Das projective Zeichnen

Kleiber, Max

Stuttgart, [1886]

45. Uebungsbeispiele in isometrischer Projection.

$A\,Q$ gleich $A\,R$ sind die wahren Grössen der Verkürzungen $(A)\,Q$, $(A)\,R$ und mittels der Grössen $(A)\,R$, $A\,R$ wurde der Winkelmassstab Fig. V^a construirt ($S\,a$, $S\,a'$ in Fig. V^a $= (A)\,Q$, $A\,Q$ oder $(A)\,R$, $A\,R$ in Fig. V). Das zur Projectionsebene parallele Durchschnittsprofil $e\,a\,g\,h\,b\,f$ der Vase konnte geometrisch und in wahrer Grösse gezeichnet werden.

Die Kreisprojectionen bzw. Ellipsen wurden mittels ihrer Achsen in bekannter Weise bestimmt (vergl. Fig. II^a Taf. XVIII und Fig. III Tafel XIX etc.).

Um das Achsenverhältniss einer ersten Ellipse, z. B. $a\,b\,c\,d$ zu bestimmen, brauchte man nur aus a und b Parallele mit $(A)\,Q$ zu ziehen, wodurch sich in $c\,d$ die kleine Ellipsachse ergeben hatte. Ein unterster, auf der quadratischen Platte liegender Kreis, dessen Durchmesser $g\,h$ ist, wurde berührend an die Quadratseiten $(A)\,Q$, $(A)\,R$ angenommen und der Durchmesser $g\,h$ dadurch gefunden, dass man aus A' als Mittelpunkt einen Halbkreis berührend an die orthogonalen Projectionen $A\,Q$, $A\,R$ dieser Quadratseiten zeichnete. Die weitere Ausführung und Eintheilung der Vase ist aus der Zeichnung leicht ersichtlich (vergl. Fig. VII und IV in Tafel XLVI und XLVII). Dass man hier ebenso wie bei Fig. VII, Tafel XLVI, die Verkürzungen $m\,c$, $m\,d$ u. s. w. mittels eines Winkelmassstabes hätte bestimmen können, braucht wohl kaum mehr erwähnt zu werden; derselbe wäre aus der Strecke $A'\,(A)$ als der verkürzten und aus der Strecke $A'\,Q$ oder $A'\,R$ als der unverkürzten zu fertigen.

Uebungsbeispiele in isometrischer Projection.

Tafel XLIX. Figur I—VI.

§ 247. Die Figuren I und II sind in isometrisch schiefer Projection und in Parallelstellung zur Projectionsebene gezeichnet (vgl. § 235, Fig. IX, Tafel XLV). Fig. I^a zeigt, in welcher Weise nachträglich die orthogonalen Projectionen $A\,a$, $A'\,(A)$ des schief projicirenden Strahles gefunden werden konnten. Ist nämlich $(A)\,A'$ als die unverkürzte Projection der y Achse angenommen, so ist $A'A$ gleich $(A)\,A'$ als die orthogonale Projection der y Achse anzunehmen und die orthogonale Lage der projicirenden Geraden $a\,A$ und $(A)\,A'$ damit bestimmt. In Fig. II sind Hilfspunkte für die Kreise und Kreisbögen wieder mittels der Hilfsfigur II^a gefunden worden; die Aufgabe ist im Uebrigen gleich der in Fig. IV Tafel XLVI.

Wie aus den beiden gewählten Beispielen ersichtlich, ist die Darstellung von Gegenständen in dieser Projectionsart wohl sehr bequem, ergibt aber besonders in ihrer Anwendung auf runde Formen immer mehr oder weniger verzerrte und unnatürlich aussehende Bilder. So scheint z. B. in Fig. I auf den ersten Blick eine Kante $g\,i$ u. s. w. grösser zu sein als $a\,b$, obwohl sie thatsächlich mit dieser gleiche Länge hat. Das Auge ist eben gewöhnt, schrägliegende Kanten, welche sich vom Beschauer aus entfernen, stets verkürzt zu sehen.

§ 248. Die Figuren V und VI sind isometrisch schiefe Projectionen mit unverändertem Grundriss, d. h. die Grundrisse können wie bei der orthogonalen Projection, nach ihrer geometrischen Form gezeichnet und dabei die darüber stehenden Höhenkanten u. s. w. ebenfalls unverkürzt und nach ihrer wahren Grösse aufgetragen werden. In Fig. V ist die Entstehung dieser isometrischen Projectionsart*) veranschaulicht. Hierbei sind zunächst die beiden orthogonalen Projectionen eines einfachen Körpers, sodann eine Gerade $b''\,a'\,g''$ als horizontale und verticale Projection der Bildfläche (Tafel) gegeben. Zeichnet man nun von allen Ecken des Körpers die Projicirende unter einem Winkel von 45° gegen die Bildfläche, und zwar so, dass die Ebenen dieser Winkel senkrecht zu beiden Tafeln sind, die Horizontalprojectionen der projicirenden Strahlen somit als Senkrechte zur Bildfläche $a'b''$ sich darstellen, so ergibt die schiefe Projection z. B. der rechtwinkligen Grundfläche ($a\,b\,c\,d$, $a'\,b'\,c'\,d'$) in $a^4\,b^4\,c^4\,d^4$ wieder das gleiche geometrische Rechteck wie $a\,b\,c\,d$; da ferner die Höhenkanten, wie z. B. ($b\,f$, $b'\,f'$), ($c\,g$, $c'\,g'$) u. s. w. parallel der Bildfläche oder Projectionsebene sind, so ergeben sich auch ihre schiefen Projectionen wieder in wahrer Länge (vgl. § 221), also a^4e''' gleich $a'e'$, b^4f''' gleich $b'f'$ u. s. w.).

Die Treppe in Fig. VI zeigt ein Beispiel der Anwendung. Der Grundriss $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i\,k\,\ldots$ ist zuerst bestimmt und darüber sind die einzelnen Kanten, wie z. B. $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,q$, $1\,p\,o$ u. s. w., nach ihren wahren Grössen errichtet worden. Da sich, wie schon erwähnt, alle horizontal liegenden Flächenfiguren nach ihrer wahren Form und Grösse projiciren, so können vorkommende Kreise oder Kreisbögen hier mit dem Zirkel gezeichnet werden.

§ 249. Die Figuren III und IV sind ebenfalls isometrische Projectionen; doch sind diese von den bisher genannten insoferne zu unterscheiden, als ihre Entstehung nicht das Ergebniss schief projicirender Geraden, sondern das einer bestimmten Lage ist, welche der Körper zur Projectionsebene einnimmt und wobei die Projicirenden stets senkrecht gegen die Projectionsebene einfallen, so dass also die Figuren III und IV als gewöhnliche Orthogonalprojectionen zu betrachten

*) Dieselbe wird besonders in älteren Werken auch Militärperspective genannt. Diese Bezeichnung hat zwar keine wissenschaftliche Berechtigung, und ist nur dadurch zu motiviren, dass Befestigungswerke häufig in dieser Projectionsart dargestellt wurden, wie sich denn auch dieselbe noch am besten für die Darstellung von Gebäuden auf Situationsplänen, Stadtplänen u. s. w. eignet; auch die Bezeichnung Vogelperspective wird öfter dafür angewendet.

sind, bei denen sich nach vorne geneigte Kanten als Senkrechte projiciren (vgl. hiermit Fig. IIa, Tafel XVIII).

So betrachte man z. B. in Fig. III $A(e)$, $b(f)$, $c(g)$, $d(h)$ als den orthogonalen Grundriss eines über Eck stehenden Würfels, dessen Basisfläche $Abcd$ in der Grundebene liegt und dessen Kanten Ae, bf, cg, dh somit als Punkte erscheinen, QR als die Projectionsachse und $R1$ als eine zur Grund- und Projectionsebene senkrechte dritte Tafel. Denkt man sich nun den Würfel gegen diese dritte Tafel projicirt, diese Tafel sodann um ihre horizontale Trace $R1$ nach rechts in die Zeichenfläche umgeklappt und die darin enthaltene Würfelprojection erhoben oder so gedreht, bis eine Würfeldiagonale $e'c'$, d. i. eine durch den Würfel gehende und zwei Ecken verbindende Gerade senkrecht zur Projectionsachse $R1$ der dritten Tafel steht. So stellt nun $A'e'b'f'd'h'c'g'$ einen Seitenriss dar, aus welchem in Verbindung mit dem orthogonalen Grundriss $Abcd\ldots$ die Projection $(A)b''c\,d''e''\ldots$ abgeleitet wurde.*) Dachte man sich dabei die horizontale Tafel aus ihrer mit der verticalen Tafel in eine Ebene zusammenfallenden Lage mit dem darin liegenden Würfel um die Projectionsachse, und zwar um einen Winkel, welcher gleich dem Winkel $1RA'$ der Seitenprojection ist, erhoben, so werden diejenigen Kanten, welche sich in Ae, $bc\ldots$ noch als Punkte projicirten, nun gleichfalls als Kanten, und zwar als Senkrechte zur Projectionsachse QR sich darstellen, und $(A)b''c\,d''e''f''\ldots$ ist als die orthogonale Projection des mit der Grundfläche erhobenen Würfels zu betrachten. Eine Diagonale $e''c$ des Würfels steht hierbei senkrecht zur verticalen Projectionsebene und projicirt sich somit in $e''c$ als ein Punkt. In dieser Lage erscheint die Projection eines Würfels als ein reguläres Sechseck, und die Kanten $e''(A)$, $e''h''$, $e''f''$, sowie auch die übrigen parallelen Würfelkanten sind damit unter gleichen Winkeln gegen die Projectionsebene geneigt und verkürzen sich daher gleichartig;**) eine Diagonale $f''h''$, sowie auch diejenigen, welche die Punkte $(A)f''$ und $(A)h''$ verbinden würden, bleiben hierbei unverkürzt, da sie mit der Projectionsebene parallel sind. $(A)Q$, $(A)R$, $(A)g$ kann nun hier ebenfalls als das Achsenkreuz, d. h. als die orthogonale Projection der Coordinaten bezeichnet werden. Die Coordinaten verkürzen sich hierbei im Verhältniss wie $(A)R : AR$, oder ungefähr wie $9 : 11$.

Man zeichne daher, um den Reductions- oder Winkelmassstab zu erhalten, in Fig. IVa Sa gleich $(A)R$ in Fig. III, ziehe in a eine Rechtwinklige zu Sa, und beschreibe mit der Grösce AR der Fig. III aus S einen Bogen, welcher die Gerade ab in b schneidet, so ist das Dreieck Sab der verlangte Winkelmassstab, mit welchem bestimmte wahre Grössen in ihrer Reduction gefunden und in Fig. IV aufgetragen, oder auch die Verkürzungen in Fig. IV nach ihrer wahren Grösse ermittelt werden können. Soll z. B. die wahre Länge einer Kante $a'b'$ in Fig. IV gleich $b1$ in Fig. IVa sein, so trage man diese gedachte Grösse von b nach 1, setze den Zirkel in 1 ein und trage die reducirte Strecke 12 in $a'b'$ auf. Sollte umgekehrt von einer schon vorhandenen Kante $a'b'$ in Fig. IV die wahre Grösse nachträglich gefunden werden, so trage man $a'b'$ aus Fig. IV nach Sc in Fig. IVa, ziehe aus c parallel zu ab, so ist die Strecke Sd gleich der wahren Grösse der Kante $a'b'$ in Fig. IV.

Soll eine Zeichnung nach bestimmten Massen, z. B. in dem Verhältniss wie $1 : 25$ ausgeführt werden, so wären 4 cm $=$ 1 Meter in den Zirkel zu nehmen, mittels des Winkelmassstabes zu reduciren und damit der Längenmassstab zu fertigen. Eine Kante $a'b'$ hat hier z. B. eine Länge von 95 cm, wenn man sich das Beispiel Fig. IV im Massstabe von $1 : 25$ gezeichnet denkt.

Ein Cylinderdurchmesser ih oder $i'h'$ in Fig. IV stellt sich in wahrer Grösse dar. Es müsste also für das Auftragen bestimmter Masseinheiten auf Linien, welche mit ih parallele Richtungen haben, der unverkürzte Massstab von $1 : 25$ benützt werden.*) Ein zweiter Cylinderdurchmesser lk oder $l'k'$, oder die Richtung einer zweiten Diagonalen $a'c'$ des Quadrates $a'b'c'd'$ fällt mit der Richtung der senkrechten Kanten zusammen, und für ihre Abkürzung könnte ebenfalls, wenn nöthig, ein Winkelmassstab u. s. w., z. B. mit $a'c'$ als verkürzter und $b'd'$ als unverkürzter Grösse in bekannter Weise gefertigt werden.

Ein jeder durch zwei Coordinaten gebildete Winkel ist gleich 120^0, und die Winkel, welche zwei Coordinaten $(A)b''$, $(A)d''$ (siehe Fig. III) zu einer mit der Projectionsachse QR parallelen Geraden bilden, sind je gleich 30^0. Ein Beispiel wie Fig. IV kann also auf

*) Betrachtet man für einen Augenblick $R1$ als eine horizontal liegende Projectionsachse, indem man das Blatt entsprechend wendet, die links und rechts davon liegende Zeichenfläche als die horizontale und verticale Projectionstafel, so kann $A'b'c'd'e'\ldots$ statt als Seitenriss auch als ein Aufriss und $(A)b''c\,d''e''\ldots$ demgemäss als ein Grundriss betrachtet werden. Das hier Gesagte gilt übrigens von allen Orthogonalprojectionen, bei denen sich stets der Grundriss mit dem Aufriss, und umgekehrt durch entsprechende Drehung des Blattes verwechseln lässt, d. h. ein Grundriss kann ebenso gut als ein Aufriss, und umgekehrt ein Aufriss als ein Grundriss betrachtet werden, ohne dass damit an der Lage des Körpers gegen die Projectionstafeln etwas geändert wird.

**) Daraus erhellt, dass bei der orthogonal-isometrischen Projection auch die als senkrecht erscheinenden Kanten sich ebenso wie die beiden andern Richtungen verkürzen, somit keine der Coordinaten nach ihrer wahren Grösse sich darstellt.

*) Derselbe ist hier nicht ausgeführt. Der Massstab unterhalb Fig. IV ist der mittels Fig. IVa reducirte Massstab $= 1 : 25$.

dem Reissbrett mit Hilfe der Reissschiene und des sog. 30°- bzw. 60°-Winkels ausgeführt werden.

Die centrale Projection (Polarperspective.*)

Tafel L. Figur I—II.

§ 250. In Fig. I sind die orthogonalen Projectionen ($a\,b\,c\,d\,e\,f\ldots$, $a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\ldots$) des Körpers, ferner der Bildfläche (PP', $P''P'''$) und des Auges (O, O') gegeben. ($b\,O$, $c\,O$, $d\,O\ldots$, $b'\,O'$, $c'\,O'$, $d'\,O'\ldots$) sind die projicirenden Strahlen, deren Durchschnitte mit der Bildfläche das perspectivische Bild auf derselben ergeben. Diese Bildfläche mit der daraufliegenden Projection ist in Fig. I^a in die Zeichenfläche gelegt; um das perspectivische Bild Fig. I^a zu erhalten, trage man in derselben auf eine Horizontale $A'd$, welche in der Verlängerung der Projectionsachse liegt, die auf der horizontalen Tafelprojection PP' erhaltenen Punkte b'', e'', a, f'', c'', g'', d in gleicher Ordnung auf $A'd$ der Fig. I^a in b, e, a, f, c, g, d über, errichte in diesen Punkten Senkrechte und ziehe aus den Punkten h', b''', c''', $g'''\ldots$ wagrechte Linien, so ergibt sich durch entsprechende Verbindung der hierdurch in Fig. I^a erhaltenen Schnittpunkte das perspectivische Bild; z. B. die Senkrechte aus b und die Wagrechte aus dem Punkte b''' der Verticalprojection ergibt Punkt b', die Geraden aus c und c''' ergeben den Punkt c', die Geraden aus e und e''' den Punkt e' u. s. w. Der unten liegende Körpertheil ist in Parallelstellung zur Bildfläche, der obere Theil in sog. Uebereckstellung gezeichnet, und eine Fläche des untern, sowie eine Kante ($h\,m$, $h'\,m'$) des oberen Körpertheiles liegen in der Bildfläche, fallen also mit ihren Centralprojectionen zusammen und erscheinen daher auch in Fig. I^a in wahrer Grösse.

Alle zur Bildfläche senkrecht stehenden Geraden, wie z. B. ($a\,b$, $a'\,b'$), ($d\,c$, $d'\,c'$) haben in ihren centralen Projectionen einen gemeinschaftlichen Convergenzpunkt A (Fluchtpunkt), welcher zugleich diejenige Stelle auf der Bildfläche bezeichnet, welcher gegenüber das Auge sich befindet, und welcher daher Augenpunkt genannt wird.

*) Obwohl die Perspective eine selbstständige Wissenschaft bildet, so kann doch immerhin die Ableitung einer perspectivischen Zeichnung aus den orthogonalen Projectionen, wie dies in Blatt L ausgeführt ist, als zur Projectionslehre gehörig betrachtet werden.

In Fig. II sind ebenfalls die orthogonalen Projectionen eines Körpers, ferner der Bildfläche (PP', $P''P'''$) und des Auges (O, O') gegeben; der Körper ist in Parallelstellung zu den Projectionstafeln gezeichnet und die für die centrale Projection bestimmte Bildfläche sodann in schräger Lage und durch eine Kante ($a\,e$, $a'\,e'$) angenommen worden, so dass also die Kante ($a\,e$, $a'\,e'$) wieder mit ihrer centralen Projection zusammenfällt und daher bei $a\,e$ in Fig. II^a sich nach der wahren Grösse darstellt. Die Durchschnittspunkte der projicirenden Strahlen ($b\,O$, $b'\,O'$), ($c\,O$, $c'\,O'$), ($d\,O$, $d'\,O'$)… mit der Bildfläche sind (b'', b'''), (c'', c'''), (d'', d''')… etc.

In Fig. II^a wurde die Bildfläche in die Zeichenfläche gelegt. Man trage hierbei auf eine Grundlinie $B\,C$, welche in der Verlängerung der Projectionsachse liegt*), die auf PP' liegenden Punkte b'', k'', a, i'', l'', c'', m'', d in gleicher Ordnung auf, errichte in Fig. II^a über b, k, a, i, l, c, m, d Senkrechte und zeichne aus den Punkten a', b''', c''', $d'''\ldots$ die projicirenden Wagrechten, so ergeben sich in a', b', c', d', e', $f'\ldots$ die centralen Projectionen der Körperecken, und durch entsprechende Verbindung derselben das polarperspectivische Bild des Körpers.

Fig. I^a unterscheidet sich nun von Fig. II^a dadurch, dass bei ersterer der untere Theil des Körpers in sog. gerader Ansicht, bei letzterer aber der Körper in schräger Ansicht dargestellt ist. In ersterem Falle sind gewisse, in Wirklichkeit horizontal liegende Kanten, wie z. B. $a\,d$, $b'\,c'$ u. s. w., geometrisch parallel miteinander; in letzterem convergiren alle nach zwei Fluchtpunkten, von welchen der eine F noch innerhalb der Zeichnung, während der andere rechts ausserhalb des Rahmens derselben liegt.

*) Diese Grundlinie müsste nicht nothwendig mit der Verlängerung der Projectionsachse zusammenfallen, sondern kann beliebig gewählt werden; nur hätte man, falls $B\,C$ nicht in der Verlängerung, sondern höher oder tiefer liegt, die Entfernungen der Punkte von der Grundlinie, wie z. B. $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$, $a\,e'$, $b\,f'$ u. s. w. in Fig. II, gleich den Entfernungen der Durchschnittspunkte von der Projectionsachse zu machen. Das letztere Verfahren wäre namentlich dann unvermeidlich, wenn die perspectivische Zeichnung auf einem zweiten separaten Blatt auszuführen ist.

Druck des Textes von Julius Klinkhardt in Leipzig.