Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

41. Weitere Ausführung der schiefwinkligen Projectionsart.

urn:nbn:de:hbz:466:1-77566

Dieses vorausgesetzt, können wir nun zur weitern Erklärung und Begründung dieser Projectionsart übergehen.

§ 222. Bei der Construction schiefer Projectionen nimmt man in der Regel, wie bei der orthogonalen Projection, zwei zu einander senkrechte Ebenen oder Tafeln an, wobei man die horizontale Tafel als die Grundebene, auf welcher der zu projicirende Gegenstand liegt, und die verticale Tafel als die Projectionsebene (Bildfläche), auf welche projicirt wird, betrachtet. Die Schnittkante beider Tafeln heisst die Grundlinie oder Projectionsachse. Denkt man sich nun einen Punkt A^0 (Fig. 68) in der Grundebene liegend, so dass also A^0, A' die beiden orthogonalen Projectionen desselben sind (siehe § 101), und zieht man von A^0 die schief projicirende Gerade $A^0\,(A)$ gegen die unter der Projectionsachse liegende Projectionstafel, so ist der Schnittpunkt (A) der Projicirenden mit dieser Tafel die schiefe Projection des Punktes A^0. Die Lage der schief Projicirenden fällt, von oben gesehen, mit der Geraden $A^0\,a$ zusammen, so dass also $A^0\,a$ als Horizontalprojection des Projectionsstrahles $A^0\,(A)$ zu betrachten ist (vgl. § 96, Fig. II, Tafel IX). Bis jetzt ist der Vorgang räumlich, wie in Fig. I, Tafel X, ausgeführt, um aber denselben in einer Ebene, d. i. der Zeichnungsfläche darzustellen, wurde die Grundebene mit dem darinliegenden Punkt A^0 etwa nach abwärts umgelegt, so dass dieselbe mit der verticalen Projectionsebene zusammenfällt und damit A^0 nach A zu liegen kommt. Die Geraden $A^0\,a$ und $A^0\,(A)$ projiciren sich sodann nach $A\,a$ und $A'\,(A)$ in die Tafel $Q\,R\,II'\,I'$, welche zugleich als die vorhin mit dem Punkte A^0 umgelegte Grundebene zu betrachten ist. Denkt man sich nun diese Tafel $Q\,R\,II'\,I'$ in gerader Ansicht, so dass sie mit der Zeichenfläche identisch ist, so sind in Fig. 69 A, A' die orthogonalen Projectionen; (A) ist die aus den orthogonalen Projectionen abgeleitete schiefe Projection eines in der Grundebene liegenden Punktes A^0, und $A\,a$, $A'\,(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden. (Vergl. $A\,a$, $A'\,(A)$ in Fig. 69 mit $A\,a$, $A'\,(A)$ in Fig. 68.) Denkt man sich nun ferner in Fig. 68 von A^0 aus zwei Gerade $A^0\,Q$ und $A^0\,R$ gezeichnet, welche in der Grundebene und deren Endpunkte Q und R in der Projectionsachse liegen, so sind diese Endpunkte Q und R zugleich orthogonale wie klinogonale (schiefe) Projectionen, und (A) mit Q und R verbunden ist die schiefwinklige Projection der beiden Geraden $A^0\,Q$, $A^0\,R$ oder, was dasselbe ist, des Winkels $R\,A^0\,Q$. Denkt man sich ferner in A^0 eine Senkrechte $A^0\,z$ zur Grundebene, so ist, wie aus Fig. 68 ersichtlich, deren schiefe Projection $(A)\,z'$ senkrecht zur Projectionsachse oder Grundlinie $Q\,R$, und ihre schiefe Projection erscheint in wahrer Länge, da $A^0\,z$ parallel zur Projectionsebene ist. Nimmt man ferner die beiden Geraden $A^0\,Q$, $A^0\,R$ als rechtwinklig zu einander an, so können die drei Geraden $A^0\,Q$, $A^0\,R$, $A^0\,z$ als die Schnittkanten (Coordinatenachsen oder Coordinaten*) dreier zu einander senkrechter Ebenen (Coordinatenebenen) betrachtet werden. A^0 ist der Anfangspunkt dieser Coordinaten, (A) die schiefe Projection desselben, und die von (A) ausgehenden schiefen Projectionen der Coordinaten wollen wir als das Achsenkreuz bezeichnen. Ist einmal die schiefe Projection der Coordinatenachsen, d. i. das Achsenkreuz gezeichnet, so sind auch die übrigen Kanten eines Körpers, von welchen z. B. (A) eine Ecke sein könnte, ihrer Lage nach bestimmt, da nach § 93 parallele und gleichlange Gerade auch in ihren schiefen Projectionen parallel und unter sich gleich lang bleiben.

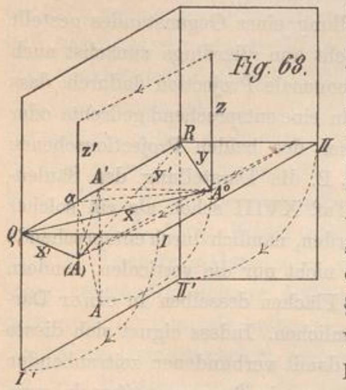

Fig. 68.

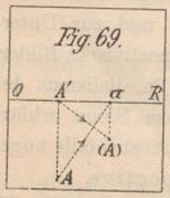

Fig. 69.

geneigt sind, in derselben nach ihrer wahren Grösse, ja sogar grösser erscheinen können; doch wird man eine Darstellungsart wie letztere nach Möglichkeit vermeiden, da solche Bilder unschön und stets mehr oder weniger Verzerrungen sind.

Weitere Ausführung der schiefwinkligen Projectionsart.

Tafel XLV. Figur I—IX.

§ 223. In Fig. I sind die Geraden $A\,Q$, $A\,R$ die Orthogonalprojectionen zweier in der umgelegten Grundebene rechtwinklig zu einander liegenden Coordinaten, A, A' die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten und (A) die schiefe Projection desselben, wobei $A\,a$, $A'\,(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden sind. Da nun die Punkte Q und R in der Projectionsachse liegen, so sind sie zugleich auch ihre eigenen schiefen Projectionen, und die Geraden $(A)\,Q$, $(A)\,R$ sind schiefe Projectionen der Coordinaten $A\,Q$, $A\,R$. Eine dritte Coordinate, welche zu den beiden gegebenen $A\,Q$, $A\,R$ senkrecht steht, und welche wir hier mit $A\,z$ bezeichnen wollen, ver-

*) d. h. zugeordnete, zu einander senkrecht stehende Linien. Die durch je zwei Coordinaten gelegten Ebenen stehen senkrecht zu einander, oder umgekehrt, drei senkrecht zu einander stehende Ebenen schneiden sich in den Coordinatenachsen, und diese bilden die Schnittkanten (Achsen) der Ebenen.

kürzt sich, da sie senkrecht zu der von AQ, AR gebildeten Coordinatenebene steht, in ihrer orthogonalen Projection bei Az zu einem Punkte, und ihre schiefe Projection erscheint als eine über (A) errichtete Senkrechte zur Projectionsachse. $(A)Q$, $(A)R$, $(A)z'$ bilden nunmehr das Achsenkreuz oder die schiefe Projection der Coordinatenachsen. Der Kürze halber soll in Zukunft jede der durch das Achsenkreuz bestimmten Richtungen nur durch einen Buchstaben, und zwar die Richtung $(A)Q$ mit x', $(A)R$ mit y' und $(A)z'$ mit z' bezeichnet werden; ferner soll die Orthogonalprojection der Coordinaten: orthogonaler Grundriss, die schiefe Projection dagegen da, wo kein Missverständniss zu befürchten ist, kurzweg Grundriss genannt werden.

§ 224. Das Achsenkreuz $x'y'z'$ kann innerhalb bestimmter Grenzen beliebig angenommen werden.*) Hätte man z. B. den Anfangspunkt (A) des Achsenkreuzes, ebenso die Richtungen x', y', z', sowie die Grundlinie (Projectionsachse QR) beliebig gegeben, so hätte sich ebenso gut nachträglich der orthogonale Grundriss dadurch bestimmen lassen, dass man um QR als Durchmesser einen Halbkreis beschrieb, auf demselben den Punkt A beliebig bestimmte**) und von A eine Senkrechte gegen die Grundlinie zeichnete, wodurch sich die orthogonale Verticalprojection A' ergab. Zieht man ferner aus (A) eine Senkrechte $(A)a$ bis zur Projectionsachse, sowie die Geraden Aa, $A'(A)$, so sind die beiden letzteren die orthogonalen Projectionen jener schief projicirenden Geraden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

In Fig. I betrachte man ferner die Senkrechte RA'' als einen Seitenriss (dritte Projection) der Grundebene, A'' als eine dritte orthogonale Seitenprojection des Anfangspunktes und $A''a''$ als den Seitenriss der schief projicirenden Geraden (vgl. Fig. 68). Die Lage $A''a''$ konnte, nachdem das Achsenkreuz gegeben, nachträglich dadurch bestimmt werden, dass man $(A)A'''$ parallel der Grundlinie zog und die Strecke Ra'' gleich RA''' machte.

§ 225. Es erübrigt nun noch anzuführen, auf welche Weise die modificirten, d. i. verkürzten oder veränderten Längen des Achsenkreuzes gemessen werden, oder auf welche Weise man einzelne, z. B. an sich gleiche, in x' und y' sich aber ungleich verkürzende Strecken auftragen kann. Da nämlich alle mit der Richtung x' parallel laufende Linien sich in dem Verhältniss wie $(A)Q : AQ$ [sprich $(A)Q$ zu AQ] oder $x' : x$ verkürzen, und ebenso das Verkürzungsverhältniss aller mit y' gleichlaufenden Geraden gleich $(A)R : AR$ (d. h. $y' : y$) ist, so braucht man nur mit den Strecken AQ, $(A)Q$, sowie AR, $(A)R$ sogenannte Proportional- oder Winkelmassstäbe herzustellen, aus welchen dann die aufzutragenden Grössen in ihren Reductionen entnommen werden können.

In Fig. I[b] sind solche Winkelmassstäbe gezeichnet. Man mache hierbei auf einer Geraden Sa die Strecke Sa gleich AR in Fig. I, beschreibe mit dieser Grösse als Radius aus S einen Bogen, trage auf diesen die verkürzte Strecke $(A)R$ als Sehne in ab auf und verbinde S mit b durch eine Gerade, so ist aSb der für die Verkürzungen y' benützbare Winkelmassstab. In gleicher Weise wurde auch der Winkelmassstab für die Verkürzungen x' gefunden. Man trage nämlich auf einen Schenkel Sb des schon vorhandenen Winkels*) Sc gleich AQ in Fig. I auf, beschreibe mit dieser Grösse als Radius aus S einen Bogen, trage auf diesen die Strecke $(A)Q$ von c aus in cd als Sehne auf und verbinde S mit d durch eine Gerade, so verhält sich also in beiden Winkeln $Sa : ab = AR : (A)R$ und $Sc : cd = AQ : (A)R$. Für die mit z' parallelen Richtungen ist ein Reductionsmassstab nicht nöthig, da auf diesen alle Masse in ihrer wahren Grösse aufgetragen werden können.

Angenommen, es sei in Fig. I[a] a ein beliebiger Punkt, aus welchem parallel mit x', y' und z' die Coordinaten gezeichnet wurden, und es wäre eine erste Coordinate z' (also die Senkrechte in a) als wahre Grösse einer Würfelkante bestimmt, so beschreibe man mit dieser als Radius aus S in Fig. I[b] einen Bogen efg durch beide Winkel y und x, nehme die Abstände der Punkte ef, fg in den Zirkel, trage sie in Fig. I[a] von a nach b und von a nach c an, ziehe aus c eine Parallele zu ab und aus b eine Parallele zu ac, so ergibt sich d als vierter Punkt des horizontalen Quadrates. Errichtet man nun über c, d, b Senkrechte von gleicher Höhe wie über a und verbindet deren obere Endpunkte in entsprechender Ordnung, so ist die schiefe Projection des Würfels vollendet. Zieht man in der Basisfläche $abcd$ des Würfels eine Diagonale ad, so hat diese gleiche Richtung mit einer in Fig. I gezeichneten Geraden $(A)d'$, welche auch hier als die schiefe Projection der Halbirungslinie des Winkels $Q(A)R$ zu betrachten ist; dieselbe hätte man auch durch Halbiren des

---

*) Der Winkel $Q(A)R$ kann zwar beliebig, soll aber stets stumpf angenommen werden, da sonst Zerrbilder entstehen. Auch thut man gut, den Punkt (A) seitlich nicht allzu weit von der Geraden AA' anzunehmen.

**) Der Winkel QAR wird dabei stets ein rechter sein, gleichviel wo A auf dem Halbkreise angenommen wird, da er über dem Durchmesser desselben liegt (siehe § 56, Fig. 31).

*) Die Winkelmassstäbe könnten zwar auch getrennt gezeichnet werden, doch bietet ihr Aneinanderlegen den Vortheil, dass die Verkürzungen an sich gleicher Grössen durch einen Bogen aus ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt gefunden sind.

Winkels QAR, d. i. der orthogonalen Projection erhalten können.*)

§ 226. Projiciren sich drei an sich gleiche Grössen, wie z. B. die Würfelkanten in Fig. I^a, als ungleiche Grössen, so heisst eine derartige schiefe Projection eine trimetrische**); eine schiefe Projection, bei welcher zwei Richtungen sich gleichartig verkürzen oder auch in wahrer Grösse erscheinen, heisst eine dimetrische***); eine schiefe Projection, bei welcher endlich alle drei Richtungen unverkürzt erscheinen, heisst eine isometrische Projection.†)

§ 227. In Fig. II ist x, y, z der orthogonale Grundriss der Coordinatenachsen so gegeben, dass x parallel zur Projectionsachse, also auch parallel zur Projectionsebene, und y senkrecht zu derselben steht. Die Coordinate z steht in allen Fällen immer parallel zur Projections-, also senkrecht zur Grundebene und erscheint somit in letzterer stets als ein Punkt.

A, A' sind die Orthogonalprojectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, (A) die schiefe Projection desselben, Aa, $A'(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden und x', y', z' sonach das Achsenkreuz.

Der Punkt (A) konnte beliebig angenommen werden, und die von (A) ausgehende Coordinate x' ist parallel zur Projectionsebene und erscheint daher wie z' unverkürzt. Das Verkürzungsverhältniss aller Geraden, welche mit y' parallel sind, ist gleich $y' : y$. Um daher auf einem Würfel Fig. II^a, dessen Kanten mit dem Achsenkreuz parallel sind, die verkürzte Seite zu bestimmen, zeichne man in Fig. II^b eine Gerade Sa, mache Sa gleich AA' in Fig. II, beschreibe aus S einen Bogen ab, trage darauf von a, $(A)A'$ als Sehne in ab auf und ziehe Sb. Beschreibt man nun mit der Länge einer Würfelkante (Richtung $x' = z'$ gleich der wahren Grösse) aus S einen Bogen in den Winkel aSb und trägt dessen Sehne auf die mit y' parallelen Richtungen in Fig. II^a an u. s. w., so ist damit der Würfel bestimmt.

Diese Darstellung ist eine dimetrische, da hier nur zwei verschiedene Grössen, nämlich die wahren, x' und z', und die verkürzte der Richtungen, y', in Betracht kommen.

Da bei dieser Darstellung gewisse Flächen des Würfels parallel mit der Projectionsebene sind, so wollen wir die Stellung des Würfels in Fig. II^a von der in Fig. I^a dadurch unterscheiden, dass wir erstere als Parallelstellung oder gerade Ansicht, letztere als schräge Stellung oder schräge Ansicht bezeichnen.

Der Körper in Fig. I^a bietet dabei eine Daraufsicht von links, d. h. der Beschauer ist links oben in unendlicher Entfernung zu denken.*) Aehnliches gilt auch von Fig. II und II^a, welche eine Daraufsicht von der rechten Seite darstellen, weil die schiefe Projection (A) des Anfangspunktes der Coordinaten in Fig. II links von A, A' liegt.

§ 228. In Fig. III sind A, A' die beiden orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, (A) die schiefe Projection desselben u. s. w., und (A) wurde hier innerhalb der Senkrechten AA' angenommen; daraus erhellt, dass der schief projicirende Strahl nunmehr ohne seitliche Abweichung von oben einfällt, also in einer Ebene liegt, welche selbst senkrecht zur Projectionsebene steht (vgl. Fig. 70). Ferner ergibt sich hierdurch, dass in Fig. III die beiden Längen $Q(A)$, $(A)R$ des Achsenkreuzes sich zu einander ebenso verhalten, wie die orthogonalen Horizontalprojectionen QA, AR, und ebenso wie deren orthogonale Verticalprojectionen QA', $A'R$, d. h. dass die Strecken $Q(A) : (A)R = QA : AR = QA' : A'R$, oder $= x' : y' = x : y = QA' : AR$, also gleich proportionirt sind. Hierbei konnte Punkt (A), sowie x', y', z' als Achsenkreuz zuerst beliebig gegeben und mittels einer Senkrechten durch (A) auf dem um QR als Durchmesser beschriebenen Halbkreise, A sowie A' auf der Projectionsachse nachträglich bestimmt werden. Der Grundriss $(A)Dg$ einer Halbirungslinie des Winkels $Q(A)R$ wurde durch Halbiren des orthogonalen Grundrisses, d. i. des Winkels QAR gefunden. Eine Halbi-

---

*) Da die Halbirungslinie des Winkels QAR die Projectionsachse in d' schneidet, d' aber seine eigene schiefe Projection ist, so ist offenbar auch $(A)d'$ die schiefe Projection der Halbirungslinie. Ferner sei hier noch bemerkt, dass, wenn nöthig, auch für die Verkürzung dieser Halbirungslinie ein Reductionsmassstab (wie überhaupt für jede Richtung), hier z. B. aus den Strecken Ad', $(A)d'$ in gleicher Weise wie vorhin für die Verkürzungen x' und y', gezeichnet werden könnte.

**) d. h. eine durch drei verschiedene Massstäbe zu messende Projection.

***) d. h. eine durch zwei verschiedene Massstäbe zu messende Projection.

†) Darunter versteht man eine Projection, bei welcher alle drei Richtungen mit einem Massstab gemessen werden können. Bei der schiefen Projection erscheinen, wie wir später sehen werden, die drei Richtungen der Coordinaten in ihrer wahren Grösse; es gibt jedoch auch eine orthogonale Projectionsart, welche ebenfalls als isometrisch bezeichnet wird und bei der sich alle drei Richtungen in einem bestimmten, jedoch gleichartigem Verhältniss verkürzen, bei welcher daher ebenfalls nur ein Massstab zum Auftragen der Grössen nöthig ist.

*) Da nach optischen Gesetzen ein Beschauer den Körper aus unendlicher Entfernung natürlich nicht mehr sehen könnte, so bezieht sich dieser Ausdruck nicht auf das physische Sehen, sondern ist nur in dem Sinne zu verstehen, dass die projicirenden Strahlen unter sich parallel, also aus einem unendlich oder sehr weit entfernt liegenden Punkte kommen und von links oben schief gegen die Bildfläche einfallen. Dieser unendlich entfernt liegende Vereinigungspunkt der Projicirenden ist hier als das Auge des Beschauers gedacht.

rungslinie wie $(A)\,Dg$ wollen wir fernerhin als **Diagonale** bezeichnen.*) Die Constructionen der Winkelmassstäbe sind in der schon früher erwähnten Weise auszuführen. Es sind also in Fig. III^b wieder $S\,a$ gleich $A\,Q$, und $a\,b$ als Sehne gleich $(A)\,Q$ in Fig. III; ebenso $S\,d$ gleich $A\,R$, und $d\,e$ als Sehne gleich $(A)\,R$ in Fig. III.

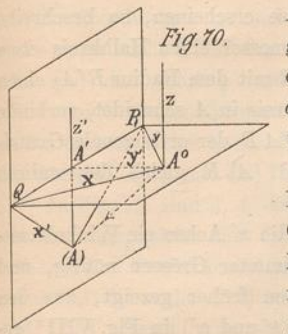
Fig. 70.

In Fig. III^a ist eine Platte mit quadratischer Grundfläche mittels der Massstäbe x und y gezeichnet. Die Grösse einer Quadratseite ist gleich $S\,c$ in Fig. III^b angenommen und damit aus S ein Bogen beschrieben worden u. s. w.

§ 229. Fig. IV zeigt dieselbe Aufgabe wie Fig. I, nur mit dem Unterschiede, dass hier der schief projicirende Strahl von der Grundebene nach aufwärts gegen eine **über der Projectionsachse** aufgestellte Projectionsebene fällt (vgl. Fig. 71), und wobei man sich

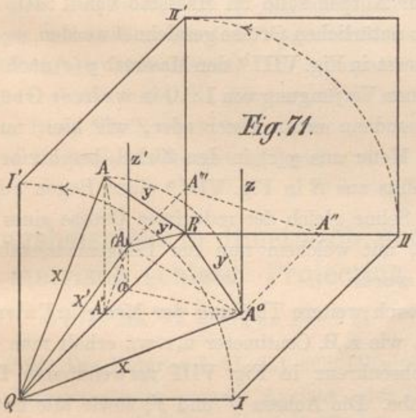
Fig. 71.

die Grundebene **mit dem darin enthaltenen orthogonalen Grundriss** ebenfalls um QR nach **aufwärts** in die Projectionsebene geklappt dachte, so dass also in Fig. IV A, A' die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, $A\,a$, $A'\,(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden sind, und (A) die schiefe Projection dieses Punktes und damit x', y', z' das Achsenkreuz ist. Die Projection ist ebenso wie Fig. I und III eine **trimetrische**.

Fig. IV^a zeigt eine parallel mit diesem Achsensystem gezeichnete quadratische Platte und bietet eine Daruntersicht von links. Die wahre Grösse einer Quadratseite ist gleich $S\,e$ in Fig. IV^b. Die Construction der Winkelmassstäbe, sowie das Antragen der reducirten Grössen für die Richtungen x' und y' des Achsenkreuzes geschieht auf die bereits wiederholt erklärte Weise ($S\,a = A\,R$, $a\,b$ als Sehne $= (A)\,R$ u. s. w.).

§ 230. In Fig. V ist die gleiche Aufgabe wie bei Fig. II wiederholt, nur mit dem Unterschiede, dass hier der schief projicirende Strahl des Anfangspunktes der Coordinaten von der Grundebene aus von rechts nach links aufwärts geht und die Grundebene mit dem darinliegenden orthogonalen Grundriss nicht in die Projectionstafel **über** der Achse, wie bei Fig. IV, sondern nach abwärts geklappt wurde*), so dass sie mit dieser eine Ebene bildet (vgl. Fig. 72 mit Fig. V).

Fig. V^a zeigt einen Würfel in dieser Projection, dessen Verkürzungen y' mittels des Winkels $a\,S\,b$ bestimmt sind. ($S\,a$ gleich $A\,A'$, $a\,b$ als Sehne gleich $(A)\,A$.) Die Projection ist gleich Fig. II^a eine **dimetrische** in Parallelstellung zur Projectionsebene, und erscheint als eine Daruntersicht von rechts.

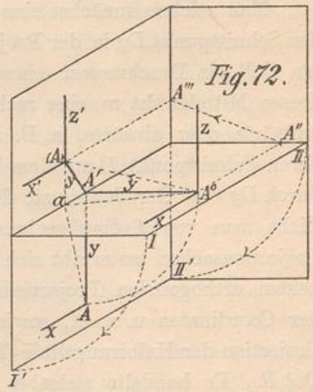
Fig. 72.

§ 231. In Fig. VI sind A, A' die beiden orthogonalen Projectionen, (A) die schiefe Projection eines in der Grundebene liegenden Punktes. Da (A) in der nach aufwärts verlängerten Senkrechten $A\,A'$ liegt, so folgt daraus, dass der schief projicirende Strahl ohne seitliche Abweichung von unten nach aufwärts gegen die Projectionsebene einfällt.

A'' ist ein Seitenriss des Punktes, und $A''\,A'''$ ein Seitenriss oder eine dritte orthogonale Seitenprojection der schief projicirenden Geraden u. s. w. (Vgl. $A''\,A'''$ in Fig. 72.) Die Coordinatenachsen x, y oder das Achsenkreuz könnten nun nachträglich in schräger oder gerader Ansicht beliebig bestimmt werden. Wäre Letzteres der Fall gewesen, so würde ein Würfel, dessen Kanten mit diesem Achsenkreuz **parallel** sind, sich so darstellen, dass die z' Achse mit der y' Achse in eine Senkrechte fällt und damit gewisse Flächen sich als Gerade projiciren (siehe Fig. 73). Man wird daher eine solche dimetrische Dar-


Fig. 73.

*) Und zwar deshalb, weil eine derartige Halbirungslinie bei den Constructionen von Flächen und Körpern häufig als Diagonale vorkommt.

*) Es ändert wie leicht ersichtlich, an der Sache selbst nichts, ob man die Grundebene mit dem darin liegenden orthogonalen Grundriss nach aufwärts oder nach abwärts um die Projectionsachse dreht; es kann bald das eine, bald das andere geschehen, je nachdem es der Raum oder sonstige Rücksichten gestatten. So ist z. B. bei Fig. I, II, III, V, VI, VIII, IX diese Grundebene u. s. w. um die Projectionsachse oder Grundlinie **nach abwärts**, bei Fig. IV und VII nach **aufwärts** gedreht.

stellungsart bei der geraden Ansicht rechtwinkliger Körper wegen des ungünstigen Bildes nicht wählen. Dagegen eignet sie sich, wie wir später sehen werden, sehr gut für die Darstellung runder Formen, sowie für die Darstellung rechtwinkliger Körper bei schräger Ansicht, von welchen schon Fig. III[a] ein Beispiel, jedoch mit Daraufsicht, zeigt.

§ 232. In Fig. VII ist zuerst x', y', z' als das Achsenkreuz, sowie $a\,b\,c\,d$ beliebig als schiefe Projection oder Grundriss eines Quadrates gegeben, und es sollen aus dieser Annahme nachträglich die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten gefunden werden.

Man zeichne zunächst eine Diagonale $b\,d$, markire den Schnittpunkt Dg in der Projectionsachse, beschreibe um $Q\,R$ als Durchmesser einen Kreis und ziehe aus dessen Mittelpunkt m eine rechtwinklige Gerade nach aufwärts oder abwärts, z. B. nach abwärts, markire deren Schnittpunkt E auf dem Kreise und ziehe aus E durch Dg eine Gerade, bis sie den Kreis in A schneidet. Zieht man von A eine senkrechte Gerade gegen die Projectionsachse, so ergibt sich A', und A, A' sind die beiden orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten u. s. w., sowie $A\,Dg$ die orthogonale Projection der Halbirungslinie (Diagonalen) des Winkels $Q\,A\,R$. Es handelte sich bei dieser Aufgabe darum, dem orthogonalen Grundriss innerhalb des Halbkreises eine solche Lage zu geben, dass eine von A nach Dg gezeichnete Gerade den Winkel der beiden Coordinaten x und y halbirte. Die Lösung dieser Aufgabe beruht hier auf dem geometrischen Satz: dass der über einem Bogen stehende Peripheriewinkel halb so gross ist als der über dem gleichen Bogen stehende Centriwinkel (siehe § 56, Fig. 29). Demgemäss wurde in Fig. VII in $Q\,m\,E$ der rechte Winkel gezeichnet und über dem Viertelsbogen $Q\,E$ von E durch Dg bis A gezogen, sowie A mit Q durch eine Gerade verbunden. Damit ist Winkel $Q\,A\,E$ als Peripheriewinkel gleich 45^0, und eine Gerade $A\,R$ ergänzt denselben zu einem Rechten, da alle über einem Durchmesser stehenden Peripheriewinkel Rechte sind. Hierbei tritt nun der in Anmerkung zu § 221 erwähnte Fall ein, dass die schiefe Projection $(A)\,R$ einer Geraden $A\,R$, statt verkürzt zu erscheinen, sich vergrössert. Es ist dieses stets dann der Fall, wenn die schief projicirenden Strahlen zu sehr von der Seite, von oben oder von unten einfallen oder wenn, mit andern Worten, der Winkel, den die schief projicirenden Strahlen mit der Projectionsebene bilden, zu klein wird. Eine solche Darstellungsweise ist, obwohl theoretisch richtig, doch stets nach Möglichkeit zu vermeiden, da solche Bilder immer mehr oder weniger unnatürlich und verzerrt erscheinen.*)

§ 233. Fig. VIII zeigt die dimetrische schräge Darstellung eines Körpers, wobei die z' und y' Achse sich unverkürzt projiciren; das Achsenkreuz x', y', z' konnte hierbei beliebig gewählt werden. Soll nun y' gleich z' in wahrer Grösse erscheinen, so beschreibe man über $Q\,R$ als Durchmesser einen Halbkreis etwa nach abwärts, ferner aus R mit dem Radius $R(A)$ einen Bogen, welcher den Halbkreis in A schneidet, verbinde A mit Q und R, so ist $Q\,A\,R$ der orthogonale Grundriss der Coordinaten und $(A)\,R$ gleich der wahren Grösse $A\,R$.*)

Es ist somit nur für die x' Achse ein Winkelmassstab zum Auftragen bestimmter Grössen nöthig, und wurde derselbe, wie schon früher gezeigt, aus den Strecken $A\,Q$, $(A)\,Q$ (d. i. x und x') in Fig. VIII[a] gebildet. ($S\,a = A\,Q$, $a\,b$ als Sehne $= (A)\,Q$.)

§ 234. An diesem Beispiele soll nun auch die Anwendung von Längenmassstäben für das Auftragen bestimmter Längeneinheiten gezeigt werden.

Angenommen, es solle der Körper in Fig. VIII eine Höhe von 30 cm und eine Länge und Breite von je 50 cm haben, die Grundfläche also ein Quadrat sein, und der Körper solle im Massstab von 1 : 10, also in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse gezeichnet werden, so zeichne man zuerst in Fig. VIII[b] den Massstab $y\,(z)$ nach der angegebenen Verjüngung von 1 : 10 in wahrer Grösse**), nehme sodann einen Meter oder, wie hier, nur einen halben Meter aus $y\,(z)$ in den Zirkel, beschreibe damit als Radius aus S in Fig. VIII[a] einen Bogen $c\,d$, so ist $c\,d$ als Sehne gleich der reducirten Grösse eines halben Meters, mit welchem nun der Längenmassstab x gefertigt wurde.

Durch weitere Theilung der Meter in Unterabtheilungen, wie z. B. Centimeter u. s. w., erhält man die für das Achsenkreuz in Fig. VIII verwendbaren Längenmassstäbe. Die Achsen y' und z', sowie alle mit ihnen parallelen Geraden können nun mittels des Massstabes $y\,(z)$, die Achse x' mittels des Massstabes x gemessen werden.

Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, dass man in ähnlicher Weise auch für die Figuren I bis VII derartige Längenmassstäbe hätte zeichnen können.

§ 235. Fig. IX ist eine isometrisch schiefe Pro-

---

*) Eine solche Verzerrung hätte auch hier leicht dadurch vermieden werden können, dass man die Quadratseite $b\,a$ grösser angenommen oder den Anfangspunkt des Achsenkreuzes mehr nach rechts gelegt hätte u. s. w. Doch wurde hier absichtlich die Zeichnung so ausgeführt, um auch auf diesen Fall aufmerksam zu machen, d. h. um zu zeigen, dass die schiefe Projection einer Geraden nicht nur verkürzt oder in wahrer Länge, sondern auch grösser oder länger erscheinen kann.

*) Eine weitere, dimetrisch schiefe Projection, bei welcher die x' und y' Achsen sich gleichartig verkürzen, soll später noch erwähnt werden.

**) Da diese Blätter in zwei Drittheil der auszuführenden Grösse gezeichnet sind, so ist hier z. B. statt eines ganzen Decimeters nur $^2/_3$ eines solchen genommen.

jection, bei welcher jede Gerade des Achsenkreuzes sich nach ihrer wahren Länge projicirt. Da bei der Parallelstellung des Körpers die x' Achse, ebenso wie die z' Achse, ohnedies in ihrer wahren Grösse erscheint, und die Coordinate y demnach senkrecht zur Projectionsebene steht (siehe § 227, Fig. II dieser Tafel), so braucht man nur eine Achse y' oder $(A)A'$ gleich AA', d. i. gleich der Orthogonalprojection dieser Coordinatenachse zu bestimmen, wobei es gleichgiltig ist, welchen Winkel die Gerade $(A)A'$ mit der Projectionsachse bildet.*)

In Fig. IX sind A, A' die orthogonalen Projectionen des Anfangspunktes der Coordinaten, Aa, $A'(A)$ die orthogonalen Projectionen der schief projicirenden Geraden, (A) die schiefe Projection des Coordinatenpunktes und $(A)a'$ gleich $(A)c$ gleich $(A)A'$ [oder $(A)b$] das Achsenkreuz, welches hier zugleich die Kanten eines hohlen Körpers mit quadratischen Grund- und Seitenflächen bildet.

Obwohl die bisher erörterten Aufgaben im Wesentlichen Alles enthalten, was zur Darstellung einer schiefen Projection nothwendig ist, so gehört doch die Anführung von Beispielen, welche das bisher Gesagte noch weiter illustriren, mit zu den unerlässlichen Bedingungen, um auch die für diese Projectionsart erforderliche Fertigkeit und Uebung zu erlangen. Solche Uebungsbeispiele bieten die Blätter XLVI bis XLIX, wobei in Blatt XLIX noch zwei weitere, bisher nicht erwähnte Projectionsarten mit inbegriffen sind.

Uebungsbeispiele in dimetrisch und trimetrisch schiefer Projection.

Tafel XLVI. Figur I—VII.

§ 236. Die Figuren I, II, III und IV sind dimetrische Projectionen in gerader Ansicht oder Parallelstellung zur Projectionsebene (vgl. § 227, Fig. II und II^a). Ihre Grundflächen u. s. w. sind quadratisch und ihre Ausführung bedarf wohl kaum einer weitern Erklärung. Bemerkt sei hier nur, dass in Fig. II zum Zwecke der Achtecksconstruction der 45° Winkel Fig II^a als Hilfsfigur derart benützt wurde, dass man, um in das Quadrat $efgh$ den Grundriss eines regulären Achteckes einzeichnen zu können, eine Strecke ne oder nf der Fig. II in Fig. II^a von S nach h' trug, aus h' eine Senkrechte $h'o'$ gegen den andern Schenkel fällte und die so erhaltene Strecke So' in Fig. II von n aus in no, np übertrug. Zieht man nun aus o und p Parallele mit fg, d. h. mit einer Richtung y' des Achsenkreuzes, so schneiden diese die Diagonalen eg, fh in vier Punkten, und zieht man durch diese Schnittpunkte die Parallelen zu den Diagonalen, so bilden erstere vier Achtecksseiten; die übrigen vier Achtecksseiten fallen mit den Quadratseiten zusammen (vgl. § 47, Fig, III, Taf. IV).

In Fig. III ist der durch Pyramidenflächen etc. begrenzte Körper aus dem zur Projectionsebene parallelen Schnitt abgeleitet, dessen rechte Hälfte hier mit $ihgfeS$ bezeichnet ist.

In Fig. IV sind, nachdem die Höhe des Cylinders sowie die Durchmesser ki, $k'i'$ der Cylinderkreise bestimmt waren, zunächst durch k, i Parallele zu bc gezeichnet worden, und diese ergaben auf den Diagonalen ac, bd des ersten Quadrates $abcd$ die Punkte $efgh$ eines zweiten, in welches ein Achteck ebenso wie bei Fig. II mittels der Hilfsfigur IV^a, und in dieses der Basiskreis des Cylinders einbeschrieben wurde. In gleicher Weise ward auch der obere in dem Quadrat $opqr$ u. s. w. eingeschlossene Kreis gefunden. Die Projection eines dritten innern concentrischen Kreises wurde nach der in § 133 erörterten Methode gefunden. Wie leicht ersichtlich musste, falls dies nothwendig wird, für jede der Figuren ein eigener Winkel- oder Längenmassstab gefertigt werden, da die Verkürzungen der mit einer y'-Achse parallel laufenden Geraden u. s. w. hier bei jeder Figur anders gewählt sind. Der Massstab für die Verkürzungen y' ist hier übrigens dadurch vollständig bestimmt, als man in jeder der Figuren eine Kante bc als in Wirklichkeit gleich einer Kante ab angennmmen hat.

Aus den Seiten ab, bc könnte also je ein Winkelmassstab für die betreffende Figur hergestellt werden (vgl. Fig. II, Taf. XLV).

§ 237. In Fig. V sind die orthogonalen Projectionen eines Sockelgesimses u. s. w. und in Fig. VI dessen dimetrisch schräge Darstellung gefertigt worden, wobei wie aus der Zeichnung Fig. VI ersichtlich, die Richtung x des Achsenkreuzes gleich z unverkürzt erscheint*) (vgl. § 233, Fig. VIII, Taf. XLV).

---

*) Ist dieser Winkel wie in Fig. IX gleich 45°, so nennt man die isometrisch schiefe Projection auch Cavalierperspective, eine Benennung, die vielfach in ältern Werken vorkommt und ihren Ursprung aus der Benennung und Darstellung gewisser Festungstheile hat. Das Wort „Cavalier“ bedeutet dabei ein erhöhtes Werk in den Bastionen einer Festung. Eine weitere, isometrisch schiefe Projectionsart, welche in § 248, Fig. V und VI, Tafel XLIX ausgeführt ist, heisst aus ähnlichen Gründen auch Militärperspective (siehe daselbst).

*) Ausser dieser dimetrisch schrägen Darstellung gibt es noch eine zweite, bei welcher die x' und y' Achsen sich gleichartig verkürzen, und wobei die Stellung eines nach diesem letzteren Achsensystem gezeichneten Körpers, z. B. Würfels, eine zur Projectionsebene symmetrische wäre, d. h. der Würfel hat eine sog. Ueberecksstellung, wobei die schiefen Projectionen der in den horizontalen Quadratflächen liegenden Diagonalen als