cd$  mit  $3'3$  zugleich der Berührungspunkt der Geraden  $cd$  an die Fläche. Das hier Gesagte gilt hauptsächlich für jene Geraden, welche Cylinder- oder Kegelflächen berühren, die betreffenden Erzeugenden also, welche durch den Berührungspunkt gehen, schneiden.