Lehrbuch der gotischen Konstruktionen

Ungewitter, Georg Gottlob

Leipzig, 1890-

Verteilung der Spannungen, Kern des Querschnittes

Die Grösse des Druckes ist in senkrechter Richtung:

$$D = G + V = 48\,000 + 9600 = 57\,600 \text{ kgr.}$$

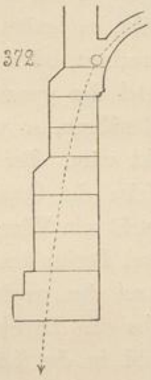
in horizontaler Richtung: $S = H = 3000$ kgr.

Der horizontale Teil S ist verhältnismässig sehr klein, er wird mit voller Sicherheit durch den Reibungswiderstand aufgenommen. Der senkrechte Teil D liefert die in Frage kommende Pressung. Ginge der Druck durch die Mitte, so wäre die Pressung überall 57 600 : 20 000 = 2,88 kgr auf 1 qcm. Bei der vorliegenden Verschiebung des Druckes wird aber die Pressung an der Aussenkante grösser, wie etwas später gezeigt werden wird.

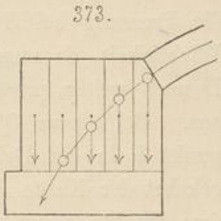
Verlauf der Drucklinie.

In der beschriebenen Weise kann man die Lage des Druckes in jedem beliebigen Querschnitt feststellen. Bei gerade aufsteigenden Pfeilern oder Mauern genügt es, die Aufstandsfläche auf dem Fundament oder die Unterfläche des Fundamentes zu untersuchen. Weist der Stützkörper oben Einziehungen auf (Höhe *III* in Fig. 369), so wird man auch unter diesen die Lage des Druckes zu prüfen haben. Will man die Mittellinie des Druckes in ihrem ganzen Verlauf von oben bis unten darstellen, so nimmt man nach Art der Fig. 372 eine wagerechte Streifenteilung vor und setzt für jede Fläche alle über ihr wirkenden Kräfte zu einer resultierenden Druckkraft zusammen. Verbindet man die Durchgangspunkte des Druckes durch eine Kurve, so stellt diese die Drucklinie dar.

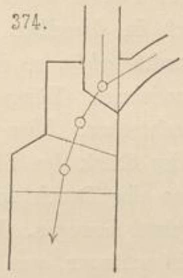
372



373.



374.



Bei grosser Tiefe der Widerlager kann sich statt der wagerechten eine senkrechte Streifenteilung empfehlen (Fig. 373), es wird der Wölbdruck nacheinander mit der Last der Streifen zusammengesetzt. Je nach Gestalt des Widerlagers können auch noch weitere Streifenteilungen gewählt werden, z. B. die in Fig. 374 dargestellte.

Für einfache Fälle kann man aus der Lage der Drucklinie schon darauf schliessen, ob die Widerlagsstärke genügt oder nicht. Erscheint letztere zu schwach, so erbreitert man sie und sucht die Stützlinie vom Neuen. Für wichtige Fälle muss man sich ausserdem noch Rechenschaft von der Grösse und Verteilung der Spannungen geben.

Verteilung der Spannungen, Kern des Querschnittes.

Kehren wir wieder zu einem einzelnen Querschnitt zurück, für den die Lage und Grösse des resultierenden Druckes in der vorbeschriebenen Weise bestimmt sei, so sind zwei Fälle zu unterscheiden, es kann der Druck entweder in dem Kern des Querschnittes liegen oder ausserhalb desselben, was das heisst, soll sogleich erläutert werden.

Geht der Druck durch die Mitte oder richtiger durch den Schwerpunkt des Querschnittes, so verteilt er sich gleichmässig über die ganze Fläche, was in Fig. 375 durch die kleinen gleich langen nach oben gerichteten Pfeile angedeutet wird (dieselben sollen nicht die nach unten gekehrten Pressungen, sondern die ebenso grossen von der Unterlage ausgeübten Gegenpressungen veranschaulichen). Jeder qcm bekommt den Druck: p = D : F, worin D den Gesamtdruck in kgr, F die Querschnittsgrösse in qcm bezeichnet.

Rückt der Druck D von dem Schwerpunkt etwas fort und zwar zu einem näher bei *A* gelegenen Punkte (Fig. 376), so wächst bei *A* die Pressung, während sie sich bei *B* vermindert. Im Schwerpunkt selbst behält sie den durchschnittlichen Wert p = D : F.

Kern des Querschnitts.

Bewegt sich D noch weiter, so muss schliesslich der Fall eintreten, in welchem die Pressung bei *B* zu Null wird (Fig. 377). Diese Lage des Druckes ist von Wichtigkeit, da man sie in den meisten Fällen nicht gern überschreitet, denn wenn D noch weiter fortrückt, so breitet sich der Druck nicht mehr über die ganze Fläche aus. Bei einem Quadrat oder Rechteck (Grundriss 378) liegt dieser Grenzpunkt *b* in ein Drittel der ganzen Länge *A B*. Würde der Druck D sich umgekehrt der Kante *B* nähern, so würde bei *A* die Pressung zu Null, wenn D nach dem Punkte *a* gerückt wäre. Bei einer Verschiebung in seitlicher Richtung würden sich in derselben Weise die Grenzpunkte *f* und *g* ergeben. Verbindet man die Punkte *abfg*, so entsteht ein Viereck, welches man als Kern des Querschnittes bezeichnet. Länge und Breite des Kernes ist ein Drittel der Länge bez. Breite des Rechteckes. Nur wenn der resultierende Druck in dem Kern angreift, bekommt jedes Stück der Fläche eine Druckpressung, soll solches erzielt werden, so darf sich also der Druck sowohl in der Längs- als in der Breitenrichtung nur im mittleren Drittel bewegen. Wenn er in schräger Richtung abweicht, so ist ein Spielraum noch viel geringer, was besonders zu beachten ist; in der Diagonale beträgt die Kernweite sogar nur $^1/_6$ der Diagonallänge.

Der Kern eines Kreises ist wiederum ein Kreis, dessen Durchmesser $^1/_4$ des grossen ist. (Fig. 379).

Der Kern des Dreiecks ist ein ähnliches kleineres Dreieck, das nach den Längen $^1/_4$, nach dem Inhalt $^1/_{16}$ des grossen ausmacht. Die Spitzen des Kerndreiecks liegen auf den Mitten der drei Mittellinien des grossen Dreiecks (Fig. 380).

Wenn der Druck an die Grenze des Kernes rückt, so wird beim Rechteck und Kreis die grösste Kantenpressung doppelt so gross wie die Durchschnittspressung p; beim Dreieck dagegen wird die grösste Kantenpressung nur $1^1/_2$ der Durchschnittspressung.

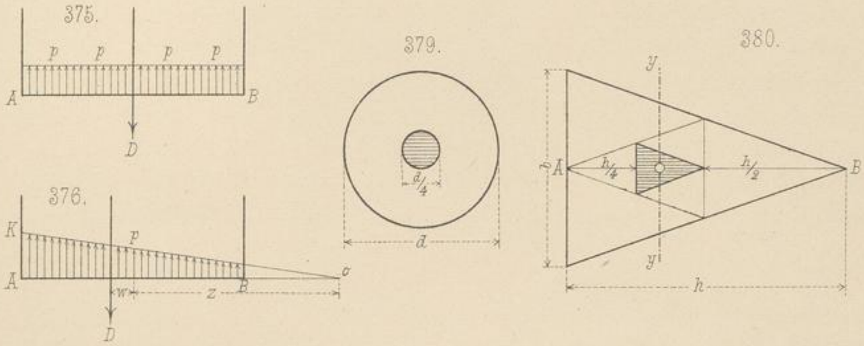
Zwei weitere Grundrisse, die bei einem Zusammenwirken von Mauer und Strebepfeiler in Frage kommen können, sind in den Figuren 381 und 382 unter Eintragung der Hauptmasse für die Kerngrösse wiedergegeben.

Will man für irgend einen Grundriss einen Grenzpunkt des Kernes finden, z. B. den Punkt *P* in Fig. 382, so verwendet man die Formel:

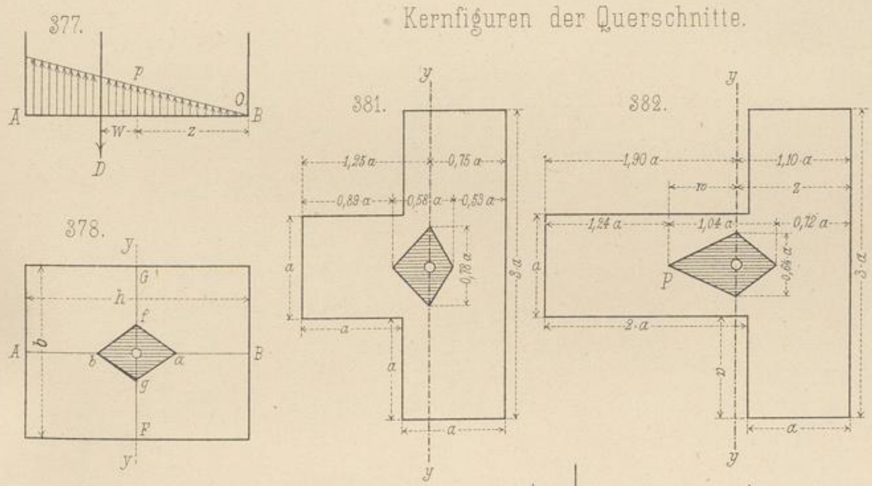
$$4)\quad w = \frac{J}{F \cdot z}.$$

Darin ist w der Abstand des gesuchten Punktes vom Schwerpunkt, J das Trägheitsmoment auf die Schwerpunktsaxe Y Y, F der Inhalt der ganzen Fläche und z der Abstand der pressungslosen Linie (neutralen Faser) vom Schwerpunkt. Mit dieser Formel kann man sich für einen beliebigen Querschnitt die Hauptpunkte der Kernfigur aufsuchen.

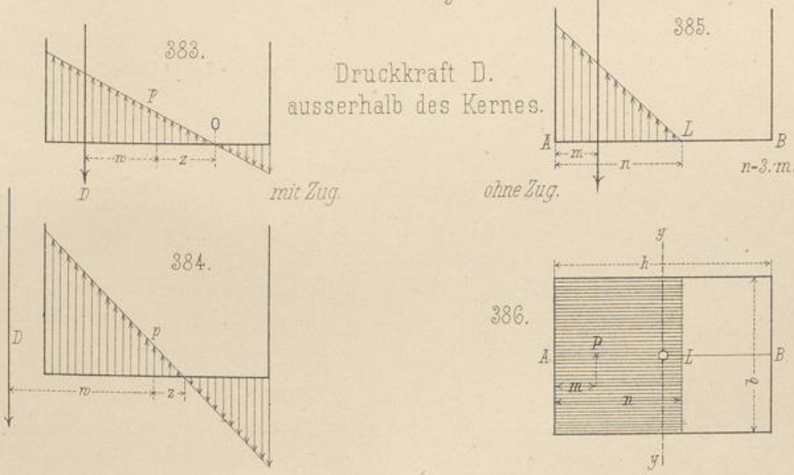
Verteilung der Druckspannungen über den Querschnitt.



Kernfiguren der Querschnitte.



Druckkraft D. ausserhalb des Kernes.



Liegt der Druck D weder auf der Kerngrenze noch im Schwerpunkt, sondern in irgend einem anderen Punkte der Kernfläche — vergl. Fig. 376 —, so muss man sich die pressungslose neutrale Faser in einem Punkte O ausserhalb der Fläche liegend denken. Kann man die Lage dieses Punktes O ermitteln, so kennt man die ganze Verteilung des Druckes, denn man braucht dann nur über dem Schwerpunkt s die durchschnittliche Pressung p nach einem bestimmten Massstab aufzutragen (z. B. 1 kgr = 1 mm oder 1 kgr = 5 mm) und durch den Endpunkt von p eine Verbindungslinie nach O zu ziehen. Die Höhenlage dieser Linie über der Grundfläche $A\,B$ bezeichnet an jedem Punkte die Grösse der Pressung auf 1 qcm. Druck innerhalb des Kernes.

Die Lage der neutralen Faser O kennt man, wenn man ihren Abstand z vom Schwerpunkt kennt, diesen findet man aus Gleichung 4), die nach z aufgelöst lautet

$$4a)\ z = \frac{J}{F \cdot w}.$$

Darin ist wieder J das Trägheitsmoment, F die Fläche und w der Abstand der Kraft D vom Schwerpunkt. Das Trägheitsmoment bezogen auf die Schwerpunktsaxe Y Y ist für die in Frage kommenden Grundrisse das nachfolgende:

für das Rechteck (Fig. 378) $J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$;

für das Quadrat (gerade oder übereck) $J = \frac{1}{12} \cdot b^4$;

für den Kreis (Fig. 379) $J = \frac{\pi}{64} \cdot D^4$ oder: $0{,}049 \cdot D^4$;

für das Dreieck (Fig. 380) $J = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3$;

für das regelmässige Achteck $J = 0{,}055 \cdot d^4$;

für den Grundriss Fig. 381 $J = 1{,}083 \cdot a^4$ (auf die xx Axe : $J = 2\frac{1}{3}\, a^4$);

für den Grundriss Fig. 382 $J = 3{,}618 \cdot a^4$ (auf die xx Axe : $J = 2\frac{5}{12}\, a^4$).

Beispiel: Bei dem auf vorletzter Seite besprochenen Beispiel — Druck auf die Grundfläche eines Strebepfeilers — war als durchschnittliche Pressung p = 2,88 kgr ermittelt. Die Aenderung dieser Pressung nach den Kanten zu war noch nicht aufgesucht, jetzt ist sie nach der gegebenen Formel 4a zu finden. Der Durchgangspunkt P (Fig. 370) hatte sich bei diesem Beispiel in einem Abstand x = 1,25 m von der Innenkante B ergeben, das ist aber 25 cm links von der Mitte oder dem Schwerpunkt, es ist also w = 25, ferner war die Grundfläche $F = 200 \cdot 100 = 20\,000$ qcm und $J = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 200 \cdot 200 \cdot 200 = 66\,666\,667$ also ist $z = \frac{66\,666\,667}{20\,000 \cdot 25}$

$$z = 133 \text{ cm}.$$

Diese Länge z trägt man rechts von der Mitte (vergl. Fig. 376) ab, von dem Endpunkt O zieht man in der angegebenen Weise die schräge Linie $O\,K$ und kann man nun die Grösse der Pressung an jedem Punkte abmessen.

Will man das Zeichnen umgehen, so kann man die Pressung an einem beliebigen Punkte unmittelbar durch Anwendung der nachstehenden Formel durch Rechnung auffinden:

$$5)\ p_1 = \frac{D}{F} \pm \frac{D \cdot w \cdot c}{J}.$$

Darin ist wieder: D der resultierende Druck, w der Abstand desselben vom Schwerpunkt, F der Flächeninhalt, J das entsprechende Trägheitsmoment und schliesslich c der Abstand des auf seine Pressung zu untersuchenden Punktes von der Schwerpunktsaxe. Das Zeichen + ist für die stärker, das Zeichen — für die schwächer gedrückte Seite zu verwenden.

Beispiel: Es werde wieder das vorige Beispiel benutzt, in welchem die rechteckige Grundfläche von b = 100 cm Breite und h = 200 cm Länge einen Gesamtdruck D = 57 600 kgr bekommt, der in w = 25 cm Abstand vom Schwerpunkt angreift. Das Trägheitsmoment auf die Queraxe war bereits zu 66 666 667 = J berechnet.

Soll die grösste Pressung p_1 für die Aussenkante gefunden werden, so ist für diese der Abstand c vom Schwerpunkt = 100 cm also:

$$p_1 = \frac{57\,600}{20\,000} + \frac{57\,600 \cdot 25 \cdot 100}{66\,666\,667} = 2{,}88 + 2{,}16 = 5{,}04 \text{ kgr.}$$

Die grösste Kantenpressung beträgt also rund 5 kgr auf 1 qcm, die man bei der geplanten Ausführung des Strebepfeilers in Bruchstein mit Kalkmörtel als zulässig erachten kann.

Den Druck an der Innenkante findet man gerade so bei Anwendung des negativen Verzeichens zu $p_1 = 0{,}72$ kgr. Die Pressung noch für weitere Stellen zu berechnen hat keinen Wert, da man ja weiss, dass sie von der Innenkante bis zur Aussenkante gleichmässig wächst.

Druck ausserhalb des Kernes.

Wenn die resultierende Druckkraft D ausserhalb des Kernes liegt, so rückt die pressungslose Linie in den Querschnitt hinein (*O* in Fig. 383). Dabei ergeben sich an der Kraftseite Druckpressungen, an der entgegengesetzten Seite aber Zugspannungen. An der Stelle des Schwerpunktes herrscht nach wie vor der durchschnittliche Druck p = D : F, der grösste Kantendruck ist bei symmetrischen Grundrissen (Rechteck, Kreis) um 2 · p grösser als der an der anderen Seite auftretende grösste Kantenzug. Zur Ermittelung der pressungslosen (neutralen Stelle und der Verteilung der Spannungen bleiben die Formeln 4 (oder richtiger 4a) und 5 in Gültigkeit.

Mauerwerk mit Zugspannungen.

Wenn das Mauerwerk in der Lage ist Zugspannungen auszuhalten, so würde bei beliebiger exzentrischer Lage des Druckes sich die Spannungsverteilung in gleicher Weise ermitteln lassen. Es kann dann sogar der Druck D ausserhalb der Mauer liegen (Fig. 384), wobei allerdings der Kantendruck und Kantenzug immer mehr wächst, bis er bei unendlicher Entfernung der Kraft D auch in einen unendlichen grossen Wert übergehen würde.

Mauerwerk ohne Zugspannungen.

Nun darf man aber aus den früher angegebenen Gründen dem Mauerwerk keinen Zug zumuten. Die nicht gedrückten Teile werden gar keinen Anteil an der Kraftübermittelung haben, sie werden spannungslos auf einander ruhen, unter Umständen wird sich hier sogar eine mehr oder weniger merkliche offene Fuge bilden können. Die Druckübertragung findet so statt, als wenn dieser betreffende Teil des Querschnittes gar nicht vorhanden wäre. Liegt z. B. ein rechteckiger Grundriss vor, Fig. 385 und 386, auf den der resultierende Druck D in dem Punkte *P* ausserhalb des Kernes wirkt, so wird sich die Spannung so verteilen, als wäre nur eine Fläche von der Länge *A L* vorhanden, welche bei *L* die Pressung Null hat. Ist bei *L* die Pressung Null, so muss der Druckmittelpunkt *P* die Kerngrenze darstellen, daraus folgt für rechteckige oder quadratische Querschnitte, dass man die Länge *A P* dreimal von *A* aus abzutragen hat um den Punkt *L* zu erhalten.

Die in der Mitte der getroffenen Fläche (b · n) wirkende Durchschnittspressung d muss Druck durch Fläche sein, also: d = D : (b · n) = D : (b · 3 m).

Die grösste Kantenpressung ist doppelt so gross, also:

$$6)\ d_1 = \frac{2 \cdot D}{3 \cdot b \cdot m}. \qquad 7)\ n = 3 \cdot m.$$