Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

24. Durchdringung von Cylinder und Ringfläche, Kegel und Kugel.

schneidet, gefunden werden. $(5, 6, 5'6')$, $(5'', 6'', 5'6')$ sind deren Durchgangspunkte in den beiden Projectionen.

Durchdringung von Prisma und Kugel, Pyramide und Kugel, Cylinder und Kugel.

Tafel XXVIII. Figur I—III.

§ 172. In Fig. I ist die Durchdringung einer Kugel durch ein regelmässiges sechskantiges Prisma dargestellt. Das Kugelcentrum (m, m') liegt in der Achse des Prismas, die Hilfsebenen sind senkrecht zur horizontalen Tafel und mit den Seiten des Prismas zusammenfallend angenommen, ihre Schnitte mit der Kugel sind Kreise, deren Horizontalprojection Gerade und deren Verticalprojection entsprechend der Stellung beider Körper Kreise und Ellipsen bilden, welche je paarweise hintereinander liegen, somit je in eine Projection zusammenfallen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich.

§ 173. In Fig. II ist die Durchdringung einer Kugel und eines senkrechten Kreiscylinders dargestellt. Die Hilfsebenen durch beide Körper wurden parallel zur verticalen Tafel angenommen und durchschneiden daher den Cylinder nach geraden Erzeugenden, die Kugel nach Kreisen, deren Verticalprojectionen sich in wahrer Grösse darstellen. Besondere Aufmerksamkeit erfordern in der Verticalprojection die auf den Umrissen des Cylinders und der Kugel liegenden Punkte der Körperdurchschnitte, z. B. $5'$ und $7'$ u. s. w. Die Durchschnitte beider Körper bilden, wie aus der Verticalprojection ersichtlich, zwei in sich geschlossene Curven, deren Horizontalprojection mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfällt.

§ 174. In Fig. III ist die Durchdringung von Kugel und regelmässiger Pyramide dargestellt. Das Kugelcentrum (m, m') liegt in der Achse der sechsseitigen Pyramide. Die Durchgangspunkte der Pyramidenkanten liegen daher in gleichen Abständen von der horizontalen Tafel, d. i. je auf einem wagrechten Kugelkreise.

Hat man daher die Durchgangspunkte einer Pyramidenkante, z. B. $(aS, a'S')$ in $(1, 1')$, $(7, 7')$ gefunden und legt durch $(1, 1')$, $(7, 7')$ eine wagrechte Hilfsebene, so schneidet letztere sämmtliche Durchgangspunkte $1', 7', 2', 8', 3', 9' \ldots$ der Kanten $(aS, a'S')$, $(bS, b'S') \ldots$ in der Verticalprojection ab. Die Punkte $(1, 1')$ und $(7, 7')$ konnten aber ohne Weiteres bestimmt werden, da $(aS, a'S')$ mit dem Hauptmeridian $(o\,7\,10\,p \ldots o'\,7'\,10'\,p' \ldots)$ schon in einer zur verticalen Tafel parallelen Hilfsebene liegt. Da übrigens alle durch die Kanten $(bS, b'S')$, $(eS, e'S')$ und $(cS, c'S')$, $(fS, f'S')$ zur horizontalen Tafel senkrecht gelegten Hilfsebenen die Kugel nach einem grössten Kreise durchschneiden, so würden die Schnittlinien dieser Ebenen mit den beiden Körpern, falls man sie um die Pyramidenachse parallel zur verticalen Tafel drehte, mit $(aS, a'S')$, $(dS, d'S')$ und dem Hauptmeridian $(o\,7\,10\,p \ldots o'\,7'\,10'\,p' \ldots)$ zusammenfallen und damit auch alle gedrehten Durchgangspunkte nach $(1, 7, 1', 7')$ u. s. w. zu liegen kommen.

Um ausser den Durchgangspunkten der Pyramidenkanten auch noch Zwischenpunkte, wie z. B. (v, w, v', w') u. s. w., zu finden, denke man sich beide Körper durch eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene in der Richtung $g\,v\,w\,S\,k$ durchschnitten, zeichne die Verticalprojection $g'S'$, $k'S'$ der hierdurch auf der Pyramide entstandenen Schnittlinie, drehe die Schnittlinie um die Pyramidenachse, bezw. um das Kugelcentrum parallel zur verticalen Tafel nach $(g''S, g'''S')$, markire in der Verticalprojection die Durchschnitte der Geraden $g'''S'$ mit dem Hauptmeridian (d. i. mit dem gleichfalls gedrehten grössten Kugelkreise) und lege durch diese Schnittpunkte v''' und w''' wagrechte Kreise*), so liegen auf diesen die Zwischenpunkte v' und $w' \ldots$ Zieht man noch die auf den Pyramidenseiten liegenden Geraden $(hS, h'S')$, $(iS, i'S')$, $(kS, k'S') \ldots$,**) so schneiden letztere auf den durch v''' und w''' gelegten wagrechten Kreisen weitere Zwischenpunkte ab. Die Horizontalprojectionen dieser Kreise und Punkte wurden sodann aus der Verticalprojection abgeleitet.

Durchdringung von Cylinder und Ringfläche, Kegel und Kugel.

Tafel XXIX. Figur I—II^a^.

§ 175. In Fig. I wird ein Wulstring von einem senkrechten Kreiscylinder durchdrungen. Die Hilfsebenen wurden hier parallel zur horizontalen Tafel angenommen, durchschneiden also den Ring nach Kreisen, deren verticale Projectionen als Gerade und deren horizontale Projectionen als geometrische Kreise in wahrer Grösse sich darstellen. Der Cylinder wird durch diese Hilfsebenen gleichfalls nach Kreisen, und zwar von gleicher Grösse geschnitten, deren Horizontalprojectionen mit der gleichen Projection des Cylinders, also mit $a\,1\,y\,x\,b \ldots$ zusammenfallen.

Die Durchschnittsfigur beider Körper bildet eine einzige, in sich geschlossene Raumcurve, deren Horizontalprojection $1\,2\,t\,u\,3\,4\,5\,6 \ldots$ mit der gleichen Projection des Cylinders zusammenfällt und deren Verticalprojection als eine geschlossene Curve $1'\,t'\,3'\,5'\,v'\,9'\,w' \ldots$ erscheint. Besondere Beachtung erfordern die Punkte $(3, 4, 3', 4')$ und (b, b'', b''') derselben, welche in der Verticalprojection auf dem Cylinderumriss, und ebenso

*) Diese Kreise berühren die Mittellinien der Pyramidenseiten, liegen also innerhalb der Pyramide.

**) Die Punkte (g, g'), (h, h'), (i, i'), $(k, k') \ldots$ wurden je auf der Mitte einer Basisseite angenommen.

die Punkte $(5, 6, 5', 6')$, $(7, 8, 7', 8')$, welche in der Verticalprojection auf der Umrisslinie des Ringes liegen, also als Uebergangspunkte der Durchschnittslinie beider Körper von der Vorderseite auf die Rückseite derselben sich darstellen. Die weitere Ausführung ist aus der Zeichnung zu ersehen.

§ 176. In Fig. II ist die Durchdringung von Kegel und Kugel dargestellt, wobei das Kugelcentrum (C, C') ausser der Kegelachse angenommen ist. Die Durchschnittslinie beider Körper, welche hier aus zwei getrennten und geschlossenen Raumcurven $(2\ 6\ 14\ 4 \ldots, 2'\ 6'\ 14'\ 4' \ldots)$ $(1\ 5\ 9\ 3\ 13 \ldots, 1'\ 5'\ 9'\ 3'\ 13' \ldots)$ besteht, konnte im Allgemeinen dadurch gefunden werden, dass man durch beide Körper Hilfsebenen legte, welche zur horizontalen Tafel parallel sind, somit Kegel und Kugel nach Kreisen durchschneiden, deren Verticalprojectionen als zur Projectionsachse parallele Gerade, und deren Horizontalprojectionen als geometrische Kreise in wahrer Grösse erscheinen.

Die Schnittpunkte je zweier solcher in einer Hilfsebene liegenden Kegel- und Kugelkreise ergeben sodann in der Horizontalprojection zuerst Punkte, welche der Durchschnittslinie beider Körper angehören (siehe § 165).

Obwohl nun mittels solcher Hilfsebenen eine beliebige Anzahl von Punkten gefunden werden könnte, welche der Durchschnittsfigur beider Körper angehören, so ist es doch wichtig, ausser diesen im Allgemeinen zufälligen Punkten auch jene zu bestimmen, welche in der Verticalprojection als Uebergangspunkte auf den Umrissen des Kegels und der Kugel liegen. Solche sind $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$ und $(10, 10')$, $(12, 12')$, $(11, 11')$, $(13, 13')$; die ersten vier liegen in der Verticalprojection auf dem Umrisse des Kegels, die zweiten vier eben daselbst auf dem Umrisse der Kugel.

Ferner ist es von Vortheil, die beiden einander am nächsten liegenden Punkte $(5, 5')$, $(6, 6')$ und die beiden entferntesten Punkte $(7, 7')$, $(8, 8')$ der beiden getrennten Curven der Durchschnittsfigur zu bestimmen.

Um nun zunächst die Punkte $(5, 5')$, $(6, 6')$, $(7, 7')$, $(8, 8')$ zu erhalten, lege man durch das Kugelcentrum (C, C') und den Scheitelpunkt (S, S') des Kegels eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene, welche nun den Kegel nach den Erzeugenden $(c\,S, c'\,S')$, $(d\,S, d'\,S')$ und die Kugel nach einem grössten Kreise schneidet, dessen Verticalprojection, wenn ausgeführt, sich als Ellipse darstellen würde. Die Horizontalprojection dieses Durchschnittes (d. i. die Gerade $c\,d$ mit den daraufliegenden Punkten c, S, C, d) drehe man parallel zur verticalen Tafel in die Lage von $c''\,S''$, $C''\,d''$, zeichne in c''', S''', d''', C''' die verticale Projection dieser vier Punkte, verbinde C''' mit S''' und d''' mit S''', und beschreibe um C''' einen grössten Kugelkreis, welcher sodann die Erzeugenden $c'''\,S'''$, $d'''\,S'''$ der Fig. II^a in $5'''$, $6'''$ und $7'''$, $8'''$ schneidet. Zeichnet man nun aus $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ die Projicirenden parallel mit der Projectionsachse, so werden hierdurch auf den Erzeugenden $c'\,S'$, $d'\,S'$ der Verticalprojection Fig. II die Punkte $5'$, $6'$, $7'$, $8'$ abgeschnitten*), und sonach aus diesen mittelst der Projicirenden die Horizontalprojectionen derselben in $5, 6$ und $7, 8$ bestimmt. Genauer noch erhält man diese Horizontalprojectionen, wenn man aus $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ die Projicirenden nach abwärts zieht und deren Schnittpunkte auf $c''\,S''$, $d''\,S''$, nämlich $5''$, $6''$, $7''$, $8''$ mit $c''\,S''\,d''$ wieder in die ursprüngliche Lage zurückdreht, wodurch sich gleichfalls die Horizontalprojectionen $5, 6, 7, 8$ auf $c\,S$, $d\,S$ ergaben.

Um die Uebergangspunkte $(1, 1')$, $(2, 2')$, $(3, 3')$, $(4, 4')$ zu bestimmen, lege man durch den Scheitelpunkt (S, S') des Kegels eine zur verticalen Tafel parallele Ebene, welche den Kegel nach den Erzeugenden $(a\,S, a'\,S')$, $(b\,S, b'\,S')$, und die Kugel nach einem Kreise $(1\ 2\ 4\ 3, 1'\ 2'\ 4'\ 3')$ schneidet, so dass sich also die verlangten Uebergangspunkte zuerst in der Verticalprojection in $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ ergaben, wonach ihre Horizontalprojectionen 1, 2, 3, 4 in bekannter Weise gefunden wurden.

Nach den bisherigen Constructionen ergaben sich in der Horizontalprojection die Punkte $1, 5, 3, 7$ und $2, 6, 4, 8$, welche je der untern und obern geschlossenen Curve, d. i. der Schnittfigur beider Körper, angehören. Weitere Punkte, wie z. B. $(9, 9')$, $(14, 14')$, konnten, wie schon erwähnt, dadurch gefunden werden, dass man parallel zur horizontalen Tafel Hilfsebenen durch beide Körper legte und die gemeinschaftlichen Punkte der hierdurch erzeugten Schnittlinien als Punkte der Durchschnittsfigur beider Körper bestimmte.

Zeichnet man durch die so erhaltenen Punkte zuerst in der horizontalen Projection die Curven $1\ 5\ 9\ 3\ 7 \ldots$ und $2\ 6\ 14\ 4\ 8 \ldots$ mit freier Hand, so schneiden diese in der gleichen Projection den Hauptmeridian der Kugel in den vier Punkten 10, 12, 11, 13, und deren Verticalprojectionen $10'$, $12'$, $11'$, $13'$ sind die vorhin erwähnten Uebergangspunkte auf der Verticalprojection des Kugelumrisses.

Verbindet man nun schliesslich $1'$, $5'$, $9'$, $3'$, $13'$, $7'$, $10'$, und $2'$, $6'$, $14'$**), $4'$, $11'$, $8'$, $12'$ durch je eine stetige Curve, so ist damit die Aufgabe vollendet.

---

*) Wie aus dem ganzen Verfahren leicht ersichtlich, ist Fig. IIa die Verticalprojection des parallel zur verticalen Tafel gedrehten Schnittes $(c\,S\,C\,d,\ c'\,S'\,C'\,d')$, in welchem durch Zeichnen des grössten Kreises dessen Schnittpunkte $5'''$, $6'''$, $7'''$, $8'''$ bestimmt und der ganze Schnitt sodann wieder in die ursprüngliche Lage zurückgedreht wurde. Die Projicirenden $5'''\,5'$, $6'''\,6' \ldots$ sind also nichts anderes als Verticalprojectionen der Kreisbögen $5''\,5$, $6''\,6 \ldots$ u. s. w.

**) Punkt $14'$ ist hier unrichtig markirt und soll innerhalb der Projicirenden aus 14 und auf der Geraden $n'''\,m'''\,f'\,e'$ liegen.