Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

22. Durchdringung von Cylinder und Kegel und zweier Kegel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

Durchdringung von Cylinder und Kegel, und zweier Kegel.

Tafel XXVII. Figur I—III.

§ 169. In Fig. I wird ein senkrechter Kreiskegel von einem wagrecht und parallel zur horizontalen Tafel liegenden Kreiscylinder durchdrungen. Der gegenseitige Schnitt der beiden Körper besteht hier aus zwei getrennten und in sich geschlossenen Raumcurven.*)

Die Lage der die beiden Körper schneidenden Hilfsebenen wurde hier senkrecht zur verticalen und parallel zur horizontalen Tafel gewählt, dieselben durchschneiden den Kegel somit nach Kreisen, den Cylinder nach Rechtecken, d. i. nach seinen Erzeugenden. Die Achse des Cylinders geht hierbei durch die Achse des Kegels. Die Durchschnittsfigur besteht aus zwei geschlossenen Curven, deren Horizontalprojectionen $1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11 \ldots, 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12 \ldots$ und deren verticale Projectionen als zwei offene Curven $1'\ 3'\ 5'\ 7'\ 9'\ 11'$ und $2'\ 4'\ 6'\ 8'\ 10'\ 12' \ldots$ erscheinen. Die Punkte $(5, 6, 5', 6')$, $(5'', 6'')$ sind die sich am nächsten liegenden Punkte der beiden getrennten Curven.

Um diese, wie auch weitere Punkte der Durchschnittsfigur beider Körper zu bestimmen, denke man sich den Cylinder mitsammt dem Kegel um die Kegelachse gedreht, bis der Cylinder eine zur verticalen Tafel senkrechte Lage einnimmt, der Normalschnitt $(e f g h i k \ldots e' f' g' h' i' k' \ldots)$ in der Verticalprojection somit als ein geometrischer Kreis $e'' f'' g'' h'' i'' k'' \ldots$ erscheint und zugleich die Verticalprojection des gedrehten Cylinders darstellt. Die Projectionen des Kegels sind dabei unverändert geblieben. Nunmehr theile man den Kreis am besten in die gleichen Theile $e'' f''$, $f'' g''$, $g'' h''$, $h'' i''$, $i'' k'' \ldots$, lege durch die Theilpunkte die Hilfsebenen durch beide Körper, wie schon erwähnt, senkrecht zur verticalen und parallel zur horizontalen Tafel und construire deren Schnittlinien in der Horizontalprojection, so ergeben sich damit in derselben $1, 3, 5, 7, 9, 11, 9'', 7'', 5'', 3''$, und $2, 4, 6, 8, 10, 12, 10'', 8'', 6'', 4''$ als Punkte der Durchschnittsfigur des Cylinders und Kegels, und diese in die verticale Projection getragen, ergeben die Punkte $1', 3', 7', 9', 11' \ldots$ und $2', 4', 8', 10', 12' \ldots$ der Verticalprojection. Um die einander zunächstliegenden Punkte $(5, 6, 5', 6')$, (sowie $5'', 6''$) der getrennten Curven in beiden Projectionen zu bestimmen, betrachte man zunächst $(a S, a' S')$ und $(c S, c' S')$ als die vorhin mit dem Cylinder und Kegel gedrehten Kegelerzeugenden $(b S, b' S')$ und $(d S, d' S')$; fälle gegen diese aus M die Senkrechten $M n$, $M o$ (also $M n$ senkrecht zu $a' S'$, und $M o$ senkrecht zu $c' S'$), so sind n und o Punkte der Cylinderfläche, und die durch n und o gehenden Erzeugenden derselben diejenigen, welche wenn in ihre ursprüngliche Lage zurückgedreht, die geringste Entfernung von den Kegelerzeugenden $(b S, b' S')$, und $(d S, d' S')$ haben. Legt man daher durch $n\ o$ eine Hilfsebene parallel mit den übrigen durch Cylinder und Kegel, und zeichnet deren Schnittlinien in der horizontalen Projection, so ergeben sich hierdurch die verlangten Punkte $5, 6$ $(5'', 6'')$ in derselben, und durch Errichten der Projicirenden aus 5 und 6 die Verticalprojectionen $5'$ und $6'$.

*) Dieser Schnitt kann natürlich je nach dem Durchmesser des Cylinders oder Kegels, oder auch je nach der gegenseitigen Lage der beiden Körper sehr verschieden sein und könnte z. B. auch aus einer einzigen geschlossenen Curve bestehen, sofern der Cylinder nach einer Seite über den Kegel herausgeht, d. h. nicht mit allen seinen Erzeugenden den Kegel durchdringt.

§ 170. In Fig. II ist die Durchdringung von Kreiscylinder und Kreiskegel dargestellt, wobei der Kreiscylinder senkrecht zur horizontalen Tafel steht und die Achse des Kreiskegels durch die Achse des Cylinders geht und eine zur horizontalen wie verticalen Tafel parallele Lage hat. Der Kreiskegel wurde zuerst in der Horizontalprojection so bestimmt, dass die Kegelfläche die Cylinderfläche in zwei Punkten $(1, 2, 1', 2')$, und zwar mit den in der Horizontalprojection als Umrisse erscheinenden Kegelerzeugenden $(e S, e' S')$, $(i S, i' S')$ berührt.*) Die Durchschnittsfigur beider Körper besteht aus zwei getrennten, sich in zwei Punkten $(1, 2, 1', 2')$ schneidenden und congruenten Ellipsen, deren verticale Projectionen $3'\ 7'\ 1'\ 10'\ 5' \ldots$ und $4'\ 8'\ 1'\ 9'\ 6' \ldots$ sich als Gerade darstellen und deren horizontale Projectionen mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfallen.

Die Hilfsebenen wurden durch den Scheitelpunkt (S, S') des Kegels senkrecht zur horizontalen Tafel gelegt und schneiden somit Kegel und Cylinder nach Erzeugenden.

Die Kegelerzeugenden, deren Durchgangspunkte auf dem Cylinder in bekannter Weise gefunden sind, wurden auf dem Kegel in gleichen Abständen angenommen, indem man die vordere Hälfte des Kegelkreises, nämlich $(c d e f g, c' d' e' f' g')$ um den Durchmesser $(c g, c' g')$ desselben parallel zur verticalen Tafel nach $c' d'' e'' f'' g'$ legte, sodann darauf die Eintheilung bestimmte und den Halbkreis mitsammt den Theilpunkten d'', e'', f'' wieder in die ursprüngliche Lage zurückdrehte, wodurch sich $c', d', e', f', g' \ldots$ der Verticalprojection, und $c d$ gleich $d' d''$ u. s. w. ergab (siehe § 129, Fig. III, Tafel XVII). Aus $(d, e, f, g, h \ldots)$ und $(d', e', f', g', h' \ldots)$ wurden sodann die Kegelerzeugenden nach (S, S') gezogen und deren Durchgangspunkte auf dem Cylinder bestimmt u. s. w.

§ 171. Fig. III zeigt die Durchdringung zweier Kreiskegel, wovon der eine senkrecht zur horizontalen Tafel steht, der andere so liegt, dass seine Achse

*) S fällt hier zufällig in die Horizontalprojection S des Kegels der Fig. I.

parallel zu beiden Tafeln ist und die Achse des ersten Kegels durchschneidet. Die Hilfsebenen wurden durch die Scheitelpunkte der beiden Kegel gelegt, schneiden somit beide nach Erzeugenden (vgl. § 149, Fig. 48).

Man theile zunächst die Basis des horizontal liegenden Kegels in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. acht (die Projectionen dieser Theilpunkte sind [$c, d, e, f, g, h \ldots c', d', e', f', g', h' \ldots$], und wurden wie bei Fig. II gefunden), ziehe sodann aus diesen Theilpunkten die Erzeugenden nach (S''', S''), und ferner durch (S, S''', S', S'') eine Gerade ($S S''' R$,

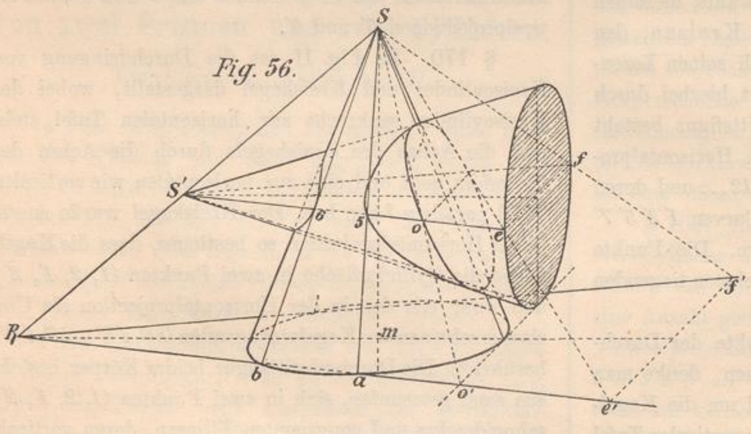

Fig. 56.

$S' S'' R'$); in letzterer schneiden sich nun sämmtliche Hilfsebenen, welche durch die Scheitelpunkte der beiden Kegel gelegt werden, und (R, R') ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit der horizontalen Tafel.

Jede durch eine Gerade ($S S'''$, $S' S''$) gelegte Hilfsebene schneidet beide Kegel nach Erzeugenden (vergl. Fig. 56), und die Trace einer solchen Hilfsebene geht durch (R, R'), dem Schnittpunkte der Geraden ($S S'''$, $S' S''$) mit der horizontalen Tafel.

Zeichnet man z. B. in Fig. 56 aus S etwa durch e eine Gerade und verbindet deren Schnittpunkt e' in der horizontalen Tafel mit dem Schnittpunkte R der Geraden, $S S'$ in derselben Tafel, so bildet $e' R$ die horizontale Trace*) einer durch S und die Erzeugende $e S'$ gelegten Hilfsebene, welche auch den senkrechten Kegel nach zwei geraden Erzeugenden $a S$, $b S$ schneidet; $e S'$, $a S$, $b S$ liegen nunmehr sowohl in der Hilfsebene wie auf den Kegelflächen, und die Punkte $5\ 6$ sind daher Durchgangspunkte der Geraden $e S'$ durch den senkrechten Kegel.

In dieser Weise hätte man auch in Fig. III die Durchgangspunkte der einzelnen Erzeugenden ($c S'''$, $c' S''$), ($d S'''$, $d' S'' \ldots$) finden können. Da hier jedoch des mangelnden Raumes halber die Schnittpunkte der aus (S, S') durch (c, c'), (d, d'), (e, e') ... gezeichneten Geraden nicht markirt werden können, indem dieselben zu weit nach rechts fallen würden; so wurde in Fig. III folgendes Verfahren gewählt:

Man legte an die Erzeugende ($S b$, $S' b'$) eine tangirende Ebene**), welche den horizontal liegenden Kegel nach einer Ellipse durchschnitt, deren Verticalprojection $1\, o' n\, p' 3'$ als eine Gerade erscheint und deren horizontale Projection $1\, o n p \ldots$ in bekannter Weise gefunden wurde. $o''' p''' b\, o'' o^4$ ist die horizontale Trace dieser berührenden und zugleich schneidenden Ebene. Sollen nunmehr die Durchgangspunkte irgend einer Erzeugenden, z. B. ($d S'''$, $d' S''$) durch den senkrechten Kegel gefunden werden, so ziehe man durch den Punkt o (welcher ja ebenfalls der Erzeugenden [$d S'''$ $d' S''$] angehört) aus S eine Gerade $S o o'''$ (deren Verticalprojection $S' o' o^4$ mit der gleichen Projection der Ebene $1' o' n' p' 3'$ zusammenfällt), verbinde o''' mit R, ziehe aus den Schnittpunkten q, s die Erzeugenden $q S$, $s S$, so schneiden diese $d o S'''$ in 7 und 8; errichtet man aus 7 und 8 die Projicirenden, so ergeben diese in der Verticalprojection auf $d' S''$ die gleichen Punkte in $7'$ und $8'$. $o''' q s R$ ist hier die horizontale Trace einer aus (S, S') durch ($d S'''$, $d' S''$) gelegten Hilfsebene, welche den senkrechten Kegel nach Erzeugenden geschnitten hat, deren Horizontalprojectionen $q S$, $s S$ sind. In gleicher Weise sind auch die Punkte 9, 10, $7''$, $8''$, $9''$, $10''$, sowie deren Verticalprojectionen, welche paarweise hintereinander liegen**), gefunden worden. Die Durchgangspunkte der Erzeugenden ($c S'''$, $c' S''$) und ($g S'''$, $g' S''$), nämlich (1, $1'$), (2, $2'$), (3, $3'$), (4, $4'$) konnten hier ohne Weiteres bestimmt werden, da die betreffenden Erzeugenden mit ($a S$, $a' S'$) und ($b S$, $b' S'$) schon in einer zur verticalen Tafel parallelen und durch die Scheitelpunkte gehenden Ebene liegen. Die Durchgangspunkte der Erzeugenden ($e S'''$, $e' S''$) und ($i S'''$, $i' S''$) konnten, da ihre Lage eine wagrechte ist, auch mittels einer wagrechten Hilfsebene, welche den senkrechten Kegel nach dem Kreise $n\, 5\, 6\, l \ldots$, $n' 5' 6' l' \ldots$)

---

*) Diese hätte man auch gefunden, wenn man statt durch e, durch einen beliebigen Punkt o derselben Erzeugenden, aus S' die Gerade gezeichnet und deren Schnittpunkt o' in der horizontalen Tafel mit R verbunden hätte.

*) Die Ebene muss nicht nothwendig eine tangirende an die senkrechte Kegelfläche sein, sondern könnte unter beliebigem Neigungswinkel zur horizontalen Tafel angenommen werden, soferne sie nur den horizontal liegenden Kegel durchschneidet. Durch die Annahme der Ebene, wie in Fig. III, wurden jedoch überflüssige Constructionslinien vermieden.

**) Die Verticalprojectionen der Punkte $7, 7''$, $8, 8''$, $9. 9'' \ldots$ fallen nämlich, wie aus der Zeichnung ersichtlich, mit $7'$ und $8'$ und $9' \ldots$ zusammen, so dass die in Wirklichkeit aus zwei geschlossenen Curven bestehende Durchschnittsfigur der beiden Kegel in der Verticalprojection aus zwei offenen Curven besteht.

schneidet, gefunden werden. $(5, 6, 5'6')$, $(5'', 6'', 5'6')$ sind deren Durchgangspunkte in den beiden Projectionen.

Durchdringung von Prisma und Kugel, Pyramide und Kugel, Cylinder und Kugel.

Tafel XXVIII. Figur I—III.

§ 172. In Fig. I ist die Durchdringung einer Kugel durch ein regelmässiges sechskantiges Prisma dargestellt. Das Kugelcentrum (m, m') liegt in der Achse des Prismas, die Hilfsebenen sind senkrecht zur horizontalen Tafel und mit den Seiten des Prismas zusammenfallend angenommen, ihre Schnitte mit der Kugel sind Kreise, deren Horizontalprojection Gerade und deren Verticalprojection entsprechend der Stellung beider Körper Kreise und Ellipsen bilden, welche je paarweise hintereinander liegen, somit je in eine Projection zusammenfallen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

§ 173. In Fig. II ist die Durchdringung einer Kugel und eines senkrechten Kreiscylinders dargestellt. Die Hilfsebenen durch beide Körper wurden parallel zur verticalen Tafel angenommen und durchschneiden daher den Cylinder nach geraden Erzeugenden, die Kugel nach Kreisen, deren Verticalprojectionen sich in wahrer Grösse darstellen. Besondere Aufmerksamkeit erfordern in der Verticalprojection die auf den Umrissen des Cylinders und der Kugel liegenden Punkte der Körperdurchschnitte, z. B. $5'$ und $7'$ u. s. w. Die Durchschnitte beider Körper bilden, wie aus der Verticalprojection ersichtlich, zwei in sich geschlossene Curven, deren Horizontalprojection mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfällt.

§ 174. In Fig. III ist die Durchdringung von Kugel und regelmässiger Pyramide dargestellt. Das Kugelcentrum (m, m') liegt in der Achse der sechsseitigen Pyramide. Die Durchgangspunkte der Pyramidenkanten liegen daher in gleichen Abständen von der horizontalen Tafel, d. i. je auf einem wagrechten Kugelkreise.

Hat man daher die Durchgangspunkte einer Pyramidenkante, z. B. $(aS, a'S')$ in $(1, 1')$, $(7, 7')$ gefunden und legt durch $(1, 1')$, $(7, 7')$ eine wagrechte Hilfsebene, so schneidet letztere sämmtliche Durchgangspunkte $1'$, $7'$, $2'$, $8'$, $3'$, $9'$ . . . der Kanten $(aS, a'S')$, $(bS, b'S')$ . . . in der Verticalprojection ab. Die Punkte $(1, 1')$ und $(7, 7')$ konnten aber ohne Weiteres bestimmt werden, da $(aS, a'S')$ mit dem Hauptmeridian $(o\,7\,10\,p \ldots o'\,7'\,10'\,p' \ldots)$ schon in einer zur verticalen Tafel parallelen Hilfsebene liegt. Da übrigens alle durch die Kanten $(bS, b'S')$, $(eS, e'S')$ und $(cS, c'S')$, $(fS, f'S')$ zur horizontalen Tafel senkrecht gelegten Hilfsebenen die Kugel nach einem grössten Kreise durchschneiden, so würden die Schnittlinien dieser Ebenen mit den beiden Körpern, falls man sie um die Pyramidenachse parallel zur verticalen Tafel drehte, mit $(aS, a'S')$, $(dS, d'S')$ und dem Hauptmeridian $(o\,7\,10\,p \ldots o'\,7'\,10'\,p' \ldots)$ zusammenfallen und damit auch alle gedrehten Durchgangspunkte nach $(1, 7, 1', 7')$ u. s. w. zu liegen kommen.

Um ausser den Durchgangspunkten der Pyramidenkanten auch noch Zwischenpunkte, wie z. B. (v, w, v', w') u. s. w., zu finden, denke man sich beide Körper durch eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene in der Richtung $g\,v\,w\,S\,k$ durchschnitten, zeichne die Verticalprojection $g'S'$, $k'S'$ der hierdurch auf der Pyramide entstandenen Schnittlinie, drehe die Schnittlinie um die Pyramidenachse, bezw. um das Kugelcentrum parallel zur verticalen Tafel nach $(g''S, g'''S')$, markire in der Verticalprojection die Durchschnitte der Geraden $g'''S'$ mit dem Hauptmeridian (d. i. mit dem gleichfalls gedrehten grössten Kugelkreise) und lege durch diese Schnittpunkte v''' und w''' wagrechte Kreise*), so liegen auf diesen die Zwischenpunkte v' und w' . . . Zieht man noch die auf den Pyramidenseiten liegenden Geraden $(hS, h'S')$, $(iS, i'S')$, $(kS, k'S')$ . . .,**) so schneiden letztere auf den durch v''' und w''' gelegten wagrechten Kreisen weitere Zwischenpunkte ab. Die Horizontalprojectionen dieser Kreise und Punkte wurden sodann aus der Verticalprojection abgeleitet.

Durchdringung von Cylinder und Ringfläche, Kegel und Kugel.

Tafel XXIX. Figur I—II^a.

§ 175. In Fig. I wird ein Wulstring von einem senkrechten Kreiscylinder durchdrungen. Die Hilfsebenen wurden hier parallel zur horizontalen Tafel angenommen, durchschneiden also den Ring nach Kreisen, deren verticale Projectionen als Gerade und deren horizontale Projectionen als geometrische Kreise in wahrer Grösse sich darstellen. Der Cylinder wird durch diese Hilfsebenen gleichfalls nach Kreisen, und zwar von gleicher Grösse geschnitten, deren Horizontalprojectionen mit der gleichen Projection des Cylinders, also mit $a\,1\,y\,x\,b$ . . . zusammenfallen.

Die Durchschnittsfigur beider Körper bildet eine einzige, in sich geschlossene Raumcurve, deren Horizontalprojection $1\,2\,t\,u\,3\,4\,5\,6$ . . . mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfällt und deren Verticalprojection als eine geschlossene Curve $1'\,t'\,3'\,5'\,v'\,9'\,w'$ . . . erscheint. Besondere Beachtung erfordern die Punkte $(3, 4, 3', 4')$ und (b, b'', b''') derselben, welche in der Verticalprojection auf dem Cylinderumriss, und ebenso

*) Diese Kreise berühren die Mittellinien der Pyramidenseiten, liegen also innerhalb der Pyramide.

**) Die Punkte (g, g'), (h, h'), (i, i'), (k, k') . . . wurden je auf der Mitte einer Basisseite angenommen.