Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

27. Darstellung windischer Flächen.

$a\ C\ B\ A$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile bringen können. Je nach der Zahl und Art der Eintheilung wird natürlich auch die Form und Lage der gewundenen Linien verschieden sein.

§ 183. In Fig. IV sind zwei um eine Wulst- oder Ringfläche gewundene Linien dargestellt. Die Aufgabe ist ähnlich wie bei Fig. I, wenn man sich einen Cylinder oder ein Rohr kreisförmig gebogen denkt.

Angenommen, man wollte mit dem Zeichnen dieser Linien bei (a, a') beginnen und es sollte eine solche von (a, a') ausgehende und von der andern Seite her dahin zurückkehrende Linie etwa sechs Umgänge haben, d. i. sich sechsmal um die Ringfläche gleichmässig herumwinden, so theile man die Horizontalprojection zunächst in so viele gleiche Abschnitte, als man Umgänge haben will, z. B. sechs*), bestimme ferner auf dem Ringe eine beliebige Anzahl von Parallelkreisen, z. B. acht, deren Abstände auf der Fläche gleich sind und deren Eintheilung bei $A', B', C', D' \ldots$ gleich wie in Fig. II, Tafel XXV bestimmt wurde. Theilt man nun im Grundrisse eine jede Gangweite auf dem Ringe in ebenso viele gleiche Abschnitte, als man Parallel- oder Hilfskreise auf dem Ringe angenommen hat, also in acht, und zieht durch diese Theilpunkte nach dem Punkte m Gerade, so sind die Geraden $a\,1 \ldots 5\,e \ldots i\,g \ldots$ Horizontalprojectionen der auf dem Ringe liegenden Meridiane**), und die Schnitte solcher Meridiane mit den vorhin gezeichneten Parallelkreisen, nämlich $a, b, c, d, e, f, g, h \ldots$ sind Punkte, durch welche die in a beginnende gewundene Linie gezeichnet werden kann.

Eine von 1 aus zu zeichnende Linie geht durch die Punkte $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ldots$ Ist auf solche Weise die Horizontalprojection vollendet, so ergeben sich die Verticalprojectionen $a', b', c', d', e', f', g', h' \ldots$, sowie $1', 2', 3', 4', 5', 6', 7', 8' \ldots$ der einzelnen Punkte, welche sämmtlich auf den durch $(ABCD \ldots A'B'C'D' \ldots)$ gehenden Parallelkreisen liegen, in bekannter Weise. Diese Punkte verbinde man sodann durch eine stetige Curve. In Fig. IV sind ferner im Grundrisse von den Punkten a, b, c, d, e aus nach rechts und links gleiche Breiten ax, ay, bv, bw, ct, cu u. s. w. auf die Parallelkreise angetragen und die Punkte $x, v, t, r \ldots$ und $y, w, u, s \ldots$ verbunden worden; damit ist dann ein Theil eines Bandes oder Streifens bestimmt, welcher sich um den Ring herum windet und dessen Verticalprojection wieder wie vorhin die Mittellinie gefunden wurde. Solche Bänder kommen z. B. als Verzierungen an Rundstäben öfters vor. Ein Beispiel der Anwendung zeigt später Fig. IV, Tafel XXXVIII.

*) Da hier nur die vordere Hälfte des Ringes dargestellt ist, so wurde derselbe aussen auf dem grössten Kreise zunächst in drei gleiche Theile getheilt, diese halbirt, eine jede solche Hälfte in je vier gleiche Theile eingetheilt und aus diesen Theilpunkten nach m gezogen.

**) In der Verticalprojection sind ausser den als Kreise sich darstellenden Meridianen nur fünf Meridiane angegeben und die übrigen Verticalprojectionen weggelassen worden, da sie für die Bestimmung der gewundenen Linie nicht nothwendig sind, indem deren Punkte auch auf den Parallelkreisen liegen und somit durch die Projicirenden aus den entsprechenden Punkten des Grundrisses gefunden werden konnten.

Darstellung windischer Flächen.

Tafel XXXII. Figur I—III.

§ 184. Unter einer windischen (windschiefen) Fläche versteht man im Allgemeinen eine solche, in welcher die geraden Erzeugenden paarweise aufeinander folgend nicht in einer Ebene liegen, also kein ebenes Flächenelement bilden.

Je nach dem Gesetze, nach welchem sich die gerade Erzeugende bewegt, oder auch nach der Form und Lage derjenigen Linien, auf welchen die Erzeugende fortgleitet, können windische Flächen sehr verschieden sein, und gibt es daher sehr viele Gattungen oder Arten solcher Flächen, von welchen hier nur einige der bekanntesten erwähnt werden sollen.

1. Eine windschiefe Fläche entsteht, wenn sich eine Gerade als Erzeugende über zwei, nicht in einer und derselben Ebene liegende Linien als Leitenden so bewegt, dass die Erzeugende stets mit einer Ebene (Richtungsebene) parallel bleibt (siehe Fig. I), oder

2. wenn eine gerade Erzeugende über drei Linien als Leitenden, welche paarweise nicht in einer Ebene liegen, sich derart fortbewegt, dass sie dieselben in jeder ihrer Lagen schneidet, d. i. auf ihnen liegt (siehe Fig. II).

Im ersten Falle können die Leitlinien sowohl krumme als auch gerade sein; im zweiten Falle ist unter allen Umständen eine windische Fläche möglich, wenn die Leitenden drei Gerade sind; sind es aber krumme Linien, so hängt es von der Gestalt, Lage und Ausdehnung derselben ab, ob mit ihnen als Leitlinien überhaupt eine gesetzmässige krumme Fläche möglich ist oder nicht. Sind die im ersten Falle erwähnten Leitlinien Gerade, so entsteht eine sog. windschiefe Ebene, wie solche ein jedes verzogene Reissbrett oder aufgespannter Rahmen veranschaulicht. Die Fläche heisst alsdann auch das windische oder hyperbolische Paraboloid, weil ihre Schnitte durch Ebenen Hyperbeln oder Parabeln sind. Im zweiten Falle entsteht die gleiche windische Fläche, wenn die Leitenden Gerade sind.

3. Zu dieser Art der windschiefen Flächen gehört auch das sog. Drehungshyperboloid mit einem Mantel*),

*) Dasselbe entsteht auch durch Drehung einer Hyperbel um ihre Nebenachse (vergl. § 154, Fig. IV, Tafel XXII), während durch Drehung einer Hyperbel

bei welchem die Erzeugende eine zur Drehungsachse windschiefe Gerade ist, d. h. dieselbe weder schneidet noch parallel zu derselben ist, mit ihr somit kein ebenes Flächenelement bildet (siehe Fig. III). Dasselbe entsteht, indem eine gerade Erzeugende um die Achse rotirt und dabei zu dieser stets die gleiche ursprüngliche Lage einnimmt, so dass also jeder Punkt der Erzeugenden einen Kreis beschreibt, dessen Ebene senkrecht zur Achse ist.

§ 185. In Fig. I ist ein windisches Paraboloid und dessen Schnitt mit einer zur horizontalen Tafel senkrechten Ebene $(efgh,\ e'f'g'h')$ zur Darstellung gebracht. Die beiden Geraden $(ab,\ a'b')$, $(cd,\ c'd')$ sind als die Leitlinien, und eine erste gerade Erzeugende $(ac,\ a'c')$ ihrer Lage nach in der Horizontalprojection ac zuerst bestimmt.

Denkt man sich durch ac eine zur horizontalen Tafel senkrechte Ebene, so kann diese als die Richtungsebene betrachtet werden, zu welcher parallel sämmtliche Erzeugenden, also auch ihre Horizontalprojectionen liegen müssen. $1\ 6$, $2\ 7$, $3\ 8 \ldots$ sind die Horizontalprojectionen solcher Erzeugenden.

Man theile daher die Geraden ab und cd von a und c aus in je eine Anzahl gleicher Theile, verbinde diese Theilpunkte durch Gerade, bestimme die Verticalprojectionen derselben auf den Leitlinien und verbinde die Punkte, wie c', a', $1', 6'$, $2', 7' \ldots$ der Ordnung nach, so sind die beiden Projectionen des windischen Paraboloides gefunden. Die Schnittpunkte der einzelnen Erzeugenden mit der Fläche $(efgh,\ e'f'g'h')$ ergeben in ihrer Verbindung die Schnittlinie $(ki,\ k'i')$ der windischen und ebenen Fläche.

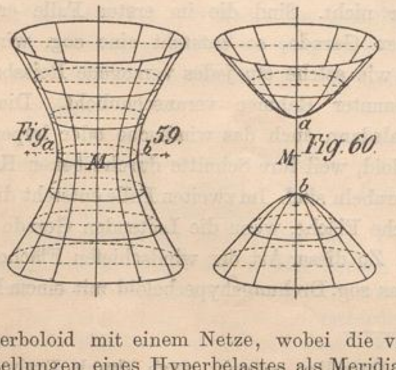
§ 186. In Fig. II ist dieselbe Fläche dargestellt, wenn drei Gerade $(ab,\ a'b')$, $(cd,\ c'd')$, $(ef,\ e'f')$, welche paarweise nicht parallel, als Leitlinien gegeben sind. Hierbei wurde eine der Geraden, z. B. $(ef,\ e'f')$ senkrecht zur horizontalen Tafel angenommen.*)

Denkt man sich nun durch die Gerade $(ef,\ e'f')$ eine Anzahl von Ebenen senkrecht zur horizontalen Tafel, so schneiden letztere die Leitlinien $(cd,\ c'd')$ und $(ab,\ a'b')$ in zwei Punkten. Solche Schnittpunkte sind z. B. $b, 5, b', 5' \ldots a, 10, a', 10'$, und die Geraden, welche durch solche Schnittpunkte gelegt werden, gehen auch durch die Gerade $(ef,\ e'f')$, da sie mit dieser in je einer durch $(ef,\ e'f')$ gehenden Ebene liegen.

Man theile daher etwa die Horizontalprojection ab einer schiefen Leitlinie in eine Anzahl gleicher Theile, ziehe aus diesen Theilpunkten durch die als Punkt sich darstellende Senkrechte (also durch ef), bestimme Punkte, wie $b, 4, 3 \ldots$, ebenso die Punkte $5, 6, 7 \ldots$ in ihrer Verticalprojection auf den Leitlinien $a'b'$, $c'd'$, und ver-

---

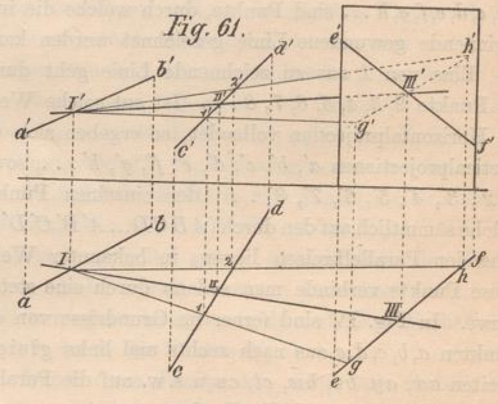
um ihre Hauptachse das Rotationshyperboloid mit zwei Mantelflächen oder zwei Netzen entsteht. Fig. 59 zeigt



das Hyperboloid mit einem Netze, wobei die verschiedenen Stellungen eines Hyperbelastes als Meridiane eingezeichnet sind. Fig. 60 zeigt das Hyperboloid mit zwei Netzen.

---

*) Die Lösung der Aufgabe ist dadurch bedeutend einfacher, als wenn alle drei Leitlinien zu beiden Tafeln schiefe Stellung haben, da in letzterem Falle, um die Lage einer jeden Erzeugenden bestimmen zu können, eine Reihe von Hilfsconstructionen nöthig wären. Um übrigens den Fall nicht unerwähnt zu lassen, denke man sich in Fig. 61 die drei Geraden $(ab,\ a'b')$, $(cd,\ c'd')$, $(ef,\ e'f')$ als Leitlinien und ferner auf $(ab,\ a'b')$ einen Punkt (I, I') beliebig angenommen. Soll nun durch den Punkt (I, I') eine Erzeugende gelegt werden, welche auch auf den beiden andern liegt, d. i. die beiden andern schneidet, so



lege man durch (I, I') und einen beliebigen Punkt $(1, 1')$ einer zweiten Leitlinie, z. B. $(cd,\ c'd')$, eine Gerade und ebenso aus (I, I') eine weitere Gerade durch einen beliebigen Punkt $(2, 2')$ derselben Leitlinie; die Geraden $(I1,\ I'1')$, $(I2,\ I'2')$ liegen sodann in einer Ebene (siehe § 108). Denkt man sich nun ferner durch $(e, f,\ e'f')$ eine Hilfsebene senkrecht zur horizontalen Tafel, so durchschneidet, wenn genügend verlängert, $(I1,\ I'1')$ diese Hilfsebene in einem Punkte (g, g') und $(I2,\ I'2')$ dieselbe in (h, h'); $g'h'$ bildet in der Verticalprojection den Schnitt beider Ebenen. Da nun $(fe,\ f'e')$ und $(gh,\ g'h')$ in einer Ebene liegen, so gehört der Schnittpunkt (III, III') sowohl der Geraden $(ef,\ e'f')$, als auch der Ebene $(hIg,\ h'I'g')$ an; zieht man daher von (I, I') nach (III, III') die Gerade, so schneidet diese in (II, II') auch $(cd,\ c'd')$, weil letztere ebenfalls in der Ebene $(gIh,\ g'I'h')$ liegt.

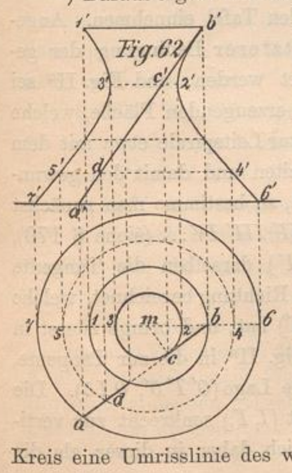
binde dieselben in gleicher Ordnung durch Gerade, so sind die beiden Projectionen des windischen Paraboloides gefunden. Auf der linken Seite wurde diese Fläche durch eine Ebene ($ABIII$, $A'B'II'I'$) begrenzt. Ferner bildet der kleine Bogen, dessen Verticalprojection $i'k'$ ist, den Schnitt der windischen Fläche mit der verticalen Tafel.

§ 187. In Fig. III wurde bei der Darstellung des Drehungshyperboloides zunächst die Achse (AB, $A'B'$) und sodann die Lage ($a\,1$, $a'\,1'$) einer ersten Erzeugenden bestimmt; da während der Drehung dieser Geraden jeder Punkt derselben einen Kreis um die Achse beschreibt*), so liegen auch die Endpunkte ($a, 1$, $a', 1'$) je in einem Kreise, deren Ebenen senkrecht zur Achse sind, und ($a, b, c, d, e \ldots a', b', c', d', e'$) . . ., sowie ($1, 2, 3, 4 \ldots 1', 2', 3', 4'$) . . . sind deren Projectionen. Theilt man nun den Basiskreis von a aus in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. 24, ebenso den zweiten Kreis von 1 aus in dieselbe Anzahl gleicher Theile und verbindet a mit 1, b mit 2, c mit 3 u. s. w., so ist damit die Horizontalprojection dieser windischen Fläche bestimmt. Die Verticalprojection ergibt sich auf bekannte Weise mittels der Projicirenden aus a, b, c, d . . . und $1, 2, 3, 4$ . . .

Damit die Ausführung möglichst einfach werde, ist der Fusspunkt (a, a') einer ersten Erzeugenden so gewählt, dass derselbe auf einer Geraden $n\,A\,a$ und je zwei weitere Fusspunkte, wie z. B. b, y und $c, x \ldots$, in ihrer Verticalprojection in b', y' und c', x' zusammenfallen. Ebenso wurde der obere Endpunkt ($1, 1'$) der ersten Erzeugenden derart angenommen, dass 1, 7 und 2, 6 . . . in je einer Projicirenden liegen, $1'$, $7'$ und $2'$, $6'$ . . . der Verticalprojection somit wieder zusammenfallen. Die rückwärtsliegenden, also unsichtbaren Theile der Erzeugenden wurden punktirt. Dasselbe gilt auch von Fig. I und II.

---

*) Daraus ergibt sich für die Ausführung der beiden Projectionen noch ein zweites und kürzeres Verfahren. Man braucht nämlich nur eine Reihe solcher Kreise, welche von Punkten (a, a'), (b, b'), (c, c') . . . der Erzeugenden beschrieben werden, in den beiden Projectionen zu bestimmen (siehe Fig. 62) und an die Verticalprojectionen dieser Kreise die Umrisslinien $1'\,3'\,5'\,7'$ und $b'\,2'\,4'\,6'$ zu zeichnen. In der Horizontalprojection bildet ausser dem untern und obersten auch der die Gerade $a\,b$ in c berührende Kreis eine Umrisslinie des windischen Hyperboloides.



Darstellung der geraden und schiefen Schraubenfläche und eines gewundenen Körpers.

Tafel XXXIII. Figur I—III.

§ 188. Fig. I und II sind Darstellungen von Schraubenflächen. Eine Schraubenfläche entsteht, wenn eine gerade Erzeugende über eine Schraubenlinie oder Cylinderspirale sich derart bewegt, dass die Erzeugende die Achse der Spirale unter constantem Winkel schneidet. Ist dieser Winkel ein rechter, d. h. steht die Erzeugende in allen ihren Lagen, welche sie während der Bewegung einnimmt, stets senkrecht gegen die Achse, so entsteht eine sog. gerade Schrauben- oder Wendelfläche (siehe Fig. I); schneidet hingegen die Erzeugende die Achse stets unter einem constanten (gleichen) schiefen Winkel, so entsteht die schiefe Schraubenfläche (siehe Fig. II). Die Schraubenfläche ist bestimmt, wenn die Leitspirale oder Schraubenlinie, die Achse und die Lage einer Erzeugenden gegen die Achse gegeben sind. Man beschreibe daher mit ma als Radius einen Kreis oder auch, wie in Fig. I, nur die vordere Hälfte desselben, theile denselben in eine Anzahl gleicher Theile, sodann theile man auch die angenommene Ganghöhe az' in ebenso viele gleiche Theile, als solche auf dem ganzen Kreise angenommen wurden, ziehe durch diese horizontale Gerade und aus den Theilpunkten der Horizontalprojection die Projicirenden, so ergeben sich die Punkte a', b', c', d', e' . . . der Leitlinie, welche sodann durch eine stetige Curve zu verbinden sind. Nimmt man als Achse statt einer Geraden einen Cylinder an (wie in Fig. I) und zeichnet man die verschiedenen Lagen der Erzeugenden nur bis zu ihren Durchgangspunkten auf der Cylinderfläche, so entsteht auf derselben durch Verbindung der Durchgangspunkte eine zweite, mehr gestreckte Schraubenlinie $1'\,g'\,2'$ . . . In Fig. I wurde ausserdem noch eine mittlere, auf der Schraubenfläche liegende Linie angegeben.

§ 189. Die Aufgabe bei Fig. II ist ähnlich wie bei Fig. I. Der Unterschied besteht nur darin, dass eine erste Erzeugende $a\,1$ schief gegen die Achse angenommen ist. Da hier $a\,1$ so gewählt wurde, dass 1 auf den Schnitt der Achse mit der dritten Horizontalen (von unten an gerechnet) fällt, so sind hier des weiteren nur noch b' mit 2, c' mit 3, d' mit 4, e' mit 5, f' mit 6, g' mit 7 u. s. w. zu verbinden, wobei die Durchgangspunkte dieser einzelnen Geraden durch den als körperliche Achse angenommenen Cylinder in ihrer Verbindung eine zweite auf dem Cylinder liegende und mehr gestreckte Schraubenlinie ergeben.

§ 190. In Fig. III ist ein gewundener Körper dargestellt, wie er ähnlich bei einem Treppengeländer vorkommt. Der Körper entsteht, wenn eine Flächenfigur wie $a'\,a''\,a'''\,b''\,c'$ . . . um eine Achse (M, M')