



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Lehrbuch der Perspektive**

**Meisel, Ferdinand**

**Leipzig, 1908**

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-82190](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-82190)

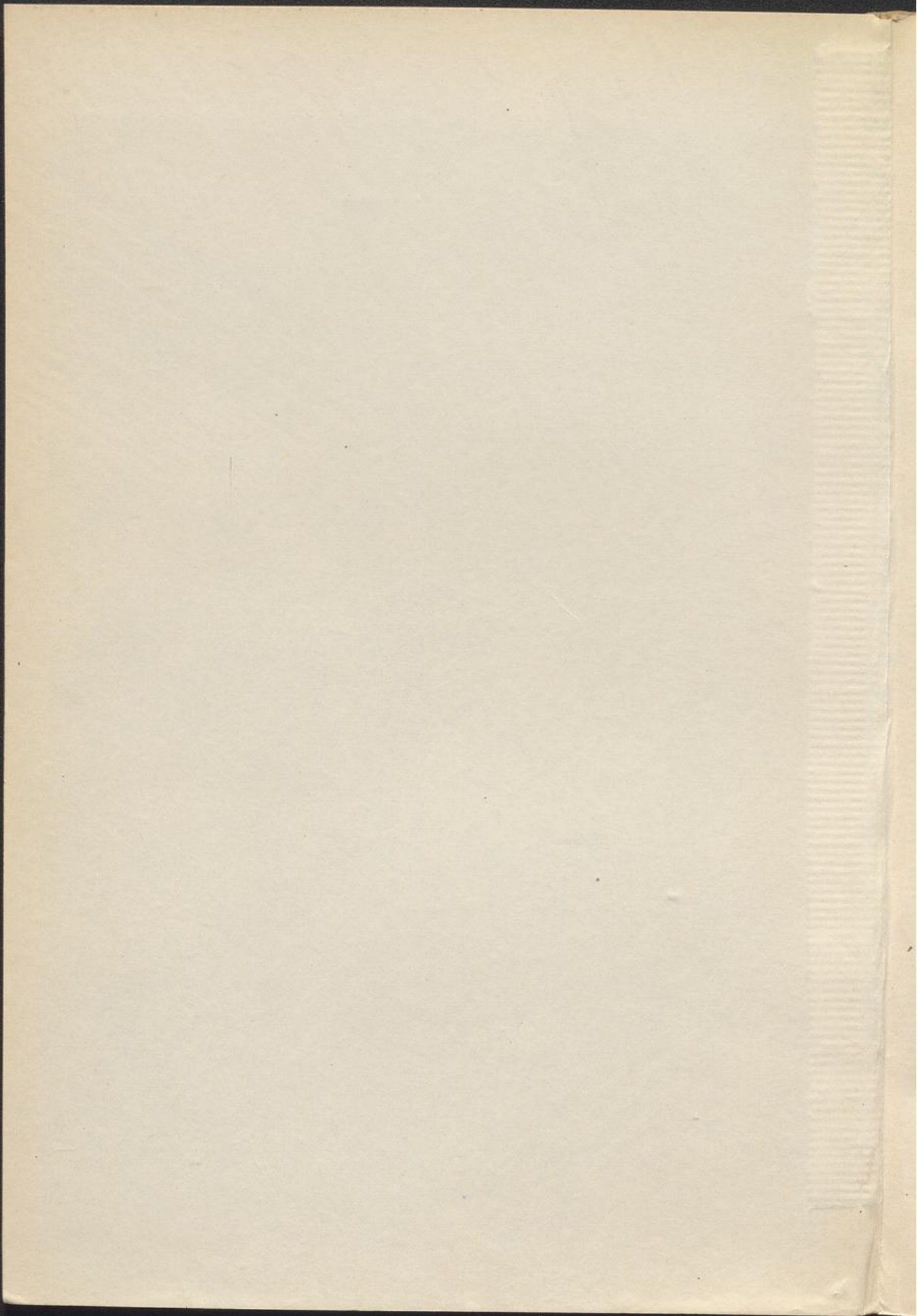
4415

1245/a



Lehrbuch  
der Perspektive  
von  
Dr. Ferd. Meissel





# Lehrbuch der Perceptual

Dr. Ferdinand Müller

Zweite Auflage







# Lehrbuch der Perspektive

von

Dr. Ferdinand Meisel

Großherzoglichem Direktor der Gewerbe- und  
Handwerkerschule und Privat-Dozenten an  
der Technischen Hochschule in Darmstadt •









# Lehrbuch der Perspektive

zum Gebrauche an mittleren und höheren  
technischen Lehranstalten, Kunstgewerbe- und Kunstschulen,  
==== sowie bei eigenem Studium ====

von

Dr. Ferdinand Meisel

Großherzoglichem Direktor der Gewerbe- und Handwerkerschule  
und Privat-Dozenten an der Technischen Hochschule in Darmstadt



Mit 244 Abbildungen im Texte



Leipzig 1908  
Verlag von Seemann & Co



03  
M  
36047







## Vorwort

Wenn ich es unternehme, der großen Zahl der vorhandenen Lehrbücher der Perspektive noch ein weiteres hinzuzufügen, so fühle ich mich verpflichtet, hier wenigstens das Ziel anzugeben, das ich dabei im Auge habe. — Mein Buch soll eine Mittelstellung einnehmen zwischen den rein theoretischen Werken, die sich mit den projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte usw. befassen und die praktische Anwendung völlig außer Acht lassen einerseits und den ganz elementaren Büchern andererseits, die nichts weiter wollen, als dem Architekten oder Dekorationsmaler eine praktische Anweisung zur Anfertigung perspektivischer Zeichnungen geben. Eine solche Anweisung gibt das vorliegende Buch, wie ich sagen zu dürfen glaube, ebenso gut, wie die üblichen elementaren Bücher, aber es legt ein Hauptgewicht auf die Begründung der angegebenen Konstruktionen und behandelt besonders eingehend gerade die besonderen Fälle und Aufgaben, die in der Regel mit Stillschweigen übergangen werden. Zu diesen besonderen Fällen rechne ich die praktisch keineswegs unwichtige hyperbolische und parabolische Abbildung des Kreises, die kreisförmige Abbildung eines der Bildebene nicht parallelen Kreises, die unbedingt in ein Lehrbuch der Perspektive gehörige stereographische Kartenprojektion, die gnomonische Projektion, die Schattenkonstruktion für den Fall der hinter dem Rücken des Beschauers befindlichen, endlich entfernten Lichtquelle, die Konstruktion des Halbschattens usw. Die Konstruktion der perspektivischen Bilder unter Wasser befindlicher Körper wird, so viel ich weiß, überhaupt in keinem anderen Lehrbuche der Perspektive behandelt.

Der Schwerpunkt meines Buches liegt nicht in den Zeichnungen. Es war nicht meine Absicht, mit prächtig ausgeführten Bildern zu glänzen. Die Zeichnungen wollen nur das Verständnis des im Texte Ausgeführten erleichtern und sind deshalb so einfach und anspruchslos wie möglich ausgeführt. Auch habe ich mich bemüht, das Darzulegende stets an den einfachsten Beispielen zu zeigen; durch die Kompliziertheit des dargestellten Gebildes wird ja die Erkenntnis dessen, worauf es ankommt, erschwert. Auch habe ich es verschmäht, viele Beispiele für dieselbe Sache zu bringen, sondern mich stets mit einem oder doch mit ganz wenigen Beispielen begnügt. An Uebungsstoff wird



es ja dem Lehrer der Perspektive nie fehlen, und gerade an die Lehrer, die in diesem herrlichen Fache zu unterrichten haben, dachte ich bei der Abfassung des Buches in erster Linie. Möge mein Werkchen zur Vertiefung des Unterrichts an den höheren gewerblichen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen usw. beitragen!

Besondere Rücksicht habe ich auf die für den Dekorationsmaler wichtigen Konstruktionen genommen, auf jene Konstruktionen also, bei denen man nicht von rechtwinkligen Projektionen des darzustellenden Gegenstandes ausgehen kann, da sie nicht vorhanden sind, bei denen es also darauf ankommt, ohne Kenntnis der wirklichen Maße ein in sich richtiges perspektivisches Bild herzustellen.

Durch die kurzen algebraischen Rechnungen, die an einigen Stellen eingefügt sind, möge sich der dem Buchstabenrechnen nicht geneigte Leser nicht vom Studium des Buches abhalten lassen. Diese Rechnungen beziehen sich stets nur auf ganz bestimmte Punkte, haben mit dem Wesen der Sache, das rein geometrischer Natur ist, nichts zu tun und können daher, ohne daß der Zusammenhang des Uebrigen Not leidet, überschlagen werden.

Endlich ist es mir ein Bedürfnis, der Firma Seemann & Co. für die schöne Ausstattung, die sie meinem Buche zu Teil werden ließ und für die Bereitwilligkeit, mit der sie allen meinen Wünschen entgegenkam, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Darmstadt, im Mai 1908.

Dr. Ferd. Meisel

Uebersiehene Druckfehler:

Auf S. 85, Z. 4 v. o., lies: „das Auge O“ für „das Auge A“.



# Inhalt.

## Einleitung.

§ 1.	Begriff des perspektivischen Bildes . . . . .	Seite	1
§ 2.	Die allgemeine Bildfläche . . . . .	"	4
§ 3.	Die Ebene als Bildfläche . . . . .	"	5

## I. Abschnitt.

### Die Abbildung auf vertikaler Bildebene.

#### Erstes Kapitel.

##### Die Herstellung des Bildumrisses.

§ 4.	Hauptpunkt (Augenpunkt), Fluchtpunkt, Distanzkreis, Horizont, Distanzpunkte . . . . .	"	9
§ 5.	Konstruktive Ermittlung des Bildes eines beliebigen Punkts; Grundebene und Grundlinie, Fluchtgerade, umgeklapptes Auge . . . . .	"	10
§ 6.	Uebertragung einer beliebigen, in der Grundebene liegenden Figur in das perspektivische Bild . . . . .	"	13
§ 7.	Die Diagonal-Fluchtpunkte . . . . .	"	19
§ 8.	Die Gegengerade . . . . .	"	21
§ 9.	Abbildung einer nicht in einer Horizontalebene liegenden Geraden . . . . .	"	24
§ 10.	Zusammenhang der Fluchtpunkte von Geraden, die in zwei zu einander rechtwinkligen Vertikalebenen liegen und gegen die Horizontalebene gleich geneigt sind . . . . .	"	28
§ 11.	Perspektivische Teilung einer Strecke . . . . .	"	30
§ 12.	Die Uebertragung der Höhen in das Bild . . . . .	"	31
§ 13.	Die Verschiebung der Grundebene nach oben oder unten . . . . .	"	33
§ 14.	Verfahren bei unerreichtbarem Fluchtpunkte . . . . .	"	34
§ 15.	Bild eines Körpers in allgemeiner Lage . . . . .	"	37
§ 16.	Die Abbildung des Kreises . . . . .	"	41
§ 17.	Die zeichnerische Darstellung des Bildes in den verschiedenen Lagen des Kreises . . . . .	"	50
§ 18.	Bilder der Kreise, die auf einem normalen, zur Bildebene parallelen Kreiszylinder liegen, dessen Axe in einer durch das Auge rechtwinklig zur Bildebene gelegten Ebene liegt . . . . .	"	64
§ 19.	Bilder von Zylindern und Kegeln in verschiedenen Lagen . . . . .	"	69
§ 20.	Die Abbildung der Kugel . . . . .	"	76
§ 21.	Bild einer Kugel mit Parallelkreisen und Meridianen . . . . .	"	78
§ 22.	Die stereographische Projektion . . . . .	"	81
§ 23.	Die gnomonische Projektion . . . . .	"	94
§ 24.	Die Darstellung der Umdrehungskörper . . . . .	"	99
§ 25.	Die Vogel- und die Froschperspektive . . . . .	"	104

#### Zweites Kapitel.

### Die Konstruktion der Schatten im perspektivischen Bilde.

§ 26.	Allgemeines über Eigen- und Schlagshadow . . . . .	Seite	105
-------	--	-------	-----

#### I. Schatten bei unendlich ferner Lichtquelle.

§ 27.	Die Annahme des Sonnenpunkts . . . . .	"	107
§ 28.	Der Schatten eines Punkts auf die Grundebene . . . . .	"	109
§ 29.	Der Schatten eines Punkts auf eine vertikale und auf eine geneigte Ebene . . . . .	"	110



## IV

§ 30.	Der Schatten von Geraden und ebenflächig begrenzten Körpern auf Ebenen	Seite 113
§ 31.	Der Schlagschatten eines Kreises	„ 119
§ 32.	Der Schatten des Zylinders, des Kegels, der Kugel und des allgemeinen Umdrehungskörpers	„ 123
	1. Der Schatten des Zylinders	„ 123
	2. Der Schatten des Kegels	„ 127
	3. Der Schatten der Kugel	„ 129
	4. Der Schatten eines allgemeinen Umdrehungskörpers	„ 131
§ 33.	Schlagschatten eines Punktes auf Zylinder, Kegel, Kugel und den allgemeinen Umdrehungskörper	„ 132
	1. Der auf einen Kreiszylinder fallende Schlagschatten	„ 132
	2. Der auf einen Kreiskegel fallende Schlagschatten	„ 142
	3. Der auf eine Kugel fallende Schlagschatten	„ 150
	4. Der auf einen allgemeinen Umdrehungskörper mit vertikaler Axe fallende Schlagschatten	„ 154
§ 34.	Die Größe des Sonnenbildes und die Konstruktion des Halbschattens	„ 155

### II. Schatten bei endlich entfernter Lichtquelle. (Zentralbeleuchtung.)

§ 35.	Die Annahme des leuchtenden Punktes im Bilde	Seite 159
§ 36.	Die Ermittlung der auf verschiedene Ebenen fallenden Schlagschatten von Geraden und ebenflächig begrenzten Körpern	„ 160
§ 37.	Der Schlagschatten des Kreises und der runden Körper	„ 164
§ 38.	Die auf runde Körper fallenden Schlagschatten	„ 171
§ 39.	Die Konstruktion des Halbschattens. Schlagschatten bei verschiedenen Lichtquellen	„ 174

## Drittes Kapitel.

### Die Konstruktion der durch Spiegelung und Brechung erzeugten Bilder im perspektivischen Bilde.

§ 40.	Allgemeines über die Entstehung des Spiegelbildes	Seite 176
§ 41.	Die durch eine wagerechte Ebene (Wasserfläche) erzeugten Spiegelbilder	„ 178
§ 42.	Die durch eine vertikale Ebene erzeugten Spiegelbilder	„ 182
§ 43.	Die durch einen geneigten Spiegel erzeugten Bilder	„ 184
§ 44.	Die durch Strahlenbrechung an einer Wasseroberfläche erzeugten Bilder	„ 186

### Anhang zum I. Abschnitte.

§ 45.	Die Konstruktion der stereoskopischen Bilder	„ 195
-------	--	-------

## II. Abschnitt.

### Die Abbildung auf anderen Bildflächen.

§ 46.	Allgemeines	„ 200
§ 47.	Die wagerechte Bildebene	„ 201
§ 48.	Der Zylinder als Bildfläche	„ 204
§ 49.	Die Abbildung auf der Kugel	„ 214

### Anhang zum II. Abschnitte.

§ 50.	Die Relief-Perspektive	„ 215
-------	------------------------	-------





# Einleitung.

## § 1. Begriff des perspektivischen Bildes.

Unter dem perspektivischen Bilde eines körperlichen Gegenstandes versteht man ein auf einer Fläche, der Bildfläche, liegendes Gebilde, das, von einem bestimmten Punkte aus betrachtet, sich mit den Umrissen des von eben diesem Punkte aus betrachteten Gegenstandes vollständig deckt.

Diese Erklärung ist von größter Wichtigkeit, da auf ihr die ganze konstruktive Perspektive beruht. Oft hört man sagen, ein perspektivisches Bild eines Körpers sei ein solches, das den Körper so darstellt, wie er dem beobachtenden Auge erscheint. Diese Erklärung ist falsch, und es ist unbedingt notwendig, sich den Unterschied zwischen der richtigen und der falschen Erklärung gleich am ersten Anfange gründlich klar zu machen. Dadurch vermeidet man falsche Auffassungen und schützt sich davor, von der perspektivischen Abbildung mehr zu verlangen, als sie leisten kann.

Vor allen Dingen ist festzuhalten, daß das perspektivische Bild nur von einem Punkte aus richtig wirken kann, von dem Punkte aus nämlich, in dem bei der Konstruktion des Bildes das Auge angenommen worden war.

Um nun den Unterschied zwischen der richtigen und der falschen Erklärung recht klar zu erkennen, wollen wir einfache Beispiele betrachten. Wir wollen uns denken, wir befänden uns vor einer sehr langen, oben und unten wagerecht begrenzten Mauer. Diese Mauer wird uns da am höchsten erscheinen, wo sie von einer durch die Ase unseres Körpers zu der Mauer rechtwinklig gelegten Ebene geschnitten wird; nach rechts und nach links aber wird die Höhe scheinbar abnehmen. Wenn nun ein perspektivisches Bild den Körper so darstellte, wie er dem beobachtenden Auge erscheint, so hätten wir im Bilde die Mauer durch zwei Kurven zu begrenzen, deren Abstand in der Mitte des Bildes am größten ist und nach beiden Seiten abnimmt. Nun werden wir aber sehr bald sehen, daß unsere Mauer — eine mit ihr parallele, vertikale Bildebene vorausgesetzt — im Bilde durch zwei parallele, horizontale Gerade begrenzt wird. Betrachten wir nun dieses



Bild von dem angenommenen Augenorte aus, so wird es sich mit den Umrissen der körperlichen Mauer decken, und die gezeichnete Mauer wird genau so wie die körperliche in der Mitte am höchsten und nach rechts und links niedriger werdend erscheinen. — Ein zweites Beispiel mag uns die Kugel liefern. Der Umriss einer Kugel erscheint, von welcher Seite her man sie auch betrachten möge, als ein Kreis. Im perspektivischen Bilde aber ist der Umriss des Kugelbildes — wenn die ebene Bildfläche nicht gerade rechtwinklig zur Verbindungslinie des Kugelmittelpunkts mit dem Auge ist — kein Kreis, sondern, wie wir noch sehen werden, ein Kegelschnitt, also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, in den gewöhnlichen Fällen eine Ellipse. Von dem angenommenen Augenorte aus betrachtet, erscheint diese Ellipse, wie es der richtigen Erklärung entspricht, kreisrund, während umgekehrt ein gezeichneter Kreis, von demselben Punkte aus betrachtet, als Ellipse erscheinen würde.

Was für die Kugel gilt, das gilt auch für den im Wesentlichen kugelförmig gestalteten menschlichen Kopf, ja, für den ganzen menschlichen Körper. Wenn wir beispielsweise eine ausgedehnte Gruppe von Personen perspektivisch richtig darstellen wollen, so müssen wir die einzelnen Personen um so mehr in die Breite gezerzt zeichnen, je weiter sie von der Mitte, der wir uns das Auge gegenüberliegend denken, entfernt sind. Im photographischen Bilde einer aus geringer Entfernung aufgenommenen Gruppe sieht man das sehr deutlich, und das, was man gewöhnlich irrthümlicherweise als „photographische Verzerrung“ bezeichnet, ist weiter nichts, als eine Eigenschaft des exakten perspektivischen Bildes. — Wenn nun tatsächlich der Künstler, der beispielsweise auf einem großen Wandgemälde eine bedeutende Anzahl von Personen in Lebensgröße darzustellen hat, sich um dieses Gesetz der Perspektive nicht kümmert und auch nicht kümmern kann, so liegt das nur daran, daß die fundamentale Bedingung des perspektivischen Bildes, die Betrachtung von einem Punkte aus, nicht erfüllt ist. Der Beschauer eines solchen Wandgemäldes geht an ihm entlang und betrachtet jede Figur von vorn; der Künstler ist also genötigt, diesen tatsächlichen Verhältnissen Rechnung zu tragen und jede Figur so darzustellen, wie sie gerade von vorn gesehen erscheint. Jede gemalte Figur hat also ihren eigenen Augenort, das ganze Gemälde ist nicht mehr ein einheitliches perspektivisches Bild, und die perspektivisch gemalte Landschaft oder Architektur steht mit den nicht von einem einheitlichen Augenort dargestellten Personen in einem unauflösliehen Widerspruche.



Wenn man den durch die richtige Erklärung ausgedrückten Sinn und die eigentliche Bedeutung des perspektivischen Bildes erfaßt hat, wundert man sich auch über manche Erscheinungen nicht mehr, die dem nicht Eingeweihten rätselhaft vorkommen. So wird es oft als eine besondere Merkwürdigkeit angestaunt, daß eine Kanone oder ein Gewehr, das auf den Beschauer zielend dargestellt worden ist, stets auf ihn zielt, wo er sich auch befinden möge. Wenn er also vor dem Bilde hin- und hergeht, verfolgt ihn das Geschütz scheinbar. Ein derartiges Bild pflegt als eine ganz besondere Leistung eines ungewöhnlich geschickten Malers angesehen zu werden. Tatsächlich liegt die Sache so, daß — die angegebene Darstellungsweise vorausgesetzt — die genannte Wirkung unter allen Umständen eintreten muß, das Bild mag im Uebrigen so schlecht gemalt sein wie nur möglich. — Das Bild eines auf mich gerichteten Rohrs besteht nämlich ganz einfach aus zwei konzentrischen Kreisen, deren Abstand gleich der Metallstärke ist; ist aber das Rohr nicht auf mich gerichtet, so sehe ich eine Seitenansicht des Rohrs. Um den Eindruck zu haben, daß das Rohr nicht auf mich gerichtet sei, bedarf es also des Anblicks einer Seitenfläche; wenn eine solche aber überhaupt nicht gemalt ist, kann ich sie auch von keiner Seite her sehen. Von jeder Seite her betrachtet, muß ich also den Eindruck des auf mich gerichteten Rohres haben. Daß bei seitlicher Betrachtung die Kreise zu Ellipsen zusammengedrückt erscheinen, ändert an der Sache nichts; man erhält dadurch nur den Eindruck, daß das Rohr elliptischen Querschnitt habe.

Etwas ganz Aehnliches tritt ein, wenn ein menschliches Bildnis so gemalt ist, daß die Augen gerade auf den Beschauer blicken. Jetzt mag dieser sich aufstellen, wo er nur will — das Bild blickt ihn stets an und verfolgt ihn mit den Augen. Diese selbstverständliche Erscheinung hat schon manchen Unkundigen in Angst und Schrecken versetzt. Und doch ist die Erklärung so einfach! Ist nämlich ein Auge gerade auf mich gerichtet, so erscheinen die beiden die Iris begrenzenden Kreise konzentrisch und die rechts und links sichtbaren dreieckigen Ausschnitte der weißen Lederhaut gleich groß. In der bei seitlicher Betrachtung des so gemalten Bildes auftretenden Verkürzung gehen freilich die Kreise in Ellipsen über, bleiben aber konzentrisch, die Dreiecke verkürzen sich ebenfalls, bleiben aber, da sie in einer Ebene liegen, gleich groß. Der Eindruck des auf mich gerichteten Blickes bleibt also erhalten. — Blickt aber das wirkliche, körperliche Auge an mir vorbei, so erscheinen die Grenzen der Iris nicht mehr konzentrisch und die beiden weißen Dreiecke verschieden, wenn nicht eins von ihnen überhaupt verschwindet



— eine Veränderung, die natürlich bei dem auf mich blickend dargestellten Auge durch keine Verkürzung hervorgerufen werden kann.

## § 2. Die allgemeine Bildfläche.

Bei der Konstruktion des perspektivischen Bildes wird, wie schon aus dem im § 1 Ausgeführten folgt, ein Auge angenommen, also darauf, daß wir tatsächlich mit zwei Augen sehen, keine Rücksicht genommen. Die Bildfläche kann eine ganz beliebige, ebene oder krumme Fläche sein. Irgend einen Punkt  $P$  des Raumes bilden wir nun dadurch ab, daß wir ihn mit dem Auge  $O$  durch eine gerade Linie, den sogenannten Sehstrahl, verbinden und diesen Strahl  $OP$  mit der Bildfläche schneiden. Der Schnittpunkt  $P'$  deckt sich, von  $O$  aus gesehen, mit dem Punkt  $P$  und ist also sein perspektivisches Bild.

Eine beliebige gerade oder krumme Linie des Raumes können wir uns durch Bewegung des Punktes  $P$  erzeugt denken. In jeder Lage dieses Punktes ist der Schnittpunkt  $P'$  von  $OP$  mit der Bildfläche das Bild von  $P$ ; alle Lagen des beweglichen Sehstrahls erzeugen eine Kegelfläche allgemeinsten Art, deren Scheitelpunkt  $O$  und deren Schnittlinie mit der Bildfläche — die Kurve der Punkte  $P'$  — das Bild der räumlichen Linie ist. — Schneidet die abzubildende Linie die Bildfläche, so ist ein solcher Schnittpunkt sein eigenes Bild, er fällt mit seinem Bilde zusammen; das Bild muß also durch diese Schnittpunkte gehen.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß die abzubildende Linie eine Gerade ist. Jetzt liegen offenbar alle Strahlen in einer Ebene, und das Bild der Geraden ist ein ebener Schnitt der Bildfläche; es geht, wie wir das schon im allgemeinsten Falle sahen, durch die sogenannten Durchstoßpunkte, die Schnittpunkte der Geraden mit der Bildfläche.

Wir wollen uns nun vorstellen, der auf der abzubildenden Geraden liegende Punkt  $P$  gehe nach der einen oder der anderen Seite ins Unendliche; dann wird der vom Sehstrahl und der Geraden gebildete Winkel immer spitzer und spitzer, bis schließlich der Sehstrahl der Geraden parallel wird. Dem unendlich fernen Punkte der Geraden entsprechen also die Schnittpunkte der Bildfläche mit einer durch das Auge gezogenen Parallelen zur abzubildenden Geraden, die Fluchtpunkte. Da eine Fläche  $n^{\text{ter}}$  Ordnung von einer Geraden in  $n$  Punkten geschnitten wird, können wir sagen, daß die Anzahl der Fluchtpunkte



einer Geraden gleich der Ordnung der Bildfläche ist. Natürlich können diese Fluchtpunkte zum Teil oder auch alle imaginär sein. Haben wir eine Schar paralleler Gerader, so haben sie die Fluchtpunkte gemein; ihre Bilder müssen also alle sich in diesen Punkten schneiden.

Handelt es sich um die Abbildung eines Körpers, so haben wir uns einen Sehstrahlenkegel zu denken, dessen einzelne Strahlen den Körper berühren, der also den Körper einhüllt. Die Berührungspunkte der Strahlen mit der körperlichen Oberfläche bilden den Umriss des Körpers, ihre Schnittpunkte mit der Bildfläche den Umriss des Bildes.

### § 3. Die Ebene als Bildfläche.

Mit Ausnahme des ausgemalten Gewölbes und der zylindrischen Bildfläche des Panoramas ist die Ebene die allein vorkommende Bildfläche; wir wollen also im Folgenden eine Bildebene voraussetzen. Hier hat man nun vor allen Dingen darauf zu achten, daß die Zeichnung im Verhältnis zum gewählten Abstände des Auges von der Bildebene nicht zu groß ausfällt. Der Bildwinkel, d. h. der Winkel, den zwei nach gegenüberliegenden Punkten des Bildrandes vom Auge aus gezogene Strahlen mit einander bilden, soll weder in horizontalem noch in vertikalem Sinne einen Rechten überschreiten. Die größte Ausdehnung des Bildes soll also höchstens gleich dem Doppelten der Augenentfernung sein. Wird dieses Maß überschritten, so läßt sich das Bild von dem angenommenen Augenorte aus nicht mehr übersehen und es treten am Rande Verzerrungen auf, die, wenn sie auch konstruktiv richtig sind, doch unschön wirken.

Handelt es sich nun um die Abbildung einer Geraden, so ist das Bild die Schnittlinie der Bildebene mit der Fläche der Sehstrahlen, die in diesem Falle eine Ebene ist; da sich aber zwei Ebenen in einer Geraden schneiden, so erkennen wir, daß das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist. Die Gerade schneidet die Bildebene in einem Punkte, dem Durchstoßpunkte, durch den auch das Bild gehen muß. Die durch das Auge gezogene Parallele zu der Geraden schneidet die Bildebene in einem Punkte, dem Fluchtpunkte, dessen Verbindung mit dem Durchstoßpunkte das Bild der Geraden liefert. Ueber den Fluchtpunkt kann das Bild der wirklich gesehenen Geraden, so weit man sie auch verfolgen möge, niemals hinausgehen, es kann ihn, da in Wirklichkeit nur begrenzte Strecken vorkommen, nicht einmal erreichen. Dagegen kann das Bild sehr



wohl über den Durchstoßpunkt hinaus gehen; der jenseits dieses Punktes liegende Teil des Bildes entspricht dem vor der Bildebene liegenden Teile der Geraden.

Verfolgt man diesen vor der Bildebene liegenden Teil der Geraden weiter rückwärts, so gelangt man zu dem Schnittpunkte der Geraden mit einer Ebene, die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegt werden kann: dieser Punkt bildet sich im unendlich fernen Punkte des Bildes ab. Geht man über diesen Schnittpunkt noch weiter hinaus rückwärts, so bilden sich die Punkte der Geraden in dem über den Fluchtpunkt fortgesetzten Teile des Bildes ab, bis schließlich das Bild des unendlich fernen Punktes der Geraden wieder in den Fluchtpunkt fällt. Mit diesen Verhältnissen werden wir uns noch mehrfach zu beschäftigen haben; an dieser Stelle mag daher diese kurze Andeutung genügen. — Daß der hinter dem Auge liegende Teil der Geraden nicht tatsächlich gesehen werden kann, versteht sich wohl von selbst; es handelt sich hier um ein rein gedachtes, geometrisches, virtuelles Bild, das aber, wie wir später sehen werden, auch für die wirkliche Abbildung bedeutungsvoll werden kann.

Wir wollen nun die Lage des Bildes bei verschiedenen Lagen der Geraden betrachten. Ist die Gerade der Bildebene parallel, so wird die letztere von der Ebene der Sehstrahlen in einer Linie geschnitten, die der gegebenen Geraden parallel ist. Das Bild ist also der Geraden parallel; Durchstoßpunkt und Fluchtpunkt liegen in unendlicher Ferne. — Ist die Gerade auf der Ebene senkrecht, so fallen Durchstoßpunkt und Fluchtpunkt und damit das ganze Bild in einen Punkt, der die Projektion des Auges auf die Bildebene ist und als Hauptpunkt oder Augenpunkt bezeichnet wird. — Ist die Gerade unter einem halben Rechten ( $45^\circ$ ) gegen die Bildebene geneigt, so ist auch der vom Auge parallel mit ihr gezogene Sehstrahl unter demselben Winkel gegen die Bildebene geneigt. Auge, Hauptpunkt und Fluchtpunkt sind in diesem Falle die Ecken eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, und die Entfernung des Fluchtpunkts vom Hauptpunkte ist gleich dem senkrechten Abstände des Auges von der Bildebene. Die Fluchtpunkte der unendlich vielen, unter einem Winkel von  $45^\circ$  gegen die Bildebene geneigten Richtungen liegen daher auf einem Kreise, der um den Hauptpunkt als Mittelpunkt mit dem Abstände des Auges von der Bildebene als Radius beschrieben werden kann. Dieser Kreis wird als Distanzkreis bezeichnet.

Hat man eine Schar von Parallelen abzubilden, so ist allen Bildern der Fluchtpunkt gemeinsam, man hat also die Durchstoßpunkte



der verschiedenen Geraden mit diesem gemeinsamen Fluchtpunkte zu verbinden und erhält als Bild der Schar ein Strahlenbüschel.

Die Fluchtpunkte aller in einer Ebene liegenden oder einer Ebene parallelen Geraden liegen in einer Geraden, der Fluchtgeraden. Diese Fluchtgerade ist die Schnittlinie der Bildebene mit einer durch das Auge gelegten, der Ebene, in der die Geraden liegen oder der sie parallel sind, parallelen Ebene.

Ist eine Ebene zwei Richtungen parallel, so geht ihre Fluchtgerade durch die Fluchtpunkte der beiden Richtungen; ist eine Richtung zwei Ebenen parallel, so ist ihr Fluchtpunkt der Schnittpunkt der Fluchtgeraden der beiden Ebenen. — Von diesen wichtigen Tatsachen werden wir bei den Schattenkonstruktionen Gebrauch machen.

Soll ein Kreis abgebildet werden, so bilden die nach seinen einzelnen Punkten gehenden Sehstrahlen eine „Kegelfläche zweiter Ordnung“; das gesuchte Bild ist der Schnitt dieser Kegelfläche mit der Bildebene. Der ebene Schnitt einer Kegelfläche zweiter Ordnung ist im Allgemeinen eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die Ebene nur eine Hälfte oder beide Hälften der Kegelfläche schneidet; als besondere Grenzfälle treten auch der Kreis und die Parabel auf, ersterer namentlich dann, wenn der abzubildende Kreis der Bildebene parallel ist. Auch eine Gerade kann das Bild eines Kreises sein, dann nämlich, wenn seine Ebene durch das Auge geht; unter dieser Voraussetzung ist das Bild jeder ebenen Kurve eine Gerade. — Bei der Abbildung der Kugel treten dieselben Kurven auf, denn hier bilden die die Kugel umhüllenden Strahlen eine Kegelfläche — und zwar eine normale Kegelfläche — zweiter Ordnung, deren Schnitt mit der Bildebene wieder eine Ellipse oder Hyperbel, in besonderen Fällen ein Kreis oder eine Parabel ist. Eine Gerade kann hier nicht vorkommen, da die dazu nötige Voraussetzung, daß die Bildebene selbst durch das Auge geht, praktisch unerfüllbar ist.

Die verschiedenen Lagen des Kreises oder der Kugel, in denen diese Kurven auftreten, werden wir bei der Betrachtung der vertikalen Bildfläche eingehender behandeln.

Da jede Linie, jeder Umriss durch eine Kegelfläche — das Wort im allgemeinsten Sinne genommen — abgebildet wird und parallele Schnitte einer Kegelfläche stets ähnlich sind, erkennt man ohne Weiteres, daß eine Parallelverschiebung der Bildebene niemals eine Veränderung der Gestalt des Bildes, sondern nur eine Veränderung seiner Größe, seines Maßstabs, bewirken kann. Die lineare Ausdeh-



nung des Bildes ist offenbar dem Abstände der Bildebene vom Auge proportional.

Wer jemals Landschaften, Gebäude usw. nach der Natur gezeichnet hat, der weiß, daß eine gewisse Größe der Darstellung sich dem Zeichner gewissermaßen als naturgemäß darbietet, so daß es ihm schwer wird, in einem größeren oder kleineren Maßstabe zu arbeiten. Diese Größe der Zeichnung, die man mit einem gewissen Rechte die natürliche Größe nennen könnte, ist einfach die Bildgröße, die sich durch den Schnitt des Sehstrahlenbündels mit einer Ebene ergibt, deren Abstand vom Auge gleich der Entfernung der Zeichenfläche von ihm ist. Bei diesem Abstände der Bildebene ist die scheinbare Größe einer Strecke, d. h. der von den nach ihren Endpunkten gezogenen Sehstrahlen gebildete Winkel, gleich der scheinbaren Größe ihres Bildes.

Die perspektivische Verkürzung zeigt sich auch in der Veränderung, die die scheinbare Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers mit zunehmender Entfernung desselben erleidet. — Die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig und geradlinig bewegenden Körpers ist das Verhältnis des von ihm in einer beliebigen Zeit zurückgelegten Weges zu eben dieser Zeit; nehmen wir also als beliebige Zeit die Zeiteinheit an, so stellt der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg die Geschwindigkeit dar. Die scheinbare Größe dieses Weges, also die scheinbare Geschwindigkeit, nimmt demnach — unveränderte Richtung der Bewegung vorausgesetzt — der zunehmenden Entfernung des Körpers vom Auge entsprechend ab, sie ist ihr umgekehrt proportional. Da auch die scheinbare Größe des Körpers dieser Entfernung umgekehrt proportional ist, so folgt, daß die scheinbare Geschwindigkeit der scheinbaren Größe direkt proportional ist.

Beispielsweise scheint ein fahrender Eisenbahnzug sich um so langsamer zu bewegen, je weiter er von uns entfernt ist, je kleiner er also erscheint. Ebenso bewegen sich die Wolken — gleiche wirkliche Geschwindigkeit vorausgesetzt — scheinbar um so langsamer, je höher sie sind. Wenn wir also verschiedene Wolkenzüge sich in demselben Sinne mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen sehen, so haben wir hieraus in erster Linie auf die Verschiedenheit der Höhen zu schließen, in denen diese Wolkenzüge sich bewegen. Natürlich kann außerdem eine Verschiedenheit der linearen Geschwindigkeiten, der Verschiedenheit der Geschwindigkeit der Luftströmungen in verschiedenen Höhen entsprechend, in Betracht kommen.



# I. Abschnitt.

## Die Abbildung auf vertikaler Bildebene.

Wenn wir von dem verhältnismäßig seltenen Falle der perspektivischen Darstellung von Gebäudeteilen auf der wagerechten Decke eines Saales einstweilen absehen, dürfen wir sagen, daß die vertikale Bildebene die allein wichtige ist. Sie ist auch die naturgemäße, da im normalen Falle unser Blick wagerecht gerichtet ist und wir die Bildebene stets zur Richtung des Blickes rechtwinklig legen. Im Folgenden sollen nun die Gesetze der Abbildung auf vertikaler Ebene abgeleitet werden.

### Erstes Kapitel.

#### Die Herstellung des Bildumrisses.

#### § 4. Hauptpunkt (Augenpunkt), Fluchtpunkt, Distanzkreis, Horizont, Distanzpunkte.

Was im § 3 als für die Bildebene in allgemeiner Lage gültig abgeleitet wurde, das gilt natürlicherweise unverändert auch für den besondern Fall, die vertikale Bildebene. Der Haupt- oder Augenpunkt ist der Durchstoßpunkt des vom Auge auf die Bildebene gefällten Perpendikels; er ist der Fluchtpunkt der zur Bildebene senkrechten, jetzt also horizontalen Geraden und liegt in unserem Falle offenbar in gleicher Höhe mit dem Auge. — Der Fluchtpunkt einer Geraden wird, wie immer, gefunden, indem man durch das Auge eine Parallele zu der Geraden zieht und mit der Bildebene schneidet.

Die Begrenzung des Bildes einer unendlich langen Geraden durch den Fluchtpunkt ist ein außerordentlich einfaches und anschauliches geometrisches Beispiel für die endliche Summe einer konvergenten unendlichen Reihe. Denken wir uns, von einem beliebigem Punkte angefangen, auf einer sich nach hinten in's Unendliche erstreckenden Geraden unendlich viele gleiche Teile von ganz beliebiger Größe aufgetragen, so werden ihre Bilder immer kleiner und kleiner werden.



Das Bild der Geraden, von dem Anfangspunkte bis in's Unendliche gerechnet, ist also die Summe unendlich vieler Teile; diese Summe ist aber endlich, nämlich gleich der Entfernung des Bildes des Anfangspunktes vom Fluchtpunkte.

Die Fluchtpunkte aller Richtungen, die mit der Bildebene gleiche Winkel bilden, liegen auf einem Kreise; er ist der Schnitt der Bildebene mit einer normalen Kegelfläche, deren Scheitelpunkt das Auge ist, und deren einzelne Erzeugende jenen verschiedenen Richtungen parallel sind. Für die Richtungen, die mit der Bildebene einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen, ist der Kreis der Fluchtpunkte der Distanzkreis, dessen Radius, wie wir schon wissen, gleich der Entfernung des Auges von der Bildfläche ist.

Alle die verschiedenen Neigungswinkeln entsprechenden Kegelflächen haben das vom Auge auf die Bildfläche gefällte Perpendikel zur gemeinsamen Axe.

Von besonderer Wichtigkeit sind die Fluchtpunkte der verschiedenen horizontalen Richtungen. Da die durch das Auge zu diesen verschiedenen Richtungen gezogenen Parallelen in einer durch das Auge gehenden Horizontalebene liegen, erkennt man sofort, daß die Fluchtpunkte aller Horizontalen in der Schnittlinie dieser durch das Auge gehenden Horizontalebene mit der Bildebene liegen. Diese Schnittlinie — also eine in Augenhöhe durch das Bild gezogene Horizontale — ist die Fluchtgerade der Horizontalen und wird als **Horizont** bezeichnet. Er geht selbstverständlich durch den Hauptpunkt und schneidet den Distanzkreis in zwei Punkten, den Distanzpunkten, die die Fluchtpunkte der unter  $45^\circ$  gegen die Bildebene geneigten, horizontalen Geraden sind. Sie liegen rechts und links vom Hauptpunkte in Abständen, die gleich dem Radius des Distanzkreises, also gleich der Entfernung des Auges von der Bildebene sind.

### § 5. Konstruktive Ermittlung des Bildes eines beliebigen Punktes; Grundebene und Grundlinie, Fluchtgerade, umgeklapptes Auge.

Eine durch den abzubildenden Punkt  $P$  gelegte Horizontalebene werde als Grundebene, ihr Schnitt mit der Bildebene als Grundlinie bezeichnet. Die Abbildung 1 stellt in isometrischer Ansicht die Bildebene, das Auge  $O$ , den Hauptpunkt  $H$ , die Distanzpunkte  $D_1$  und  $D_2$ , den abzubildenden Punkt  $P$ , die Grundebene und die Grund-



linie dar. Zur Ermittlung des gesuchten Bildpunktes  $P'$  stehen uns jetzt verschiedene Linien zur Verfügung. — Ein von  $P$  auf die Bildebene gefälltes Perpendikel schneidet sie im Punkte  $Q$  der Grundlinie, und da  $H$  der Fluchtpunkt dieses Perpendikels ist, haben wir in der Verbindungslinie  $QH$  sein Bild. Zwei durch  $P$  gelegte Horizontale, die unter  $45^\circ$  gegen die Bildebene geneigt sind, schneiden sie in den Punkten  $S_1$  und  $S_2$ , und da  $D_1$  und  $D_2$  die zugehörigen Fluchtpunkte sind, haben wir in  $S_1D_1$  und  $S_2D_2$  die Bilder dieser

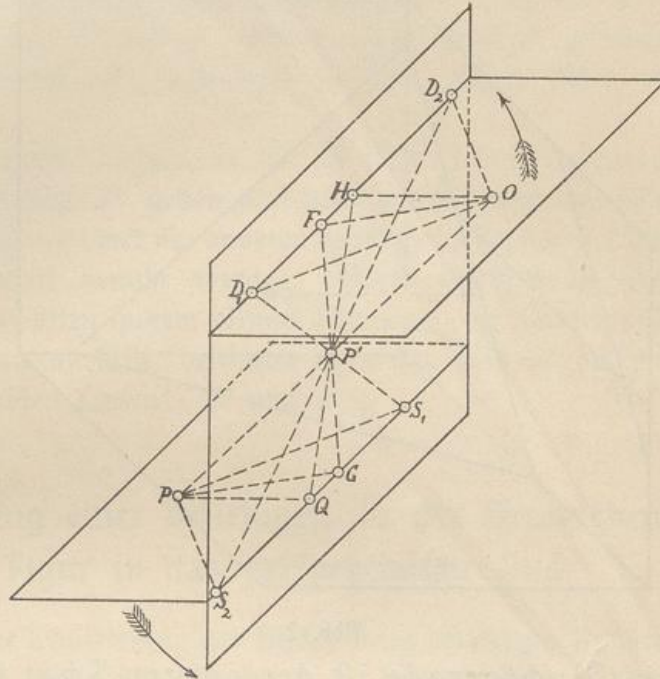


Abb. 1

Horizontalen. Die drei Bilder  $QH$ ,  $S_1D_1$  und  $S_2D_2$  müssen durch den gesuchten Bildpunkt  $P'$  gehen, und wir erhalten also diesen Punkt als Schnittpunkt zweier beliebiger dieser drei Bildgeraden;  $P$  und  $P'$  liegen natürlich auf einem durch  $O$  gehenden Sehlstrahle.

Die Grundebene ist theoretisch ohne jede Bedeutung, da ihre Lage sich ja mit der Höhenlage des Punktes  $P$  ändert. Sie ist aber von großer praktischer Wichtigkeit, da wir es bei den Anwendungen fast ausnahmslos mit Grundrissen zu tun haben, die in einer Horizontalebene, eben der Grundebene, ausgedehnt sind. Die Grundebene hat dann die Bedeutung der natürlichen Erdoberfläche.

Wir sind übrigens keineswegs auf die Benutzung der unter  $45^\circ$  geneigten Geraden angewiesen, sondern können eine beliebige durch  $P$  gehende horizontale Gerade  $PG$  benutzen, die, indem wir von  $O$  aus eine Parallele zu ihr ziehen, den Fluchtpunkt  $F$  liefert. Das Bild  $GF$  geht ebenfalls durch  $P'$  und kann zur Ermittlung dieses Punktes benutzt werden.

Die Fluchtpunkte aller Geraden, die einer Ebene parallel sind, liegen in der im § 3 schon erwähnten Fluchtgeraden der Ebene.



Wir finden diese Fluchtgerade, indem wir die Fluchtpunkte zweier beliebiger Gerader der Ebene verbinden. Wählen wir dazu ihre Schnittlinien mit der Grundebene und mit der Bildebene (s. Abb. 2),

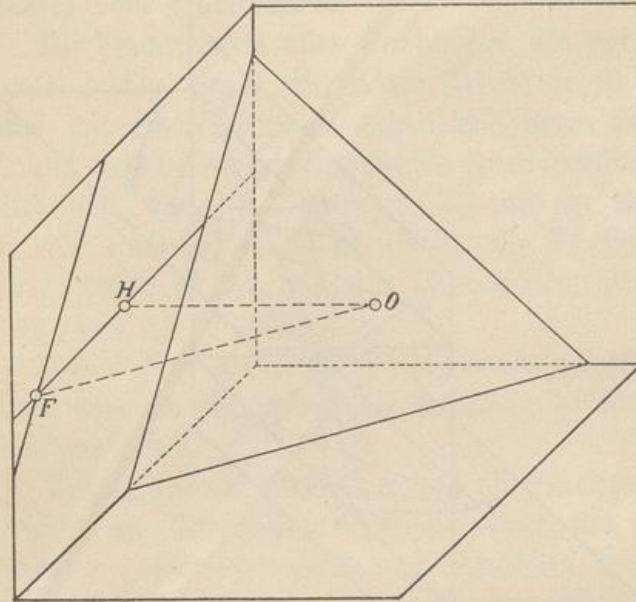


Abb. 2

also ihre Spuren, so brauchen wir nur den im Horizonte liegenden Fluchtpunkt  $F$  der

Horizontalspur aufzufinden und von ihm aus eine Parallele zur Vertikalspur zu ziehen. Diese Parallele ist die Fluchtgerade, denn der Fluchtpunkt der Vertikalspur liegt offenbar in unendlicher Ferne. —

Die Fluchtgerade ist der ganzen Schar paralleler Ebenen gemeinsam.

Wir wollen nun die durch  $O$  und  $P$  gehenden Horizontalebenen im Sinne der in Abbildung 1 angegebenen Pfeile in die Bildebene umklappen, so daß alle drei Ebenen in die Fläche des Papiers fallen. Dann erhalten wir die auf Abb. 3 angegebene Figur; die durch  $D_1, H, F, D_2$  gehende Horizontale ist der Horizont, die durch  $S_2, Q, G, S_1$  gehende Horizontale die Grundlinie. Oberhalb des Horizonts erblicken wir das umgeklappte Auge  $A$ , unterhalb der Grundlinie den abgebildeten Punkt  $P$ ; es ist  $D_1H = D_2H = AH = OH$ ,  $S_1Q = S_2Q = PQ$ .

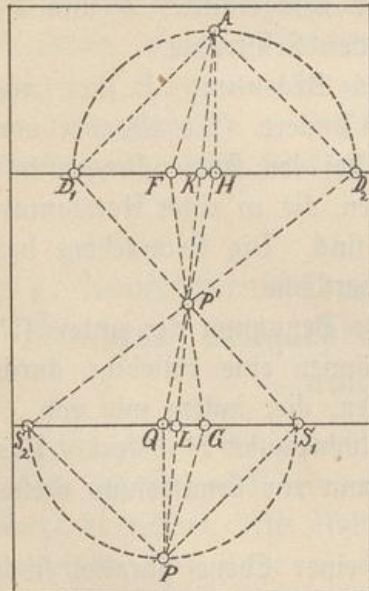


Abb. 3

Jeder beliebigen durch  $P$  gehenden Geraden  $PG$  entspricht eine parallele, durch  $A$  gehende Gerade  $AF$ ; es ist also  $\angle PGF = \angle GFA$ . Ist also



der eine dieser beiden Winkel  $= 2R$ , so ist auch der andere  $= 2R$  und der ganze Linienzug  $PGFA$  fällt in eine Gerade. Ziehen wir also die gerade Verbindungslinie  $PA$ , die den Horizont in  $K$ , die Grundlinie in  $L$  schneidet, so ist  $LK$  das Bild von  $PL$ ; da  $PL$  durch  $P$  geht, muß  $LK$  durch  $P'$  gehen. Unter allen durch  $P$  gehenden horizontalen Geraden ist  $PL$  diejenige, die mit ihrem Bilde zusammenfällt.

Die gerade Verbindungslinie  $PA$  ist also stets ihr eigenes Bild, muß demnach durch  $P'$  gehen und kann zur Bestimmung dieses Punktes in Verbindung mit einer der anderen durch ihn gehenden Geraden mit besonderem Vorteil benutzt werden. Vorausgesetzt, daß diese Linien sich nicht unter allzu spitzem Winkel schneiden, der Schnittpunkt also nicht zu ungenau ausfällt, bestimmt man das Bild  $P'$  am einfachsten durch die beiden Linien  $QH$  und  $PA$ .

## § 6. Uebertragung einer beliebigen, in der Grundebene liegenden Figur in das perspektivische Bild.

Nachdem wir die Ermittlung des Bildes eines beliebigen Punktes kennen gelernt haben, hat die Konstruktion des Bildes einer beliebigen horizontalen Figur — etwa des Grundrisses eines Gebäudes — keine Schwierigkeit mehr. Da alle Punkte der Figur in derselben Grundebene liegen, ist auch für alle die Grundlinie gemeinsam, und wir werden jeden Punkt der Figur so wie den Punkt  $P$  im § 5 behandeln.

In Abb. 4 ist diese Konstruktion für eine Figur 1 2 3 4 ..., an der nur rechte Winkel auftreten, und deren Seiten teils parallel zur Bildebene, teils rechtwinklig zu ihr liegen, ausgeführt. Wie wir wissen, bilden sich die der Bildebene parallelen Seiten mit ihr parallel ab, während die Bilder der zu ihr senkrechten Seiten nach  $H$  gehen. Wir bemerken zunächst, daß im Bilde sich die im Grundrisse oben liegenden

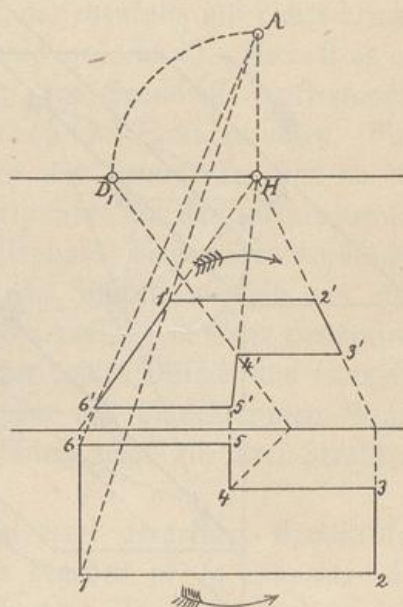


Abb. 4



Punkte unten, die im Grundrisse unten liegenden Punkte oben befinden. Ferner erkennen wir leicht, daß der Drehungssinn, in dem wir uns beim Durchlaufen der Punkte 1, 2, 3 ... bewegen, dem Sinne, in dem wir uns beim Durchlaufen der Punkte 1', 2', 3' ... des Bildes bewegen, entgegengesetzt ist. Im Grundrisse und im Bilde ist der Sinn durch je einen Pfeil angegeben. Beim Aufzeichnen des Grundrisses ist natürlich darauf Rücksicht zu nehmen. Die Seiten, die im Bilde nach vorn kommen sollen, müssen im Grundrisse nach oben, die im Bilde nach hinten kommen sollen, nach unten gelegt werden. Ferner muß der Grundriß das Spiegelbild des wirklichen sein; man bewirkt das am einfachsten dadurch, daß man den Grundriß auf Pauspapier zeichnet, das Papier umkehrt und nun die Zeichnung überträgt.

Wenn die Grundebene über dem Auge liegt — was allerdings nur ausnahmsweise vorkommt — finden diese Umkehrungen nicht statt. Was im Grundrisse oben liegt, liegt auch im Bilde oben, und der Sinn, in dem der Grundriß und sein Bild durchlaufen werden, ist derselbe — vorausgesetzt, daß wir die beiden horizontalen Ebenen in demselben Drehungssinne umklappen, wie bei unterhalb des Auges liegender Grundebene. Die Umklappung in diesem Sinne würde aber den Nachteil im Gefolge haben, daß der abzubildende Grundriß und sein Bild in einander fallen würden. Klappen wir aber, um diesen Nachteil zu vermeiden, die horizontalen Ebenen im Sinne der in Abb. 5

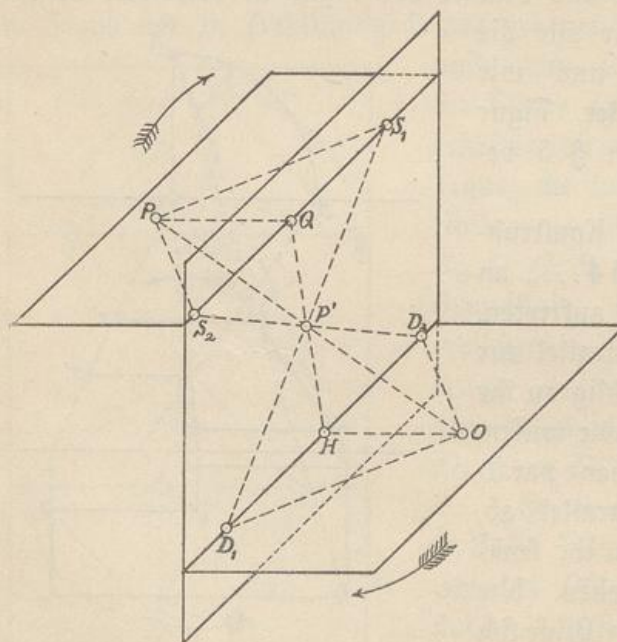


Abb. 5

angegebenen Pfeile um — also dem in Abb. 1 angegebenen Drehungssinne entgegengesetzt — so erhalten wir eine Figur (s. Abb. 6), die der Abb. 3 genau entspricht, nur daß Oben und Unten vertauscht sind. Ermitteln wir auch jetzt wieder das Bild einer Figur 1 2 3 4 ..., deren Seiten parallel und rechtwinklig zur Bildebene sind, so erhalten wir wieder ein Bild, das



gegen die gegebene Figur dieselbe Lage hat wie in Abb. 4. Was im Grundrisse oben liegt, liegt im Bilde unten und umgekehrt; der Sinn, in dem die Punkte  $1', 2', 3' \dots$  auf einander folgen ist dem Sinne, in dem die Punkte  $1, 2, 3 \dots$  auf einander folgen, entgegengesetzt. (Abb. 7.)

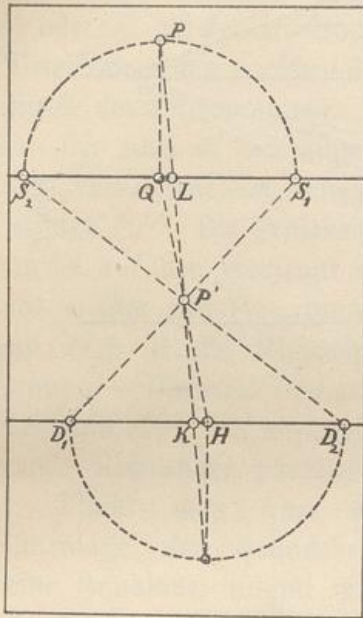


Abb. 6

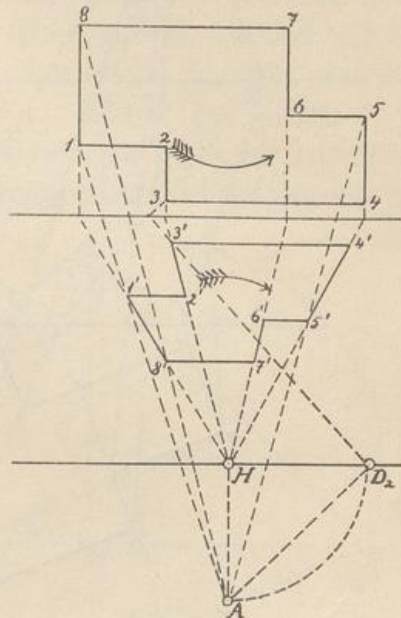


Abb. 7

In Abb. 8 erkennen wir die Uebertragung eines unterhalb des Auges liegenden Grundrisses in das Bild, der ebenfalls nur rechte Winkel enthält, aber gegen die Bildebene beliebig gedreht ist. Hier ist es am zweckmäßigsten, zuerst die den beiden am Grundrisse auftretenden Richtungen entsprechenden Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  aufzufinden. Man braucht dann nur die einzelnen Seiten des Grundrisses bis an die Grundlinie zu verlängern und die Schnittpunkte mit den entsprechenden Fluchtpunkten zu verbinden. Die Schnittpunkte beider Strahlenbüschel sind die Bilder der Eckpunkte. Fallen die Schnitte zu spitz aus oder sind die Schnittpunkte der Seiten des Grundrisses mit der Grundlinie unerreichbar, so benutzt man nur eines der beiden Büschel und schneidet seine Strahlen mit den Verbindungslinien des umgeklappten Auges und der Grundrisspunkte. — Die Abbildung zeigt alle drei Strahlensysteme.

Will man ein perspektivisches Bild eines derartigen Grundrisses zeichnen, ohne daß die Lage des Auges gegeben ist, so kann man die Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  beliebig annehmen. Da der Winkel  $F_1 A F_2$  stets ein rechter sein muß, liegt das umgeklappte Auge  $A$  auf einem



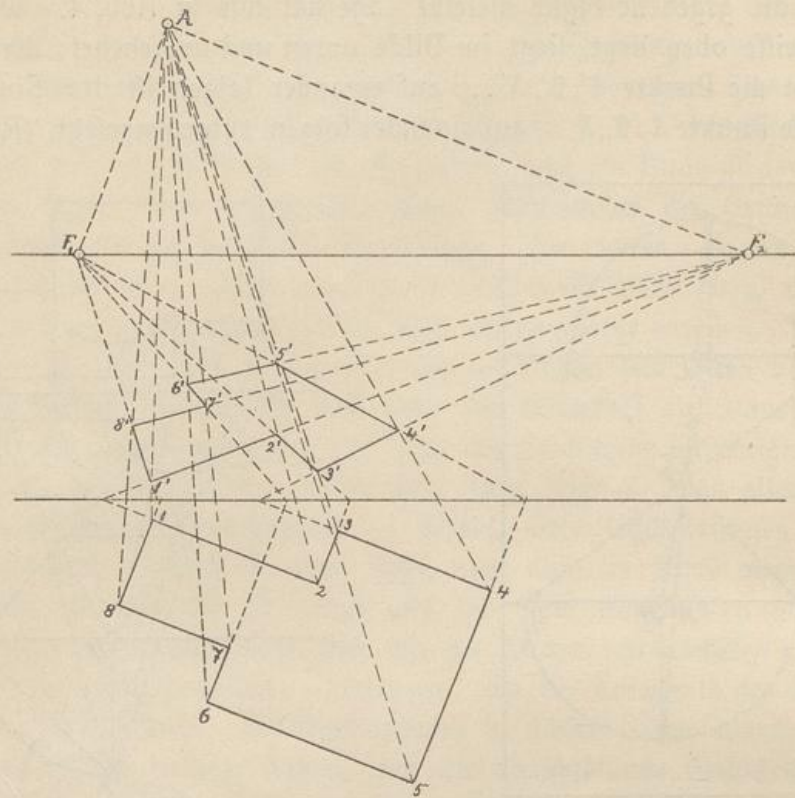


Abb. 8

Halbkreise, dessen Durchmesser  $= F_1 F_2$  und dessen Mittelpunkt die Mitte zwischen beiden Fluchtpunkten ist. (Abb. 9.) Ist nun  $P$  ein beliebiger Punkt der Grundebene, so findet man mit Hilfe der durch

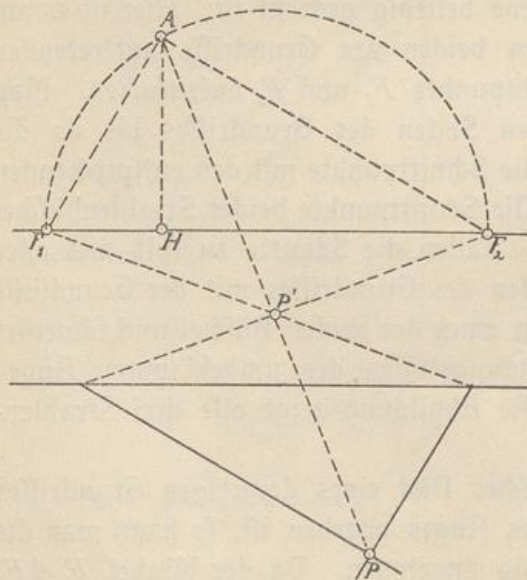


Abb. 9

ihn gehenden Richtungen, denen die angenommenen Fluchtpunkte entsprechen sollen, sein Bild  $P'$ . Zieht man nun  $PP'$ , so schneidet diese Gerade den Halbkreis im umgeklappten Auge  $A$ , dessen Projektion auf den Horizont den Hauptpunkt  $H$  ergibt.  $HA$  ist die Augenentfernung.

Ganz ebenso ist übrigens die Lage des Auges auch durch die beliebige Annahme zweier Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  bestimmt, die



zwei ganz beliebigen Richtungen in der Grundebene, die den Winkel  $\varphi$  mit einander bilden, entsprechen. Das umgeklappte Auge  $A$  (Abb. 10) liegt jetzt auf einem Kreisbogen, der durch  $F_1$  und  $F_2$  geht und den Winkel  $\varphi$  als Peripheriewinkel faßt; den Mittelpunkt des Kreises findet man bekanntlich dadurch, daß man den Komplementwinkel von  $\varphi$  in  $F_1$  oder  $F_2$  an den Horizont trägt und seinen andern Schenkel mit der Mittelsenkrechten zwischen diesen Punkten schneidet. — Ermittelt man nun mittels der angenommenen Fluchtpunkte das Bild  $P'$  des Punkts  $P$ , in dem sich zwei in den angenommenen Richtungen gezogene Gerade der Grundebene schneiden, so liegt  $A$  im Schnittpunkte des Kreisbogens mit der Geraden  $PP'$ . Die Projektion von  $A$  auf den Horizont ergibt wieder den Hauptpunkt und  $HA$  ist die Augenentfernung. — Natürlich sind auch  $AF_1$  und  $AF_2$  den angenommenen Richtungen parallel.

Macht man über die Höhenlage der Grundebene keine Annahme, nimmt man also die Grundlinie überhaupt nicht an, so kann man vier Fluchtpunkte  $F_1, F_2, F_3, F_4$  von vier horizontalen Richtungen beliebig annehmen. Man erhält dann als geometrische Oerter des umgeklappten Auges zwei Kreise, von denen der eine durch  $F_1$  und  $F_2$ , der andere durch  $F_3$  und  $F_4$  geht und deren Schnittpunkt den Punkt  $A$  ergibt.

Liegt die Aufgabe vor, eine beliebige, in der Grundebene liegende Kurve abzubilden, so nimmt man auf ihr beliebige Punkte an und bildet sie in bekannter Weise ab. Sehr empfehlenswert ist es aber, sich nicht mit den Punkten zu begnügen, sondern in jedem angenommenen Punkte der Kurve die Tangente zu zeichnen und in das Bild zu übertragen. Am bequemsten macht man dies mittels des Durchstoßpunkts und des Fluchtpunkts. Ermittelt man zuerst das Bild der Tangente, so findet man den Berührungspunkt im Bilde einfach dadurch, daß man dieses Bild mit der Verbindungslinie des umgeklappten Auges und des

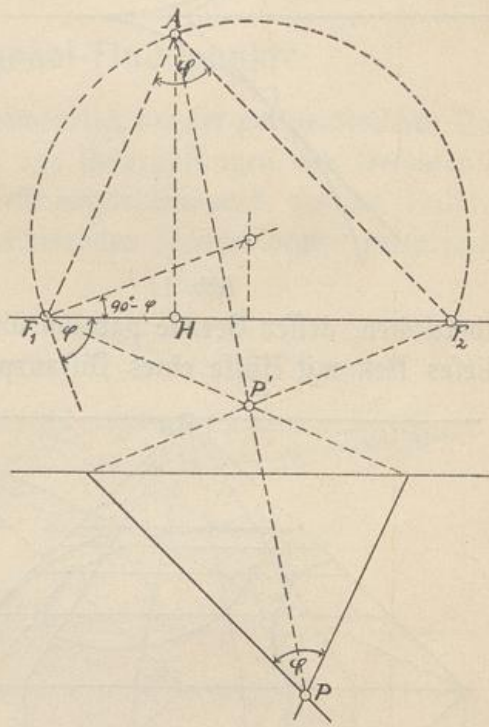


Abb. 10



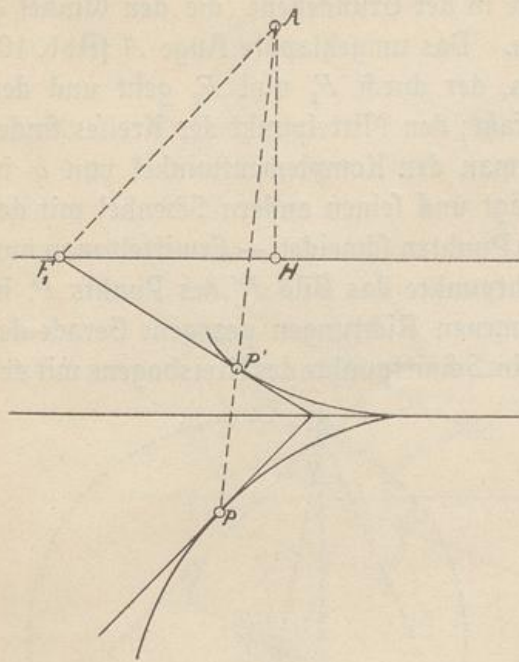


Abb. 11

überdecken, dessen Gerade parallel und senkrecht zur Grundlinie laufen, dieses Netz mit Hülfe eines Distanzpunkts in die Perspektive zu über-

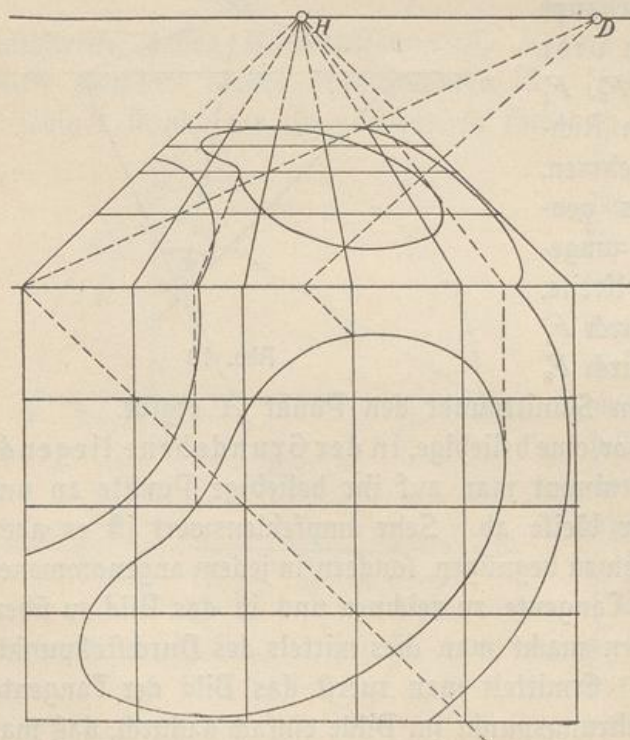


Abb. 12

angenommenen Kurvenpunkts schneidet. In Abb. 11 ist ein beliebiger Punkt  $P$  der Kurve mit seiner Tangente in das Bild übertragen. — Die Benutzung der Tangente, die die Richtung der Kurve in ihrem Berührungspunkte angibt, erleichtert die Zeichnung außerordentlich und erhöht die Genauigkeit.

Hat man einen ganzen, aus Kurven zusammengesetzten Grundplan, etwa eine Gartenanlage, in die Perspektive zu übertragen, so ist es empfehlenswert, den Grundplan mit einem quadratischen Netze zu

übertragen (s. Abb. 12) und die Kurven nun so in das Bild einzuzichnen, daß sie das perspektivische Netz in Punkten schneiden, die den Punkten entsprechen, in denen die Kurven des Grundplans das quadratische Netz schneiden.

Aus dem Ausgeführten folgt wohl von selbst, daß man auch umgekehrt einen in der Grundebene liegenden Punkt  $P$  aus seinem Bilde  $P'$  rückwärts konstruieren kann; man braucht



zu diesem Zwecke nur von den Distanzpunkten Gerade durch  $P'$  und von ihren Schnittpunkten mit der Grundlinie unter  $45^\circ$  geneigte Linien zu ziehen; ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt  $P$ , der natürlich auch noch auf  $AP'$  liegen muß. Auf diese Weise können wir einen ganzen Grundriß aus seinem Bilde rückwärts konstruieren. Wir brauchen dazu, wie ersichtlich, die Grundlinie. Ist diese aber, wie beispielsweise bei einem Photogramm, nicht gegeben, so können wir sie auch in beliebiger Höhe annehmen. Dann natürlich verzichten wir darauf, den Grundriß in wahrer Größe wieder zu erhalten und müssen uns mit einer ihm ähnlichen Figur begnügen.

## § 7. Die Diagonal-Fluchtpunkte.

Bei vielen Anwendungen, namentlich bei der perspektivischen Darstellung von Flächenmustern und von Verkröpfungen von Gesimsen ist die Benutzung der Fluchtpunkte sehr empfehlenswert, die den Halbierungslinien der im Grundrisse auftretenden rechten Winkel entsprechen.

Man bezeichnet sie als „Diagonal-Fluchtpunkte“ und erhält sie selbstverständlich durch Halbierung des Winkels  $F_1AF_2$  und seines Nebenwinkels. Die Abb. 13 zeigt diese Punkte  $Di_1$  und  $Di_2$ , von denen in der Regel nur einer zu haben ist, und ihre Benutzung für die Konstruktion des Bildes eines quadratischen Netzes; Abb. 14 zeigt ferner die Benutzung derselben Punkte bei der Konstruktion einer ganz einfachen Verkröpfung.

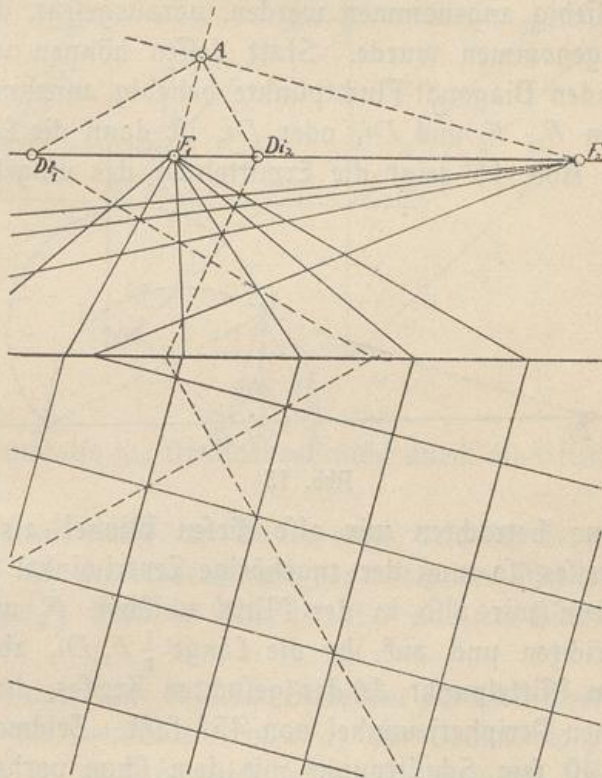


Abb. 13

Ist die Lage des Auges nicht gegeben, so kann man, wie wir im § 6 sahen, die Punkte  $F_1$  und  $F_2$  beliebig annehmen; der Punkt  $A$







$Di_1$ . — Ist aber die Grundlinie schon angenommen worden, so ist, wie wir im § 6 sahen, die Lage des Auges schon durch zwei Fluchtpunkte, die zwei gegebenen Richtungen entsprechen, bestimmt.

### § 8. Die Gegengerade.

Abb. 16 stellt wieder, wie Abb. 1 die Bildebene, die durch das Auge gehende Horizontalebene und die Grundebene in isometrischer Ansicht dar, nur sind die horizontalen Ebenen, die natürlich unbegrenzt zu denken sind, über den Horizont und die Grundlinie hinaus verlängert worden.

Wenn wir nun wieder die Ebenen in dem durch die Pfeile angedeuteten Sinne drehen, so erkennen wir leicht, daß der in der Zeichnung links liegende Teil der durch das Auge gehenden Horizontalebene unter den Horizont, der in der Zeichnung rechts liegende Teil der Grundebene über die Grund-

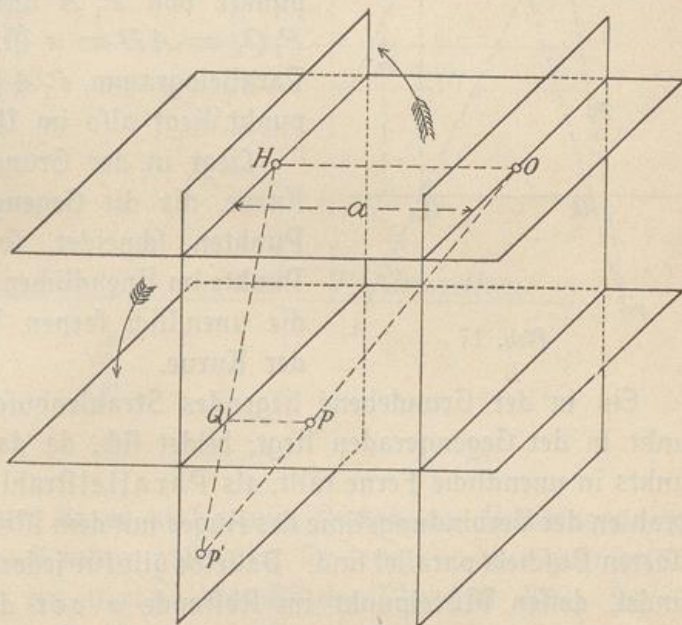


Abb. 16

linie fällt. Wir dürfen uns also die Grundebene nicht durch die Grundlinie begrenzt vorstellen.

Abb. 17 zeigt die Ermittlung des Bildes eines vor der Grundlinie liegenden Punktes  $P$  der Grundebene nach der bekannten Methode als Schnitt von  $HQ$  und  $AP$ . Auch in Abb. 16 ist  $P$  und das Bild  $P'$  angegeben.

Legen wir nun durch das Auge eine der Bildebene parallele Ebene, so schneidet diese Ebene die Grundebene in einer der Grundlinie parallelen Geraden, die sich in der unendlich fernen Geraden der Bildebene abbildet. Diese sich im Unendlichen abbildende Gerade der Grundebene wird als Gegengerade bezeichnet. Sie geht durch den Fußpunkt des Beobachters und liegt nach der Umklappung (s. Abb. 17)



über der Grundlinie; ihr Abstand von ihr ist, wie aus Abb. 16 unmittelbar folgt, gleich dem Abstände  $a$  des Auges von der Bildebene. Wir erkennen auch direkt aus Abb. 17, daß ein beliebiger Punkt  $P_1$

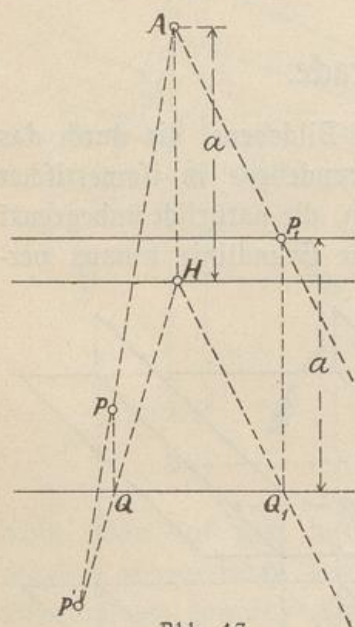


Abb. 17.

der Gegengeraden ein unendlich fernes Bild liefert. Die von  $P_1$  auf die Grundlinie gefällte Senkrechte schneidet sie in  $Q_1$ ;  $Q_1H$  ist also das Bild dieser Senkrechten. Die Verbindungslinie  $P_1A$  bildet sich, wie wir wissen, in sich selbst ab; das gesuchte Bild liegt also im Schnittpunkte von  $P_1A$  und  $Q_1H$ . Da aber  $P_1Q_1 = AH = a$  ist, ist  $P_1Q_1AH$  ein Parallelogramm,  $P_1A \parallel Q_1H$ , der Schnittpunkt liegt also im Unendlichen.

Liegt in der Grundebene irgend eine Kurve, die die Gegengerade in gewissen Punkten schneidet, so bilden sich diese Punkte im Unendlichen ab, sie ergeben also die unendlich fernen Punkte des Bildes der Kurve.

Ein in der Grundebene liegendes Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der Gegengeraden liegt, bildet sich, da das Bild des Mittelpunkts in unendliche Ferne fällt, als Parallelstrahlenbüschel ab, dessen Strahlen der Verbindungslinie des Auges mit dem Mittelpunkt des abgebildeten Büschels parallel sind. Dasselbe gilt für jedes beliebige Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt im Abstände  $a$  vor der Bildebene liegt.

Die Gegengerade ist das Gegenstück des Horizonts; in der Bildebene liegenden Strahlen, deren Mittelpunkt im Horizonte liegt, entspricht ein in der Grundebene liegendes Parallelstrahlenbüschel; ebenso entspricht in der Grundebene liegenden Strahlen, deren Mittelpunkt in der Gegengeraden liegt, ein in der Bildebene liegendes Parallelstrahlenbüschel.

Durch die Grundlinie und den Horizont wird die Bildebene in drei Teile zerlegt. Der zwischen beiden Geraden liegende Streifen ist das Bild des sich von der Grundlinie aus nach hinten ins Unendliche erstreckenden Teils der Grundebene; ein in diesem Teile liegender Punkt  $P_1$  bildet sich zwischen Grundlinie und Horizont in  $P_1'$  ab. Der unterhalb der Grundlinie liegende Teil der Bildebene ist das Bild des zwischen der Grundlinie und der Gegengeraden liegenden Streifens der Grundebene; ein innerhalb dieses Streifens liegender Punkt  $P_2$  bildet sich unterhalb der Grundlinie in  $P_2'$  ab. Der ober-



halb des Horizonts liegende Teil der Bildebene endlich ist das Bild des vor der Gegengeraden liegenden Teils der Grundebene; ein in diesem Teile liegender Punkt  $P_3$  bildet sich oberhalb des Horizonts in  $P_3'$  ab (s. Abb. 18). Ein solcher Punkt kann natürlich tatsächlich

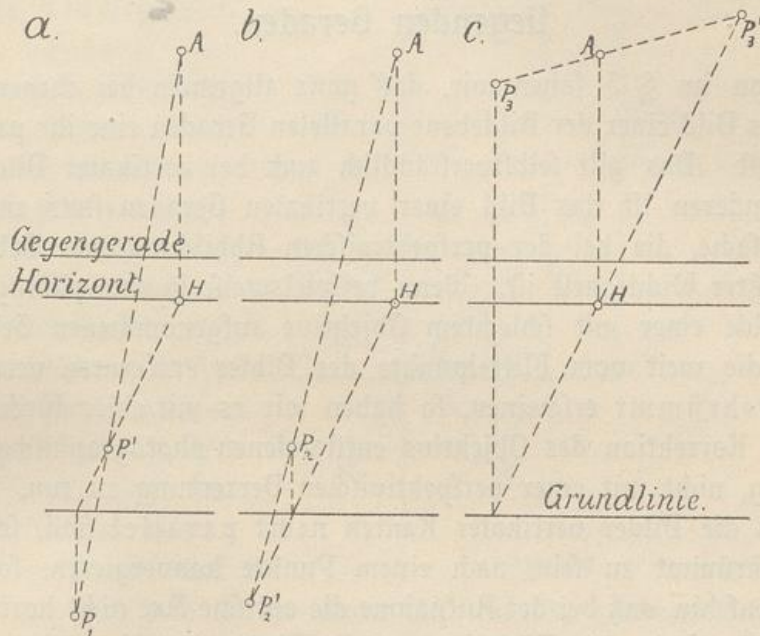


Abb. 18

nicht gesehen werden, da er hinter dem Rücken des Beschauers liegt; sein Bild hat also auch keine malerische, sondern nur eine geometrische Bedeutung, es ist ein virtuelles Bild. Die drei Fälle sind in  $a$ ,  $b$ ,  $c$  dargestellt.

Man erkennt ohne Weiteres, daß die Gegengerade über oder unter dem Horizonte liegt, je nachdem der Abstand des Auges von der Bildebene größer oder kleiner als sein Abstand von der Grundebene ist. Sind beide Abstände gleich, so fallen Horizont und Gegengerade zusammen.

Der Ausdruck „Gegengerade“ ist der neueren synthetischen Geometrie entnommen. Betrachtet man die Punkte zweier ganz beliebiger Ebenen, die auf einem Strahle eines Strahlenbündels liegen, als zugeordnete Punkte, die Geraden der Ebenen, die auf einer durch den Mittelpunkt des Bündels gehenden Ebene liegen, als zugeordnete Gerade, so giebt es in jeder der beiden Ebenen eine Gerade, die der unendlich fernen Geraden der anderen Ebene zugeordnet ist; sie liegt selbstverständlich auf der dieser anderen Ebene parallelen Ebene des



Bündels. Diese beiden Geraden werden als „Gegengeraden“ bezeichnet. — Der Horizont ist in diesem Sinne also ebenfalls eine „Gegengerade“.

### § 9. Abbildung einer nicht in einer Horizontalebene liegenden Geraden.

Schon im § 3 sahen wir, daß ganz allgemein bei ebener Bildfläche das Bild einer der Bildebene parallelen Geraden eine ihr parallele Gerade ist. Das gilt selbstverständlich auch bei vertikaler Bildebene. Im Besonderen ist das Bild einer vertikalen Geraden stets vertikal, eine Tatsache, die bei der perspektivischen Abbildung von Gebäuden von größter Wichtigkeit ist. Wenn beispielsweise in dem photographischen Bilde einer mit schlechtem Objektiv aufgenommenen Gebäudegruppe die weit vom Mittelpunkt des Bildes entfernten vertikalen Linien gekrümmt erscheinen, so haben wir es mit einer durch ungenügende Korrektur des Objektivs entstandenen photographischen Verzeichnung, nicht mit einer perspektivischen Verzerrung zu tun. Wenn hingegen die Bilder vertikaler Kanten nicht parallel sind, sondern, ohne gekrümmt zu sein, nach einem Punkte konvergieren, so weist das darauf hin, daß bei der Aufnahme die optische Achse nicht horizontal, die auf ihr senkrechte Bildebene — die Platte — also nicht vertikal stand. Ist die Bildebene geneigt, so sind die vertikalen Geraden ihr nicht parallel, ihre Bilder müssen daher nach einem Fluchtpunkte konvergieren, den wir dadurch finden, daß wir durch das Auge — das bei einem photographischen Objektiv durch dessen hinteren Brennpunkt ersetzt wird — eine vertikale Gerade ziehen und mit der Bildebene schneiden.

Wir wollen nun zum allgemeinen Falle übergehen und eine Gerade  $M_1 N_1$  von beliebiger Neigung betrachten, die die Bildebene im Durchstoßpunkte  $S$  schneidet. (Abb. 19.) Ihren Fluchtpunkt  $F_1$  finden wir, wie immer, dadurch, daß wir durch das Auge  $O$  eine Parallele zu ihr ziehen und mit der Bildebene schneiden. Wir wollen nun durch einen beliebigen Punkt von  $M_1 N_1$ , etwa durch  $S$  selbst, eine horizontale Ebene legen, die die Bildebene in der Grundlinie  $PQ$  schneidet, und  $M_1 N_1$  auf diese Ebene projizieren. So erhalten wir den Grundriß  $M' N'$  der Geraden. Den Fluchtpunkt  $F'$  von  $M' N'$  erhalten wir wieder dadurch, daß wir durch  $O$  eine Parallele zu  $M' N'$  ziehen und mit der Bildebene schneiden. Die durch  $O, F_1, F'$  gehende Ebene ist nun offenbar der durch  $S, M_1, M'$  gehenden Ebene parallel, also



vertikal; sie schneidet daher die ebenfalls vertikale Bildebene in einer vertikalen Geraden, also muß  $F_1 F'$  vertikal sein. — Der Fluchtpunkt einer beliebig geneigten Geraden liegt also in einer durch den Fluchtpunkt ihrer Horizontalprojektion gehenden Vertikalen. Diese Vertikale ist die Fluchtgerade der durch  $M_1 N_1$  gehenden Vertikalebene. Verlängern wir  $M_1 M'$  und  $N_1 N'$  um sich selbst, machen also

$M_2 M' = M_1 M'$  und  $N_2 N' = N_1 N'$ , so ist die durch  $M_2$  und  $N_2$  gehende Gerade das Spiegelbild von  $M_1 N_1$  in Bezug auf die Grundebene; sie geht ebenfalls durch  $S$  und bildet mit der Grundebene denselben Winkel wie  $M_1 N_1$ . Ziehen wir nun durch  $O$  eine Parallele zu  $M_2 N_2$ , so ist ihr Schnittpunkt  $F_2$  mit der Bildebene der Fluchtpunkt dieser Geraden, und aus der Kongruenz der Dreiecke  $O F' F_1$  und  $O F' F_2$  folgt nun sofort, daß  $F' F_1 = F' F_2$  ist. Die Fluchtpunkte von Geraden, die in derselben Vertikalebene liegen oder derselben Vertikalebene parallel und gegen die

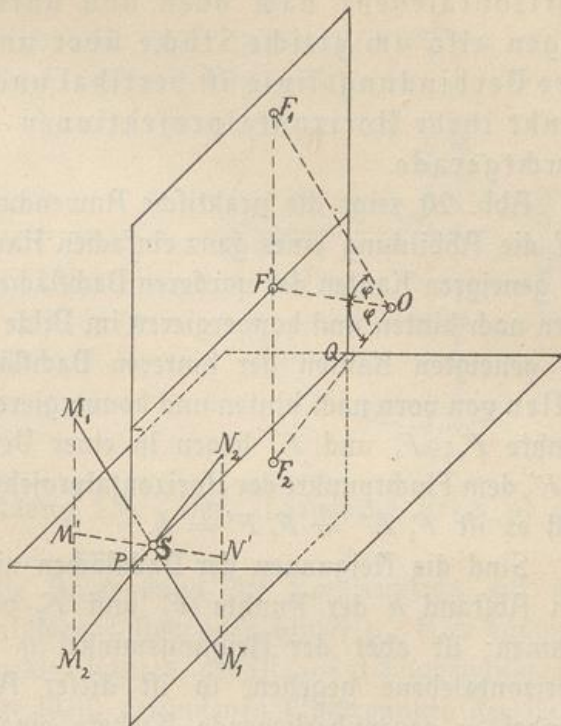


Abb. 19

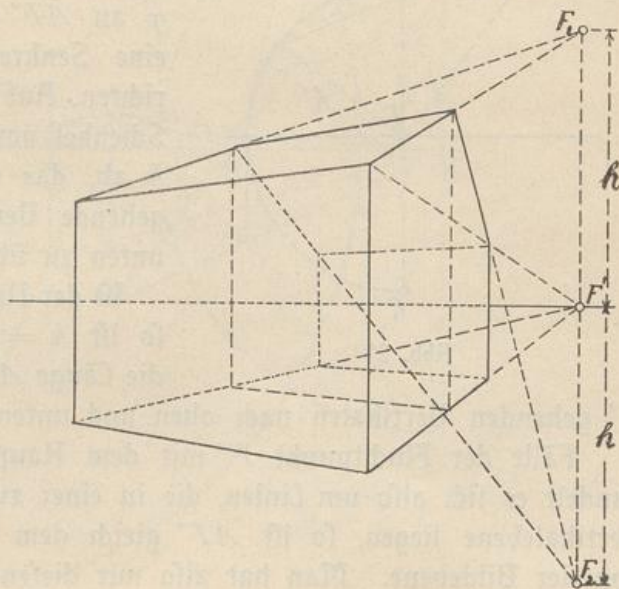


Abb. 20



Horizontalebene nach oben und unten gleich geneigt sind, liegen also um gleiche Stücke über und unter dem Horizont; ihre Verbindungslinie ist vertikal und geht durch den Fluchtpunkt ihrer Horizontalprojektionen — sie ist die schon erwähnte Fluchtgerade.

Abb. 20 zeigt die praktische Anwendung des gefundenen Gesetzes auf die Abbildung eines ganz einfachen Hauses mit einem Satteldache; die geneigten Kanten der vorderen Dachfläche sind parallel, steigen von vorn nach hinten und konvergieren im Bilde nach dem Fluchtpunkte  $F_1$ ; die geneigten Kanten der hinteren Dachfläche sind ebenfalls parallel, fallen von vorn nach hinten und konvergieren im Bilde nach dem Fluchtpunkte  $F_2$ ;  $F_1$  und  $F_2$  liegen in einer Vertikalen, die den Horizont in  $F'$ , dem Fluchtpunkte der Horizontalprojektionen der Kanten, schneidet, und es ist  $F_1 F' = F_2 F' = h$ .

Sind die Neigungen der Dachflächen nicht bestimmt, so kann man den Abstand  $h$  der Punkte  $F_1$  und  $F_2$  vom Horizonte beliebig annehmen; ist aber der Neigungswinkel  $\varphi$  der Dachflächen gegen die Horizontalebene gegeben, so ist dieser Abstand offenbar die dem Winkel  $\varphi$  gegenüberliegende Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen demselben Winkel anliegende Kathete  $= OF'$  ist, wie das aus Abb. 19 ohne Weiteres folgt. Man hat daher nur (s. Abb. 21) den

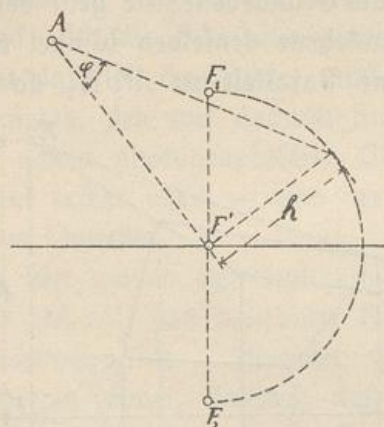


Abb. 21

Fluchtpunkt  $F'$  mit dem umgeklappten Auge  $A$  zu verbinden, im Punkte  $A$  den gegebenen Winkel  $\varphi$  an  $AF'$  zu tragen und in  $F'$  eine Senkrechte auf  $AF'$  zu errichten. Auf ihr schneidet der andere Schenkel von  $\varphi$  das gesuchte Stück  $h$  ab, das nun auf die durch  $F'$  gehende Vertikale nach oben und unten zu übertragen ist.

Ist der Neigungswinkel  $\varphi = 45^\circ$ , so ist  $h = AF'$ ; man kann also die Länge  $AF'$  direkt auf der durch

$F'$  gehenden Vertikalen nach oben und unten abtragen. (Abb. 22.)

Fällt der Fluchtpunkt  $F'$  mit dem Hauptpunkte  $H$  zusammen, handelt es sich also um Linien, die in einer zur Bildebene senkrechten Vertikalebene liegen, so ist  $AF'$  gleich dem Abstände  $a$  des Auges von der Bildebene. Man hat also nur diesen Abstand auf der durch  $H$  gehenden Vertikalen nach oben und unten abzutragen, um  $F_1$



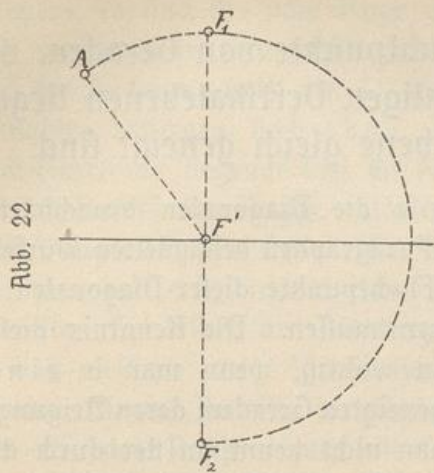


Abb. 22

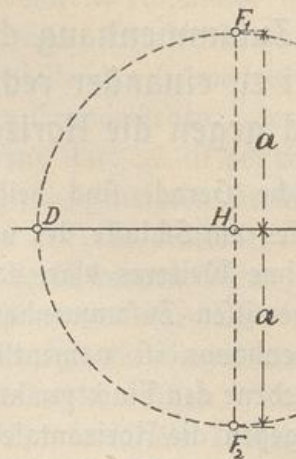


Abb. 23

und  $F_2$  zu erhalten (Abbildung 23). Der angegebene Kreis ist der Distanzkreis.

Die Abb. 24 zeigt die Anwendung der Konstruktion auf das Bild eines auf der Horizontalebene stehenden Würfels. Hier kommen die Fluchtpunkte der horizontalen Kanten, der Diagonal-Fluchtpunkt und die auf die oben geschilderte Weise gefundenen Fluchtpunkte der unter  $45^\circ$  geneigten Diagonalen der vertikalen Seitenflächen zur Anwendung.

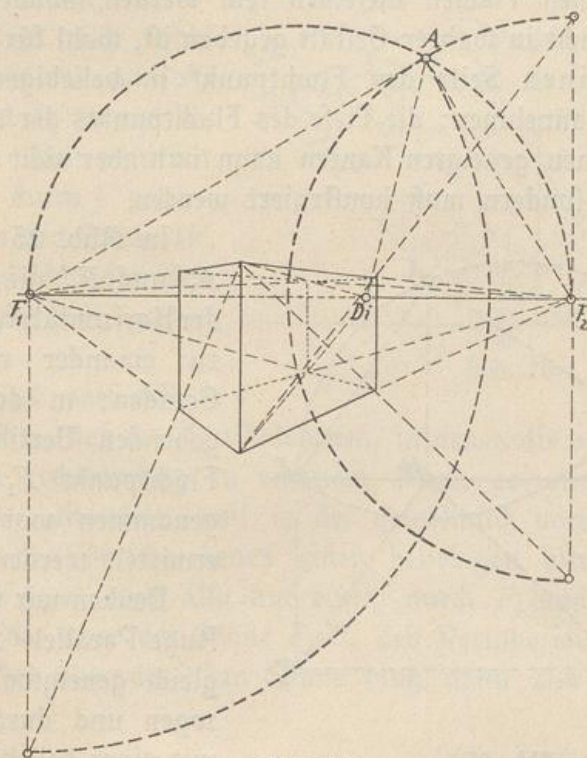


Abb. 24







talebene, so sind die vom Auge aus gerechneten Abschnitte in Wahrheit und auch im Grundrisse gleich. Der über dem Horizont liegende Teil der Zeichnung stellt die, der in der darstellenden Geometrie üblichen Annahme entgegen, nach oben geklappte Grundrißebene, der unter dem Horizonte liegende Teil die Aufrißebene dar;  $A$  ist der Grundriß,  $H$  der Aufriß des Auges. Die beiden gleich geneigten Geraden sind  $AF_1'$  und  $AF_2'$  im Grundrisse,  $HF_1$  und  $HF_2$  im Aufrisse. Nehmen wir nun auf  $AF_2'$  irgend einen von  $A$  verschiedenen Punkt, am bequemsten  $F_2'$  selbst, an und tragen  $AF_2'$  von  $A$  aus auf  $AF_1'$  ab, so daß  $AV = AF_2'$  ist, so sind  $V$  und  $F_2'$  die Grundrisse zweier Punkte, die im Aufrisse in gleicher Höhe liegen müssen. Projizieren wir also den Punkt  $V$  auf die Linie  $HF_1$ , so ist die Projektion  $W$  der zu  $V$  gehörige Aufriß. Mit ihm muß der gesuchte Punkt  $F_2$  in gleicher Höhe liegen; wir haben also, um ihn zu finden, nur eine durch  $W$  gelegte Parallele zum Horizonte mit der durch  $F_2'$  gehenden Vertikalen zu schneiden.

Die Abb. 26 zeigt die Anwendung der Konstruktion auf eine Ecke des oben erwähnten mit Konsolen versehenen Hauses. Dabei wurden die Fluchtpunkte der Abb. 25 in dreifacher Vergrößerung der Abmessungen benutzt.

Es versteht sich wohl von selbst, daß man auch  $F_2$  annehmen und  $F_1$  daraus bestimmen kann. Dann ermittelt man aus der durch  $V$  gehenden Vertikalen den Punkt  $W$ , zieht  $HW$  und schneidet diese Linie mit der durch  $F_1'$  gehenden Vertikalen.

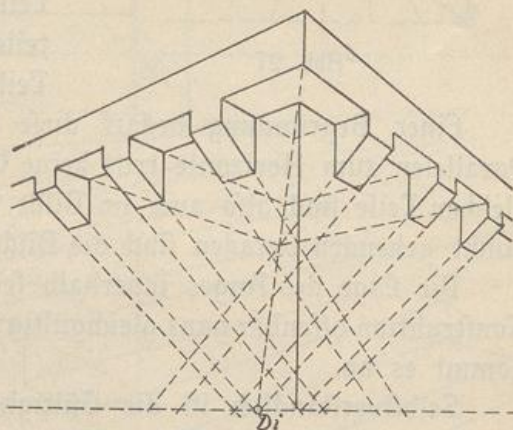


Abb. 26

Auch ist es natürlicherweise nicht nötig, daß die Vertikalebene, in denen die beiden Geraden liegen, gerade rechtwinklig zu einander seien; es wurde nur dieser Fall besonders behandelt, weil er der gewöhnlich vorkommende ist. Bilden die beiden Vertikalebene einen beliebigen Winkel  $\alpha$ , so ist  $\angle F_1 A F_2 = \alpha$ ,  $A$  muß also auf einem durch  $F_1$  und  $F_2$  gehenden Kreise liegen, der über der Sehne  $F_1 F_2$  den Peripheriewinkel  $\alpha$  faßt; der Zentriwinkel über derselben Sehne muß dann also  $= 2 \alpha$  sein.



## § 11. Perspektivische Teilung einer Strecke.

Die Teilung einer Strecke  $AB$  in  $n$  gleiche Teile ist aus der elementaren Planimetrie bekannt. Man zieht durch den Punkt  $A$  eine Gerade, trägt auf ihr von  $A$  aus  $n$  beliebig große, unter sich gleiche Teile ab, verbindet den letzten Teilpunkt mit  $B$  und zieht durch die anderen Teilpunkte Parallele zu dieser Verbindungslinie.

Diese Konstruktion nun läßt sich unmittelbar in die Perspektive übertragen; dabei ist nur zu bedenken, daß die Parallelen jetzt durch einen Fluchtpunkt gehen müssen. Wir wollen zuerst annehmen, die zu teilende Strecke  $AB$  (s. Abb. 27) liege in einer horizontalen Ebene. Wir ziehen nun durch  $A$  eine Parallele zum Horizonte,

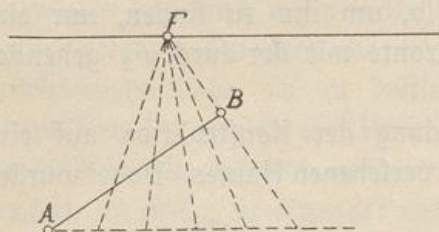


Abb. 27

tragen auf ihr  $n$  gleiche Teile ab, ziehen durch den letzten Teilpunkt und  $B$  eine Gerade, die den Horizont im Fluchtpunkte  $F$  schneidet und verbinden  $F$  mit den übrigen Teilpunkten; diese Verbindungslinien teilen  $AB$  in  $n$  perspektivisch gleiche Teile.

Einer Begründung bedarf diese Konstruktion kaum. Auf der Parallelen zum Horizonte tritt keine Verkürzung ein, die in Wahrheit gleichen Teile sind also auch im Bilde gleich, und die nach dem Fluchtpunkt gehenden Geraden sind die Bilder von parallelen Horizontalen.

Die Lage des Auges innerhalb seiner Horizontalebene ist für die Konstruktion offenbar ganz gleichgültig; nur auf die Höhe des Horizonts kommt es an.

Selbstverständlich ist die Gültigkeit der Konstruktion nicht auf perspektivisch gleiche Teile beschränkt; sie ist anwendbar, wenn die

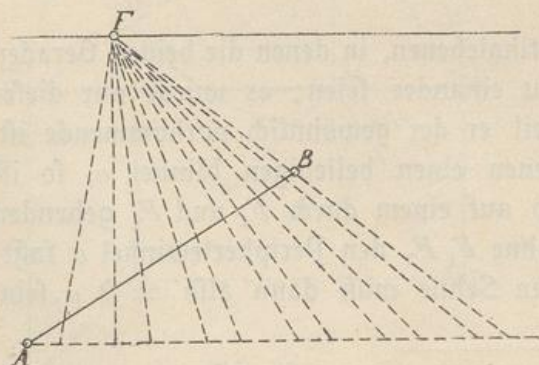


Abb. 28

Teile in beliebigen, gegebenen Verhältnissen zu einander stehen sollen. Man trägt dann auf der durch  $A$  gehenden Horizontalen Teile ab, die in den gegebenen Verhältnissen zu einander stehen und verfährt wie oben. — Abb. 28 zeigt die Teilung einer



Strecke in abwechselnd gleiche Teile, wie sie beispielsweise vorkommt, wenn sich in der Wand eines Hauses gleich breite Fenster mit gleich breiten Zwischenräumen befinden.

Wir betrachten nun den Fall, daß die Strecke unter einem beliebigen Winkel gegen die Horizontalebene geneigt ist. Durch die Darstellung der Strecke im perspektivischen Bilde ist ihre Lage im Raum nicht bestimmt; es muß also noch der Grundriß gegeben sein. Wir denken uns etwa durch  $A$  eine Horizontalebene gelegt und den Punkt  $B$  auf diese senkrecht projiziert. Ist  $B'$  die Projektion von  $B$ , so ist  $AB'$  die Projektion von  $AB$ . Wir teilen nun  $AB'$  in der soeben beschriebenen Art und ziehen durch die Teilpunkte Vertikale; diese teilen  $AB$  in der verlangten Weise (s. Abb. 29). Die Abb. 30 zeigt die Anwendung dieser Konstruktion auf eine Treppe.

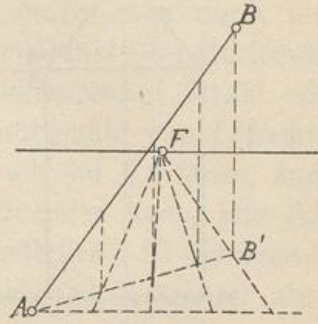


Abb. 29

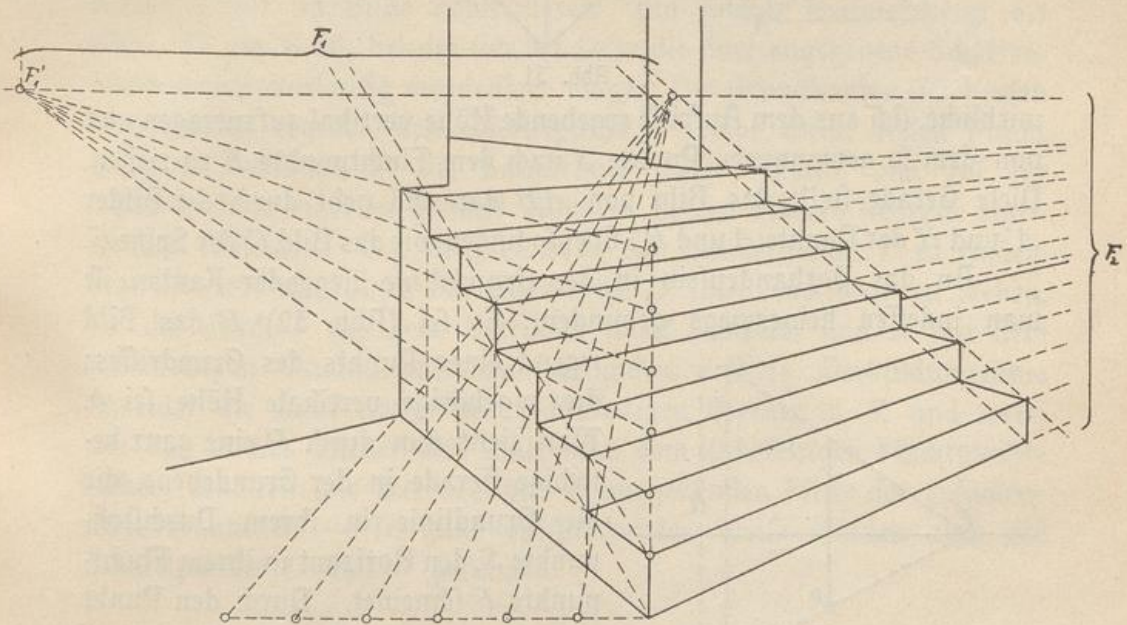


Abb. 30

## § 12. Uebertragung der Höhen in das Bild.

Es sei ein beliebiger Körper — beispielsweise ein quadratisches Prisma mit aufgesetzter Pyramide (s. Abb. 31) — im Grund- und Aufrisse gegeben. Das Bild der in der Grundebene liegenden Grund-



fläche suchen wir in bekannter Weise auf und ziehen durch die Eckpunkte die vertikalen Kanten. Um jetzt etwa die Höhe des Punkts  $A$  in das Bild zu übertragen, brauchen wir nur den Durchstoßpunkt  $S_1$  des Grundrisses der Kante  $AB$  aufzufinden, in diesem Punkte die

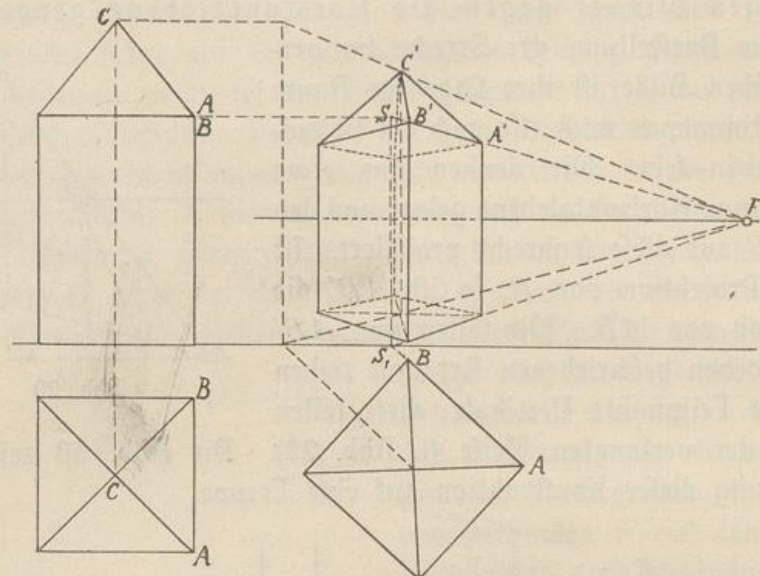


Abb. 31

wirkliche, sich aus dem Aufrisse ergebende Höhe vertikal aufzutragen und von dem so gewonnenen Punkte  $S$  nach dem Fluchtpunkte  $F$  zu ziehen. Diese Gerade stellt das Bild von  $AB$  dar und geht durch die Bilder  $A'$  und  $B'$  der Punkte  $A$  und  $B$ . Ebenso finden wir das Bild  $C'$  der Spitze  $C$ .

An das Vorhandensein in der Grundebene liegender Kanten ist man indessen keineswegs gebunden. Es sei (Abb. 32)  $P$  das Bild

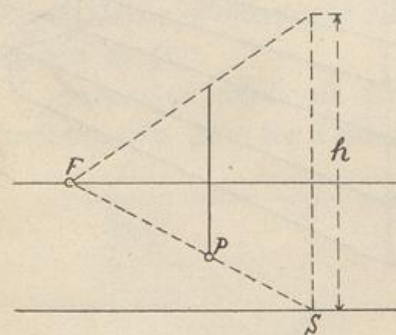


Abb. 32

irgend eines Punkts des Grundrisses; die zugehörige vertikale Höhe sei  $h$ . Man zieht nun durch  $P$  eine ganz beliebige Gerade in der Grundebene, die die Grundlinie in ihrem Durchstoßpunkte  $S$ , den Horizont in ihrem Fluchtpunkte  $F$  schneidet. Durch den Punkt  $S$  zieht man eine Vertikale, trägt auf ihr die wahre Höhe  $h$  ab und zieht von dem so erhaltenen Punkte nach  $F$

zurück. Diese Verbindungslinie schneidet auf der durch  $P$  gehenden Vertikalen die perspektivisch verkürzte Höhe ab.

Die Richtung der durch  $P$  gezogenen Geraden ist, wie gesagt, ganz beliebig; man wird aber gern die im perspektivischen Grund-



risse schon vorhandenen Kanten benutzen, da diese die Höhen ihrer beiden vertikalen Grenzen, falls sie in Wahrheit gleich hoch sind, gleichzeitig ergeben.

Daß diese Konstruktion ohne Weiteres umkehrbar ist, und man also die wirkliche Höhe eines Punkts über der Grundebene aus seiner Höhe im perspektivischen Bilde finden kann, indem man durch ihn und seinen perspektivischen Grundriß von einem Punkte des Horizonts aus Strahlen zieht, den in der Grundebene verlaufenden Strahl mit der Grundlinie schneidet und durch diesen Schnittpunkt eine Lotrechte zieht, leuchtet sofort ein. Da man nun, wie wir im § 6 sahen, auch den Grundriß aus dem Bilde rückwärts konstruieren kann, läßt sich der ganze Körper aus seinem Bilde wieder herstellen. Ist die Grundlinie nicht gegeben, so nimmt man sie beliebig an, verzichtet aber damit auf die wahre Größe des Körpers.

Stehen die verschiedenen im Bilde auftretenden Höhen in einem inneren Zusammenhange, wie das beispielsweise bei den Schnittlinien der Dachflächen eines Hauses der Fall ist, so kann man oft auch die Höhen direkt im Bilde konstruieren. Ein solches Beispiel zeigt die Abb. 117 im § 30, bei der sich der Leser die dort angegebene Schattenkonstruktion vorläufig wegdenken möge. Die Grundkanten der beiden Giebelflächen ergeben den Schnittpunkt  $P$ ; eine durch diesen Punkt gezogene Vertikale ist die Schnittlinie dieser Flächen, und auf ihr müssen sich je zwei in gleicher Höhe in beiden Flächen liegende Horizontale schneiden. Um beispielsweise den Schnittpunkt  $T$  zu finden, brauchen wir nur durch die Giebelspitze  $Q$  eine Fluchtlinie zu ziehen, die die durch  $P$  gezogene Vertikale in  $R$  schneidet und  $R$  mit dem rechtsseitigen Fluchtpunkte zu verbinden. Diese Verbindungslinie schneidet die linke Kante des rechtsseitigen Giebels in  $S$ , und wenn wir von  $S$  aus wieder eine Linie nach dem linksseitigen Fluchtpunkte ziehen, erhalten wir auf dem von  $Q$  ausgehenden Firste den gesuchten Schnittpunkt  $T$ . — In ganz entsprechender Weise werden auch die Schnittpunkte  $U$  und  $V$  gefunden.

### § 13. Verschiebung der Grundebene nach oben oder unten.

Die Lage der vertikalen Kanten eines Körpers — eines Gebäudes beispielsweise — hängt von der Höhenlage der angenommenen Grundebene selbstverständlich nicht ab. Von dieser einleuchtenden Tatsache macht man Gebrauch, wenn — wie das bei niedriger Lage des Horizonts sehr oft vorkommt — die Bilder in verschiedenen Richtungen



laufender Grundkanten sich unter so spitzen Winkeln schneiden, daß durch ihre Schnittpunkte die Lage der vertikalen Kanten nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit bestimmt ist. Ist gleichzeitig das umgeklappte Auge, mit dessen Hülfe man stets scharfe Schnittpunkte bekommen kann, nicht erreichbar, so verschiebt man die Grundebene mit dem Grundrisse um ein ganz beliebiges Stück auf- oder abwärts, so weit, daß die Schnitte eben nicht mehr zu spitz ausfallen. Nachdem man mittels des auf der verschobenen Grundebene liegenden Grundrißbildes die Vertikalen, auf denen die einzelnen Punkte des

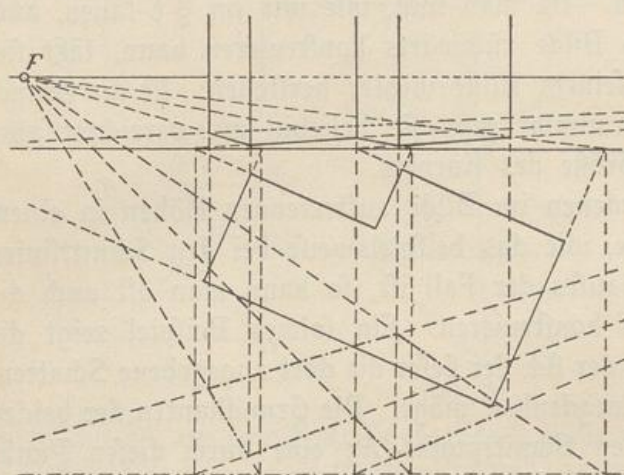


Abb. 33

Bildes liegen müssen, bestimmt hat, kann diese Hülfsfigur wieder beseitigt werden.

Abb. 33 zeigt einen beliebigen Grundriß, sein in der wirklichen Grundebene liegendes, mit sehr spitzen und stumpfen Winkeln versehenes Bild und das in einer verschobenen Grundebene liegende, mit günsti-

geren Schnittpunkten versehene, durch Strichpunktierung kenntliche Bild. — Diese Konstruktion hat keine theoretische, wohl aber eine erhebliche praktische Bedeutung.

#### § 14. Verfahren bei unerreichbarem Fluchtpunkte.

Auch diese Verfahren haben, da es für die Theorie einen unerreichbaren Fluchtpunkt, so lange er nicht im Unendlichen liegt, nicht gibt, eine rein praktische Bedeutung. Von den zwei Fluchtpunkten für zwei zu einander rechtwinklige Richtungen, mit denen man es gewöhnlich zu tun hat, liegt in der Regel nur der eine auf dem Reißbrette. Nun ist es zwar nicht unbedingt nötig, den nicht erreichbaren Fluchtpunkt zu benutzen, denn wir können, wie wir schon wissen, das Bild jedes Punktes mittels des Hauptpunkts und des umgeklappten Auges finden. Auch hilft man sich oft, wenn man den Fluchtpunkt dennoch benutzen will, durch ein angelegtes zweites Reißbrett; doch ist dieses Verfahren umständlich und ungenau. In jedem Falle ist es sehr an-



genehm, ein Mittel zu besitzen, das es ermöglicht, durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, die durch einen andern nicht vorhandenen Punkt, der durch den Schnitt zweier vorhandener Geraden bestimmt ist, geht.

Die Gerade  $g$  (Abb. 34), unter der wir uns etwa die durch das umgeklappte Auge  $A$  gezogene Parallele zu einer Kante des Grundrisses denken mögen, schneidet den Horizont  $h$  im Fluchtpunkte  $F$ , den wir uns als in Wahrheit nicht vorhanden denken wollen, der also bei der Konstruktion nicht benutzt werden darf. Durch den beliebigen Punkt  $P$  soll eine Gerade gelegt werden, die durch diesen Fluchtpunkt  $F$  geht. Ziehen wir durch  $P$  eine beliebige Gerade, die

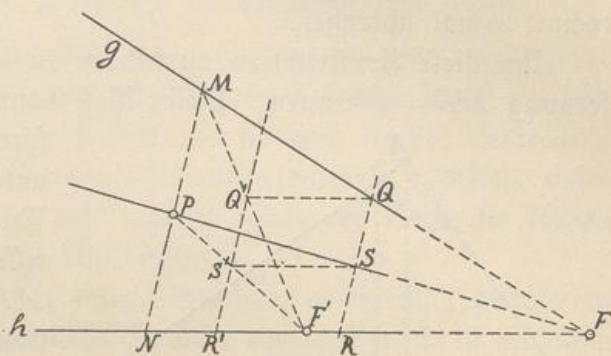


Abb. 34

$g$  und  $h$  in  $M$  und  $N$  schneidet, und an beliebiger noch erreichbarer Stelle eine Parallele zu dieser Geraden, die  $g$  und  $h$  in  $Q$  und  $R$  schneidet, so besteht, wenn  $S$  der gesuchte Schnittpunkt der Parallelen mit  $PF$  ist, die Proportion  $QS:SR = MP:PN$ . Wir haben also das Stück  $QR$  im Verhältnisse  $MP:PN$  zu teilen. Um das zu erreichen, verschiebt man die Linie  $QR$  um ein beliebiges Stück parallel mit sich selbst in der Richtung des Horizonts vom Fluchtpunkte weg. Die neue Lage sei  $Q'R'$ . Die Verbindungslinie  $MQ'$  liefert uns nun auf dem Horizonte den gewissermaßen künstlich genäherten Fluchtpunkt  $F'$ . Ziehen wir nun  $F'P$ , so ergibt diese Verbindungslinie auf  $Q'R'$  den Schnittpunkt  $S'$ , und es ist jetzt  $Q'S':S'R' = MP:PN$ . Wir haben also nur nötig, von  $S'$  auf eine Parallele zum Horizonte zu ziehen; diese schneidet  $QR$  in dem gesuchten Punkte  $S$ .

Das Stück  $QQ'$  muß natürlich so groß gewählt werden, daß  $F'$  noch auf das Reißbrett fällt.

Oft bedient man sich auch der sogenannten Teilfluchtpunkte. Es soll wieder durch  $P$  (Abbildung 35) eine nach dem als nicht vorhanden zu

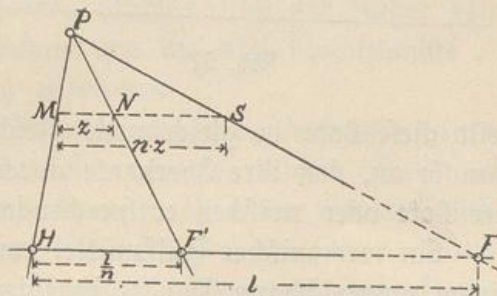


Abb. 35



denkenden Fluchtpunkte  $F$  gerichtete Gerade gezogen werden. Wir nehmen einen Hilfsfluchtpunkt  $F'$  an, dessen Entfernung von  $H$  gleich dem  $n^{\text{ten}}$  ( $n = 2, 3, 4 \dots$ ) Teile des Abstandes  $FH = l$  ist. Wir ziehen nun  $F'P$  und ferner eine Parallele zum Horizonte, die  $PH$  und  $PF'$  in  $M$  und  $N$  schneidet. Da nun offenbar  $HF':HF = MN:MS$  ist, finden wir den gesuchten Punkt  $S$ , durch den  $PF$  gehen muß, einfach dadurch, daß wir das Stück  $MN = z$  von  $M$  aus gerechnet  $n$  mal abtragen.

Um diese Konstruktion ausführen zu können, muß man die Entfernung  $HF = l$  kennen. Dieses Maß kann man sich aber stets verschaffen.

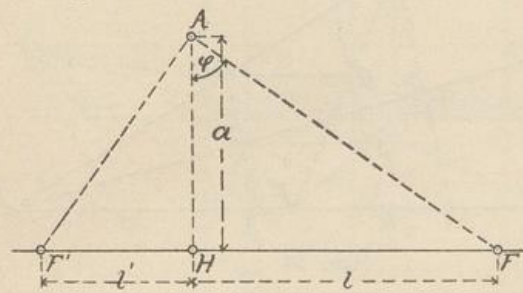


Abb. 36

Ist  $\varphi$  der Winkel, unter dem die Linie, deren Fluchtpunkt  $F$  ist, im Grundrisse gegen das Perpendikel  $AH$  geneigt ist,  $a$  der Abstand des Auges von der Bildfläche, so ist offenbar  $l = a \operatorname{tg} \varphi$ . — Hat man, wie das gewöhnlich der Fall ist, den Fluchtpunkt  $F'$  einer zur ersten rechtwinkligen Geraden auf dem Reißbrette, und ist  $HF' = l'$ , so ist nach einem bekannten Satze der elementaren Planimetrie  $l = \frac{a^2}{l'}$  (Abb. 36).

Ein drittes, in der zeichnerischen Praxis vielfach angewandtes Verfahren, um durch einen beliebigen Punkt  $P$  (Abb. 37) eine Gerade

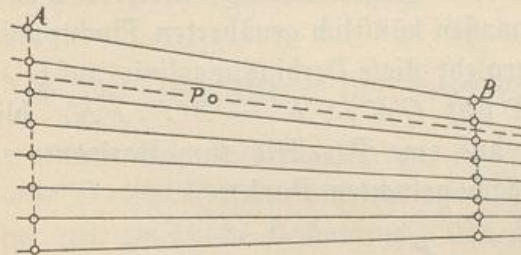


Abb. 37

nach dem nicht erreichbaren Fluchtpunkte der Geraden  $AB$  zu ziehen, ist das folgende. Man nimmt auf letzterer Geraden die beiden Punkte  $A$  und  $B$  beliebig, aber in möglichst großer Entfernung von einander an, fällt von ihnen aus Lote auf den Horizont, teilt diese Lote in gleich viele gleiche Teile und legt die Reißschiene nun so an, daß ihre Oberkante durch  $P$  und entsprechende Teilpunkte der Lote oder zwischen entsprechenden Teilpunkten hindurch geht.

Ein mechanisches Hilfsmittel zum Ziehen von Geraden, die sich in einem unerreichbaren Punkte schneiden, ist die bekannte Fluchtpunktschiene. Sie besteht aus drei Linealen, die so um einen Punkt dreh-



bar sind, daß ihre Oberkanten in jeder Lage durch diesen Punkt gehen und die feststellbar sind. Bewegt man nun das Instrument so, daß zwei Kanten durch feste Punkte gehen, so beschreibt der Drehpunkt einen Kreis, durch dessen Mittelpunkt — den unerreichbaren Fluchtpunkt — die dritte Kante nach einmaliger Einstellung in jeder Lage geht.

## § 15. Bild eines Körpers in allgemeiner Lage.

Soll das perspektivische Bild eines Körpers in ganz allgemeiner Lage gefunden werden, so kann man das stets in der Weise machen, daß man zuerst Grund- und Aufriß des Körpers in der verlangten Lage nach den bekannten Gesetzen der Projektionslehre ermittelt, dann den Grundriß in Perspektive setzt und in bekannter Weise die Höhen der einzelnen Punkte in das Bild trägt.

Handelt es sich aber um einen irgendwie gesetzmäßig gestalteten Körper, so ist ein solches Verfahren durchaus verwerflich. Es ist mühsam, zeitraubend und liefert vor allen Dingen höchst ungenaue Resultate. Bei jeder Darstellung eines gesetzmäßig gestalteten Körpers hat man die seine Gestalt bedingenden Gesetze auch der Darstellung zu Grunde zu legen. Vor allen Dingen sind, wo parallele Kanten vorhanden sind, deren Fluchtpunkte zu benutzen.

Als Beispiel mag das perspektivische Bild eines in ganz beliebiger Lage befindlichen Würfels aufgesucht werden. An ihm treten drei zu einander rechtwinklige Kantenrichtungen auf. Um deren Fluchtpunkt zu bestimmen, haben wir vom Auge aus Gerade in diesen drei Richtungen zu ziehen und mit der Bildebene zu schneiden. Diese drei vom Auge ausgehenden geraden Linien sind natürlich ebenfalls zu einander rechtwinklig; sie sind die Kanten einer gleichseitigen, dreiseitigen Ecke, deren Seiten rechte Winkel sind. Diese Ecke wird von der Bildfläche in einem Dreieck geschnitten, dessen Ecken eben die gesuchten Fluchtpunkte sind. Dieses Dreieck kann jede beliebige Gestalt haben, und — da über die Lage des Würfels und des Auges keine Annahme gemacht wurde — können wir die drei Fluchtpunkte  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$  (s. Abb. 38) ganz beliebig annehmen.

Das Auge liegt nun so im Raume, daß seine Verbindungslinien mit  $F_1$ ,  $F_2$  und  $F_3$  rechte Winkel mit einander bilden. Sollen die Verbindungslinien des Auges mit  $F_1$  und  $F_2$  einen rechten Winkel einschließen, so muß das Auge auf einer Kugel liegen, deren Mittelpunkt in  $M_3$ , der Mitte zwischen  $F_1$  und  $F_2$ , liegt, und deren Radius  $= M_3 F_1 = M_3 F_2$  ist. Diese Kugel schneidet die Bildebene in einem



durch  $F_1$  und  $F_2$  gehenden Kreise, dessen Mittelpunkt  $M_3$  ist; wir brauchen uns nur die vor der Zeichenfläche liegende Halbkugel als vorhanden vorzustellen. Ebenso muß das Auge, da seine Verbindungslinien mit  $F_2$  und  $F_3$  einen rechten Winkel bilden müssen, auf einer Halbkugel liegen, die die Zeichenfläche in einem durch  $F_2$  und  $F_3$  gehenden Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt in  $M_1$ , der Mitte zwischen

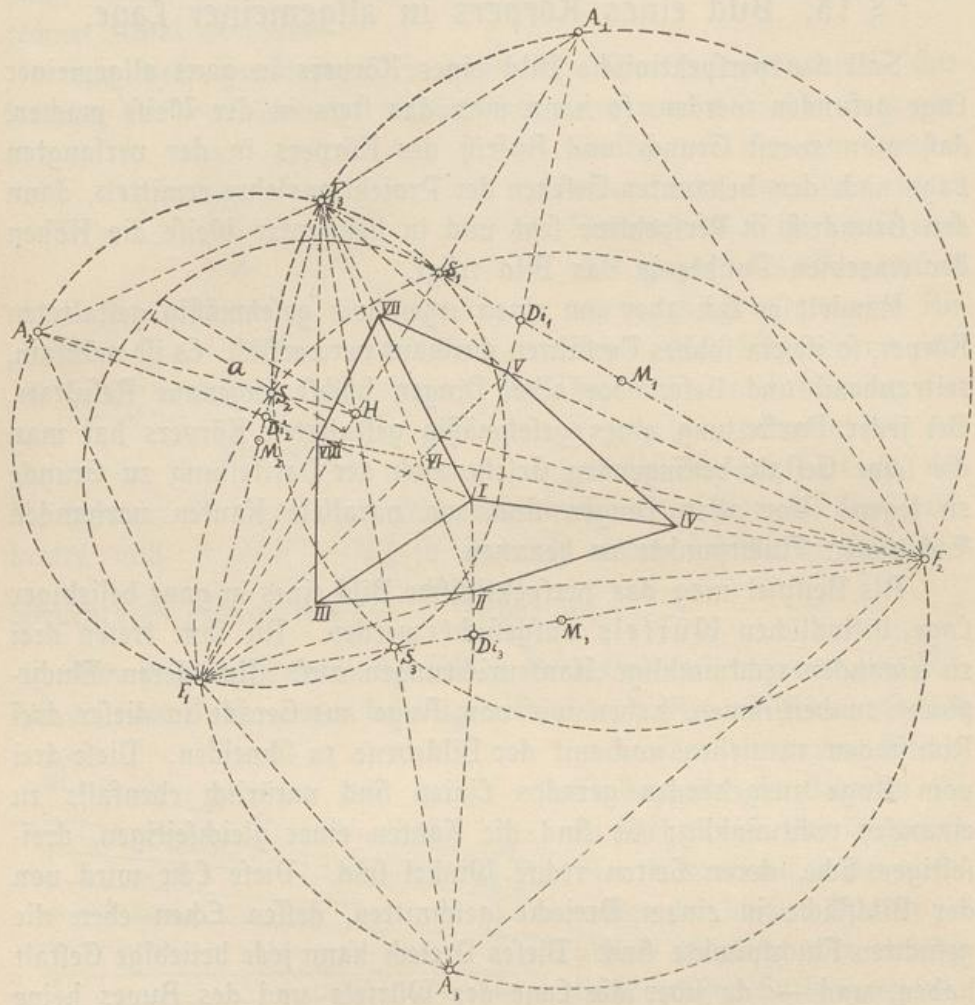


Abb. 38

$F_2$  und  $F_3$ , liegt. Da endlich auch die Verbindungslinien des Auges mit  $F_3$  und  $F_1$  einen rechten Winkel einschließen müssen, liegt das Auge auch auf einer Halbkugel, die die Zeichenfläche in einem durch  $F_3$  und  $F_1$  gehenden Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt  $M_2$ , die Mitte zwischen diesen Punkten ist. Das Auge liegt also im Schnittpunkte dieser drei Halbkugeln.



Je zwei von diesen drei Halbkugeln schneiden sich in einem Halbkreise, der auf der Zeichenfläche senkrecht ist. Er erscheint daher in der rechtwinkligen Projektion auf sie als gerade Strecke, und zwar als die Verbindungsstrecke der beiden Punkte, in denen sich die die Halbkugel darstellenden Kreise schneiden. Diese drei Kreise schneiden sich außer in den drei Fluchtpunkten noch in den drei Punkten  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ . Die Kreise, deren Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  sind, schneiden sich in  $F_3$  und  $S_3$ , die Kreise, deren Mittelpunkte  $M_2$  und  $M_3$  sind, in  $F_1$  und  $S_1$ , die Kreise, deren Mittelpunkte  $M_3$  und  $M_1$  sind, in  $F_2$  und  $S_2$ . Die Verbindungsstrecken  $F_1 S_1$ ,  $F_2 S_2$ ,  $F_3 S_3$  sind daher die rechtwinkligen Projektionen der Halbkreise, in denen sich je zwei der drei Halbkugeln schneiden.

Betrachten wir nun irgend zwei der drei Kreise, etwa die, deren Mittelpunkte  $M_1$  und  $M_2$  sind, so sind die Winkel  $F_1 S_3 F_3$  und  $F_2 S_3 F_3$  als Peripheriewinkel in Halbkreisen rechte Winkel, ihre Summe ist also ein gestreckter Winkel, der Punkt  $S_3$  liegt also auf der Dreiecksseite  $F_1 F_2$ , und  $F_3 S_3$  ist einfach die von  $F_3$  auf die gegenüberliegende Seite  $F_1 F_2$  gefällte Senkrechte,  $S_3$  ihr Fußpunkt. Dasselbe gilt natürlicherweise von  $F_1 S_1$  in Bezug auf  $F_2 F_3$ , von  $F_2 S_2$  in Bezug auf  $F_3 F_1$ ; die drei Strecken  $F_1 S_1$ ,  $F_2 S_2$ ,  $F_3 S_3$  sind also ganz einfach die Höhen des Dreiecks, die, wie die Planimetrie lehrt, durch einen Punkt gehen. Ihr Schnittpunkt  $H$  ist also offenbar der Hauptpunkt, die rechtwinklige Projektion des Auges auf die Zeichenfläche. Das Auge  $O$  liegt im Raume im Schnitte der durch  $H$  gehenden Normalen zur Zeichenfläche etwa mit der Halbkugel, deren Mittelpunkt  $M_3$  ist. Klappen wir nun das im Raume liegende rechtwinklige Dreieck  $F_1 O F_2$  um die Seite  $F_1 F_2$  in die Zeichenfläche um, so fällt  $O$  in  $A_3$ , den Schnittpunkt des durch  $F_1$  und  $F_2$  gehenden Kreises mit der verlängerten Höhe  $F_3 S_3$ , denn der Winkel  $F_1 A_3 F_2$  ist als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter Winkel. — Halbieren wir nun diesen rechten Winkel, so ergibt die Halbierungslinie in ihrem Schnitte mit  $F_1 F_2$  den Fluchtpunkt  $Di_3$  der Diagonale des Quadrats, dessen Kanten ihre Fluchtpunkte in  $F_1$  und  $F_2$  haben.

Wir nehmen nun einen Eckpunkt  $I$  des Würfels ganz beliebig an und verbinden diesen Punkt mit  $F_1$ ,  $F_2$  und  $Di_3$ . Da über die Größe des Würfels nichts angenommen ist, können wir auch die Ecke  $II$  des Würfels auf  $IDi_3$  ganz beliebig annehmen. Indem wir durch diesen Punkt Linien nach  $F_1$  und  $F_2$  ziehen, erhalten wir die Eckpunkte  $III$  und  $IV$ .

In derselben Weise können wir auch das Auge umklappen, indem wir das Dreieck  $F_2 O F_3$  um die Seite  $F_2 F_3$  drehen; dann fällt  $O$



nach  $A_1$ , dem Schnittpunkte des durch  $F_2$  und  $F_3$  gehenden Kreises mit der verlängerten Höhe  $F_1 S_1$ ; die Halbierungslinie des Winkels  $F_2 A_1 F_3$  schneidet die Dreiecksseite  $F_2 F_3$  im Diagonalfluchtpunkte  $Di_1$ . Ziehen wir nun von  $I$  eine Linie nach  $Di_1$ , von  $IV$  eine Linie nach  $F_3$ , so erhalten wir den Eckpunkt  $V$ , und indem wir  $VF_1$  und  $II F_3$  zum Schnitte bringen, den Eckpunkt  $VI$ . Endlich ist  $VII$  der Schnittpunkt von  $IF_3$  und  $VF_2$ ,  $VIII$  der Schnittpunkt von  $III F_3$  und  $VII F_1$ . Das um  $F_1 F_3$  umgeklappte Auge  $A_2$  und der zugehörige Diagonalfluchtpunkt  $Di_2$  sind für die Konstruktion nicht erforderlich; letzterer Punkt kann zur Kontrolle dienen.

Den Abstand  $a$  des Auges von der Bildebene finden wir einfach dadurch, daß wir durch  $H$  eine zur Bildebene senkrechte Ebene legen, sie mit einer der drei Halbkugeln schneiden und den sich ergebenden Halbkreis umklappen. Ein in  $H$  auf der Spur der angenommenen Schnittebene (in der Figur ist es die Linie  $F_1 S_1$ ) errichtetes Perpendikel ergibt durch seinen Schnitt mit dem Halbkreise die gesuchte Länge.

Handelt es sich um Darstellung eines senkrechten, quadratischen Prismas in allgemeiner Lage, so können wir wieder die Fluchtpunkte  $F_1, F_2, F_3$  beliebig annehmen und das Bild  $I III II IV$  der quadratischen Grundfläche genau wie beim Würfel konstruieren; den Eckpunkt  $VII$  können wir nun aber auf  $IF_3$  ganz beliebig annehmen und das Bild vollenden, indem wir  $VII$  mit  $F_1$  und  $F_2$  verbinden. So finden wir auf  $III F_3$  und  $IV F_3$  die Punkte  $VIII$  und  $V$ , deren Verbindungslinien mit  $F_2$  und  $F_1$  sich schließlich im Punkte  $VI$  schneiden. Hier kommt also nur ein Diagonalfluchtpunkt in Betracht.

Ist ein rechtwinkliges Parallelepiped von beliebigen Kantenverhältnissen in allgemeiner Lage darzustellen, so kann man, nachdem man die drei Fluchtpunkte und den Eckpunkt  $I$  beliebig angenommen hat, auch die Punkte  $III$  und  $IV$  auf  $IF_1$  und  $IF_2$  beliebig annehmen und, indem man  $IV F_1$  und  $III F_2$  zieht, das Viereck  $I III II IV$  vervollständigen. Auf  $IF_3$  kann man dann noch  $VII$  beliebig annehmen und wie oben die Figur ergänzen. Die Diagonalfluchtpunkte spielen jetzt, da Quadrate nicht mehr vorkommen, keine Rolle mehr.

Die hier vorgeführten Konstruktionen gelten selbstverständlich für eine ganz beliebige, nicht nur für eine vertikale Bildebene. Nimmt man die Bildebene als vertikal und eine der drei Kantenrichtungen als horizontal an, so geht der Horizont durch den Fluchtpunkt  $F_1$  dieser Richtung. Er muß ferner zur Verbindungslinie der beiden andern Fluchtpunkte  $F_2$  und  $F_3$  rechtwinklig sein, da die diesen Fluchtpunkten entsprechenden Richtungen jetzt derselben Vertikalebene parallel sind.



Sollen zwei von den drei Kantenrichtungen horizontal sein, so geht der Horizont durch die Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_3$  dieser beiden Richtungen; der dritte Fluchtpunkt  $F_2$  liegt dann in unendlicher Ferne, da seine Verbindungslinie mit dem Auge vertikal, also der Bildebene parallel ist.

## § 16. Die Abbildung des Kreises.

Schon im § 3 wurde kurz darauf hingewiesen, daß das perspektivische Bild eines Kreises unter Voraussetzung einer ebenen Bildebene stets ein Kegelschnitt, also eine Ellipse — in besonderen Fällen ein Kreis oder eine gerade Strecke —, eine Parabel oder eine Hyperbel sein muß. Wir müssen nun genauer untersuchen, unter welchen Umständen diese verschiedenen Gestalten des Bildes auftreten. Diese Untersuchung läuft auf die Frage hinaus, unter welchen Umständen die genannten Kurven als ebene Schnitte einer Kegelfläche zweiter Ordnung vorkommen.

Eine Kegelfläche zweiter Ordnung können wir uns stets durch eine bewegliche Gerade erzeugt denken, die bei ihrer Bewegung durch einen festen Punkt und nach einander durch alle Punkte eines festen Kreises geht. Der feste Punkt wird als Scheitel, der feste Kreis als Leitlinie oder Directrix, jede Lage der beweglichen Geraden als Erzeugende oder Genetrix des Kegels bezeichnet. Da die erzeugende Gerade sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, erkennt man zunächst, daß auch die Kegelfläche nach zwei Seiten ins Unendliche geht und nicht etwa im Scheitel endet.

In Abb. 39 sei  $O$  der Scheitel der Kegelfläche,  $VW$  die Leitlinie, deren Ebene wir uns auf der des Papiers senkrecht denken wollen, so daß der Kreis sich als gerade Strecke darstellt. Durch einen beliebigen Punkt  $P$  der Zeichenebene denken wir uns eine zu ihr senkrechte Gerade gelegt, die sich in der Zeichnung eben als der Punkt  $P$  darstellt. Wir denken uns nun durch diese Gerade eine Ebene gelegt und um sie als Axe gedreht, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt. Dabei

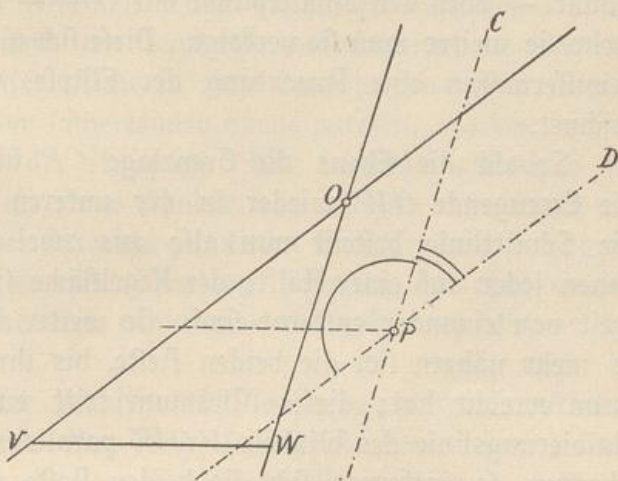


Abb. 39



durchläuft sie alle möglichen Lagen der Ebene gegen die Kegelfläche und muß also auch alle Gestalten der Schnittlinie ergeben. Eine Veränderung der Lage des Punkts  $P$  aber kann keine neuen Gestalten ergeben, da zwei durch verschiedene Punkte gelegte parallele Ebenen ganz allgemein ähnliche Schnittlinien erzeugen.

Wir wollen als Anfangslage des durch  $P$  gehenden Schnittes eine zum Kreise  $VW$  parallele Ebene annehmen; sie muß eine dem Grundkreise ähnliche Figur, also wieder einen Kreis als Schnittlinie ergeben. Drehen wir nun die Ebene im Sinne des Uhrzeigers, so erhalten wir immer noch eine geschlossene Kurve; alle Erzeugenden werden an derselben Seite von  $O$  geschnitten. Da der einzige geschlossene Kegelschnitt die Ellipse ist, erkennen wir ohne Weiteres, daß die Schnittlinie eine Ellipse sein muß, die mit fortschreitender Drehung kleiner und kleiner wird, bis sie, wenn die Ebene durch  $O$  geht, zum Punkte wird. Zu diesen elliptischen Schnitten gehört natürlich auch der in der zu  $VW$  parallelen Anfangslage auftretende Kreis, denn ein Kreis ist nichts weiter als eine Ellipse mit gleichen Hauptachsen.

Ihre Bewegung fortsetzend schneidet nun die Ebene die andere, in der Zeichnung obere Hälfte der Kegelfläche; die Schnittlinie ist, da alle Erzeugenden an derselben Seite des Scheitels getroffen werden und daher eine geschlossene Kurve entstehen muß, eine Ellipse. Die Ellipse wird größer und größer und reckt sich dabei mehr und mehr in die Länge, bis die schneidende Ebene in die Lage  $CP$  gelangt, in der sie der Erzeugenden  $OW$  parallel ist. Nun kann sich die Schnittlinie nicht mehr schließen, denn die Erzeugende  $OW$  wird nicht mehr, oder — wie man sich in der Mathematik auszudrücken pflegt — erst im Unendlichen getroffen. Die Schnittlinie hat einen unendlich fernen Punkt — eben den Schnittpunkt mit  $OW$  — und erweitert sich immer mehr, je weiter man sie verfolgt. Diese sich niemals schließende Kurve, gewissermaßen eine Ausartung der Ellipse, wird als Parabel bezeichnet.

Sobald die Ebene die Grenzlage  $CP$  überschreitet, schneidet sie die Erzeugende  $OW$  wieder in der unteren Hälfte der Kegelfläche; die Schnittlinie besteht nun also aus zwei getrennten Ästen, von denen jeder auf einer Hälfte der Kegelfläche liegt und die zuerst sehr weit von einander entfernt sind. Je weiter sich die Ebene dreht, um so mehr nähern sich die beiden Äste, bis ihre Entfernung ein Minimum erreicht hat; dieses Minimum tritt ein, wenn die Ebene der Halbierungslinie des Winkels  $VOW$  parallel ist. Ist diese Lage überschritten, so entfernen sich die beiden Äste wieder. Diese aus zwei



Aesten bestehende Kurve wird als Hyperbel bezeichnet; sie hat, wie die Ellipse, zwei zu einander rechtwinklige Symmetrieachsen, beide Aeste sind von gleicher Gestalt. Die in der Lage  $CP$  auftretende Parabel kann auch als der eine Ast einer Hyperbel betrachtet werden, deren anderer Ast in unendlicher Ferne liegt; die Parabel stellt eben den Uebergang von der Ellipse zur Hyperbel dar. Während es unendlich viele verschiedene Gestalten der Ellipse und der Hyperbel — bedingt durch das Axenverhältnis — gibt, existiert nur eine Parabelgestalt, ebenso, wie es auch nur eine Kreisgestalt gibt. Ebenso wie alle Kreise sind auch alle Parabeln einander ähnlich.

Erreicht die Ebene die Lage  $DP$ , in welcher sie der Erzeugenden  $OV$  parallel ist, so haben wir als Schnittlinie offenbar wieder eine Parabel, die aber jetzt auf der unteren Kegelhälfte liegt. Bei weiterer Fortsetzung der Drehung treten nun wieder Ellipsen auf, die kleiner und kleiner, kürzer und kürzer werden, bis die Ebene in ihre zu  $VW$  parallele Anfangslage zurückgekehrt und die Schnittlinie wieder zum Kreise geworden ist.

Innerhalb des durch den einfachen Bogen bezeichneten Winkelraums liegen also die elliptischen, innerhalb des mit doppeltem Bogen bezeichneten Winkelraums die hyperbolischen Schnitte.

Wir wollen nun durch den Scheitel eine Ebene legen, die der durch  $P$  gehenden Ebene stets parallel bleiben, sich also um den Punkt  $O$  drehen soll. So lange sich die schneidende Ebene innerhalb des Winkelraums der elliptischen Schnitte bewegt, schneidet die parallele Ebene die Kegelfläche offenbar nur in dem einen Punkte  $O$ ; ist die schneidende Ebene einer der Erzeugenden  $OV$  oder  $OW$  parallel, schneidet sie die Kegelfläche also in einer Parabel, so berührt die parallele Ebene die Kegelfläche längs  $OV$  oder  $OW$ ; liegt endlich die schneidende Ebene innerhalb des Winkelraums der hyperbolischen Schnitte, so schneidet die parallele Ebene die Kegelfläche in zwei Erzeugenden. Diese beiden Erzeugenden sind also der schneidenden Ebene parallel, ergeben folglich unendlich ferne Punkte der Hyperbel. Wir erkennen also, daß die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte hat. Ziehen wir durch den Mittelpunkt der Hyperbel Parallele zu diesen Erzeugenden, so können auch sie die Hyperbel niemals schneiden, kommen ihr aber unausgesetzt näher. Diese Parallelen nennt man die „Asymptoten“ der Hyperbel.

Wir wissen, daß der Schnitt  $VW$ , daher auch jeder mit ihm parallele Schnitt ein Kreis ist. Aber diese Kreisschnitte sind keineswegs die einzigen, die auf der Kegelfläche liegen. Das zeigt uns







ergibt sich eine Parabel; schneidet die Bildebene die Sehstrahlen an verschiedenen Seiten des Auges, ist sie also zweien von ihnen parallel, so ist das Bild eine Hyperbel. Wenn endlich die Ebene des Kreises durch das Auge geht, erhalten wir als Bild eine Gerade, und zwar eine begrenzte Strecke, wenn der Kreis außerhalb des Auges liegt, eine unbegrenzte Gerade, wenn er das Auge einschließt. Die Strecke ist als Grenzfall einer Ellipse, die unbegrenzte Gerade als Grenzfall einer Hyperbel aufzufassen. Demnach hängt die Entscheidung von der Lage der Geraden ab, in der eine durch das Auge  $O$  parallel zur Bildebene gelegte Ebene die Ebene der Leitlinie schneidet. Liegt diese Gerade ganz außerhalb der kreisförmigen Leitlinie, so erhalten wir eine Ellipse; berührt sie den Leitkreis, so ergibt sich eine Parabel; schneidet endlich die Gerade den Leitkreis, so ist das Bild eine Hyperbel.

Die Abb. 41 zeigt in  $a$ ,  $b$ ,  $c$  diese 3 Fälle; die Ebene des Papiers ist senkrecht auf der der Leitlinie und auf der Bildebene;  $AB$  stellt die Bildebene,  $VW$  den Leitkreis,  $OO'$  die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene dar. In  $a$  haben wir den Fall der ellip-

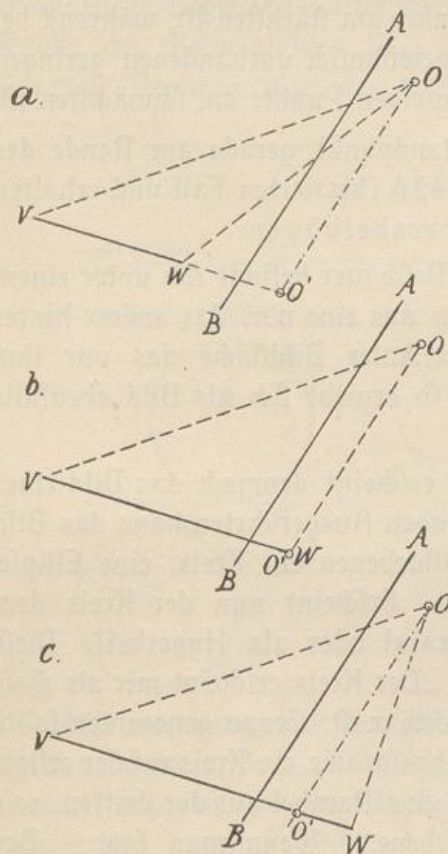


Abb. 41

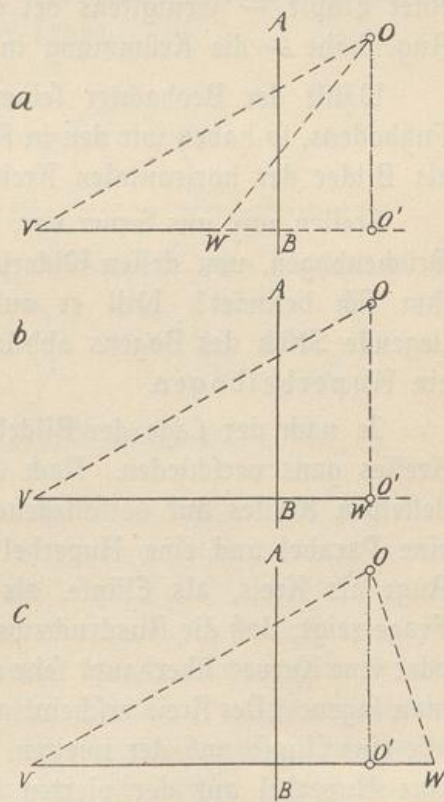


Abb. 42



tischen, in  $b$  den der parabolischen, in  $c$  den der hyperbolischen Abbildung; im ersten Falle liegt  $O'$  außerhalb  $VW$ , im zweiten Falle fällt  $O'$  mit  $W$  zusammen, im dritten Falle liegt  $O'$  innerhalb  $VW$ .

In den Abbildungen 42  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sind die drei Lagen noch einmal für den gewöhnlichsten Fall der vertikalen Bildebene und des horizontalen Kreises zusammengestellt.

Man möge nicht glauben, daß das parabolische und hyperbolische Bild des Kreises gewissermaßen nur theoretische Bedeutung haben und in Wirklichkeit nicht vorkommen. Sie kommen oft genug vor. Steht der Beschauer etwa im Innern eines Gebäudes von kreisrundem Grundriß, eines Zirkus oder dergl., und will auf vertikaler Bildebene die untere und obere Kante der zylindrischen Wand, die Kanten eines vielleicht vorhandenen Architravs usw. abbilden, so liegt offenbar der in Abb. 42  $c$  schematisch dargestellte Fall vor; die Bilder der genannten wgeredten Kreise sind also Hyperbelbögen. Auf photographischen Abbildungen derartiger Innenräume erkennt der aufmerksame Beobachter die hyperbolische Krümmung der Bögen schon daran, daß sie in dem dem Beschauer gegenüberliegenden Punkte am stärksten ist, während bei einer Ellipse — wenigstens bei der gewöhnlich vorhandenen geringen Augenhöhe — die Krümmung in demselben Punkte am schwächsten ist.

Wählt der Beobachter seinen Standpunkt gerade am Rande des Fußbodens, so haben wir den in Abb. 42  $b$  skizzierten Fall und erhalten als Bilder der horizontalen Kreise Parabelbögen.

Stellen wir uns ferner vor, der Beschauer befinde sich unter einem Brückenbogen, von dessen Widerlagern das eine vor, das andere hinter ihm sich befindet? Will er auf vertikaler Bildfläche das vor ihm liegende Stück des Bogens abbilden, so ergibt sich als Bild ebenfalls ein Hyperbelbogen.

Je nach der Lage der Bildebene erscheint demnach das Bild eines Kreises ganz verschieden. Nach dem oben Ausgeführten kann das Bild desselben Kreises auf verschiedenen Bildebenen ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel sein. Erscheint nun der Kreis dem Auge als Kreis, als Ellipse, als Parabel oder als Hyperbel? Diese Frage zeigt, daß die Ausdrucksweise: „Der Kreis erscheint mir als diese oder jene Kurve“ überhaupt sehr anfechtbar ist. Genau genommen sollte man sagen: „Der Kreis erscheint mir ebenso, wie ein Kreis auf der ersten, wie eine Ellipse auf der zweiten, wie eine Parabel auf der dritten, wie eine Hyperbel auf der vierten Bildebene.“ Wenn man sagt: „Der Kreis erscheint mir als Ellipse“, so meint man sein perspektivisches,



auf einer Bildebene erzeugtes Bild, die rechtwinklig zur Verbindungslinie des Auges mit dem Mittelpunkte des Kreises ist.

Betrachtet man die ganze Sache etwas allgemeiner, so erkennt man, daß von zwei auf derselben Kegelfläche, deren Scheitel das Auge ist, liegenden Kurven jede das perspektivische Bild der andern ist. Denke ich durch eine der beiden Kurven irgend eine Bildfläche gelegt, so ist sie das Bild der andern Kurve auf dieser Bildfläche. Ist beispielsweise das Bild eines horizontalen Kreises auf einer vertikalen Bildebene eine Hyperbel, so ist für dieselbe Lage des Auges umgekehrt das Bild der vertikalen Hyperbel auf wagerechter Bildebene ein Kreis.

Es tritt nun die Frage auf, wie wir, wenn es sich um die Konstruktion des Bildes eines horizontalen Kreises auf vertikaler Bildebene handelt, aus der Lage des gegebenen Kreises in der Grundebene direkt erkennen können, ob das Bild eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Schon im § 8 haben wir die Gegengerade als diejenige Gerade der Grundebene kennen gelernt, die sich im Unendlichen abbildet. Schon damals wurde erwähnt, daß das Bild des Schnittpunkts einer in der Grundebene liegenden Kurve mit der Gegengeraden ein unendlich ferner Punkt des Kurvenbildes sei. Diese Erkenntnis ermöglicht uns die sofortige Beantwortung der gestellten Frage.

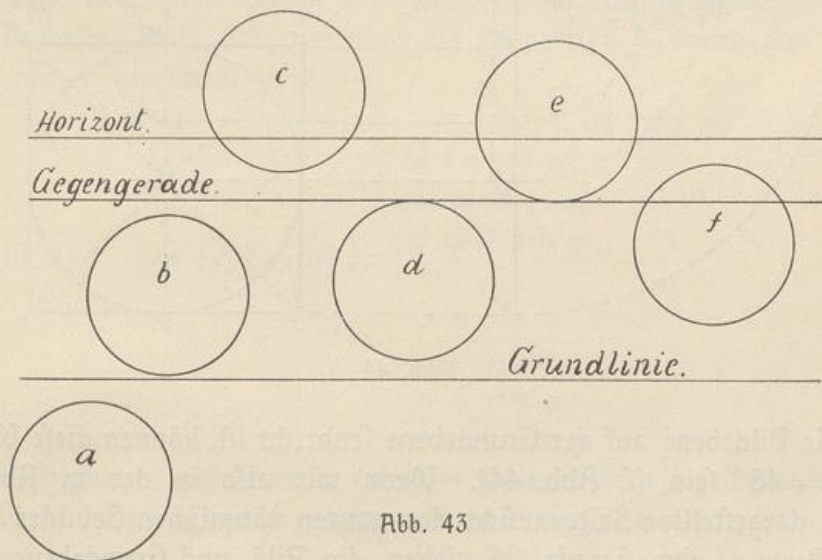


Abb. 43

Hat der Kreis mit der Gegengeraden keinen Punkt gemein, wie in den Lagen *a*, *b*, *c* (Abb. 43), so hat das Bild keinen unendlich fernen Punkt, ist also eine Ellipse; berührt der Kreis die Gegengerade, wie in den Lagen *d* und *e*, so hat er mit ihr einen Punkt gemein, das Bild besitzt also einen unendlich fernen Punkt, ist folglich eine



Parabel; schneidet endlich der Kreis die Gegengerade in zwei Punkten, (Lage  $f$ ), so hat das Bild zwei unendlich ferne Punkte, ist daher eine Hyperbel.

Auch die Frage, wann sich der in der wagerechten Grundebene liegende Kreis auf der vertikalen Bildebene wieder als Kreis abbildet, ist leicht zu beantworten. Dazu ist offenbar erforderlich, daß die Grund- und die Bildebene Wechselschnitte des Sehstrahlenkegels seien, die die Symmetrie-Ebene desselben unter gleichen Winkeln schneiden.

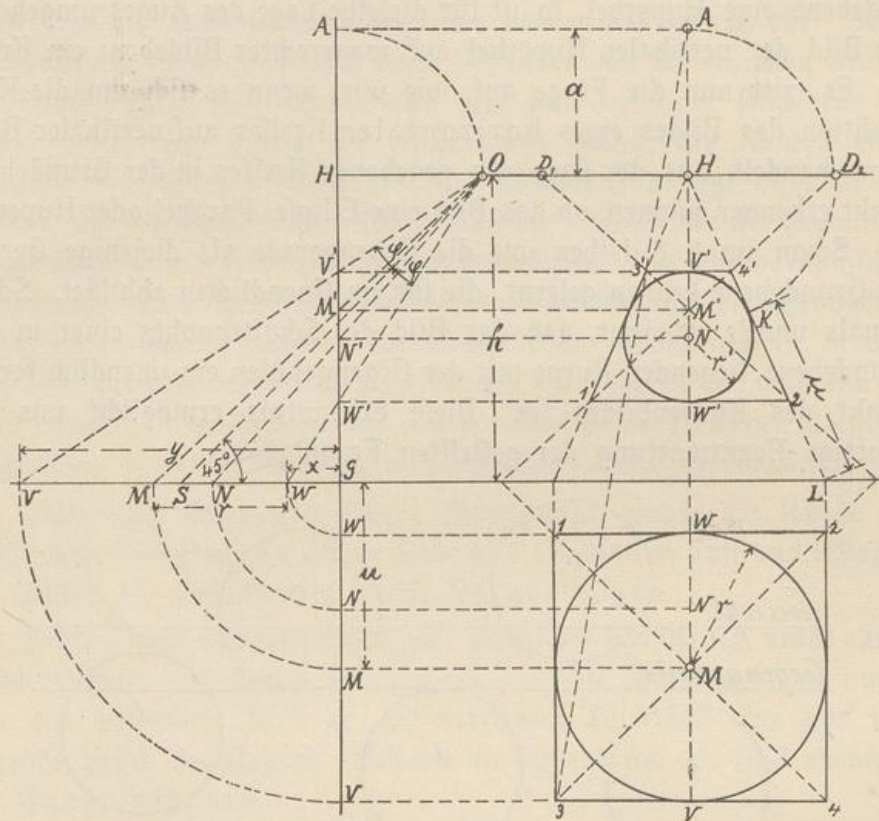


Abb. 44

Da die Bildebene auf der Grundebene senkrecht ist, können diese Winkel nur  $= 45^\circ$  sein (s. Abb. 44). Wenn wir also in der in Abb. 44 links dargestellten Seitenansicht des ganzen räumlichen Gebildes durch das Auge  $O$  eine Gerade  $OS$  ziehen, die Bild- und Grundebene unter Winkeln von  $45^\circ$  schneidet, so ist diese Gerade die Seitenansicht der Symmetrie-Ebene des Sehstrahlenkegels. Tragen wir also an beide Seiten dieser Geraden beliebige, aber gleich große Winkel  $\varphi$  an, so erhalten wir die Seitenansicht des Kegels, der aus der Grundebene die kreisförmige Directrix  $VW$ , aus der Bildebene ihr kreisförmiges



Bild  $V'W'$  herausschneidet. Die Abb. 44 zeigt rechts den in der umgeklappten Grundebene liegenden Kreis  $VW$ , das umschriebene Quadrat 1 2 3 4, das auf gewöhnliche Weise mittels der Punkte  $H$ ,  $A$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  konstruierte trapezförmige Bild 1' 2' 3' 4' des Quadrats und schließlich den diesem eingeschriebenen Bildkreis  $V'W'$ .

Voraussetzung der kreisförmigen Abbildung des Kreises ist natürlich, daß der Mittelpunkt  $M$  des Kreises  $VW$  in der durch das Auge rechtwinklig zur Bildebene gelegten Ebene liegt. Man sieht sofort, daß der Mittelpunkt  $N'$  des Bildkreises  $V'W'$  nicht etwa mit dem Bilde  $M'$  des Mittelpunkts  $M$  des Kreises  $VW$  zusammenfällt. Das Bild  $M'$  von  $M$  liegt in der Zeichnung über  $N'$ ; umgekehrt ist  $N'$  das Bild eines innerhalb des Kreises  $VW$  liegenden Punktes  $N$ , der näher an der Grundlinie liegt als  $M$ .

Hebt sich der abgebildete Kreis, so daß sein Mittelpunkt in derselben Vertikalen bleibt, so geht der Bildkreis in eine Ellipse mit wagerediter großer Axe über; senkt er sich, so verwandelt sich der Bildkreis in eine Ellipse mit vertikaler großer Axe.

Den Zusammenhang des Radius  $r$  des in der Horizontalebene liegenden Kreises mit dem Abstände  $u$  seines Mittelpunkts von der Grundlinie unter der Voraussetzung kreisförmiger Abbildung in der vertikalen Bildebene können wir leicht rechnerisch ermitteln. — Aus dem Dreiecke  $OSW$  folgt nämlich die Proportion — wenn das Stück  $GW$  mit  $x$  bezeichnet wird —

$$h\sqrt{2} : (h - a - x) = \sin(45^\circ + \varphi) : \sin \varphi,$$

$$\text{also} \quad h - a - x = \frac{h\sqrt{2} \sin \varphi}{\sin(45^\circ + \varphi)}$$

$$\text{Nun ist aber} \quad \sin(45^\circ + \varphi) = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\sqrt{2}},$$

$$\text{also} \quad h - a - x = \frac{2 h \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi}$$

$$\text{und} \quad x = h - a - \frac{2 h \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi}$$

Ebenso folgt aus dem Dreiecke  $OSV$  — wenn  $GV = y$  gesetzt wird —

$$h\sqrt{2} : (y - h + a) = \sin(45^\circ - \varphi) : \sin \varphi,$$

$$\text{also} \quad y - h + a = \frac{h\sqrt{2} \sin \varphi}{\sin(45^\circ - \varphi)}$$

$$\text{Nun ist aber} \quad \sin(45^\circ - \varphi) = \frac{\cos \varphi - \sin \varphi}{\sqrt{2}},$$

$$\text{also} \quad y - h + a = \frac{2 h \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}$$



und 
$$y = h - a + \frac{2 h \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{I. } u &= \frac{x+y}{2} = h - a - \frac{h \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} + \frac{h \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} \\ &= h - a + \frac{2 h \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = h \left( 1 + \frac{2 \sin^2 \varphi}{\cos 2 \varphi} \right) - a = \frac{h}{\cos 2 \varphi} - a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{II. } r &= \frac{y-x}{2} = \frac{h \sin \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi} + \frac{h \sin \varphi}{\cos \varphi + \sin \varphi} \\ &= h \sin \varphi \cdot \frac{2 \cos \varphi}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} = h \cdot \frac{\sin 2 \varphi}{\cos 2 \varphi} = h \operatorname{tg} 2 \varphi \end{aligned}$$

Damit sind  $u$  und  $r$  als Funktionen des beliebig angenommenen Winkels  $\varphi$  dargestellt. Nun folgt aus der Gleichung II

$$\operatorname{tg} 2 \varphi = \frac{r}{h}, \text{ also } \cos 2 \varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}, \text{ mithin } u = \sqrt{h^2 + r^2} - a$$

Hiermit ist der gesuchte Zusammenhang gefunden. Damit also ein in der Horizontalebene liegender Kreis vom Radius  $r$  sich als Kreis abbilde, muß sein Mittelpunkt von der Grundlinie den Abstand  $\sqrt{h^2 + r^2} - a$  haben. Da  $\sqrt{h^2 + r^2}$  die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $h$  und  $r$  ist, läßt sich dieser Abstand auch ohne Weiteres konstruieren; er ist  $= KL$  (s. Abb. 44, rechts).

Auch der Radius  $r'$  des zugehörigen Kreisbildes ist rechnerisch leicht zu ermitteln. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $AVW$  und  $AW'V'$  folgt:  $VW:W'V' = r:r' = h:a$ ,

$$\text{also } r' = \frac{ra}{h} = a \operatorname{tg} 2 \varphi.$$

## § 17. Die zeichnerische Darstellung des Bildes in den verschiedenen Lagen des Kreises.

Für die Aufzeichnung einer Linie, die keine Gerade und kein Kreis ist, also weder mittels des Lineals noch mittels des Zirkels hergestellt werden kann, gibt es bekanntlich zwei verschiedene Methoden. Entweder trägt man auf Grund des Bildungsgesetzes der Linie eine Anzahl einzelner Punkte oder eine Anzahl einzelner Tangenten auf; im ersteren Falle hat man die Linie freihändig durch die gefundenen Punkte, im zweiten Falle hat man sie ebenso an die gefundenen Tangenten zu legen. Daraus, daß man in der Geometrie



eine Linie als kontinuierliche Folge einer unendlich großen Zahl unendlich naher Punkte oder als einhüllende Kurve einer unendlich großen Zahl unendlich naher Tangenten auffaßt, entsteht oftmals der Irrtum, daß man die Kurve um so genauer erhalte, je mehr Punkte oder Tangenten bestimmt wurden. Da unsere gezeichneten Linien tatsächlich Streifen von meßbarer Breite, unsere Punkte — die ja stets durch den Schnitt von Linien entstehen — tatsächlich kleine Parallelogramme von meßbarer Ausdehnung sind, da ferner die Ausführung einer Konstruktion immer mit unvermeidlichen Ungenauigkeiten behaftet ist, macht eine zu dichte Folge der Punkte oder Tangenten die Zeichnung in Wahrheit unsicher und ungenau. Die einzelnen Punkte oder Tangenten weichen von dem ideellen Verlaufe der Kurve bald nach der einen, bald nach der andern Seite um eine Kleinigkeit ab, so daß man sich doch genötigt sieht, diese Differenzen auszugleichen und der eingebildete Vorteil sofort wieder verloren geht. Jeder geübte Zeichner sucht im Gegenteil mit möglichst wenigen Punkten oder Tangenten auszukommen, diese wenigen aber so genau wie irgend möglich zu erlangen. Daß man um so mehr Punkte oder Tangenten gebraucht, je schärfer die Kurve in der betreffenden Gegend gekrümmt ist, liegt auf der Hand.

Am besten sind diejenigen Konstruktionen, die Punkte mit den durch sie gehenden Tangenten gleichzeitig liefern; dadurch hat man in jedem Punkte die Richtung, in der man ihn beim Zeichnen der Kurve zu passieren hat, und kann eine auf anderem Wege nicht zu erlangende Genauigkeit erreichen. Eine Anzahl von Punkten mit den durch sie gehenden Tangenten gewährt eine größere Genauigkeit, als die doppelte Anzahl von Punkten ohne Tangenten oder von Tangenten ohne Punkte. Auch beim Aufzeichnen der hier in Betracht kommenden Kegelschnitte werden wir uns daher stets der Methoden bedienen, die Punkte mit den durch sie gehenden Tangenten oder — was dasselbe ist — Tangenten mit ihren Berührungspunkten liefern.

Handelt es sich um Zeichnungen kleineren Maßstabes, so denkt man sich am besten zwei dem Kreise umschriebene Quadrate, die um  $45^\circ$  gegen einander gedreht sind, so daß die Diagonalen des einen den Seiten des andern parallel sind (s. Abb. 45). Die acht Seiten der beiden Quadrate berühren den Kreis in acht Punkten, die ein regelmäßiges Achteck bilden. Ueberträgt man diese Figur in die Perspektive, so hat man stets acht Punkte mit acht Tangenten, die in der Regel zur Aufzeichnung des Kegelschnitts — namentlich der am häufigsten vorkommenden Ellipse — vollständig hinreichen. Liegt,



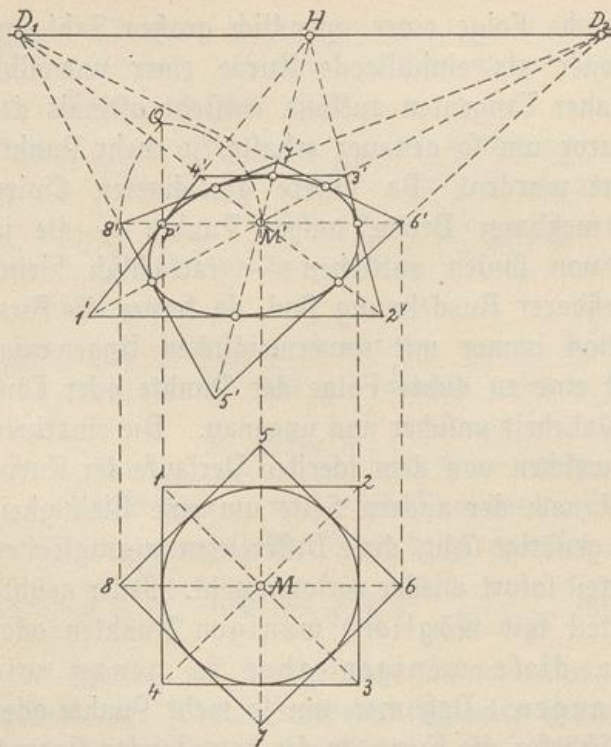


Abb. 45

Seite  $M'P'$  ist, zieht man einfach durch  $P'$  eine Vertikale, macht  $P'Q = M'P'$  und  $M'S' = M'Q$ . Nun zieht man  $8'5'$  nach  $D_1$ ,  $5'6'$  nach  $D_2$ ,  $6'7'$  nach  $D_1$ ,  $7'8'$  nach  $D_2$ , endlich  $5'7'$  nach  $H$ . Damit sind die acht Tangenten nebst ihren Berührungspunkten gefunden.

Auch mittels des dem Kreise umschriebenen regelmäßigen Achtecks, von dem zwei gegenüberliegende Seiten der Bildebene parallel sind, läßt sich dasselbe erreichen.

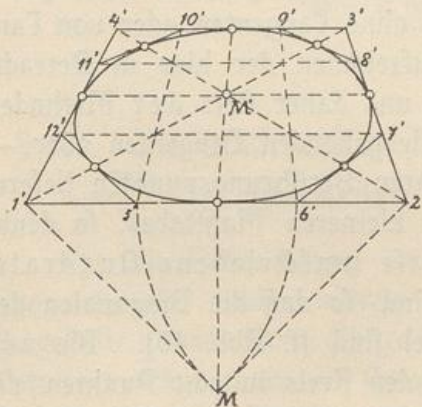


Abb. 46

Man geht wieder von dem Bilde  $1'2'3'4'$  des Quadrats 1234 aus und ermittelt die halbe Diagonale  $1'M$  eines Quadrats von der Seite  $1'2'$ . Trägt man diese Länge auf  $1'2'$  von  $1'$  und  $2'$  ab, so erhält man die Achtecksecken  $6'$  und  $5'$ , durch deren Verbindung mit  $H$  man auf  $4'3'$  sofort die Ecken  $9'$  und  $10'$  erhält. Legt man durch die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit den Diagonalen  $1'3'$  und  $2'4'$  Parallele zum Horizonte, so hat man die Ecken  $7'$ ,  $8'$ ,  $11'$

wie in den meisten Fällen, der Kreis horizontal, so legt man die Figur so, daß die Seiten 1 2 und 3 4, also auch die Diagonale 8 6 parallel der Bildebene sind und überträgt auf bekannte Weise das Quadrat 1234 in das Bild. Die Seiten  $1'2'$  und  $4'3'$  sind horizontal,  $1'4'$  und  $2'3'$  gehen nach  $H$ , die Diagonalen  $1'3'$  und  $2'4'$  nach  $D_2$  und  $D_1$ . Der Schnittpunkt  $M'$  der Diagonalen ist das Bild des Mittelpunkts  $M$ . Da  $M'8'$  die Diagonale eines Quadrats von der

Seite  $M'P'$  ist, zieht man einfach durch  $P'$  eine Vertikale, macht  $P'Q = M'P'$  und  $M'S' = M'Q$ . Nun zieht man  $8'5'$  nach  $D_1$ ,  $5'6'$  nach  $D_2$ ,  $6'7'$  nach  $D_1$ ,  $7'8'$  nach  $D_2$ , endlich  $5'7'$  nach  $H$ . Damit sind die acht Tangenten nebst ihren Berührungspunkten gefunden.

Auch mittels des dem Kreise umschriebenen regelmäßigen Achtecks, von dem zwei gegenüberliegende Seiten der Bildebene parallel sind, läßt sich dasselbe erreichen.

(Abb. 46.) Man geht wieder von dem Bilde  $1'2'3'4'$  des Quadrats 1234 aus und ermittelt die halbe Diagonale  $1'M$  eines Quadrats von der Seite  $1'2'$ . Trägt man diese Länge auf  $1'2'$  von  $1'$  und  $2'$  ab, so erhält man die Achtecksecken  $6'$  und  $5'$ , durch deren Verbindung mit  $H$  man auf  $4'3'$  sofort die Ecken  $9'$  und  $10'$  erhält. Legt man durch die Schnittpunkte dieser Verbindungslinien mit den Diagonalen  $1'3'$  und  $2'4'$  Parallele zum Horizonte, so hat man die Ecken  $7'$ ,  $8'$ ,  $11'$



und 12'. Die Aditecksseiten 6'7', 11'10' müssen natürlich nach  $D_2$ , 8'9' und 5'12' nach  $D_1$  gehen.

Es ist aber auch möglich, die Bildellipse mit Hülfe irgend einer der vielen bekannten Konstruktionen aus ihren Hauptaxen zu konstruieren. Namentlich dann ist das bequem ausführbar, wenn die durch das Auge und den Mittelpunkt des Kreises gehende Vertikalebene rechtwinklig zur Bildebene ist. Dann sind die Punkte  $P'$  und  $Q'$  (Abb. 47), die sich ohne Weiteres aus den Schnittpunkten  $P$  und  $Q$

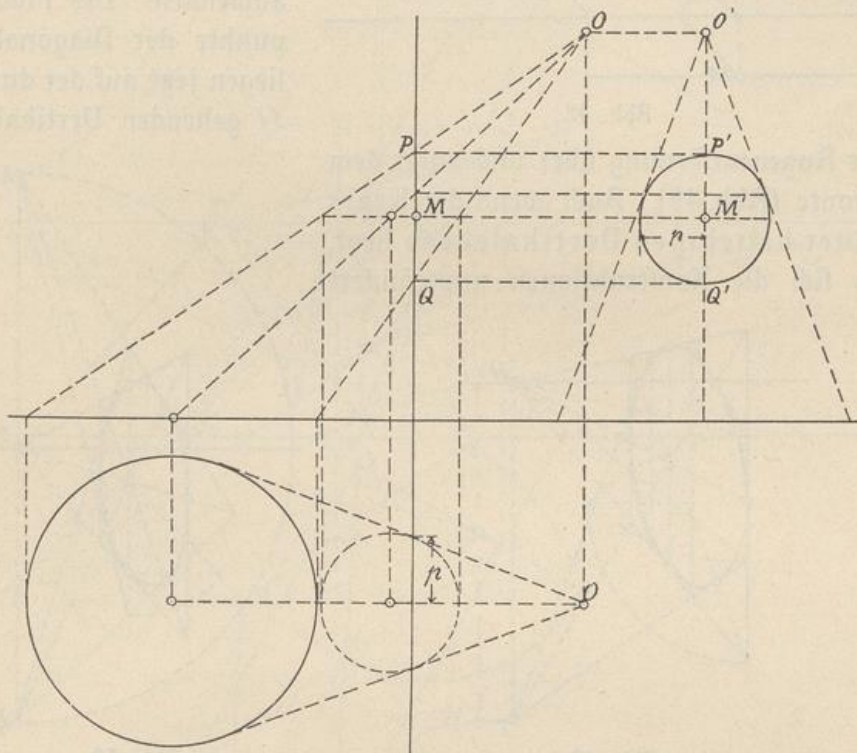


Abb. 47 •

ergeben, die Endpunkte der vertikalen Axe der Ellipse, die je nach der Höhe des Auges über der Ebene des Kreises die große oder kleine Axe sein kann. Nimmt man dann die Mitte  $M$  zwischen  $P$  und  $Q$  und legt durch sie einen Horizontalschnitt, so erhält man im Grundrisse sofort die wagerechte Halbaxe  $p$ , die wieder die kleine oder große Halbaxe sein kann.

Liegt der Kreis in einer zur Bildebene parallelen Vertikalebene, so bildet er sich selbstverständlich als Kreis ab. Man hat also nur, wie es in Abb. 48 gezeigt ist, die Lage des Mittelpunkts und die Länge des Radius in bekannter Weise zu ermitteln und den Kreis zu beschreiben.



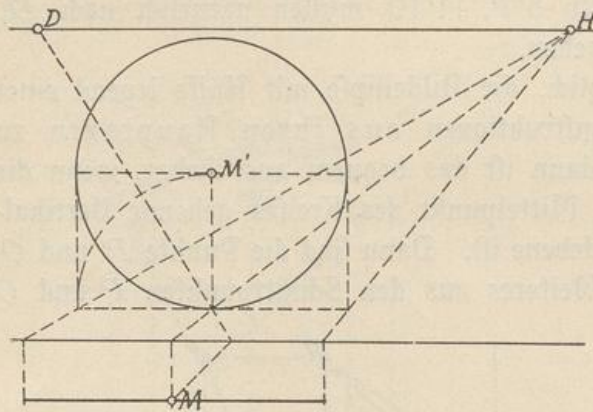


Abb. 48

in der Augenentfernung über und unter dem Horizonte (Abb. 49). Auch wenn der Kreis in einer beliebigen Vertikalebene liegt, lassen sich die Konstruktionen unverändert

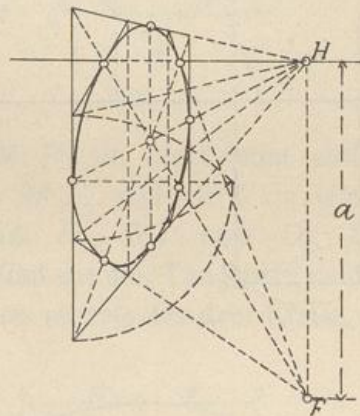


Abb. 49

Liegt der Kreis in einer zur Bildebene senkrechten Vertikalebene, so kann man die oben bei der Abbildung des horizontalen Kreises benutzten Konstruktionen genau in derselben Weise anwenden. Die Fluchtpunkte der Diagonalen liegen jetzt auf der durch  $H$  gehenden Vertikalen

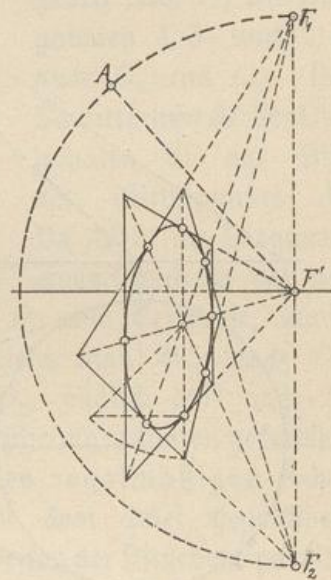


Abb. 50

anwenden (Abb. 50). Die Diagonalfluchtpunkte sind jetzt in der früher angegebenen Weise zu ermitteln (s. § 9, Abb. 22, S. 27).

Liegt der Kreis ganz beliebig im Raume, so können wir uns stets ein umschriebenes Quadrat denken, von dem zwei gegenüberliegende Seiten horizontal sind. Dieses Quadrat ergibt, auf die Grundebene projiziert, das Rechteck 1234 (Abb. 51), dessen Bild 1'2'3'4' wir auf die gewöhnliche Weise erhalten. In der Grundebene ermitteln wir nun, indem wir die Seite 34 mit einem um 1 als Mittelpunkt mit dem Radius 12 beschriebenen Kreise schneiden, die Höhe  $h$  der oberen Quadratseite über der Grundebene. Indem wir diese Höhe in das Bild tragen, erhalten wir die vollständige Abbildung des Quadrats. Die wagerechte Diagonale 68 des über Eck gestellten Quadrats ist im



Grundrisse sofort zu ermitteln, von hier in den perspektivischen Grundriß und aus diesem in das räumliche Bild zu übertragen. Die Seiten des perspektivischen Bildes dieses Quadrats finden wir nun sofort dadurch, daß ihre Fluchtpunkte in den Vertikalen liegen müssen, die durch die Fluchtpunkte  $F_4$  und  $F_3$  der Diagonalen  $1'3'$  und  $2'4'$  gehen.

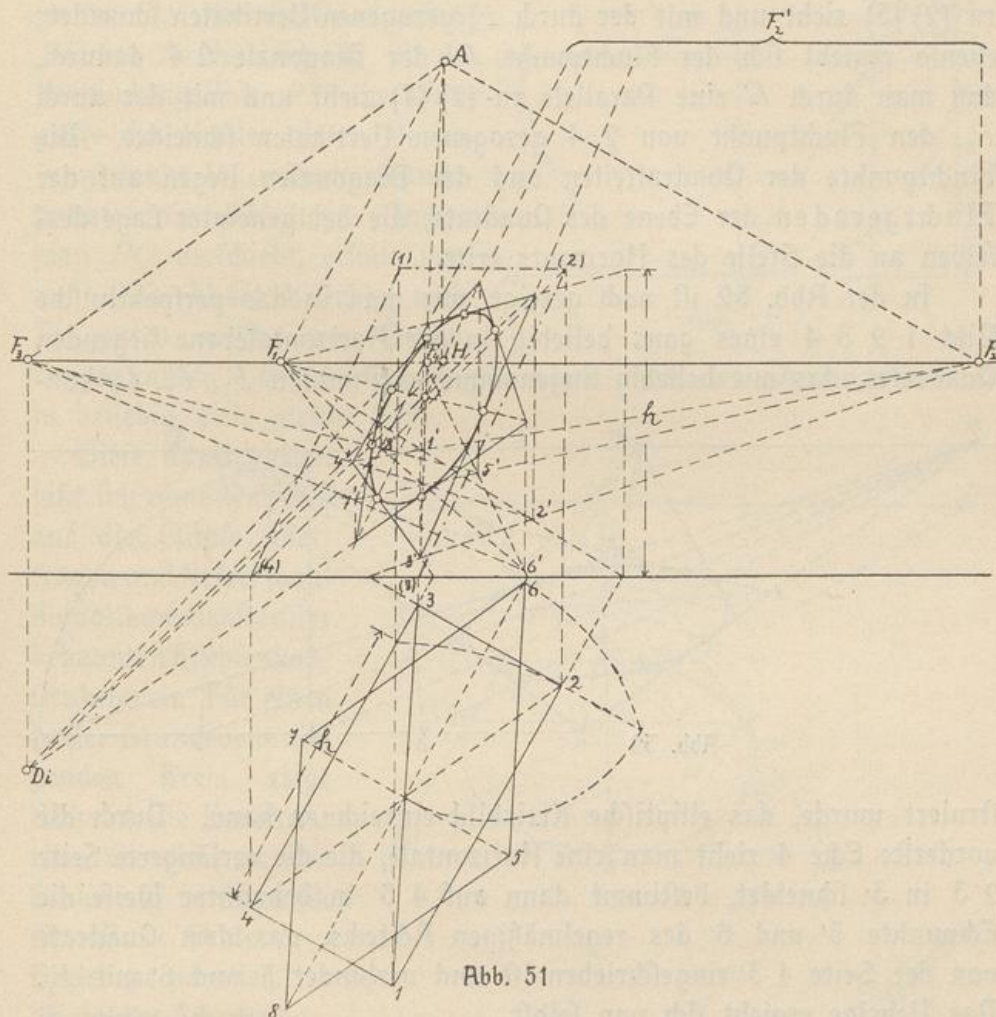


Abb. 51

Zieht man es vor, das regelmäßige Achteck zu benutzen, so bestimmt man die Achtecksecken im Grundrisse auf 1 2 und 3 4, überträgt sie in die Bilder  $1'2'$  und  $3'4'$  und mittels der Diagonalen des Bildquadrats auf die anderen Quadratseiten. Ist der Fluchtpunkt der aufsteigenden Quadratseiten zu haben, so braucht man die Achtecksecken nur auf  $3'4'$  zu bestimmen und erhält, indem man von diesen Punkten aus nach dem Fluchtpunkte zieht, die auf der gegenüberliegenden Seite liegenden Achteckspunkte, schließlich mit Hülfe der Diagonalen die auf den aufsteigenden Quadratseiten liegenden Punkte.







so daß ein umschriebenes Quadrat  $EFGH$  entsteht, zieht man ferner  $AC$  und in beliebigem Abstände von  $AB$  die Parallele  $PQ$ , die  $AC$  in  $S$  schneidet, zieht man weiter  $GS$ , die die Quadratseite  $EF$  in  $T$  schneidet, so ist die Verbindungslinie  $PT$  eine Tangente des Kreises, deren Berührungspunkt  $W$  in ihrem Schnittpunkte mit  $BV$  liegt. Indem man  $PQ$  verschiebt, erhält man auf diese Weise beliebig viele Tangenten nebst ihren Berührungspunkten. Am zweckmäßigsten teilt man den Durchmesser  $CD$  in beliebig viele gleiche Teile.

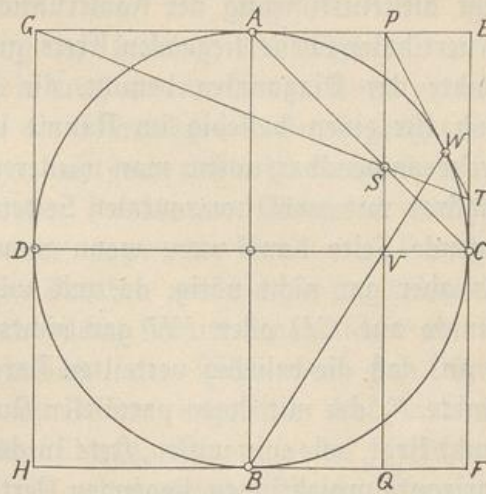


Abb. 53

Diese Konstruktion läßt sich ohne Weiteres auf die Ellipse übertragen und liefert wohl die vollkommenste aller bekannten Ellipsenkonstruktionen. Für einen in der Grundebene liegenden Kreis zeigt Abb. 54 die Konstruktion, die ohne weitere Erklärung verständlich ist. Da  $CD$  der Bildebene parallel ist, bilden sich die gleichen Teile wieder als gleiche Teile ab, und die von den Teilpunkten aus gezogenen Parallelen zu  $AB$  gehen im Bilde nach dem Hauptpunkte. — Die Abbildung

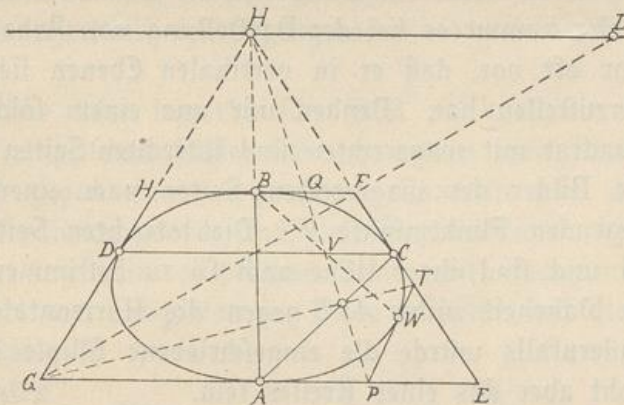


Abb. 54

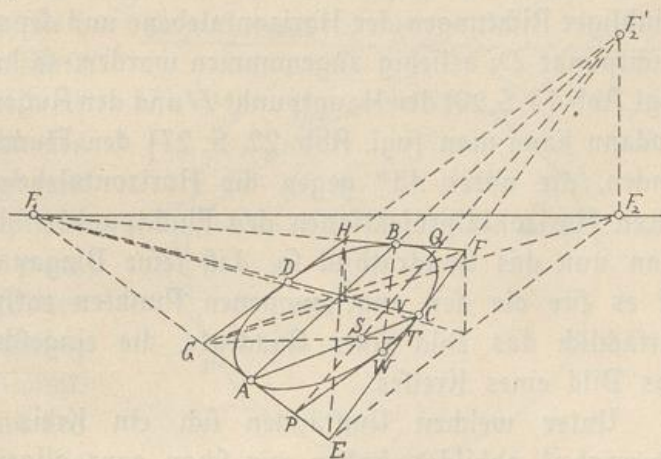


Abb. 55



zeigt die Ausführung der Konstruktion für ein Viertel. — Für einen in vertikaler Ebene liegenden Kreis gilt, wenn man wieder die Fluchtpunkte der Diagonalen benutzt, die Konstruktion ganz unverändert. Auch für einen beliebig im Raume liegenden Kreis (Abb. 55) ist sie direkt anwendbar, wenn man wieder wie in Abb. 51 ein umschriebenes Quadrat mit zwei horizontalen Seiten benutzt. Die in der Grundebene liegende Seite kann man, wenn man will, perspektivisch teilen, hat das aber gar nicht nötig, da, wie wir wissen, auf die Verteilung der Punkte auf  $CD$  oder  $FH$  gar nichts ankommt. Nur darauf kommt es an, daß die beliebig verteilten Parallelen im Bilde nach dem Fluchtpunkte  $F_2'$  der mit ihnen parallelen Quadratseiten gehen. Dieser Fluchtpunkt liegt, wie wir wissen, stets in der durch den Fluchtpunkt  $F_2$  ihrer Horizontalprojektionen liegenden Vertikalen. Die Abbildung zeigt die Ermittlung einer beliebigen Tangente mit ihrem Berührungspunkte.

Auch auf den in Abb. 52 dargestellten, ganz allgemeinen Fall ist die Konstruktion ohne Weiteres anwendbar.

Dem direkt im Bilde — ohne Grund- und Aufriß — arbeitenden Maler kommt es bei der Darstellung von Arkaden, Gewölben u. s. w. sehr oft vor, daß er in vertikalen Ebenen liegende Kreise verkürzt darzustellen hat. Denken wir uns einem solchen Kreise wieder ein Quadrat mit wagerechten und lotrechten Seiten umschrieben, so gehen die Bilder der wagerechten Seiten nach einem auf dem Horizonte liegenden Fluchtpunkte  $F$ . Die lotrechten Seiten bilden sich lotrecht ab und sind ihrer Höhe nach so zu bestimmen, daß die Diagonalen in Wahrheit unter  $45^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigt sind — andernfalls würde die eingeschriebene Ellipse das Bild einer Ellipse, nicht aber das eines Kreises sein.

Sind die Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  zweier zu einander rechtwinkliger Richtungen der Horizontalebene und der zugehörige Diagonalfluchtpunkt  $D$  beliebig angenommen worden, so kann man bekanntlich (vgl. Abb. 15, S. 20) den Hauptpunkt  $H$  und den Augenabstand  $\alpha$  ermitteln. Sodann kann man (vgl. Abb. 22, S. 27) den Fluchtpunkt  $F'$  der Linien finden, die unter  $45^\circ$  gegen die Horizontalebene geneigt sind und deren Horizontalprojektionen den Fluchtpunkt  $F$  besitzen. Konstruiert man nun das Quadratbild so, daß seine Diagonale nach  $F'$  geht, so ist es für die den angenommenen Punkten entsprechende Augenlage tatsächlich das Bild eines Quadrats, die eingeschriebene Ellipse also das Bild eines Kreises.

Unter welchen Umständen sich ein Kreis als Parabel oder Hyperbel abbildet, haben wir schon ganz allgemein gesehen. Vom



horizontalen Kreise im Besonderen sahen wir, daß sein Bild eine Parabel wird, wenn er die Gegengerade berührt, eine Hyperbel, wenn er sie durchschneidet. Denken wir uns die durch das Auge parallel zur Bildebene gehende Ebene, die die Grundebene in der Gegengeraden schneidet, so erkennen wir sofort, daß jeder Punkt dieser Parallelebene sich in einem unendlich fernen Punkte der Bildebene abbildet. Wenn also ein beliebig im Raume liegender Kreis diese Parallelebene berührt, so ist sein Bild eine Parabel, wenn er sie durchschneidet eine Hyperbel. Die Schnittpunkte bilden sich im Unendlichen ab, ergeben also, mit dem Auge verbunden, die Richtungen der Asymptoten. — Projizieren wir den im Raume liegenden Kreis auf die Grundebene, so erhalten wir eine Ellipse, die, falls der Kreis auf der Grundebene senkrecht steht, in eine gerade Strecke übergeht. Durchschneidet also die Ellipse oder die Strecke die Gegengerade, so erhalten wir als Bild des Kreises eine Hyperbel; berührt aber die Ellipse die Gegengerade oder fällt die Strecke mit einem Endpunkte in sie, so ergibt sich als Bild eine Parabel; liegt endlich die Ellipse oder die Strecke ganz außerhalb der Gegengeraden, so ist das Bild eine Ellipse.

Um das parabolische oder hyperbolische Bild zu konstruieren, kann man, wie beim elliptischen Bilde, sich der beiden dem Kreise umschriebenen, um  $45^\circ$  gegen einander gedrehten Quadrate oder des regelmäßigen Achtecks bedienen, jedoch sind diese Konstruktionen hier nicht so empfehlenswert wie beim elliptischen Bilde, weil immer nur ein Teil der acht Punkte und Tangenten im Bilde erscheint und diese wenigen Punkte und Tangenten den langgestreckten Bogen nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit bestimmen. Am besten fährt man, wenn man zuerst ermittelt, welcher Bogen des Kreises auf der verfügbaren Zeichenfläche überhaupt zur Abbildung gelangt, wenn man dann auf diesem Bogen eine genügende Zahl beliebig gewählter Punkte annimmt, in ihnen Tangenten an den Kreis legt und dann die

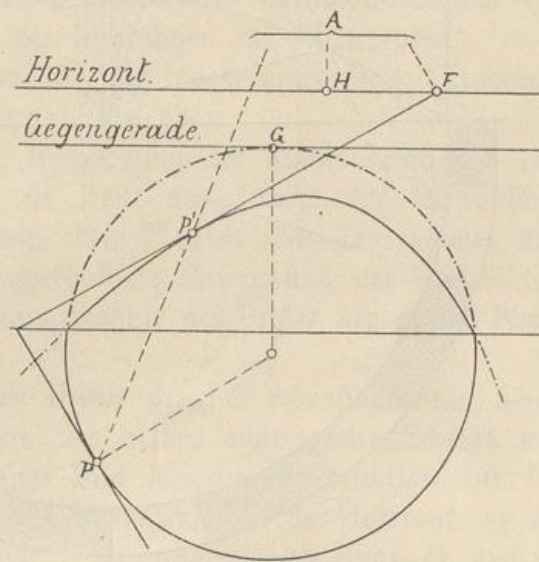


Abb. 56



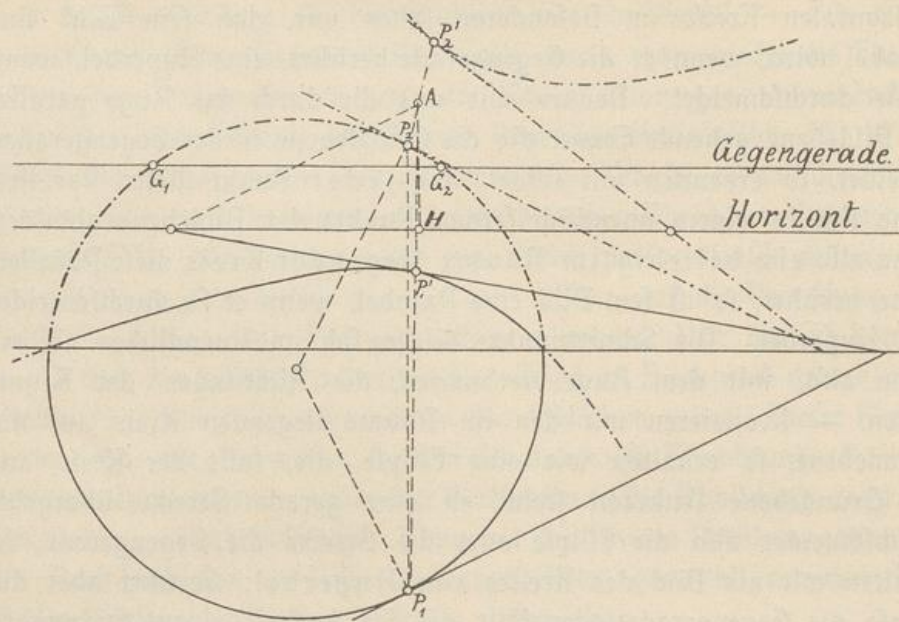


Abb. 57

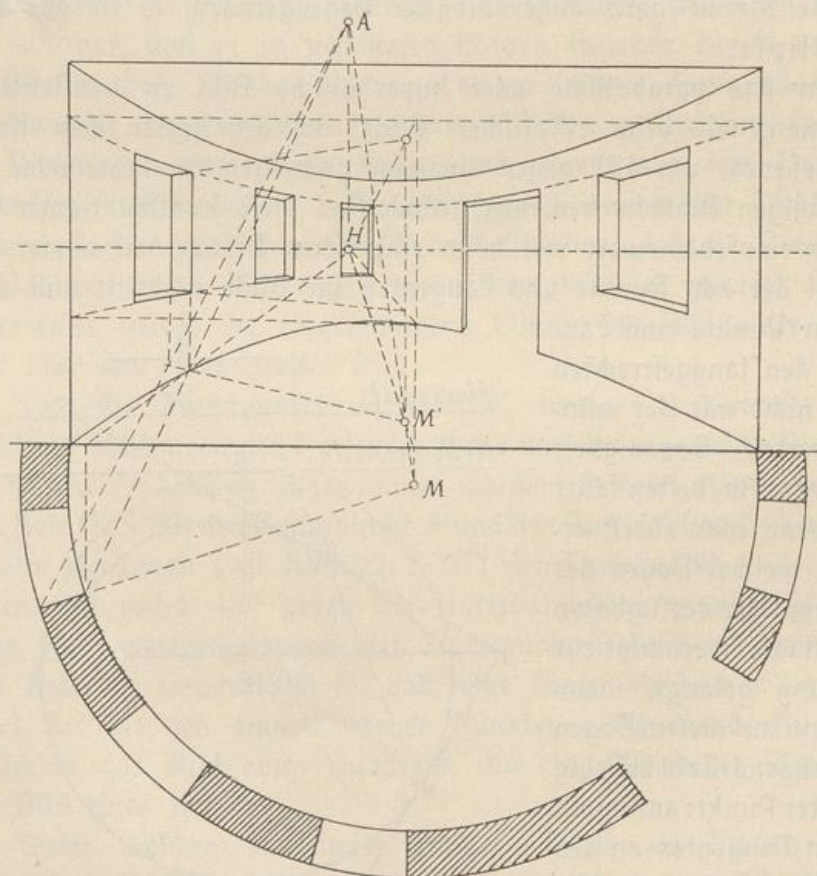


Abb. 58



Punkte nebst ihren Tangenten auf bekannte Weise (s. Abb. 11, S. 18) in das Bild überträgt.

Für den wichtigsten Fall des horizontalen Kreises zeigt die Abb. 56 das parabolische, die Abb. 57 das hyperbolische Bild des Kreises. In beiden Figuren ist das hinter der Bildebene liegende Stück des Kreises und sein Bild nachgezogen, das vor der Bildebene liegende Stück und sein Bild strichpunktiert worden. In Abb. 56 ist der Berührungspunkt  $G$  der sich im Unendlichen abbildende Punkt des Kreises; in Abb. 57

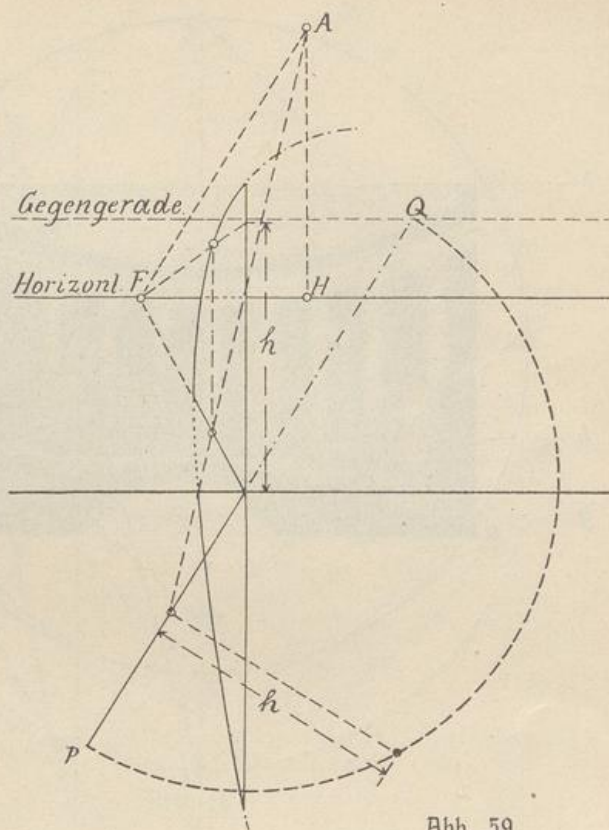


Abb. 59

sind die Schnittpunkte  $G_1$  und  $G_2$  des Kreises und der Gegengeraden die Punkte, deren Bilder in unendliche Ferne fallen. Der ganz strichpunktierte Hyperbelast ist das virtuelle Bild des hinter dem Rücken des Beschauers liegenden Kreisbogens. Die Verbindungslinien von  $A$  mit  $G_1$  und  $G_2$  ergeben die Richtungen der Asymptoten.

Als Anwendung zeigt Abb. 58 das Innere eines runden Zimmers; alle Kreise bilden sich als Hyperbeln ab.

Die Abb. 59a zeigt die Anwendung der Konstruktion auf eine photographische Aufnahme; sie stellt das Innere der katholischen St. Ludwigskirche in Darmstadt, eines Moller'schen Zentralbaus, dar. Man erkennt deutlich die hyperbolische Krümmung der Kreisbilder; im Punkte  $S_1'$  ist der Krümmungsradius des Bildes der oberen Architravkante ein Minimum.

Da hier die Kreise, deren Bilder deutlich erkennbar sind, über dem Horizonte liegen, ist, um das bisher angewandte Schema beibehalten zu können, das ganze Bild für die Konstruktion auf den Kopf gestellt worden;  $bb$  ist die Grundlinie,  $hh$  der Horizont,  $gg$  die Gegengerade,  $H$  der Hauptpunkt,  $A$  das umgeklappte Auge,  $D_1$  und  $D_2$



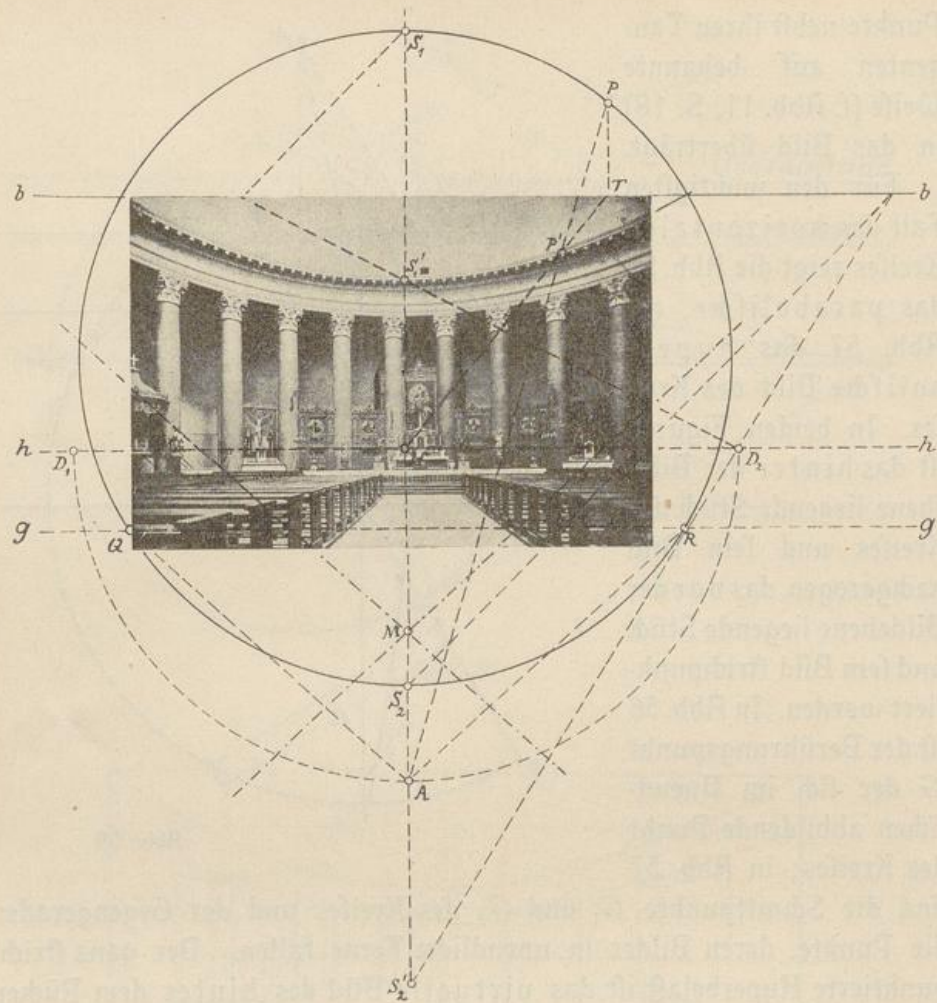
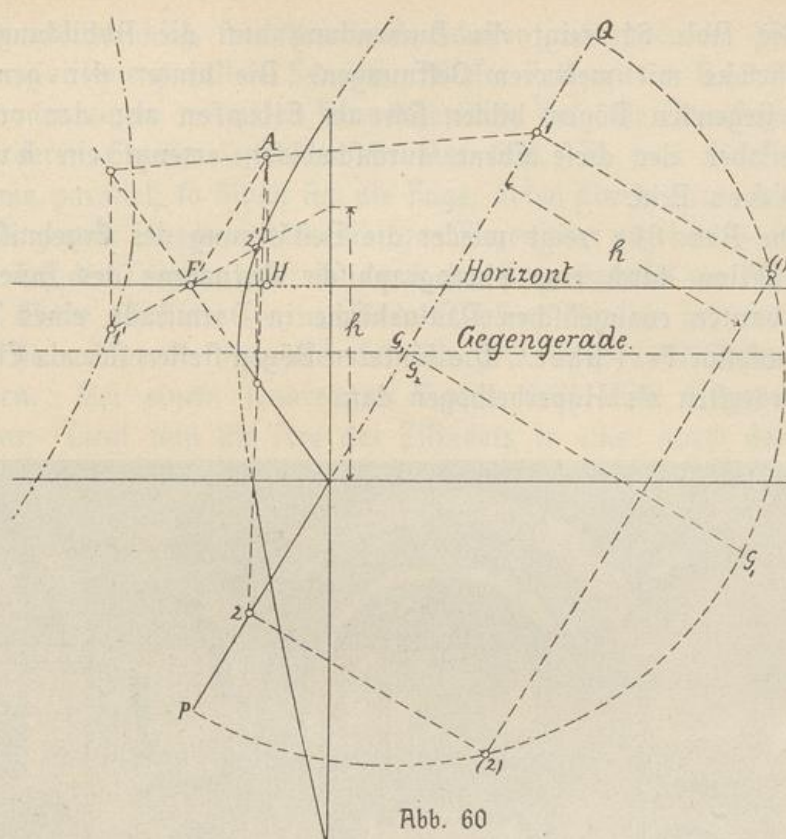


Abb. 59a

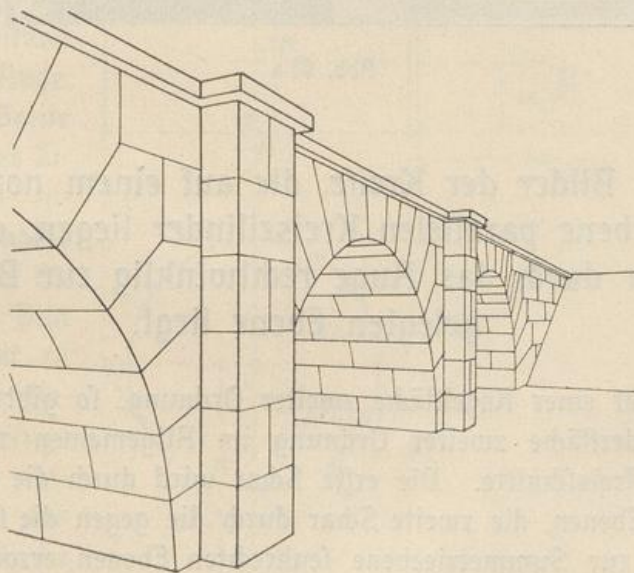
sind die Distanzpunkte. Die Konstruktion des Bildes der oberen Architravkante, deren Grundriß der nachgezogene Kreis ist, findet sich angegeben. Das Bild  $P'$  eines beliebigen Punktes  $P$  wurde in gewöhnlicher Weise als Schnitt von  $PA$  und  $TH$  ermittelt. Die Punkte  $Q$  und  $R$ , in denen der Kreis die Gegengerade schneidet, liefern, mit  $A$  verbunden, die Richtungen der Asymptoten. Die Scheitelpunkte  $S_1$  und  $S_2$  des Kreises ergeben die Scheitel  $S_1'$  und  $S_2'$  der Hyperbel; die durch ihre Mitte  $M$  gezogenen, strichpunktierten Parallelen zu  $AQ$  und  $AR$  sind die Asymptoten selbst.

Die Abb. 59 zeigt das parabolische, die Abb. 60 das hyperbolische Bild eines in vertikaler Ebene liegenden Kreises, dessen Grundriß  $PQ$  ist; im ersteren Falle berührt, wie wir schon wissen, der Kreis die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene, im zweiten Falle durchschneidet er sie; die Bilder der Schnittpunkte





$G_1$  und  $G_2$  sind wieder die unendlich fernen Punkte der Hyperbel;  $1'$  und  $2'$  sind die Bilder der in gleicher Höhe  $h$  hinter und vor der Gegengeraden liegenden Punkte 1 und 2.





Die Abb. 61 zeigt die Anwendung auf die Abbildung einer Bogenbrücke mit mehreren Oeffnungen. Die hinter der genannten Ebene liegenden Bögen bilden sich als Ellipsen ab; der vorderste Bogen aber, der diese Ebene durchschneidet, erzeugt ein hyperbolisches Bild.

Die Abb. 61a zeigt wieder die Bestätigung des Ergebnisses der Konstruktion durch eine photographische Aufnahme des Innern der neu erbauten evangelischen Pauluskirche in Darmstadt, eines Werkes von Professor Fr. Püßer. Die hinteren Bögen stellen sich als Ellipsen-, die vordersten als Hyperbelbögen dar.



Abb. 61 a

§ 18. Bilder der Kreise, die auf einem normalen, zur Bildebene parallelen Kreiszylinder liegen, dessen Axe in einer durch das Auge rechtwinklig zur Bildebene gelegten Ebene liegt.

Wie auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung, so gibt es auch auf einer Zylinderfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen zwei Scharen paralleler Kreischnitte. Die erste Schar wird durch die zur Leitlinie parallelen Ebenen, die zweite Schar durch die gegen die Leitlinie antiparallelen, zur Symmetrieebene senkrechten Ebenen erzeugt. Ist der Zylinder ein normaler Zylinder, seine Axe also auf der Ebene der







$$a : r = p : \sqrt{p^2 - r^2},$$

aus der

$$a = \frac{p r}{\sqrt{p^2 - r^2}}$$

folgt. Ist nun  $y$  die Höhe der abgebildeten Lagerfuge über dem Horizonte, und schneiden die nach dem nächsten und nach dem entferntesten Punkte dieser Fuge gerichteten Sehstrahlen die Bildebene in den Höhen  $v$  und  $u$ , so haben wir weiter die sich aus der Seitenansicht ergebenden Proportionen

$$u : y = p : (p + r)$$

und

$$v : y = p : (p - r)$$

woraus

$$u = \frac{p y}{p + r} \text{ und } v = \frac{p y}{p - r}$$

folgen. Diese Abstände  $u$  und  $v$  sind zugleich die Höhen des tiefsten und des höchsten Punkts der gesuchten Ellipse; die Höhe ihres Mittelpunkts über dem Horizonte ist also

$$m = \frac{u + v}{2} = \frac{p y}{2} \left( \frac{1}{p + r} + \frac{1}{p - r} \right) = \frac{p y}{2} \cdot \frac{2 p}{p^2 - r^2} = \frac{p^2 y}{p^2 - r^2}$$

Die halbe kleine Axe der Ellipse ist nun:

$$b = v - m = \frac{p y}{p - r} - \frac{p^2 y}{p^2 - r^2} = \frac{p y}{p^2 - r^2} (p + r - p) = \frac{p r y}{p^2 - r^2},$$

demnach ihre Exzentrizität:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{p^2 r^2}{p^2 - r^2} - \frac{p^2 r^2 y^2}{(p^2 - r^2)^2}} = \frac{p r}{p^2 - r^2} \cdot \sqrt{p^2 - r^2 - y^2}.$$

Aus der Gleichung

$$m = \frac{p^2 y}{p^2 - r^2}$$

folgt

$$y = \frac{m (p^2 - r^2)}{p^2},$$

also

$$e = \frac{p r}{p^2 - r^2} \cdot \sqrt{p^2 - r^2 - \frac{m^2 (p^2 - r^2)^2}{p^4}} \\ = \frac{r}{p (p^2 - r^2)} \cdot \sqrt{p^4 (p^2 - r^2) - m^2 (p^2 - r^2)^2} = \frac{r}{p} \cdot \sqrt{\frac{p^4 - m^2 (p^2 - r^2)}{p^2 - r^2}}$$

Hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} p^2 (p^2 - r^2) e^2 &= r^2 [p^4 - m^2 (p^2 - r^2)] \\ \text{oder} \quad p^2 (p^2 - r^2) e^2 + m^2 r^2 (p^2 - r^2) &= r^2 p^4. \end{aligned}$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit  $\frac{p^2}{(p^2 - r^2)^2}$ , so kommt

$$\frac{p^4}{p^2 - r^2} \cdot e^2 + \frac{p^2 r^2}{p^2 - r^2} \cdot m^2 = \frac{r^2 p^6}{(p^2 - r^2)^2}$$







Brennpunkte zusammen, die Ellipse wird hier also zum Kreise; es tritt hier wieder der uns bereits bekannte Fall auf, daß ein horizontaler Kreis sich auf vertikaler Bildfläche als Kreis abbildet. In Abb. 63 sind die Horizontalschnitte des Zylinders dargestellt, die im Bilde diese Kreischnitte ergeben, sie sind mit  $M_1 N_1$  und  $M_2 N_2$  bezeichnet. Entfernt sich der wagerechte Schnitt des Zylinders noch weiter vom Horizonte, so ist sein Bild eine Ellipse, deren große Axe in die vertikale Mittellinie des Bildes fällt. Es fallen jetzt also auch die Brennpunkte

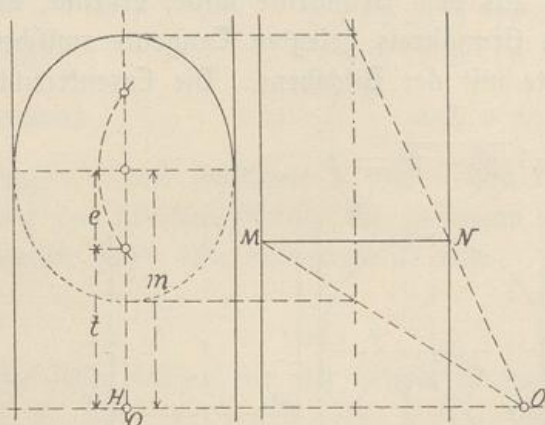


Abb. 64

in diese Mittellinie, und es entsteht die Frage, wie weit sie sich der wagerechten Mittellinie des Bildes nähern können — mit anderen Worten: welche Teile der senkrechten Mittellinie zum gesuchten geometrischen Orte gehören.

Der Abstand des dem Horizonte näher gelegenen Brennpunkts vom Horizonte ist  $t = m - c$  (Abb. 64).

Hier ist aber die Exzentrizität  $e$  nicht, wie bei den zuerst betrachteten Ellipsen mit wagerechter großer Axe  $= \sqrt{a^2 - b^2}$ , sondern, da jetzt  $a$  zur kleinen,  $b$  zur großen Halbaxe geworden ist,  $= \sqrt{b^2 - a^2}$ , also

$$e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{p r y}{p^2 - r^2}\right)^2 - \frac{p^2 r^2}{p^2 - r^2}} = \frac{p r}{p^2 - r^2} \sqrt{y^2 - p^2 + r^2},$$

daher

$$t = \frac{p^2 y}{p^2 - r^2} - \frac{p r}{p^2 - r^2} \cdot \sqrt{y^2 - p^2 + r^2} = \frac{p}{p^2 - r^2} \left[ p y - r \sqrt{y^2 - p^2 + r^2} \right]$$

Die in der Klammer befindliche Differenz erreicht ihren kleinsten Wert, wenn ihr nach  $y$  genommener Differential-Quotient verschwindet, wenn also

$$p - \frac{r y}{\sqrt{y^2 - p^2 + r^2}} = 0$$

ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} p^2 (y^2 - p^2 + r^2) &= r^2 y^2, \\ y^2 (p^2 - r^2) &= p^2 (p^2 - r^2), \end{aligned}$$

also

$$y = \pm p.$$



Zu diesem Werte von  $y$  gehören die Werte:

$$m = \frac{p^3}{p^2 - r^2}, \quad b = \frac{p^2 r}{p^2 - r^2}, \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{p^2 r}{p^2 - r^2}\right)^2 - \frac{p^2 r^2}{p^2 - r^2}} = \frac{p r^2}{p^2 - r^2},$$

$$t = m - c = p.$$

Die Exzentrizität der Brennpunktsellipse ist aber, wie wir gefunden hatten, ebenfalls  $= p$ ; die Brennpunkte der die Fugen darstellenden Ellipsen können sich also bis zu den Brennpunkten der Brennpunktsellipse dem Horizonte nähern. Der gesuchte geometrische Ort besteht also aus einer Ellipse von der wagerechten Halbachse  $\frac{p r}{\sqrt{p^2 - r^2}}$  und der senkrechten Halbachse  $\frac{p^2}{\sqrt{p^2 - r^2}}$ , also dem Axenverhältnisse  $r:p$ , und zwei von ihren Brennpunkten aus nach oben und unten sich erstreckenden, senkrechten Halbstrahlen. (s. Abb. 62.)

Da durch Parallelverschiebung der Bildfläche die Größe des Bildes beliebig geändert werden kann, ist nur das Verhältnis der Halbachsen der Ellipse von Bedeutung. Daß dieses Verhältnis  $= r:p$  ist, wird durch die in die Figur 63 eingezeichneten Parallelen dargetan.

## § 19. Bilder von Zylindern und Kegeln in verschiedenen Lagen.

Es soll hier von Zylindern und Kegeln im gewöhnlichen Sinne des Wortes, also von Körpern mit kreisförmigen Grundflächen und zylindrischer oder konischer Mantelfläche die Rede sein. Die Axe des Zylinders ist die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte der parallelen Grundflächen, die des Kegels die Verbindungsstrecke des Mittelpunkts mit der Spitze. Zylinder und Kegel nennt man normal, wenn die Axe auf den Grundflächen oder der Grundfläche senkrecht steht.

Da wir die Darstellung des Kreises in seinen verschiedenen Lagen kennen gelernt haben, ist über die Abbildung des Zylinders und Kegels kaum noch etwas zu sagen. Die Grundflächen eines Zylinders bilden sich als Kegelschnitte, in dem gewöhnlichen Falle des ganz hinter der Bildebene liegenden Körpers als zwei Ellipsen ab; die Mantelflächen lassen sich nur durch die Abbildung der sogenannten Wendelinien, d. h. der Erzeugenden darstellen, in denen die durch das Auge an die Fläche gelegten Tangentenebenen sie berühren, und man erkennt sofort, daß die Bilder dieser Wendelinien die gemeinsamen Tangenten der



beiden die Umriffe der Grundflächen darstellenden Kegelschnitte sind. Sind diese Kegelschnitte Parabeln oder Hyperbeln, so kommt für die Aeste, die im wirklichen Bilde, also in der Abbildung der tatsächlich übersehenen Teile des Körpers auftreten, höchstens eine der gemeinsamen Tangenten in Betracht. Es kann aber auch vorkommen, daß beide Tangenten nicht vorhanden, oder, wie man sich mathematisch auszudrücken pflegt, imaginär sind. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn sich der Beschauer im Innern eines zylindrischen Raumes befindet und den vor ihm liegenden Teil desselben auf vertikaler Bildebene abbilden will. Die den Zylinder oben und unten begrenzenden, wagerechten Kreise bilden sich jetzt als Hyperbeln ab, die gemeinsame Tangenten überhaupt nicht besitzen. (vgl. Abb. 58, S. 60.)

Im § 15 lernten wir die Darstellung eines normalen Prismas von quadratischer Grundfläche in allgemeinsten Lage kennen. Zeichnen wir nach der im § 17 angegebenen Methode die Ellipsen in die Abbildungen der Grundflächen, die die Bilder der den Quadraten eingeschriebenen Kreise sind, und ziehen wir an diese Ellipsen die nach dem Fluchtpunkte der Seitenkanten des Prismas gehenden gemeinsamen Tangenten, so ist das Bild des Zylinders vollendet. — Wir können beispielsweise, ohne die Allgemeinheit des Bildes irgendwie zu beeinträchtigen, den Horizont durch einen der beiden Fluchtpunkte der Grundkanten legen; dann sind die in Betracht kommenden Grundkanten in Wahrheit horizontal, und die Einzeichnung der Ellipse vollzieht sich auf die im § 17 für diesen Fall angegebene Weise.

Ist ein Kegel darzustellen, so hat man vom Bilde der Spitze aus Tangenten an den den Umriff der Grundfläche darstellenden Kegelschnitt zu legen; von diesen beiden Tangenten kommt, wenn sich der Grundkreis als Hyperbel darstellt, dann nur die eine für das wirkliche Bild in Betracht, wenn die beiden vom Bilde der Spitze an die Hyperbel gelegten Tangenten sie in Punkten berühren, die den beiden verschiedenen Aesten angehören.

Ist der Kegel normal, die Verbindungslinie seiner Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche also auf dieser senkrecht, so kann man das allgemeine Bild wieder in derselben Weise wie das des normalen Zylinders konstruieren, indem man wieder die Fluchtpunkte dreier auf einander senkrechter Richtungen annimmt. Zwei dieser Richtungen sind die der Seiten des der Grundfläche umschriebenen Quadrates, dessen Diagonalfuchtpunkt in der im § 15 angegebenen Weise gefunden wird, während der dritte Fluchtpunkt für die Axe des Kegels maß-



gebend ist. Auch hier können wir wieder zwei Seiten des Quadrates als horizontal, ihren Fluchtpunkt also auf dem Horizonte annehmen.

Um vom Bilde der Spitze die Tangenten an den Umriss des Grundflächenbildes zu legen, bedient man sich vorteilhaft eines bekannten Satzes der Geometrie, nach dem man die Berührungspunkte der von einem Punkte  $P$  an einen Kegelschnitt gelegten Tangenten dadurch findet, daß man von dem Punkte  $P$  (Abb. 65) aus drei Strahlen zieht, die den Kegelschnitt in  $A$  und  $B$ , in  $C$  und  $D$ , in  $E$  und  $F$  schneiden; dann zieht man die Diagonalen  $AD$  und  $BC$ ,  $CF$  und  $DE$  und endlich durch die Schnittpunkte  $G$  und  $H$  die Gerade  $JK$ , die „Polare“ des Punktes  $P$ . Diese Polare schneidet den Kegelschnitt in den gesuchten Berührungspunkten  $J$  und  $K$ .

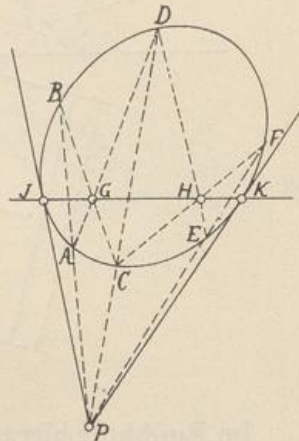


Abb. 65

Die Abb. 66, 67, 68, 69 zeigen normale Zylinder und Kegel in verschiedenen Lagen gegen die Bildebene. Um die Zahl der Abbildungen nicht zu groß werden zu lassen, ist in jeder von ihnen ein Körper dargestellt worden, der aus einem Zylinder und einem Kegel mit gemeinsamer Grundfläche zusammengesetzt ist. Die Abb. 68 zeigt die allgemeinste Lage, wobei die Punkte  $F_1, F_2, F_3$  angenommen,  $Di_2$  daraus bestimmt wurde.

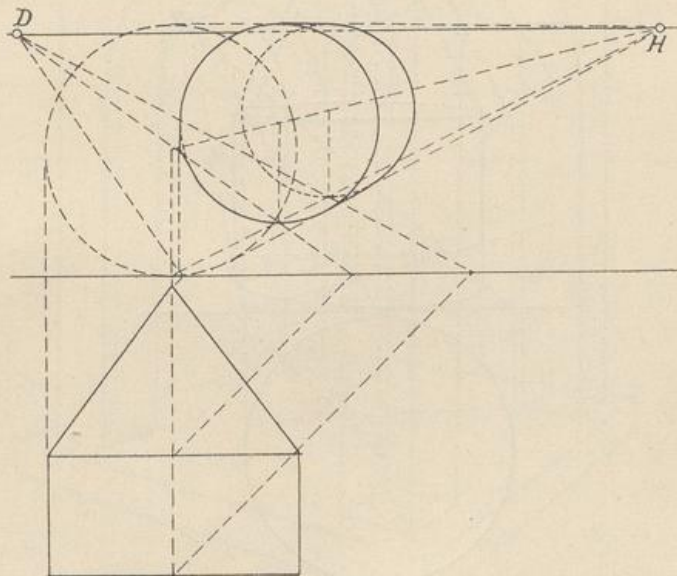


Abb. 66



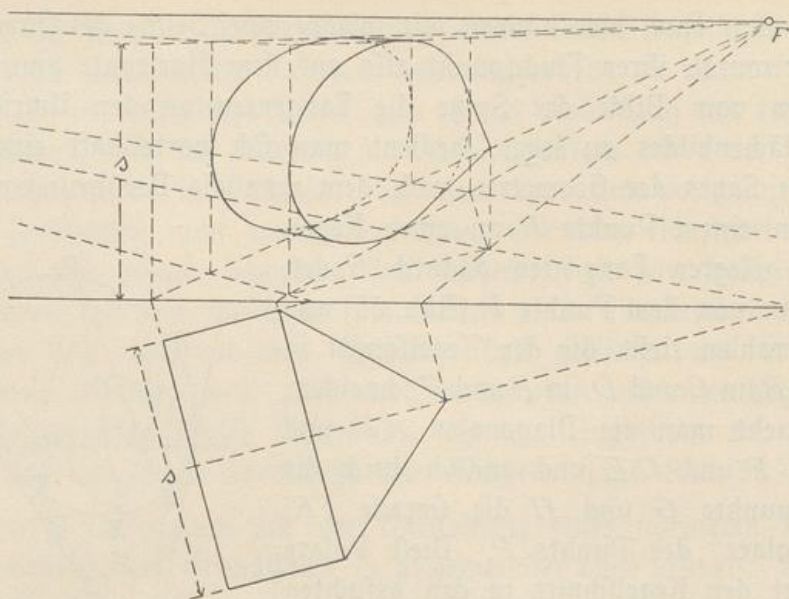


Abb. 67

Im Anschlusse hieran sind verschiedene Gewölbeformen perspektivisch dargestellt worden, an denen rechtwinklig sich schneidende Zylinderflächen auftreten. Beim Klostergewölbe (Abb. 70) und beim Kreuzgewölbe (Abb. 71) gehen die Axen der Zylinder durch einen Punkt

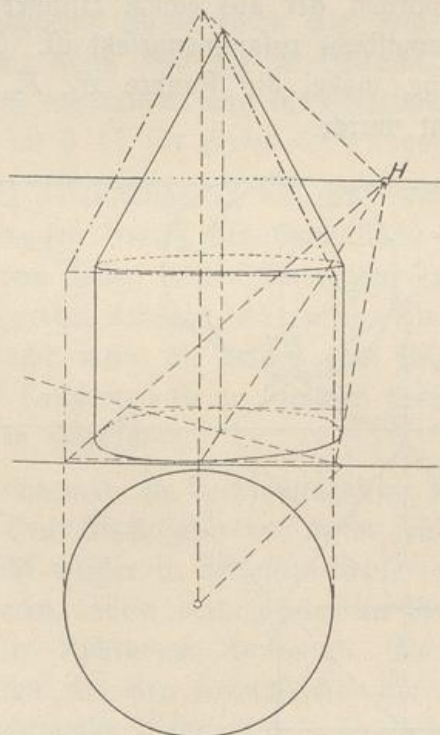


Abb. 68



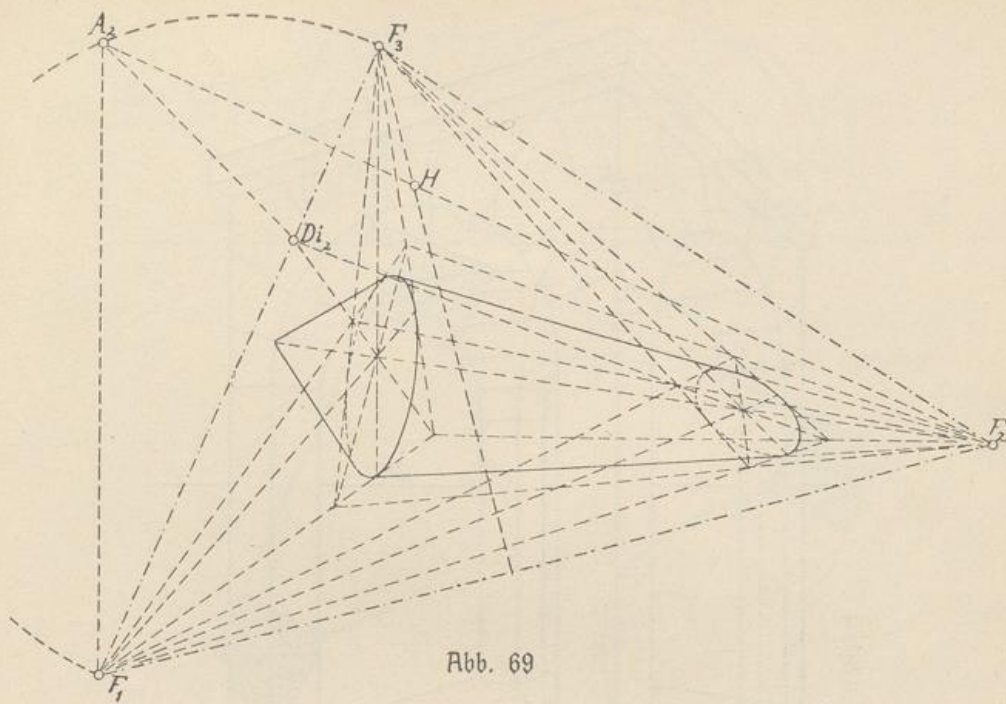


Abb. 69

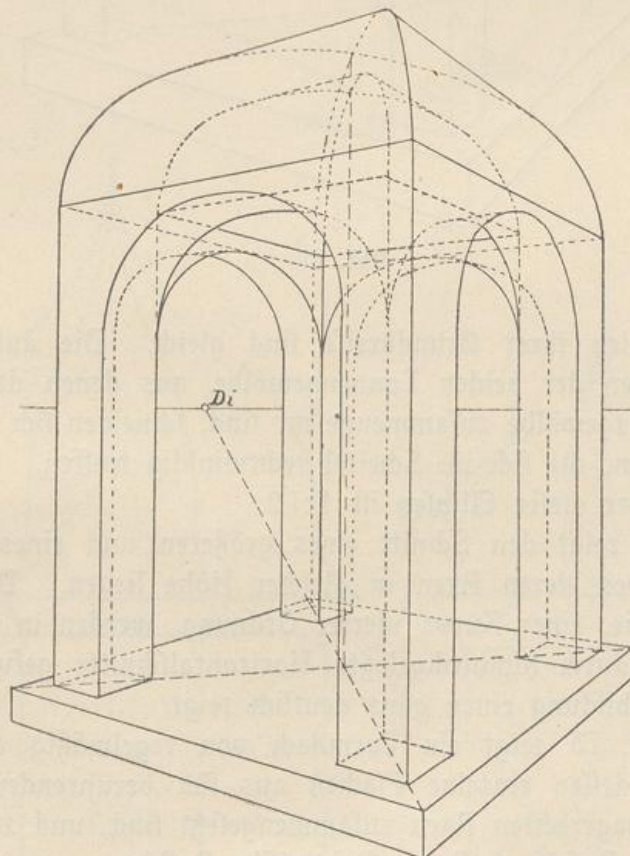


Abb. 70



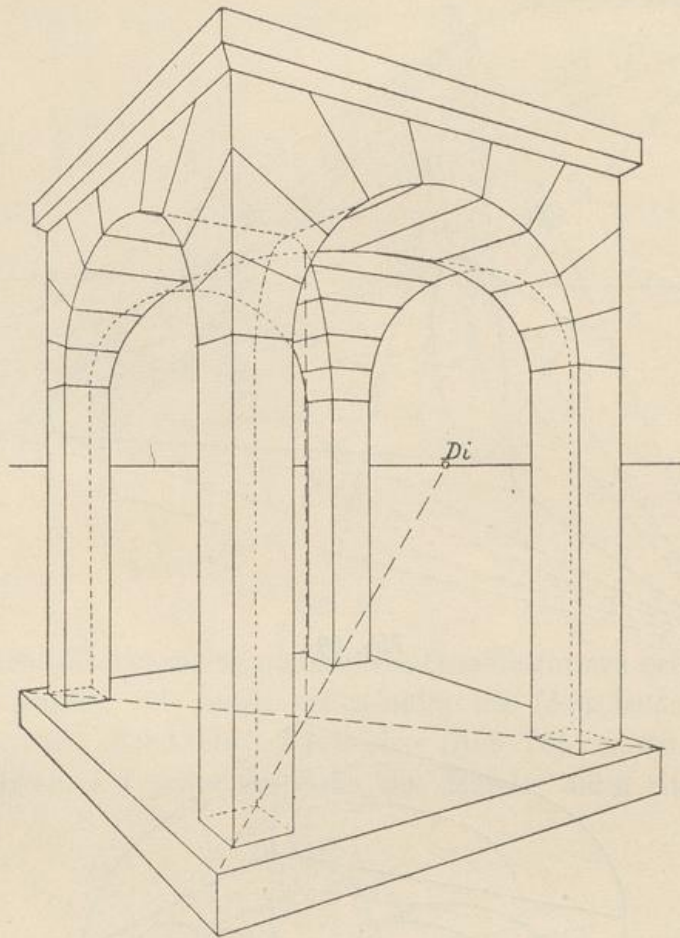


Abb. 71

und die Radien ihrer Grundkreise sind gleich. Die äußeren und inneren Flächen der beiden Tonnengewölbe, aus denen das Kloster- und das Kreuzgewölbe zusammengesetzt sind, schneiden sich in je zwei halben Ellipsen, die sich im Scheitel rechtwinklig treffen. Das Axenverhältnis jeder dieser Ellipsen ist  $1:\sqrt{2}$ .

Abb. 72 zeigt den Schnitt eines größeren und eines kleineren Tonnengewölbes, deren Axen in gleicher Höhe liegen. Die Punkte der Schnittlinie, einer Kurve vierter Ordnung, werden in höchst einfacher Weise durch hindurchgelegte Horizontalschnitte gefunden, von denen die Abbildung einen ganz deutlich zeigt.

Die Abb. 73 zeigt ein Turmdach von regelmäßig achteckigem Querschnitte, dessen einzelne Flächen aus sich berührenden Zylinderflächen mit wagerechten Axen zusammengesetzt sind, und zwar *a* den geometrischen Aufriß, *b* die perspektivische Ansicht.



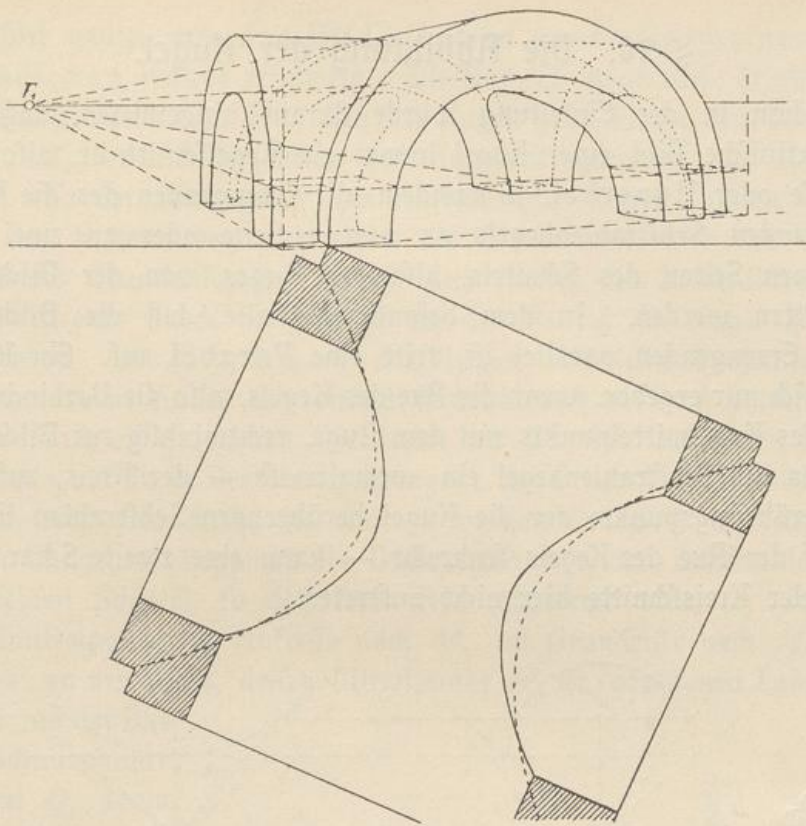


Abb. 72

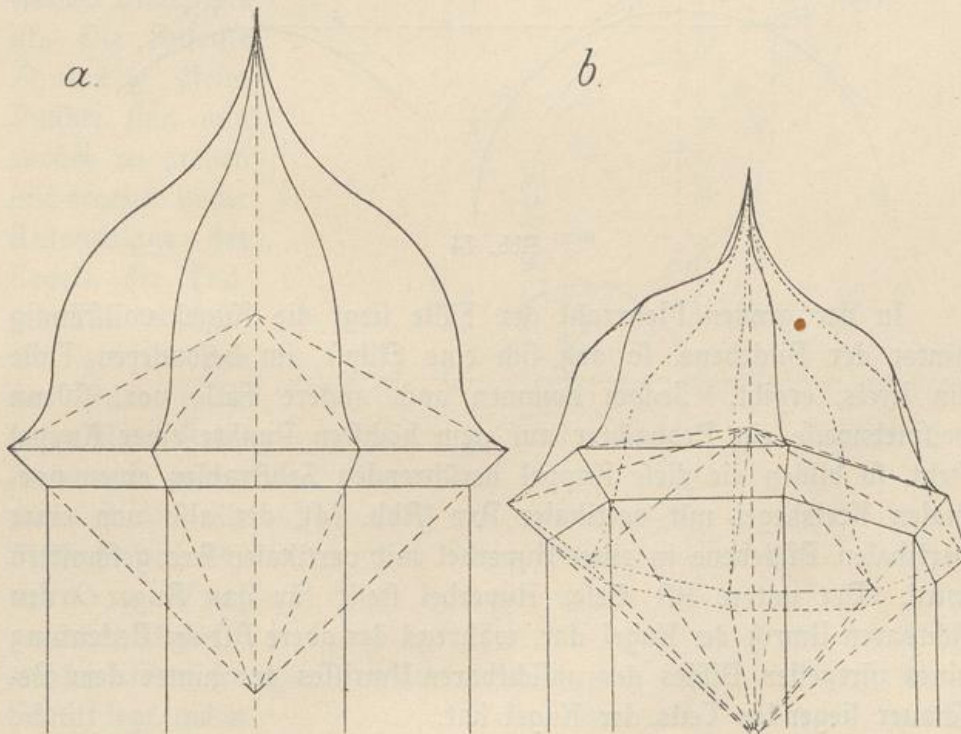


Abb. 73



## § 20. Die Abbildung der Kugel.

Schon in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, daß das perspektivische Bild einer Kugel immer ein Kegelschnitt ist, also eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem alle Erzeugenden des die Kugel berührenden Sehstrahlenkegels an einer Seite oder an zwei verschiedenen Seiten des Scheitels, also des Auges, von der Bildebene geschnitten werden. In dem besonderen Falle, daß die Bildebene einer Erzeugenden parallel ist, tritt eine Parabel auf. Ein Kreis kann sich nur ergeben, wenn die Axe des Kegels, also die Verbindungslinie des Kugelmittelpunkts mit dem Auge, rechtwinklig zur Bildebene ist. Da der Sehstrahlenkegel ein normaler ist — der Kreis, auf dem die Berührungspunkte der die Kugel berührenden Sehstrahlen liegen, ist auf der Axe des Kegels senkrecht — kann eine zweite Schar antiparalleler Kreisschnitte hier nicht auftreten.

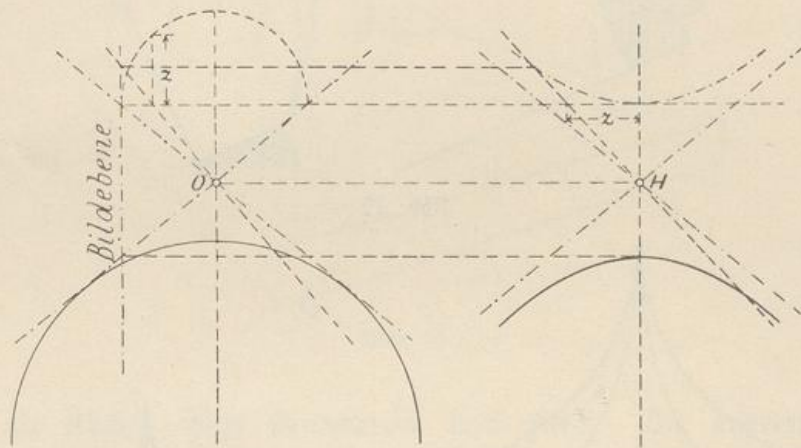


Abb. 74

In der großen Mehrzahl der Fälle liegt die Kugel vollständig hinter der Bildebene, so daß sich eine Ellipse, im besonderen Falle ein Kreis, ergibt. Jedoch kommen auch andere Fälle vor. Wenn beispielsweise ein Beobachter auf dem höchsten Punkte einer Kuppel steht, so bilden die diese Kuppel berührenden Sehstrahlen einen normalen Kreiskegel mit vertikaler Axe (Abb. 74), der also von einer vertikalen Bildebene in einer Hyperbel mit vertikaler Axe geschnitten wird. Der untere Ast dieser Hyperbel stellt für das Auge O den sichtbaren Umriss der Kugel dar, während der obere Ast die Bedeutung eines virtuellen Bildes des unsichtbaren Umrisses des hinter dem Beobachter liegenden Teils der Kugel hat.



Wir wollen nun das Bild einer in ganz allgemeiner Lage befindlichen Kugel ermitteln. Die Abb. 75 zeigt diese Ermittlung für den gewöhnlichen Fall, daß die Kugel ganz hinter der Bildebene liegt.  $M_1$  sei die Projektion des Kugelmittelpunktes auf die Bildebene, also der Mittelpunkt des Aufrisses der Kugel,  $M_2$  die Projektion des Kugelmittelpunktes auf die Grundebene, also der Mittelpunkt des Grundrisses der Kugel. Der Aufriß des Sehstrahlenkegels wird begrenzt durch die von  $H$  an den Aufriß der Kugel gelegten Tangenten. Den Grundriß  $A'$  des Auges, also seine Projektion auf die Grundebene finden wir einfach dadurch, daß wir vom Schnittpunkt  $S$  der durch  $H$  gezogenen Vertikalen mit der Grundlinie den Augenabstand  $a$  auf dieser Vertikalen abtragen; der Grundriß des Sehstrahlenkegels wird also durch die von  $A'$  an den Grundriß der Kugel gelegten Tangenten begrenzt. — Drehen wir nun den Sehstrahlenkegel um seinen Scheitel, so daß seine Axe wagerecht wird, so rückt der Kugelmittelpunkt im Aufrisse nach  $M_2$ , im Grundrisse nach  $M_4$ . Die von  $A'$  an den Kreis, dessen Mittelpunkt  $M_4$  ist, gezogenen Tangenten liefern mit der Axe

die Schnittpunkte  $P$  und  $Q$ , deren Abstand die große Axe der Bildellipse ist. Die Aufrisse  $P'$  und  $Q'$  dieser Punkte sind nun zurück zu drehen und ergeben in der Anfangslage des Kegels die Endpunkte  $P''$  und  $Q''$  der großen Axe des Bildes. Die halbe kleine Axe  $b$  findet man, indem man durch die Mitte  $R$  von  $PQ$  einen zu  $HM_4$  rechtwinkligen, also kreisförmigen Schnitt legt und in

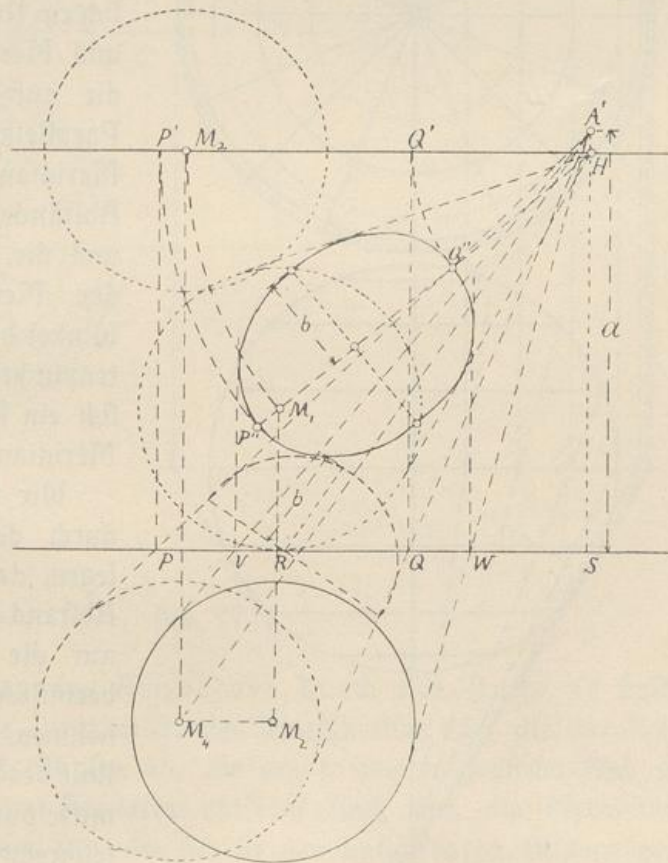


Abb. 75



die Zeichenfläche umklappt. — Damit ist das elliptische Bild der Kugel bestimmt; es muß selbstverständlich auch von den vertikalen Geraden berührt werden, die durch  $V$  und  $W$  gehen, durch die Punkte nämlich, in denen die von  $A'$  an den ursprünglichen Grundriß der Kugel gelegten Tangenten die Grundlinie schneiden.

## § 21. Bild einer Kugel mit Parallelkreisen und Meridianen.

Nimmt man einen beliebigen Durchmesser der Kugel als *Axe* an, so sind seine Endpunkte die *Pole*; der Schnitt der Kugel mit einer zur *Axe* senkrechten, durch den Mittelpunkt gehenden Ebene ist der

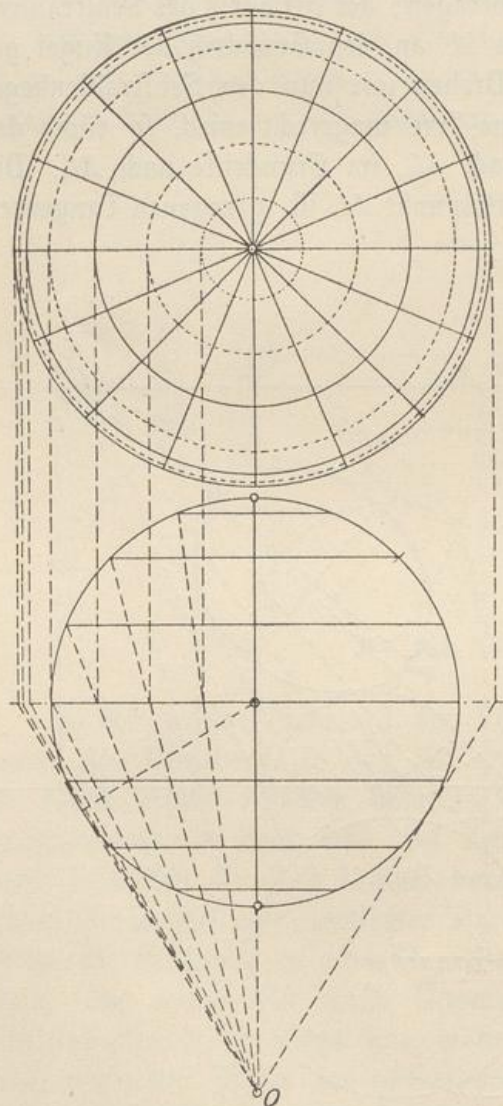


Abb. 76

*Aequator*. Andere zur *Axe* senkrechte Ebenen schneiden die Kugel in *Parallelkreisen*, beliebige, durch die *Axe* gehende Ebenen schneiden sie in *Meridianen*. Man nimmt gewöhnlich ein Netz von *Parallelkreisen* und *Meridianen* an, in dem die auf einander folgenden *Parallelkreise* — auf einem *Meridian* gemessen — gleiche Abstände von einander haben und die auf einander folgenden *Meridianebenen* gleiche Winkel bilden. In jedem *Knotenpunkte* des Netzes schneiden sich ein *Parallelkreis* und ein *Meridian* rechtwinklig.

Wir wollen die *Bildebene* durch den *Kugelmittelpunkt* legen, da, wie wir wissen, der Abstand dieser Ebene vom *Auge* nur die Größe des Bildes beeinflusst, und außerdem annehmen, daß die *Verbindungsline* des *Auges* mit dem *Kugelmittelpunkte* auf der *Bildebene* senkrecht sei, so daß sich der *Umriss* der Kugel als *Kreis* darstellt.



Geht nun die Axe der Kugel durch das Auge, so sind nach der gemachten Voraussetzung die Parallelkreise der Bildebene parallel, die Bilder beider Pole fallen also im Mittelpunkte des Umrißkreises zusammen, die Bilder der Parallelkreise sind konzentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt in demselben Mittelpunkte liegt, und die Bilder der Meridiane sind, da ihre Ebenen durch das Auge gehen, Durchmesser des Umrißkreises. (Abb. 76.)

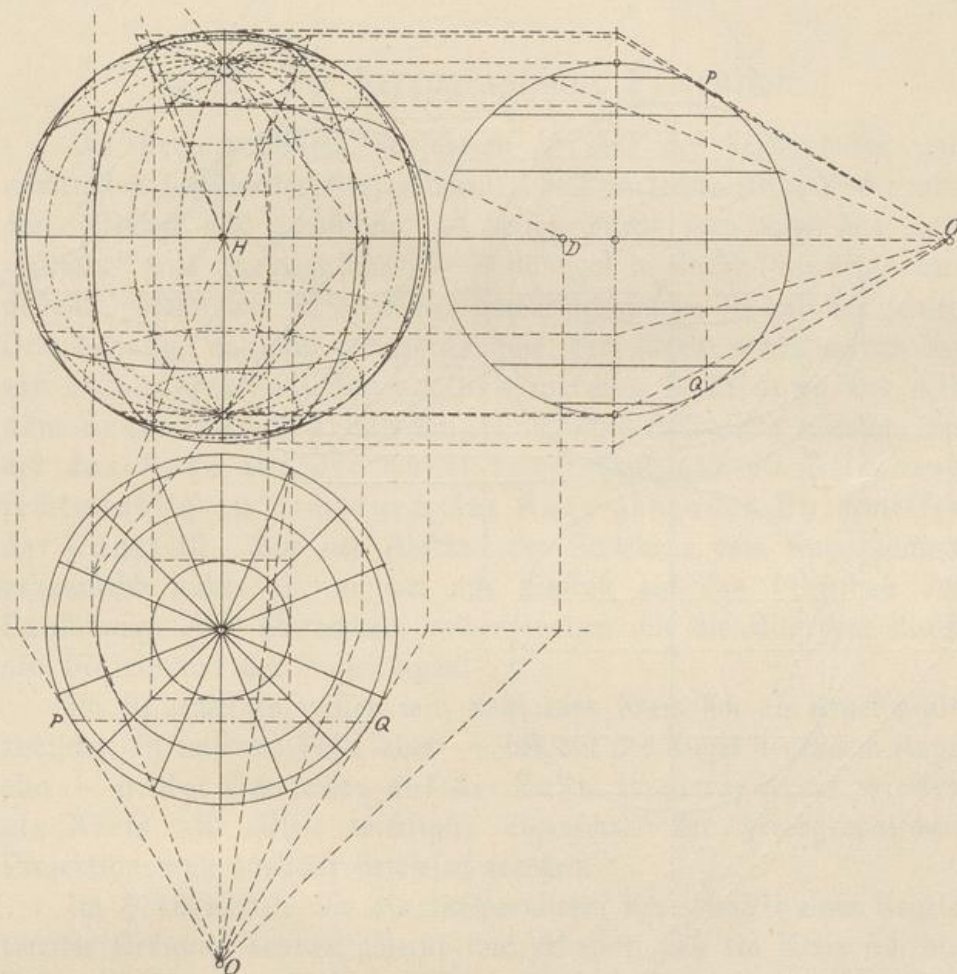


Abb. 77

Geht die Ebene des Aequators durch das Auge, so stellt sich der Aequator als Durchmesser des Umrißkreises dar; die Parallelkreise bilden sich als Ellipsen ab, die um so weiter geöffnet sind, je weiter die Kreise vom Aequator entfernt sind, und die Meridiane stellen sich als Ellipsen dar, die sich in den unsichtbaren Bildern der Pole durchschneiden. (Abb. 77.)



Ist endlich die Axe der Kugel gegen die Bildebene beliebig geneigt, so bilden sich Aequator, Parallelkreise und Meridiane als Ellipsen ab; von den Polen ist in der Regel der eine sichtbar, der andere unsichtbar (es können aber auch beide unsichtbar sein), und die Meridianbilder schneiden sich, wie immer, in beiden Polen. (Abb. 78.)

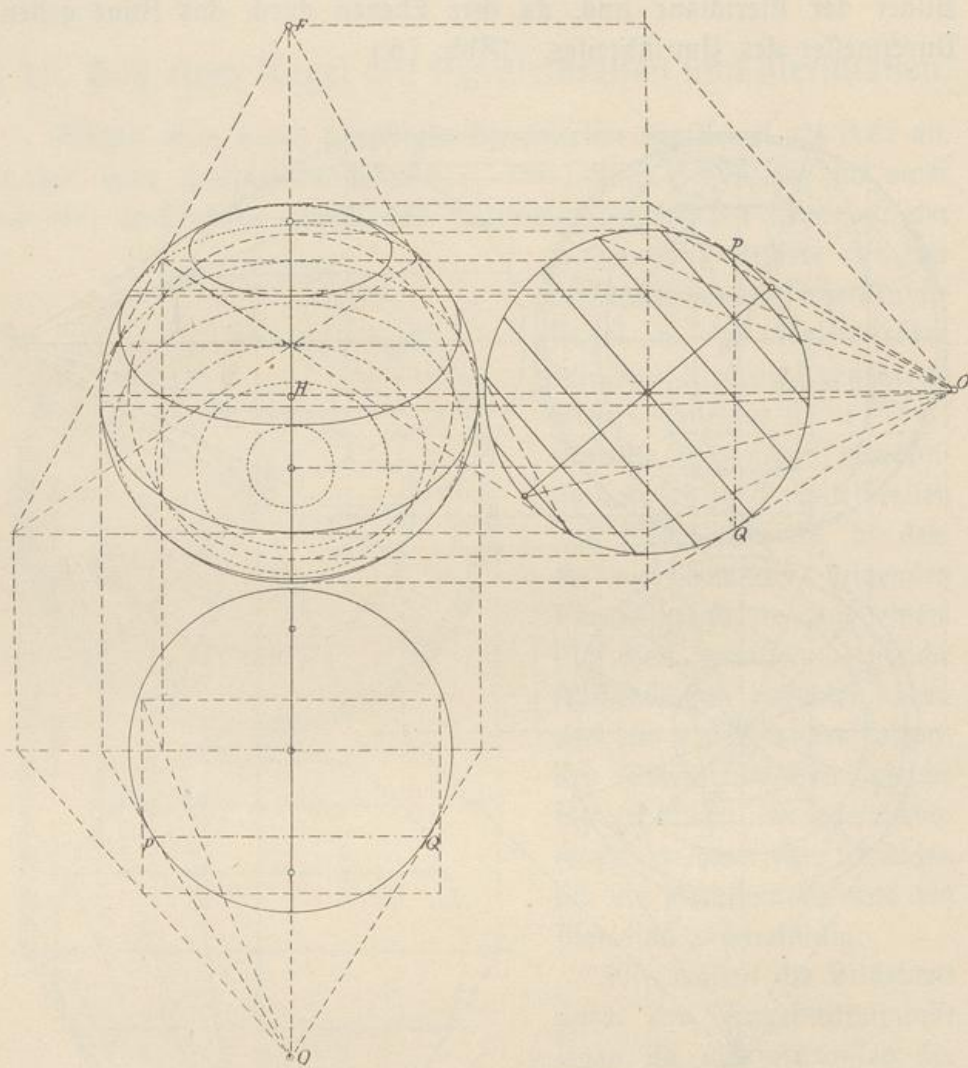


Abb. 78

Diese Meridianbilder sind in der Figur weggelassen worden, da sie sonst zu wenig übersichtlich geworden wäre.

In Abb. 77 sind die Bilder der Parallelkreise und Meridiane, in Abb. 78 die der letzteren in bekannter Weise mittels der Bilder der diesen Kreisen umschriebenen Quadrate ermittelt worden; für je einen Parallelkreis und einen Meridian sind diese Quadratbilder in die Figuren eingetragen



worden. — Von großer Wichtigkeit sind die Punkte, in denen die Bilder der Parallelkreise und Meridiane den Umrisskreis berühren. Diese Berührungspunkte sind die perspektivischen Bilder der Punkte, in denen die abzubildenden Kreise den sich im Grund- und Seitenrisse als gerade Linie  $PQ$  darstellenden Kreis durchschneiden, in dem der vom Auge ausgehende Strahlenkegel die Kugel berührt. Diese Schnittpunkte also hat man in das Bild zu übertragen, um die Berührungspunkte zu ermitteln.

## § 22. Die stereographische Projektion.

Die stereographische Projektion ist eine der bekanntesten und wichtigsten Landkarten-Projektionen. Fast in jedem Atlas findet man die „östliche“ und „westliche“ — besser würde man sagen die „altweltliche“ und „neuweltliche“ — Halbkugel in dieser Projektion dargestellt. Wenn wir sie an dieser Stelle behandeln, so hat das seinen Grund darin, daß die stereographische Projektion nichts weiter als ein besonderer Fall der perspektivischen Abbildung der mit dem Gradnetz versehenen Kugel ist, eine Abbildung nämlich, bei der das Auge auf der Kugel selbst liegt und die Bildebene rechtwinklig zu dem durch das Auge gehenden Durchmesser der Kugel ist. Auf den Abstand der Bildebene vom Auge kommt bekanntlich nichts an; er hat nur Einfluß auf den Maßstab der Darstellung. Der Einfachheit halber wollen wir die Bildebene durch den Mittelpunkt der Kugel legen.

Im Allgemeinen wissen wir, daß jeder Kreis sich als Kegelschnitt abbildet; in unserem Falle aber — bei auf der Kugel liegendem Auge also — bildet sich jeder auf der Kugel liegende Kreis wieder als Kreis ab. Diese wichtigste Eigenschaft der stereographischen Projektion muß zunächst bewiesen werden.

Im § 16 hatten wir die antiparallelen Kreischnitte eines Kegels zweiter Ordnung kennen gelernt und erkannt, daß ein Kreis sich als Kreis abbildet, wenn seine Ebene und die Bildebene antiparallele Schnitte des Sehstrahlenkegels sind. Um also zu beweisen, daß bei auf der Kugel liegendem Auge jeder Kreis der Kugel sich auf einer zu dem durch das Auge gehenden Durchmesser rechtwinkligen Bildebene als Kreis abbildet, haben wir nur zu zeigen, daß unter den gemachten Voraussetzungen jede beliebige, die Kugel schneidende Ebene und die Bildebene antiparallele Schnitte des Sehstrahlenkegels sind, der durch den durch die beliebige Ebene erzeugten Schnittkreis geht.



Die Abb. 79 stellt einen durch das Auge  $O$  gehenden Hauptschnitt der Kugel,  $PQ$  den Durchschnitt der Bildebene,  $C$  den Mittelpunkt der Kugel dar. Ohne die Allgemeinheit des Beweises irgendwie einzuschränken, können wir die Kugel mit dem auf ihr liegenden Kreise um  $OC$  als Axe stets so gedreht denken, daß die Ebene dieses Kreises

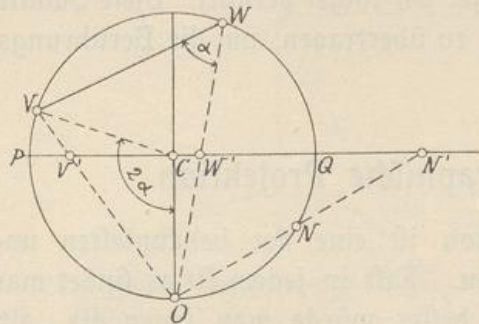


Abb. 79

auf der Ebene des Papiers senkrecht steht, der Kreis also als gerade Strecke  $VW$  erscheint. Verbinden wir  $V$  und  $W$  mit  $O$ , so erhalten wir die Bilder  $V'$  und  $W'$  dieser Punkte; die Strecke  $V'W'$  ist also die Projektion des Bildes, von dem bewiesen werden soll, daß es ein Kreis ist. Die Behauptung ist bewiesen,

wenn gezeigt ist, daß  $\angle VWO = \angle W'V'O$  ist — dann sind nämlich die Schnitte  $VW$  und  $V'W'$  des Sehstrahlenkegels antiparallel.

Ist  $\angle VWO = \alpha$ , so ist  $\angle VCO$  als der auf demselben Bogen  $VO$  stehende Zentriwinkel  $= 2\alpha$ , daher  $\angle PCV = 2\alpha - R$ . Der  $\angle OVC$  ist als Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks  $CVO = R - \alpha$ , daher der  $\angle OV'C$  als Außenwinkel des Dreiecks  $CVV' = 2\alpha - R + R - \alpha = \alpha$ . Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Die Schnitte  $VW$  und  $V'W'$  sind antiparallele oder Wechsel-schnitte; da  $VW$  ein Kreis ist, muß auch  $V'W'$  ein Kreis sein. Jeder beliebige Schnitt der Kugel bildet sich also als Kreis ab.

In der Regel beschränkt man sich auf die Abbildung der hinter der Bildebene liegenden, durch den Kreis  $PQ$  begrenzten Halbkugel. Tatsächlich aber hat dieser Kreis gar keine wirkliche Bedeutung; irgend ein auf der vorderen Halbkugel liegender Punkt  $N$  bildet sich in dem außerhalb des Kreises  $PQ$  liegenden Punkte  $N'$  ab. Je mehr sich

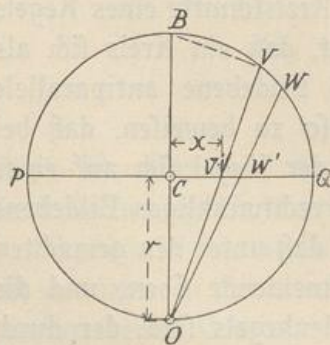


Abb. 80

der Punkt  $N$  dem Punkte  $O$  nähert, desto weiter entfernt sich der Punkt  $N'$ ; er fällt ins Unendliche, wenn  $N$  mit  $O$  zusammenfällt. Wir erkennen also, daß die stereographische Projektion der ganzen Kugeloberfläche die ganze, unendliche Ebene bedeckt. — Wir wollen nun für einen allgemeinen Punkt der Kugel das Abbildungsverhältnis, d. h. das Verhältnis des Bildes einer unendlich kleinen Strecke



zu dieser unendlich kleinen Strecke selbst ermitteln. Wir drehen die Kugel wieder um die Axe  $OCB$  (s. Abb. 80), bis der unendlich kleine Bogen  $VW$  in den Umrisskreis fällt. Jetzt erscheint sowohl die unendlich kleine Strecke  $VW$  wie ihr unendlich kleines Bild  $V'W'$  in wahrer Länge, und das Verhältnis  $V'W':VW$  ist das gesuchte Abbildungsverhältnis. Da diese Schnitte, wie wir wissen, antiparallel sind, ist  $\triangle OV'W' \sim \triangle OVW$ , also  $V'W':VW = OV':OV = OW':OW$ , und da  $OV'$  und  $OW'$ ,  $OV$  und  $OW$  nur unendlich wenig verschieden sind, können wir das Abbildungsverhältnis auch durch das Verhältnis  $OV':OV$  ausdrücken. Setzen wir nun den Radius  $CO = r$ , den Abstand  $CV' = x$ , so ist  $OV' = \sqrt{r^2 + x^2}$  und — da  $\angle OVB = R$  ist —  $OV = \sqrt{4r^2 - BV^2}$ . Ferner folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $OCV'$  und  $OV B$  die Proportion  $BV:x = 2r:\sqrt{r^2 + x^2}$ , also  $BV = \frac{2rx}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ ,  $BV^2 = \frac{4r^2x^2}{r^2 + x^2}$ , folglich  $OV = \sqrt{4r^2 - \frac{4r^2x^2}{r^2 + x^2}} = \sqrt{\frac{4r^4}{r^2 + x^2}} = \frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + x^2}}$ . Demnach ist das gesuchte Abbildungsverhältnis:

$$n = \frac{\sqrt{r^2 + x^2}}{\frac{2r^2}{\sqrt{r^2 + x^2}}} = \frac{r^2 + x^2}{2r^2}$$

Für  $x = 0$ , also für den Mittelpunkt der Karte folgt daraus  $n = \frac{1}{2}$ , für  $x = r$ , also für den die Abbildung der hinteren Halbkugel begrenzenden Kreis  $n = 1$ , für  $x = \frac{r}{2}$  ergibt sich  $n = \frac{5}{8}$ .

Für jeden Wert von  $x$  hat  $n$  einen bestimmten Wert. Die um den Kartenmittelpunkt beschriebenen konzentrischen Kreise sind also Linien gleichen Maßstabes. Solche Linien giebt es in jeder winkeltreuen Abbildung.

Die stereographische Projektion ist nämlich eine winkeltreue oder konforme Abbildung, d. h. die Bilder irgend zweier auf der Kugel liegender Linien schneiden sich unter demselben Winkel, wie diese Linien selbst. Die Abbildung irgend einer unendlich kleinen auf der Kugel liegenden Figur ist demnach dieser Figur ähnlich, denn wenn alle Verbindungslinien der Eckpunkte einer Figur mit einander dieselben Winkel bilden, wie die entsprechenden Verbindungslinien der Eckpunkte einer zweiten Figur, so sind beide Figuren ähnlich. So bildet sich beispielsweise ein kleiner Kreis der Kugel wieder als Kreis



ab, während er sich auf einer nicht winkeltreuen Karte als kleine Ellipse abbildet. Daraus folgt weiter, daß bei winkeltreuer Projektion für alle durch einen Punkt gehenden Richtungen in diesem Punkte der Maßstab derselbe ist, während bei nicht winkeltreuer Projektion jede durch einen Punkt gehende Richtung ihren besonderen Maßstab hat. Der Richtung der großen Axe der erwähnten Ellipse entspricht natürlich der größte, der kleinen Axe der kleinste Wert des Maßstabes. Beide Richtungen sind daher auf einander senkrecht.

Das Verhältnis des Flächeninhalts des Bildes eines kleinen Flächenstücks der Kugel zum Flächeninhalte dieses Flächenstückes selbst ist selbstverständlich  $= n^2$ , denn die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich zu einander, wie die Quadrate entsprechender Längen. So ist für  $x = 0$  dieses Verhältnis  $= \frac{1}{4}$ , für  $x = \frac{r}{2}$  ist es  $= \frac{25}{64}$ , für  $x = r$  ist es  $= 1$ .

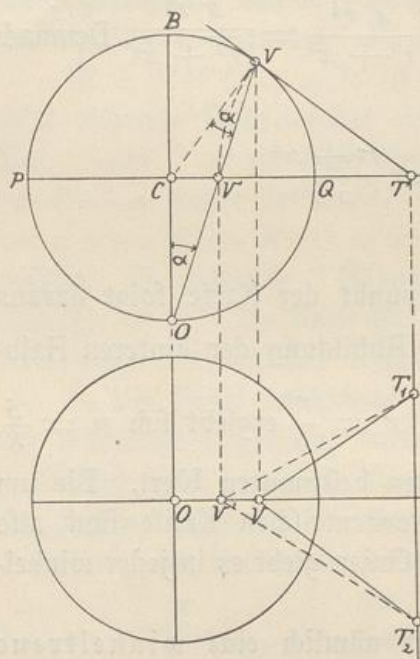


Abb. 81

Die Winkeltreue der stereographischen Projektion ist folgendermaßen leicht zu beweisen. Im Punkte  $V$  (s. Abb. 81), der sich in  $V'$  abbildet, legen wir eine Tangente an den Umrißkreis; sie schneidet die Bildebene in  $T$ . Setzen wir  $\angle CVO = \alpha$ , so ist  $\angle TVO = R - \alpha$ . Da  $\triangle COV$  gleichschenkelig ist, ist auch  $\angle COV = \alpha$ , also  $\angle CV'O = \angle VV'T = R - \alpha$ , also ist  $\triangle TVV'$  gleichschenkelig,  $TV = TV'$ . Wenn wir also die Tangente  $TV$  um den Punkt  $T$  in die Bildebene drehen, so fällt der Punkt  $V$  in sein perspektivisches Bild  $V'$ . — Wir wollen nun, indem wir die bisher benutzte Figur als Aufriß betrachten, einen Grundriß hinzufügen;

in diesem erscheint der Punkt  $V$  auf dem mit  $PQ$  parallelen Durchmesser und eine in  $V$  an die Kugel gelegte Tangentenebene schneidet die durch den Kugelmittelpunkt gehend gedachte Grundrißebene in einer von  $T$  aus senkrecht zu  $PQ$  gehenden Geraden. Denken wir uns nun auf der Kugeloberfläche zwei beliebige, sich in  $V$  schneidende Kurven, und legen wir in  $V$  Tangenten an diese Kurven, die die Grund-



rißebene in  $T_1$  und  $T_2$  schneiden, so ist  $T_1 V T_2$  der im Grundrisse verändert erscheinende Winkel, unter dem die beiden Kurven sich schneiden. Durch die Drehung der Tangentenebene um  $T_1 T_2$  als Axe sowohl als durch die perspektivische Abbildung für das Auge  $A$  und die Bildebene  $PQ$  rückt  $V$  nach  $V'$ , wir haben also in  $T_1 V' T_2$  die wahre Größe des Winkels, unter dem die beiden Kurven sich schneiden. Die perspektivische Abbildung liefert uns also direkt die wahre Größe dieses Winkels, die Abbildung ist mithin winkeltreu.

Aus der Winkeltreue oder Konformität der stereographischen Projektion folgt, daß sich die Parallelkreise und Meridiane der Kugel in ihr wie in Wirklichkeit rechtwinklig schneiden müssen. Da, wie wir sahen, jeder Kreis der Kugel sich wieder als Kreis abbildet, gilt dasselbe auch für die Parallelkreise und Meridiane; die stereographische Projektion des Gradnetzes besteht also aus zwei die ganze, unendliche Ebene bedeckenden, sich rechtwinklig schneidenden Scharen von Kreisen.

Wir wollen nun dazu übergehen, das Gradnetz zu konstruieren und auf Grund der Konstruktion auch die Lage der Mittelpunkte und die Radien der Bildkreise rechnerisch zu bestimmen. Die Konstruktion gestaltet sich je nach der Lage des Auges auf der Kugel verschieden. Der einfachste Fall ist der, daß das Auge in einem Pole liegt; die sich unter dieser Annahme ergebende Abbildung wird als stereographische Polarprojektion bezeichnet.

In der Abb. 82 haben wir unten die Erdkugel im Grundrisse, oben das Kartenbild;  $PQ$  ist der Aequator, zugleich die Bildebene, das Auge liegt in  $O$ . Ein beliebiger Parallelkreis von der geographischen Breite  $\beta$  stellt

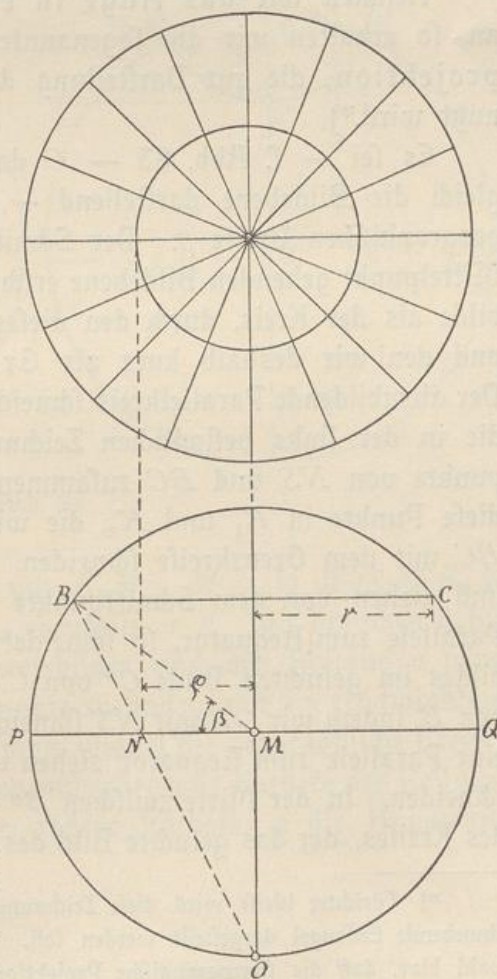


Abb. 82



sich als die Sehne  $BC$  dar. Ziehen wir die Verbindungslinie  $OB$ , die  $PQ$  in  $N$  schneidet, so ist  $MN$  der Radius des Bildkreises; sein Mittelpunkt fällt mit dem des Kartenbildes zusammen. Die Meridiane stellen sich, da ihre Ebenen durch das Auge gehen, als durch den Mittelpunkt des Kartenbildes gehende gerade Linien, die wir als Kreise mit unendlich großem Radius aufzufassen haben, dar.

Der Radius  $\varrho$  des Parallelkreisbildes ist auch rechnerisch sehr leicht zu bestimmen. Nehmen wir den Kugelradius als Einheit an, so ist der Radius des Parallelkreises von der geographischen Breite  $\beta$

$$r = \cos \beta.$$

Da nun  $\angle MOB = 45^\circ - \frac{\beta}{2}$  ist, haben wir ohne Weiteres

$$\varrho = \operatorname{tg} \left( 45^\circ - \frac{\beta}{2} \right).$$

Nehmen wir das Auge in einem Punkte des Aequators an, so erhalten wir die sogenannte stereographische Meridianprojektion, die zur Darstellung der Planigloben gewöhnlich benutzt wird.\*)

Es sei — s. Abb. 83 —  $O$  das Auge,  $NS$  die Erdaxe — zugleich die Bildebene darstellend —,  $BC$  ein Parallelkreis von der geographischen Breite  $\beta$ . Der Schnitt der Kugel mit der durch ihren Mittelpunkt gehenden Bildebene erscheint im rechts befindlichen Kartenbilde als der Kreis, durch den dieses Bild gewöhnlich begrenzt wird, und den wir deshalb kurz als Grenzkreis bezeichnen wollen. — Der abzubildende Parallelkreis schneidet die Bildebene in zwei Punkten, die in der links befindlichen Zeichnung im Punkte  $K$ , dem Schnittpunkte von  $NS$  und  $BC$  zusammenfallen; im Kartenbilde erscheinen diese Punkte in  $K_1$  und  $K_2$ , die wir einfach dadurch finden, daß wir  $BC$  mit dem Grenzkreise schneiden. Verbinden wir ferner  $C$  mit  $O$  und ziehen von dem Schnittpunkte  $C'$  der Linien  $OC$  und  $NS$  eine Parallele zum Aequator, so schneidet diese die Mittellinie des Kartenbildes im gesuchten Bilde  $C''$  von  $C$ . Ebenso finden wir das Bild  $B''$  von  $B$ , indem wir  $OB$  mit  $NS$  schneiden und von dem Schnittpunkte  $B'$  eine Parallele zum Aequator ziehen und mit der Mittellinie des Bildes schneiden. In der Mitte zwischen  $B''$  und  $C''$  liegt der Mittelpunkt  $M_1$  des Kreises, der das gesuchte Bild des Parallelkreises ist, und der daher

\*) Törichter Weise wird diese Zeichnung auch oft benutzt, wenn die im Raume schwebende Erdkugel dargestellt werden soll. Nach den vorstehenden Ausführungen ist wohl klar, daß die stereographische Projektion als innere Ansicht der Kugelfläche zu diesem Zwecke unbrauchbar ist.



nun ohne Weiteres gezogen werden kann; er muß durch  $K_1$  und  $K_2$  gehen. Liegt  $B''$  in zu großer Entfernung, so erhält man den Mittelpunkt  $M_1$  des Bildkreises auch dadurch, daß man die Mittelsenkrechte der Sehne  $K_1C''$  mit der Mittellinie schneidet.

Wir erkennen nun leicht, daß sich das Bild des Parallelkreises auf noch wesentlich einfachere Weise finden läßt. Da nämlich der Grenzkreis ein Meridianbild ist, muß er das Parallelkreisbild wegen der bereits bewiesenen Winkeltreue der Abbildung rechtwinklig schneiden. Daher ist  $M'M_1K_2$  (Abb. 83 rechts) ein rechtwinkliges Dreieck. Da ferner offenbar die Linie  $M'K_2$  (rechts) der Linie  $MC$  (links) parallel

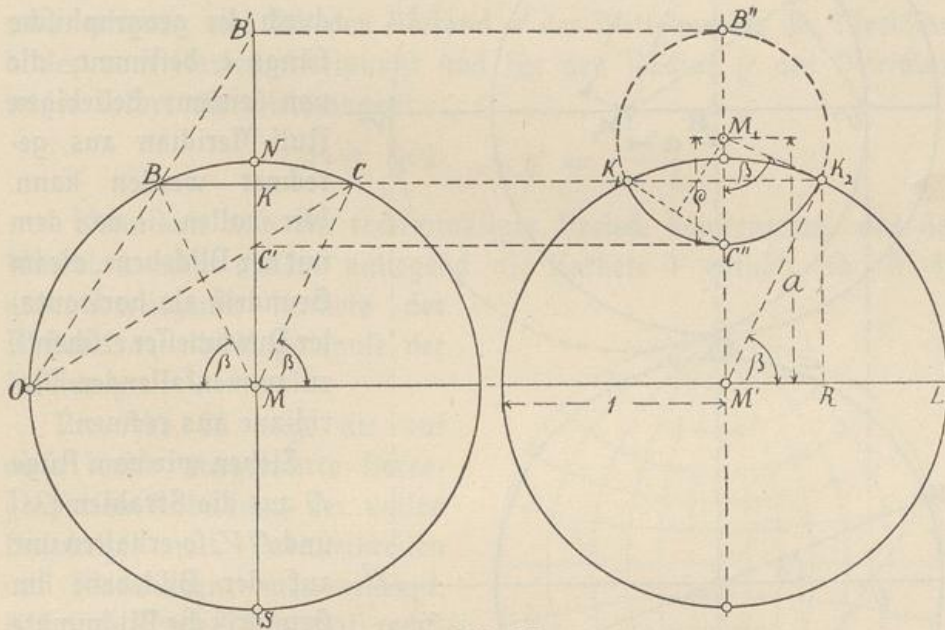


Abb. 83

ist, ist  $\angle K_2M'L = \beta$ . Ziehen wir  $K_2R \perp M'L$ , so ist  $\triangle M_1K_2M' \sim \triangle M'K_2R$ , also  $\angle M'M_1K_2$  ebenfalls  $= \beta$ . Wir brauchen daher, um den Radius  $\varrho$  des Parallelkreisbildes und den Abstand  $a$  seines Mittelpunkts vom Kartenmittelpunkte zu finden, nur ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, dessen einer spitzer Winkel die geographische Breite  $\beta$  und in dem die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete der Radius 1 der Kugel ist. Dann ist  $\varrho$  die andere Kathete,  $a$  die Hypotenuse dieses Dreiecks.

Rechnerisch ausgedrückt ist

$$a = \frac{1}{\sin \beta} \quad , \quad \varrho = \cotg \beta.$$



Der Aequator bildet sich, da seine Ebene durch das Auge geht, offenbar als gerade Linie ab. Mit zunehmender geographischer Breite nach Norden und Süden nimmt der Radius des Parallelkreisbildes ab; in den Polen erreicht er den Wert Null.

Wir wenden uns nun zur Ermittlung des Bildes eines beliebigen Meridians. Hierzu bedienen wir uns eines Grundrisses (s. Abb. 84),

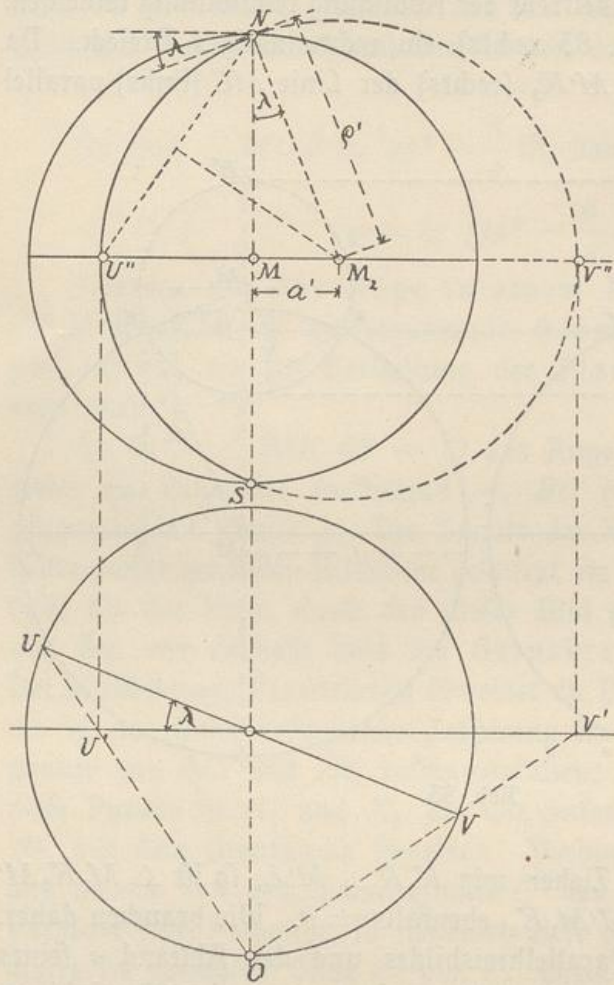


Abb. 84

in dem der Meridian  $UV$  als durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie erscheint. Seine Lage auf der Kugel ist durch die geographische Länge  $\lambda$  bestimmt, die von einem beliebigen Null-Meridian aus gerechnet werden kann. Wir wollen sie von dem mit der Bildebene, die im Grundriß als horizontaler Durchmesser erscheint, zusammenfallenden Meridiane aus rechnen.

Ziehen wir vom Auge  $O$  aus die Strahlen  $OU$  und  $OV$ , so erhalten wir auf der Bildebene im Grundriß die Bildpunkte  $U'$  und  $V'$ , die uns im Aufrisse, dem perspektivischen Bilde, sofort die Punkte  $U''$  und  $V''$  liefern. Durch diese Punkte muß das gesuchte Bild des Meridians gehen, sein

Mittelpunkt  $M_2$  liegt auf der wagerechten Mittellinie des Bildes zwischen  $U''$  und  $V''$  in der Mitte. Wir haben also nur in dieser Mitte einzusetzen und mit dem Radius  $\frac{1}{2} U''V''$  einen Kreis zu beschreiben. Dieser Kreis muß auch durch die beiden Polbilder  $N$  und  $S$  gehen. Liegt der Punkt  $V''$  zu weit entfernt, so erhalten wir den Mittel-



punkt  $M_2$  des Kreises auch dadurch, daß wir die Mittelsenkrechte der Sehne  $U''N$  mit der wagerechten Mittellinie schneiden.

Die rechnerische Ermittlung gestaltet sich wieder sehr einfach. Aus der bereits bewiesenen Winkeltreue der Projektion folgt nämlich, daß auch zwei Meridiane sich im Bilde unter demselben Winkel schneiden müssen, wie auf der Kugel. Das Meridianbild  $NU''S$  muß also den Grenzkreis unter dem Winkel  $\lambda$  schneiden; unter diesem Winkel schneiden sich demnach die Tangenten, die im Punkte  $N$  an beide Kreise gelegt werden können. Da der Radius auf der zugehörigen Tangente senkrecht steht, bilden auch die nach  $N$  gerichteten Radien beider Kreise den Winkel  $\lambda$ , es ist also  $\angle SNM_2 = \lambda$ . Daraus erhalten wir für den Abstand  $a'$  des Mittelpunkts des Meridianbildes vom Kartenmittelpunkt und für den Radius  $\varrho'$  des Meridianbildes sofort die Gleichungen:

$$a' = \operatorname{tg} \lambda \quad , \quad \varrho' = \frac{1}{\cos \lambda}$$

Wenn wir also ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, das den Winkel  $\lambda$  und diesem anliegend die Kathete 1 enthält, so ist die gegenüberliegende Kathete der Abstand  $a'$ , die Hypotenuse der Radius  $\varrho'$ .

Die Abb. 85 zeigt die auf diese Weise ausgeführte stereographische Abbildung der vollen Halbkugel mit Parallelkreisen und Meridianen; man erkennt, daß diese Kreise sich überall rechtwinklig schneiden. Der durch den Mittelpunkt des Bildes gehende Meridian, der dem Werte  $\lambda = 90^\circ$  entspricht, stellt sich als gerade Linie, also als Kreis von unendlich großem Radius dar.

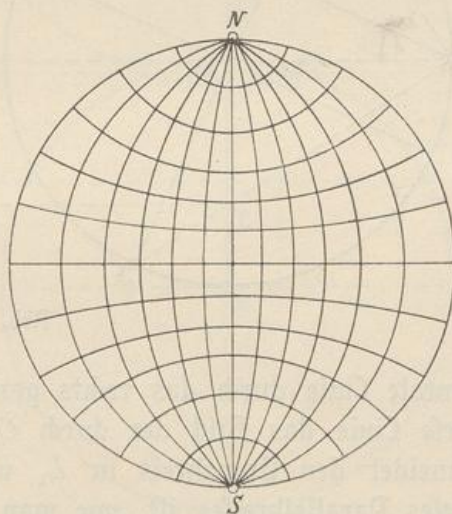


Abb. 85

Nehmen wir endlich das Auge in einem ganz beliebigen Punkte der Kugel an, so erhalten wir den allgemeinsten Fall der stereographischen Projektion, die sogenannte stereographische Horizontalprojektion. Der Ausdruck „Horizontalprojektion“ hat hier eine andere Bedeutung als in der darzustellenden Geometrie. Für jeden Punkt der Erde ist die in ihm an die Erdkugel gelegte Tangentenebene die Horizontalebene oder kurz der „Horizont“. Wenn



also diese Projektion als „Horizontalprojektion“ bezeichnet wird, so soll damit ausgedrückt sein, daß sie sich auf einen beliebigen Horizont, also auf einen beliebigen Standpunkt auf der Erde bezieht.

Während in der Meridianprojektion der Äquator sich als gerade Linie abbildet, gilt bei beliebiger Lage des Auges auf der Kugel dasselbe für einen andern Parallelkreis, für denjenigen natürlich, der durch das Auge geht. Wenn wir also (Abb. 86) vom Auge  $O$  aus eine Senkrechte auf die Erdaxe  $NS$  fallen, so stellt diese gerade Linie  $OB$  den sich als gerade Linie abbildenden Parallelkreis dar. Ziehen wir vom Punkte  $L$ , in dem  $OB$  die Bildebene schneidet, eine hori-

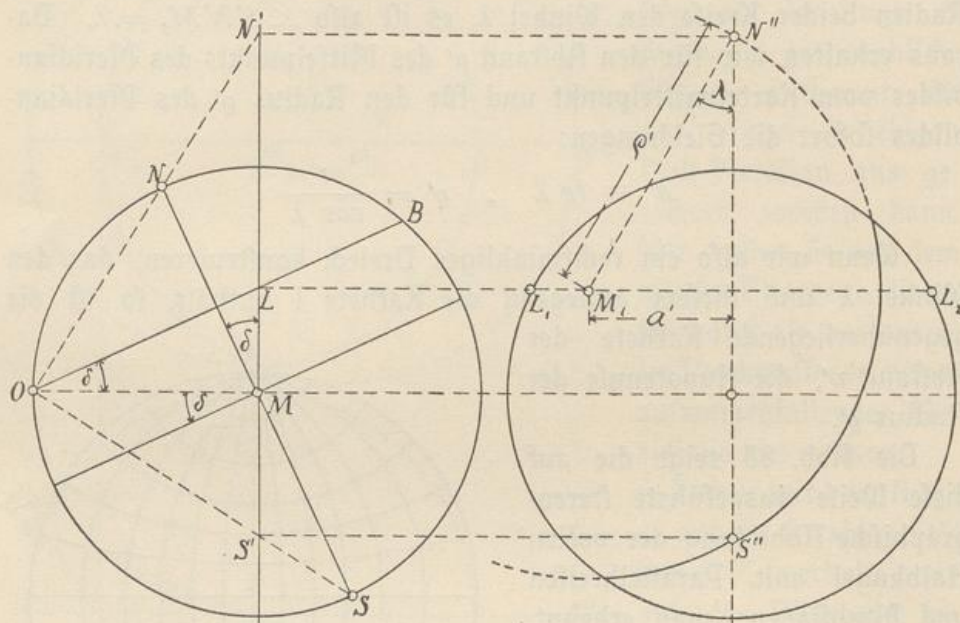


Abb. 86

izontale Linie durch das rechts gezeichnete perspektivische Bild, so ist diese Linie das Bild der durch  $OB$  dargestellten Parallelkreise; sie schneidet den Grenzkreis in  $L_1$  und  $L_2$ . Die geographische Breite dieses Parallelkreises ist, wie man sofort erkennt, gleich der geographischen Breite  $\delta$  des Auges. — Die Bilder der Pole  $N$  und  $S$  erhält man einfach dadurch, daß man die Verbindungslinien  $ON$  und  $OS$  und von den Schnittpunkten  $N'$  und  $S'$  dieser Linien mit der Bildebene wagerechte Linien bis zur Mittellinie des perspektivischen Bildes zieht. — Die Schnittpunkte  $N''$  und  $S''$  sind von der Geraden  $L_1 L_2$  gleich weit entfernt, was sich folgendermaßen leicht beweisen läßt: Es ist  $\angle BOM = \angle NMN' = \delta$ ,  $\angle NMO = 90^\circ - \delta$ , also  $\angle MNO = \angle MON = \angle LOS = \angle N'S'O = 45^\circ + \frac{\delta}{2}$ ,  $\angle NOB =$



$\angle MOS = \angle ON'M = 45^\circ - \frac{\delta}{2}$ , also sind die Dreiecke  $OLN'$  und  $OLS'$  gleichschenkelig, es ist  $LN' = LO = LS'$ , also auch  $N''$  und  $S''$  von  $L_1 L_2$  gleich weit entfernt.

Da alle Meridianbilder durch  $N''$  und  $S''$  gehen müssen, ist das geradlinige Parallelkreisbild der geometrische Ort der Mittelpunkte

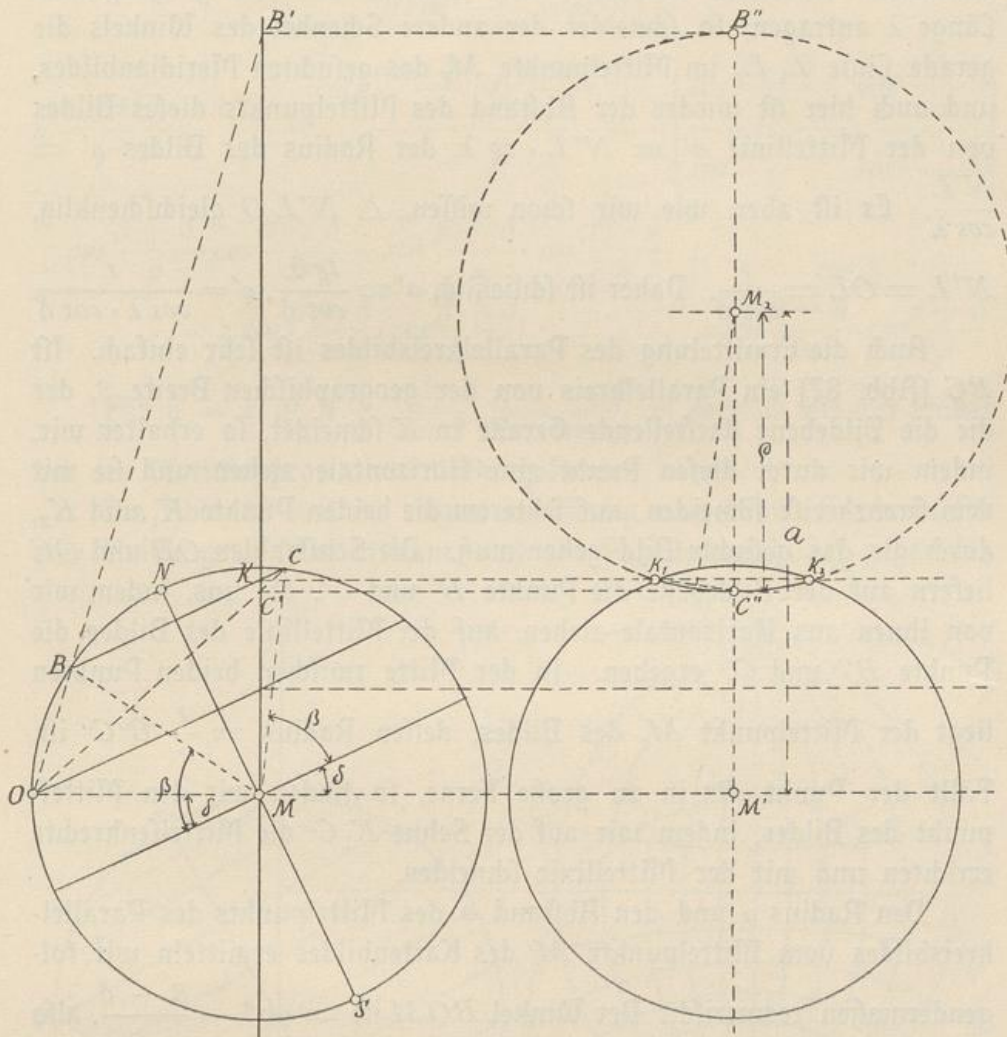


Abb. 87

der Meridianbilder. Dieses geradlinige Parallelkreisbild ist für die Horizontalprojektion genau dasselbe, was für die Meridianprojektion das Bild des Aequators ist. — Das geradlinige Parallelkreisbild durchschneidet den Grenzkreis oder liegt außerhalb desselben, je nachdem  $\delta$  kleiner oder größer als  $45^\circ$  ist.

Um die Meridianbilder selbst aufzuzeichnen, machen wir wieder



Gebrauch von der aus der Winkeltreue der stereographischen Projektion sich ergebenden Tatsache, daß die Meridianbilder sich in den Polbildern unter denselben Winkeln schneiden müssen, unter denen sich die Meridiane auf der Kugel in den Polen selbst schneiden. Wenn wir also wieder, genau wie bei der Meridianprojektion, an die vertikale Mittellinie des Bildes im Punkte  $N''$  die geographische Länge  $\lambda$  antragen, so schneidet der andere Schenkel des Winkels die gerade Linie  $L_1 L_2$  im Mittelpunkt  $M_1$  des gesuchten Meridianbildes, und auch hier ist wieder der Abstand des Mittelpunkts dieses Bildes von der Mittellinie  $a' = N'L \cdot \operatorname{tg} \lambda$ , der Radius des Bildes  $\varrho' = \frac{N'L}{\cos \lambda}$ . Es ist aber, wie wir schon wissen,  $\triangle N'LO$  gleichschenkelig,

$$N'L = OL = \frac{r}{\cos \delta}. \text{ Daher ist schließlich } a' = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \delta} r, \varrho' = \frac{r}{\cos \lambda \cdot \cos \delta}.$$

Auch die Ermittlung des Parallelkreisbildes ist sehr einfach. Ist  $BC$  (Abb. 87) ein Parallelkreis von der geographischen Breite  $\beta$ , der die die Bildebene darstellende Gerade in  $K$  schneidet, so erhalten wir, indem wir durch diesen Punkt eine Horizontale ziehen und sie mit dem Grenzkreise schneiden, auf letzterem die beiden Punkte  $K_1$  und  $K_2$ , durch die das gesuchte Bild gehen muß. Die Sehstrahlen  $OB$  und  $OC$  liefern auf der Bildebene die Punkte  $B'$  und  $C'$ , die uns, indem wir von ihnen aus Horizontale ziehen, auf der Mittellinie des Bildes die Punkte  $B''$  und  $C''$  ergeben. In der Mitte zwischen beiden Punkten liegt der Mittelpunkt  $M_2$  des Bildes, dessen Radius  $= \frac{1}{2} B''C''$  ist.

Fällt der Punkt  $B''$  in zu große Ferne, so finden wir den Mittelpunkt des Bildes, indem wir auf der Sehne  $K_1 C''$  die Mittelsenkrechte errichten und mit der Mittellinie schneiden.

Den Radius  $\varrho$  und den Abstand  $a$  des Mittelpunkts des Parallelkreisbildes vom Mittelpunkte  $M'$  des Kartenbildes ermitteln wir folgendermaßen rechnerisch: Der Winkel  $BOM$  ist  $= 90^\circ - \frac{\beta - \delta}{2}$ , also

$$MB' = \operatorname{tg} \left( 90^\circ - \frac{\beta - \delta}{2} \right) = \cotg \frac{\beta - \delta}{2}, \text{ der Winkel } COM = \frac{\beta + \delta}{2},$$

$$\text{also } MC' = \operatorname{tg} \frac{\beta + \delta}{2}, \text{ daher}$$

$$a = \frac{MB' + MC'}{2} = \frac{\cotg \frac{\beta - \delta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta + \delta}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \frac{\beta + \delta}{2}}{\cos \frac{\beta + \delta}{2}} + \frac{\cos \frac{\beta - \delta}{2}}{\sin \frac{\beta - \delta}{2}} \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \frac{\beta + \delta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \delta}{2} + \cos \frac{\beta + \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \delta}{2}}{2 \sin \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \delta}{2}} = \frac{\cos \left( \frac{\beta + \delta}{2} - \frac{\beta - \delta}{2} \right)}{2 \sin \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \delta}{2}} \\
 &= \frac{\cos \delta}{2 \sin \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \delta}{2}}, \\
 q &= \frac{MB' - MC'}{2} = \frac{\cotg \frac{\beta - \delta}{2} - \tg \frac{\beta + \delta}{2}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\cos \frac{\beta - \delta}{2}}{\sin \frac{\beta - \delta}{2}} - \frac{\sin \frac{\beta + \delta}{2}}{\cos \frac{\beta + \delta}{2}} \right) \\
 &= \frac{\cos \frac{\beta + \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \delta}{2} - \sin \frac{\beta + \delta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \delta}{2}}{2 \sin \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \delta}{2}} = \frac{\cos \beta}{2 \sin \frac{\beta - \delta}{2} \cdot \cos \frac{\beta + \delta}{2}}.
 \end{aligned}$$

Für  $\delta = 0$  ist  $a = \frac{1}{\sin \beta}$ ,  $q = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \cotg \beta$ , wie wir früher bei der Meridianprojektion direkt gefunden hatten.

Die Abb. 88 und 89 zeigen vollständig ausgeführte Gradnetze für eine Halbkugel. Man erkennt, daß alle Parallelkreisbilder gegen das

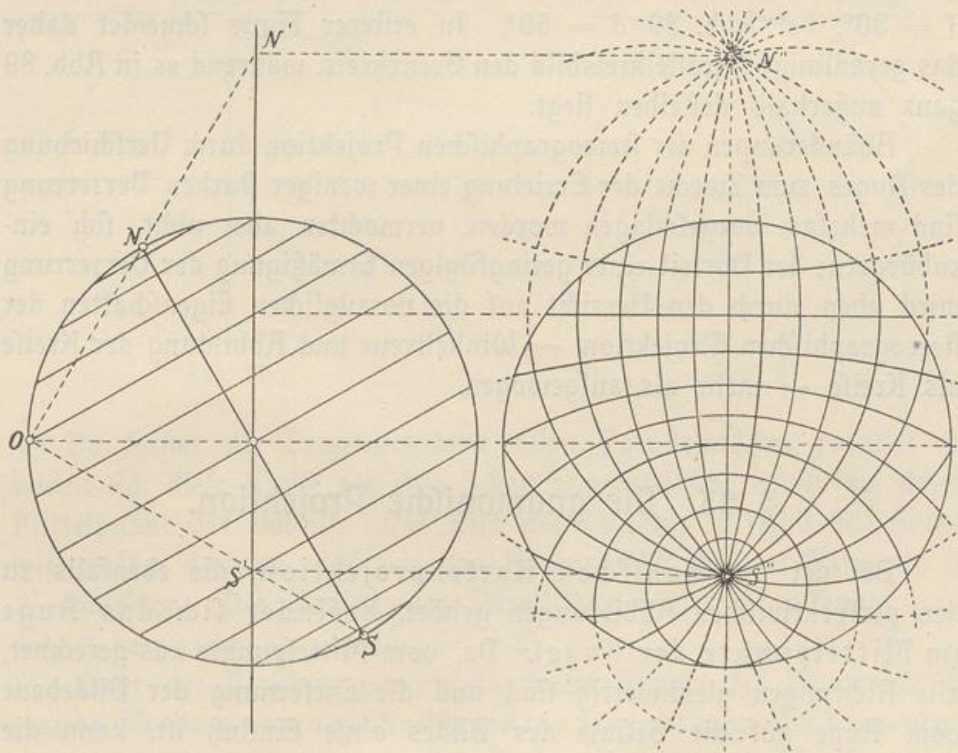


Abb. 88



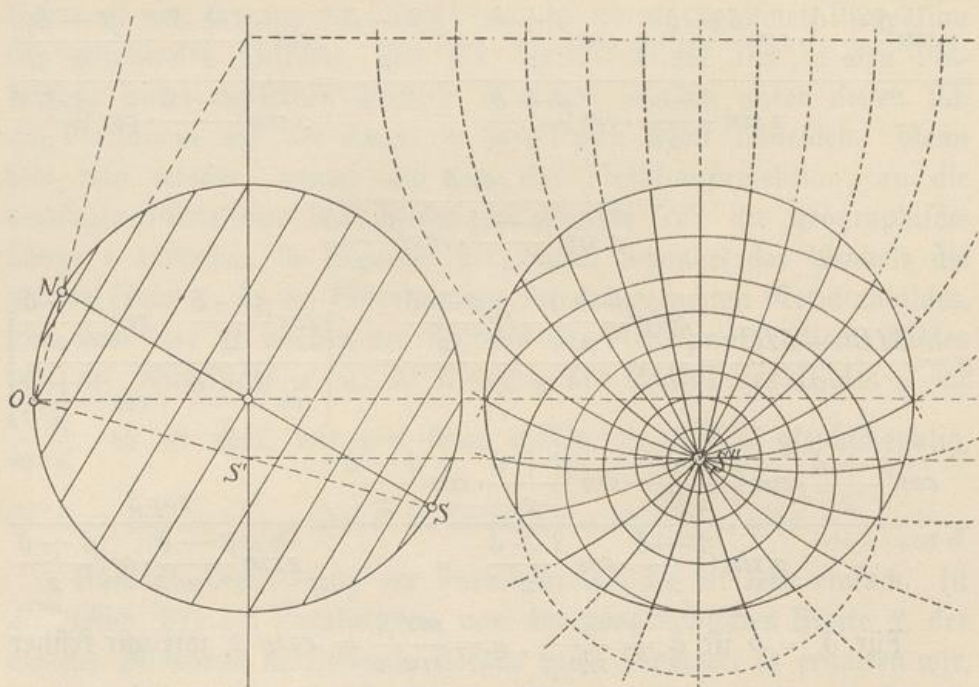


Abb. 89

geradlinige Parallelkreisbild konvex gekrümmt sind. Bei Abb. 88 ist  $\delta = 30^\circ$ , bei Abb. 89  $\delta = 60^\circ$ . In ersterer Figur schneidet daher das geradlinige Parallelkreisbild den Grenzkreis, während es in Abb. 89 ganz außerhalb desselben liegt.

Abänderungen der stereographischen Projektion durch Verschiebung des Auges zum Zwecke der Erzielung einer weniger starken Verzerrung sind mehrfach vorgeschlagen worden, vermochten aber nicht, sich einzubürgern; der Vorteil einer geringfügigen Ermäßigung der Verzerrung wird eben durch den Verzicht auf die vorzüglichen Eigenschaften der stereographischen Projektion — Winkeltreue und Abbildung der Kreise als Kreise — mehr als aufgewogen.

### § 23. Die gnomonische Projektion.

Bei der gnomonischen Kartenprojektion, die ebenfalls zu den perspektivischen Abbildungen gehört, befindet sich das Auge im Mittelpunkte der Kugel. Da, vom Mittelpunkte aus gerednet, alle Richtungen gleichwertig sind und die Entfernung der Bildebene vom Auge auf die Gestalt des Bildes ohne Einfluß ist, kann die Bildebene ganz beliebig angenommen werden. Der Bequemlich-



keit wegen wollen wir sie uns als Tangentenebene der Kugel denken. — Das Bild der Halbkugel bedeckt die ganze Ebene, und die Bilder zweier gegenüberliegender Punkte der Kugel fallen in einem Punkte der Ebene zusammen.

Das Bild des Gradnetzes hängt von der Lage der Bildebene, also wenn wir sie als Tangentenebene voraussetzen, von der Lage ihres Berührungspunktes auf der Kugel ab.

Liegt der Berührungspunkt in einem der Pole, so erhalten wir die gnomonische Polarprojektion. Da die Tangentenebene auf der Erdaxe senkrecht ist, also das ganze Bündel der Meridianebenen rechtwinklig schneidet, bilden sich die Meridiane als ein Strahlenbündel ab, in dem der von zwei Strahlen gebildete Winkel gleich der wahren Differenz der geographischen Längen der beiden Meridiane ist.

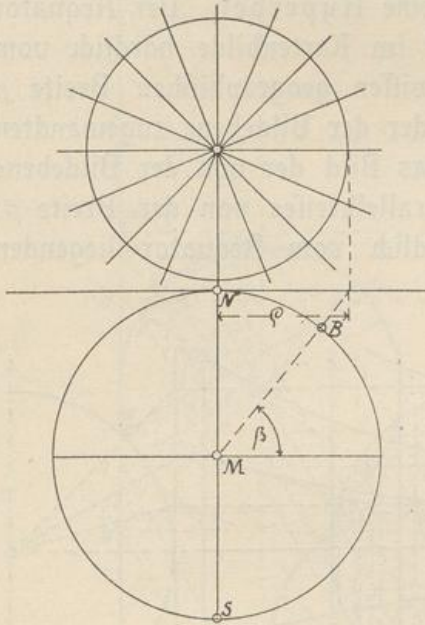


Abb. 90

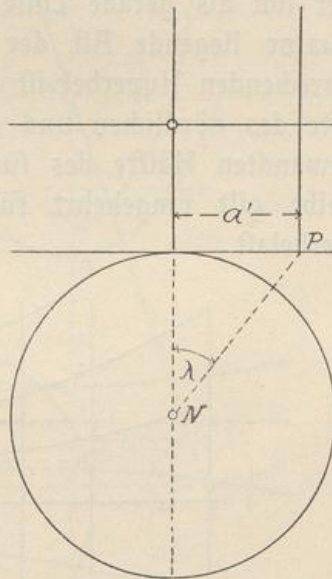


Abb. 91

— Da ferner die Tangentenebene allen Parallelkreisen parallel ist, bilden sich diese Kreise als eine Schar konzentrischer Kreise ab, deren Mittelpunkt der Pol ist. Das Bild des Punktes B (Abb. 90) finden wir einfach dadurch, daß wir den Radius  $MB$  mit der Tangente in  $N$  schneiden. Der Radius des Parallelkreisbildes ist offenbar  $\varrho = \cotg \beta$ , wenn der Kugelradius  $= r$  ist.

Liegt der Berührungspunkt in einem Punkte des Aequators, so ergibt sich die gnomonische Meridianprojektion. Die Tangentenebene ist jetzt der Erdaxe parallel, sie schneidet also jede Meridianebene



in einer Parallelen zur Axe, alle Meridianbilder sind daher parallel. Das Bild eines bestimmten Meridians finden wir einfach dadurch, daß wir im Grundrisse den den Meridian darstellenden Radius mit der Bildebene schneiden und durch den Schnittpunkt  $P$  eine Senkrechte ziehen. Der Abstand des Meridianbildes von der senkrechten Mittellinie des Bildes ist, wie sich aus der Abbildung sofort ergibt,  $a' = \operatorname{tg} \lambda$ , wenn wir die geographische Länge  $\lambda$  von dem durch den Berührungspunkt gehenden Meridian aus rechnen (s. Abb. 91).

Die durch alle Punkte eines Parallelkreises gehenden Sehstrahlen bilden einen normalen Kegel zweiter Ordnung; jeder solche Kegel enthält die beiden Parallelkreise von gleicher geographischer Breite auf der nördlichen und südlichen Halbkugel. Da die schneidende Ebene der Axe des Kegels parallel ist, also beide Hälften des Kegels schneidet, ergibt sich als Schnittlinie eine Hyperbel. Der Aequator bildet sich als gerade Linie ab. Der im Kartenbilde nördlich vom Aequator liegende Ast der einer gewissen geographischen Breite  $\beta$  entsprechenden Hyperbel ist das Bild der der Bildebene zugewandten Hälfte des nördlichen und zugleich das Bild der von der Bildebene abgewandten Hälfte des südlichen Parallelkreises von der Breite  $\beta$ ; dasselbe gilt umgekehrt für den südlich vom Aequator liegenden Hyperbelast.

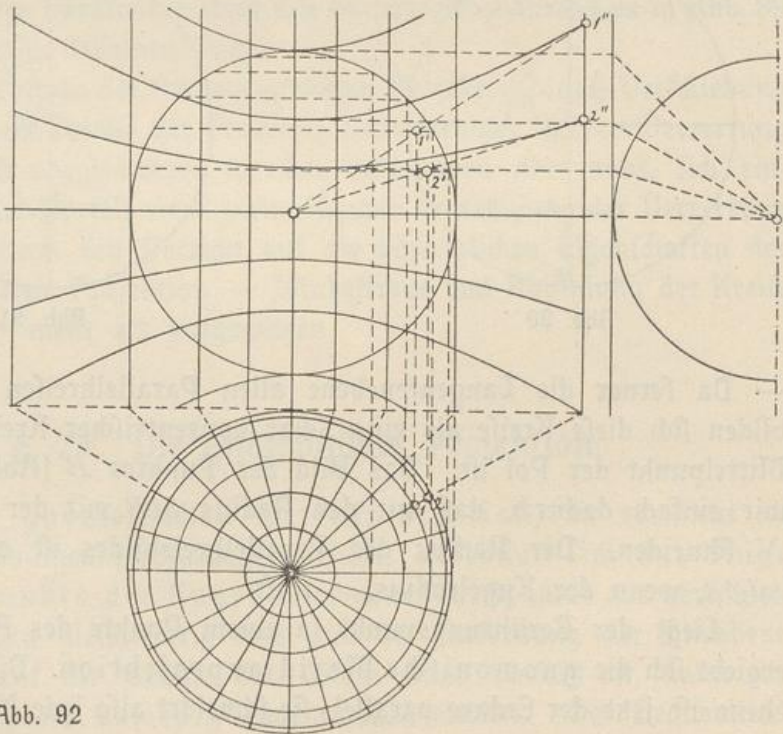


Abb. 92



Die Abb. 92 gibt einen mittleren Ausschnitt des Gradnetzes und deutet zugleich die Konstruktion der Hyperbeln an.

Liegt der Berührungspunkt der Bildebene in einem beliebigen Punkte der Kugel, so erhalten wir die allgemeine gnomonische Projektion, die als gnomonische Horizontalprojektion bezeichnet wird. Die

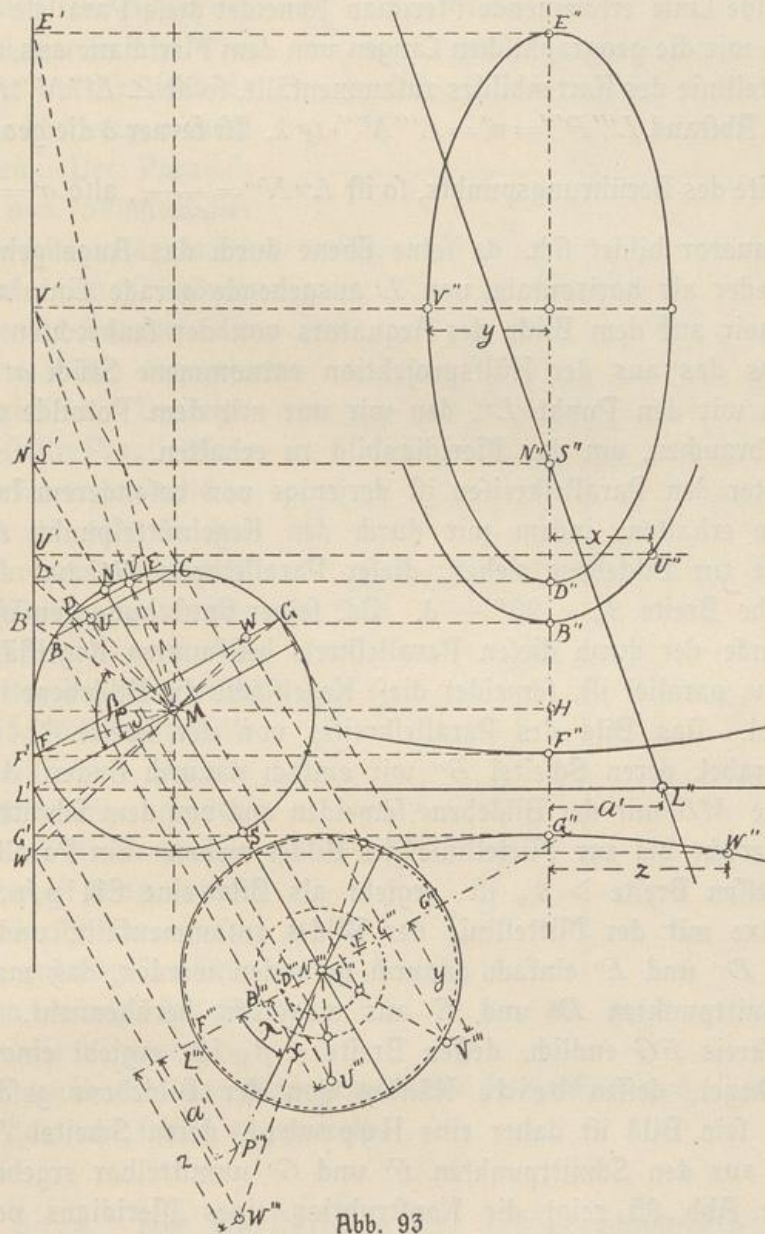


Abb. 93

Erdaxe, (s. Abb. 93) schneidet die Bildebene in einem Punkte, in dem die Bilder  $N''$  und  $S''$  der beiden Pole zusammenfallen. Jede Meridianebene schneidet die Bildebene in einer durch das Polbild gehenden Geraden,



die Meridiane bilden sich also auch in diesem allgemeinsten Falle als Strahlenbüschel ab. Führen wir eine zur Erdaxe senkrechte, durch den Kugelmittelpunkt gehende Projektionsebene ein, so schneidet diese die Tangentenebene in einer Geraden, die wir erhalten, indem wir vom Schnittpunkte  $L'$  aus eine Parallele zu  $NS$  ziehen; der in der Hilfsprojektion als gerade Linie erscheinende Meridian schneidet diese Parallele in  $P'''$ . Rechnen wir die geographischen Längen von dem Meridiane aus, der mit der Mittellinie des Kartenbildes zusammenfällt, so ist  $\angle L'''N'''P''' = \lambda$ , also der Abstand  $L'''P''' = a' = L'''N''' \cdot \operatorname{tg} \lambda$ . Ist ferner  $\delta$  die geographische Breite des Berührungspunktes, so ist  $L'''N''' = \frac{1}{\cos \delta}$ , also  $a' = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\cos \delta}$ .

Der Aequator bildet sich, da seine Ebene durch das Auge geht, auch hier wieder als horizontale, von  $L'$  ausgehende gerade Linie ab, und tragen wir auf dem Bilde des Aequators von der senkrechten Mittellinie aus das aus der Hilfsprojektion entnommene Stück  $a'$  ab, so erhalten wir den Punkt  $L''$ , den wir nur mit dem Polbilde zu verbinden brauchen, um das Meridianbild zu erhalten.

Unter den Parallelkreisen ist derjenige von besonderem Interesse, den wir erhalten, indem wir durch den Kegelmittelpunkt  $M$  eine Parallele zur Bildebene ziehen; dieser Parallelkreis  $BC$  hat die geographische Breite  $\beta_0 = 90^\circ - \delta$ . Da, seiner Entstehung gemäß, eine Erzeugende der durch diesen Parallelkreis bestimmten Kegelfläche der Bildebene parallel ist, schneidet diese Kegelfläche die Bildebene in einer Parabel. Das Bild des Parallelkreises von der Breite  $\beta_0$  ist also eine Parabel, deren Scheitel  $B''$  wir einfach dadurch finden, daß wir die Linie  $MB$  mit der Bildebene schneiden und von dem Schnittpunkte  $B'$  wagerecht bis zur Mittellinie des Bildes ziehen. Ein Parallelkreis  $DE$ , dessen Breite  $> \beta_0$  ist, ergibt als Bild eine Ellipse, deren große Axe mit der Mittellinie des Bildes zusammenfällt, und deren Scheitel  $D''$  und  $E''$  einfach dadurch gefunden werden, daß man von den Schnittpunkten  $D'$  und  $E'$  aus wagerecht herüberzieht. — Ein Parallelkreis  $FG$  endlich, dessen Breite  $< \beta_0$  ist, ergibt einen Sehstrahlenkegel, dessen beide Hälften von der Bildebene geschnitten werden; sein Bild ist daher eine Hyperbel, deren Scheitel  $F''$  und  $G''$  sich aus den Schnittpunkten  $F'$  und  $G'$  unmittelbar ergeben.

Die Abb. 93 zeigt die Konstruktion eines Meridians von der geographischen Länge  $\lambda$ , des parabolischen, eines elliptischen und eines hyperbolischen Parallelkreisbildes; von jedem der drei Bilder wurde die Konstruktion eines allgemeinen Punktes ( $U''$  beim parabolischen,  $V''$  beim elliptischen,  $W''$  beim hyperbolischen Bilde) eingetragen.



Die Abb. 94 zeigt einen mittleren Ausschnitt des Kartenbildes für die der Abb. 92 zu Grunde liegende Lage des Auges ( $\delta = 30^\circ$ ). Die Bilder der Parallelkreise und Meridiane sind für Abstände von je  $15^\circ$  eingezeichnet worden. Der Parallelkreis von  $75^\circ$  nördlicher Breite bildet sich als Ellipse, der von  $60^\circ$  nördl. Breite als Parabel, die andern bilden sich als Hyperbeln ab. Der letzte dargestellte Parallelkreis entspricht einer südlichen Breite von  $45^\circ$ ; der Parallelkreis von  $60^\circ$  südl. Breite bildet sich im Unendlichen ab und das Bild des Parallelkreises von  $75^\circ$  südl. Breite fällt theoretisch mit dem des Parallelkreises von derselben nördl. Breite zusammen, ist also praktisch nicht darstellbar.

Die gnomonische Projektion wird, da sie weder die hervorragenden Eigenschaften der stereographischen Projektion noch sonstige Vorzüge hat, nur selten angewandt.

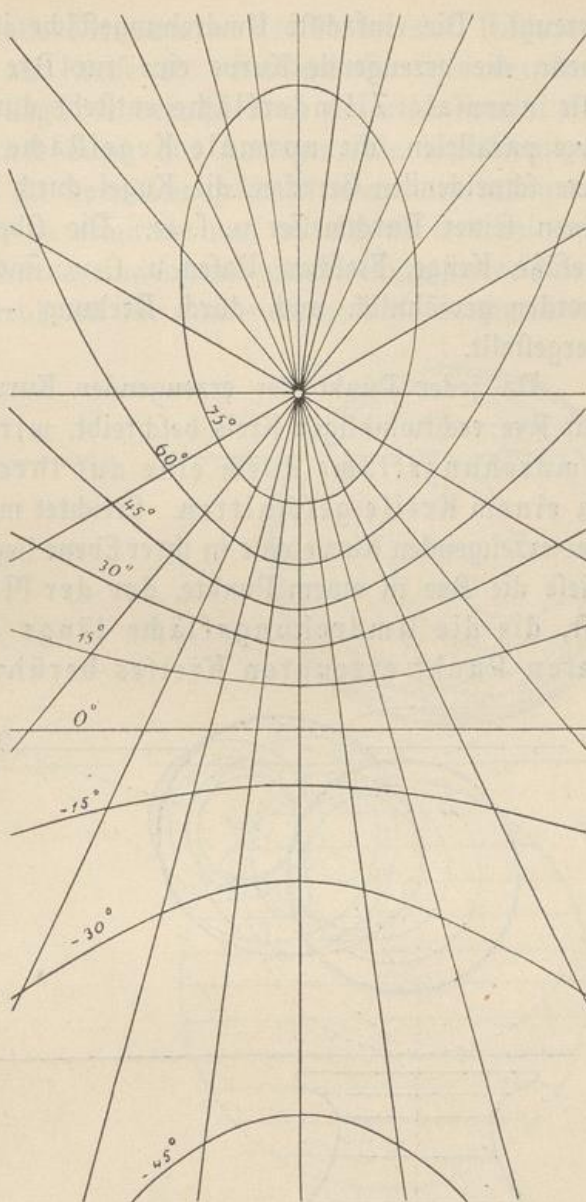


Abb. 94

## § 24. Die Darstellung der Umdrehungskörper.

Ein Umdrehungskörper ist ein Körper, der von einer Umdrehungsfläche begrenzt wird. Eine Umdrehungsfläche wird durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Axe



erzeugt. Die einfachste Umdrehungsfläche ist die Ebene; sie entsteht, wenn die erzeugende Kurve eine zur Axe rechtwinklige Gerade ist. Die normale Zylinderfläche entsteht durch Drehung einer mit der Axe parallelen, die normale Kegelfläche durch Drehung einer die Axe schneidenden Geraden, die Kugel durch Drehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser u. s. w. Die Oberflächen fast aller unserer Gefäße, Krüge, Flaschen, Vasen u. s. w. sind Umdrehungsflächen. Sie werden gewöhnlich auch durch Drehung — auf der Drehscheibe — hergestellt.

Da jeder Punkt der erzeugenden Kurve bei der Drehung einen zur Axe rechtwinkligen Kreis beschreibt, wird umgekehrt auch jede Umdrehungsfläche durch eine auf ihrer Axe senkrechte Ebene in einem Kreise geschnitten. Errichtet man ferner in einem Punkte der erzeugenden Kurve eine in ihrer Ebene liegende Normale, so schneidet diese die Axe in einem Punkte, der der Mittelpunkt einer Kugel ist, die die Umdrehungsfläche längs des durch den betrachteten Punkt erzeugten Kreises berührt. Legt man endlich eine

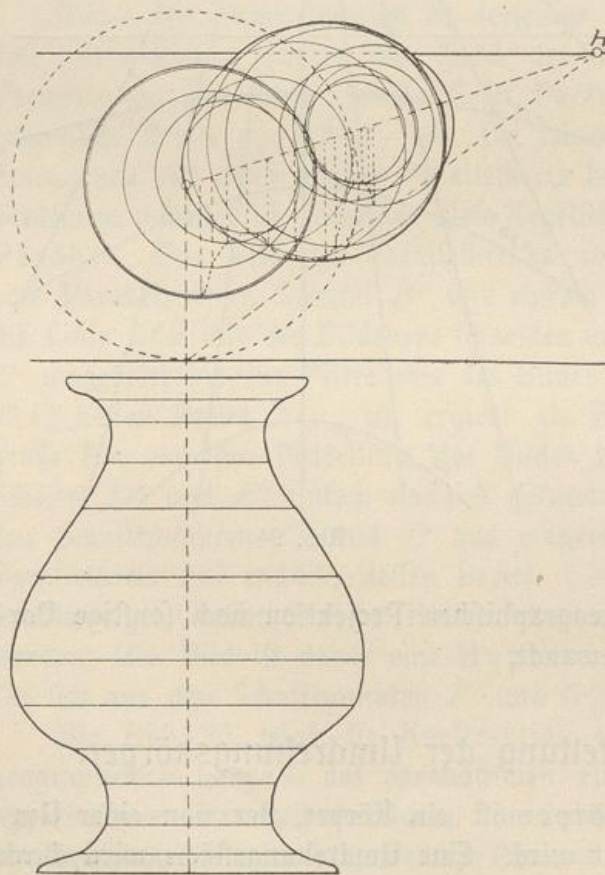


Abb. 95

Tangente an die erzeugende Kurve, so erzeugt diese bei der Drehung eine normale Kreiskegelfläche, deren Scheitel der Schnittpunkt der Tangente mit der Axe ist und die die Fläche längs des Kreises berührt, den der Berührungspunkt der Tangente bei der Drehung beschreibt. Diese Eigenschaften der Umdrehungsflächen liegen allen ihren zeichnerischen Darstellungen zu Grunde.

Die perspektivische Abbildung ist am einfachsten zu konstruieren, wenn die Umdrehungsaxe auf der Bildebene



senkrecht ist; dann sind alle Kreischnitte der Fläche der Bildebene parallel, bilden sich also als Kreise ab. Befindet sich also der Umdrehungskörper in dieser Lage, so braucht man nur eine Anzahl der Bildebene paralleler Schnitte durch ihn zu legen, die kreisförmigen Bilder der Kreise, in denen die Oberfläche geschnitten wird, in bekannter Weise (vgl. Abb. 48, S. 54) zu ermitteln und an alle die so erhaltenen Kreise eine sie berührende Kurve, eine sogenannte Enveloppe, zu zeichnen. In Abb. 95 ist diese Konstruktion für eine einfache Vase durchgeführt.

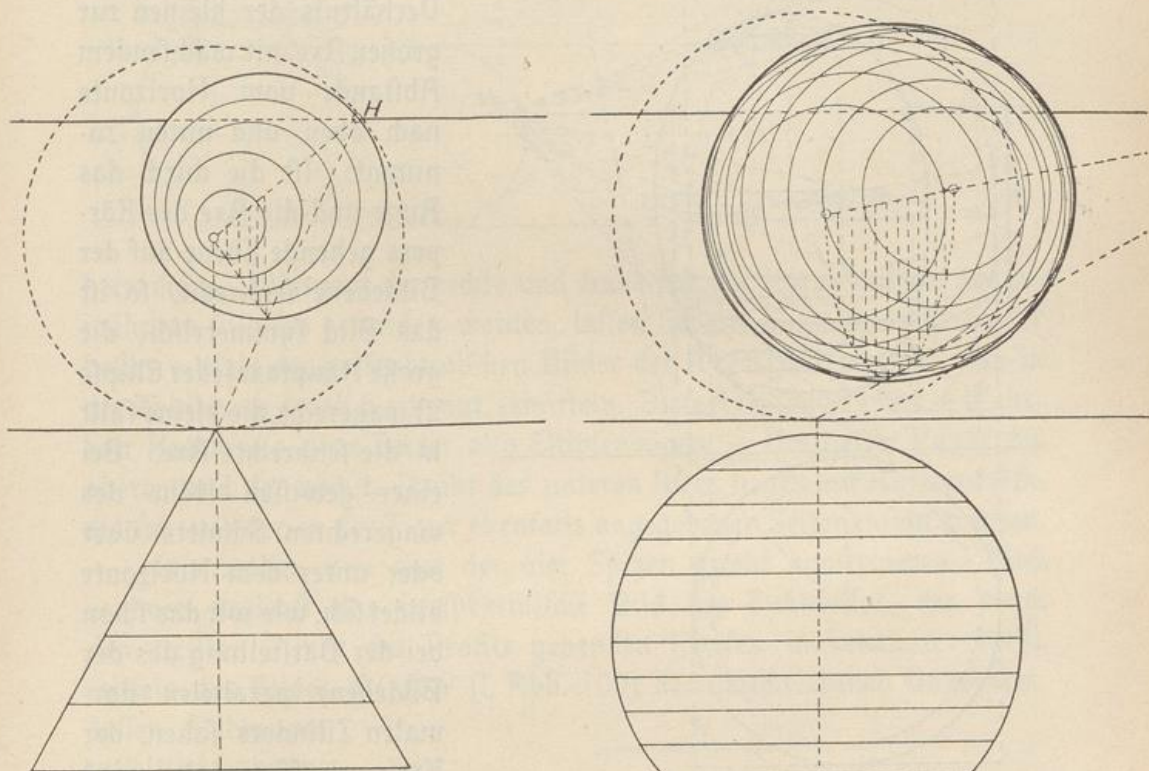


Abb. 96

Abb. 97

Schneiden sich die Kreise nicht, sondern liegt jeder Kreis ganz innerhalb des nächst größeren, so bildet sich keine Enveloppe; der größte der Kreise ist dann selbst der Umriß des Körpers. Dieser Fall kann beispielsweise bei einem Kegel vorkommen (s. Abb. 96).

Auch das Bild der Kugel kann man auf diese Weise, wie Abb. 97 zeigt, finden; jedoch ist die im § 20 gegebene Konstruktion mittels der Hauptachsen der Ellipse vorzuziehen.

In jedem andern Falle bilden sich — vorausgesetzt, daß sich, wie in Wirklichkeit meistens, der Körper vollständig vor dem Beschauer



befindet — alle Schnittkreise als Ellipsen ab, und der gesuchte Umriss des perspektivischen Bildes ist die einhüllende Kurve aller dieser Ellipsen. Ueber die Herstellung der Ellipsen selbst ist an dieser Stelle nichts Neues mehr zu sagen.

Der am häufigsten vorkommende Fall ist der, daß die Axe des Körpers senkrecht steht. Der in Augenhöhe liegende Schnittkreis fällt dann mit dem Horizonte zusammen; alle anderen Kreise stellen sich als

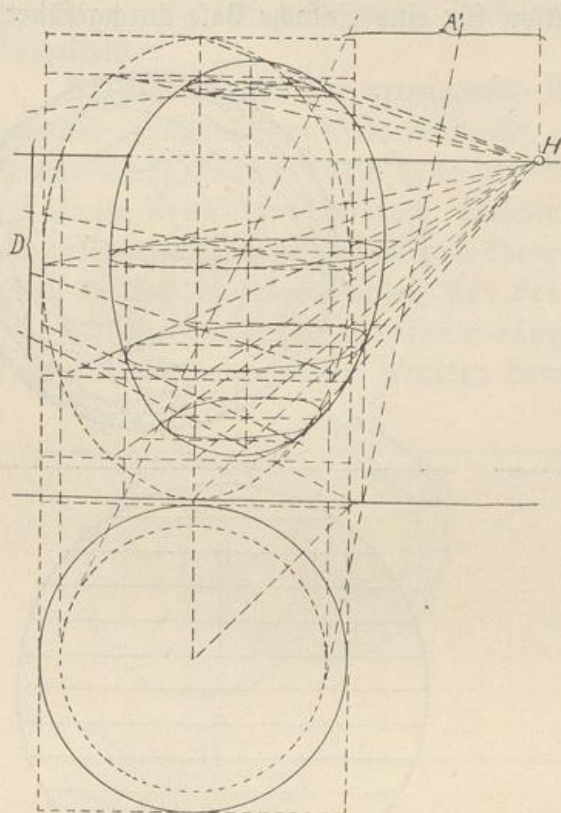


Abb. 98

Ellipsen dar, für die das Verhältnis der kleinen zur großen Axe mit wachsendem Abstände vom Horizonte nach oben und unten zunimmt. Ist die durch das Auge und die Axe des Körpers gehende Ebene auf der Bildebene senkrecht, so ist das Bild symmetrisch; die große Hauptaxe jeder Ellipse ist wagerecht, die kleine fällt in die senkrechte Axe. Bei einer gewissen Höhe des wagerechten Schnitts über oder unter dem Horizonte bildet sich, wie wir das schon bei der Darstellung des der Bildebene parallelen normalen Zylinders sahen, der Kreis als Kreis ab; wird diese Grenze überschritten,

so fällt die große Axe der Ellipse in die Mittellinie des Bildes, während die kleine sich wagerecht legt.

Abb. 98 zeigt die Darstellung eines Umdrehungsellipsoids mit senkrechter Axe. Das Bild ist eine Ellipse. Die Breite des Bildes im Horizonte wurde mittels des uns schon bekannten Punktes  $A'$  (s. § 20) gefunden.

Von ganz besonderem Interesse und hoher Wichtigkeit ist die Darstellung einer Umdrehungsfläche, die durch eine gegen die Axe konkave Kurve erzeugt wird, einer sogenannten Hohlkehle. Hohlkehlen kommen an Gefäßen, Säulenbasen u. s. w. sehr häufig vor. Wir wollen uns die Axe vertikal und eine sehr große Zahl von Ellipsen, die die Bilder der wagerechten Schnittkreise sind, konstruiert denken. Die



Envelope dieser Ellipsen hat vier Spitzen, die wir in der Abb. 99 deutlich erkennen. Die hier dargestellte Hohlkehle ist durch Umdrehung eines Halbkreises entstanden und als die innere Hälfte einer Ringfläche zu

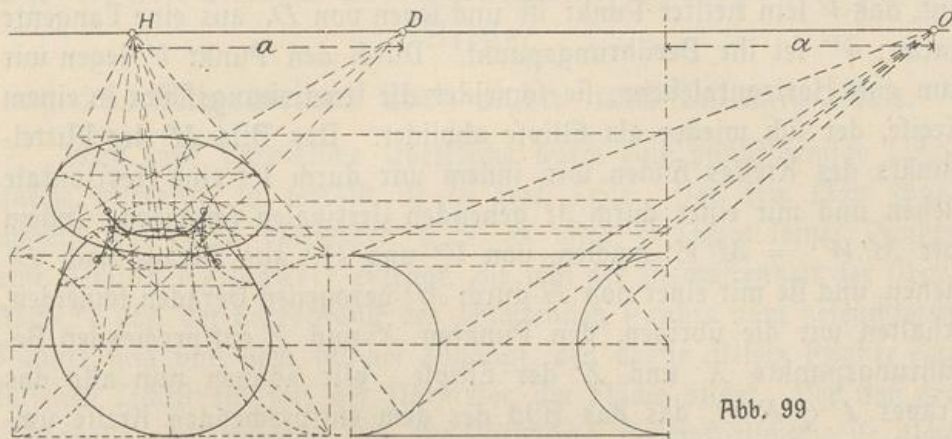


Abb. 99

betrachten. Während der rechte und linke Ast der Kurve mittels der erwähnten Ellipsen gefunden werden, lassen sich der obere und untere Ast besser mittels der perspektivischen Bilder der Axenschnitte, die man in der Abbildung deutlich erkennt, ermitteln. Diese Axenschnitte sind in Wahrheit Halbkreise, ihre Bilder also Ellipsenbögen. — Der tiefste Punkt des oberen und der höchste Punkt des unteren Astes liegen auf Horizontalen, die sich aus der in der Figur ebenfalls angegebenen Seitenansicht ergeben.

Wir wollen nun eine der vier Spitzen direkt konstruieren. Man zeichnet zunächst das perspektivische Bild des Fußkreises, des durch den tiefsten Punkt des Profils gehenden Kreises, in bekannter Weise mittels des Bildes  $PQRS$  (s. Abb. 100) des umschriebenen Quadrates, dessen Seiten parallel und senkrecht zur Bildebene sind.  $PS$  und  $QR$  gehen nach dem Hauptpunkte  $H$ ,  $PR$  nach dem Distanzpunkte  $D_1$ ; der Schnittpunkt  $M$  der Diagonalen ist das Bild des Mittelpunkts;  $V, W, X, Z$  sind die Punkte, in denen die Ellipse

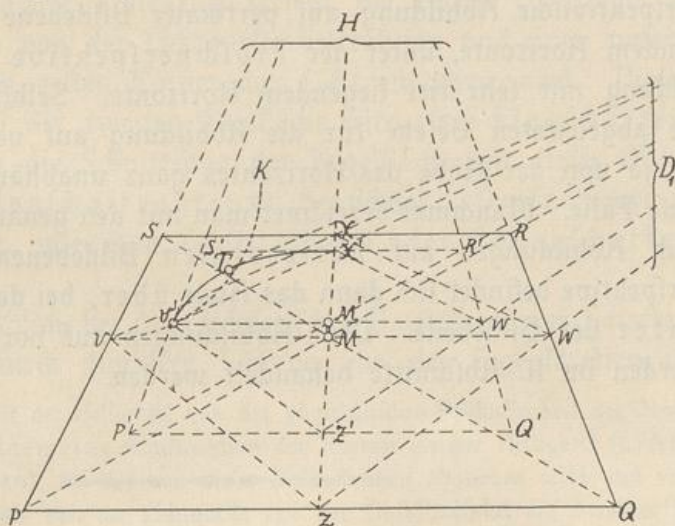


Abb. 100



die Seiten des Trapezes berührt.  $XZ$  geht nach  $H$ ,  $VX$  und  $ZW$  gehen nach  $D_1$ . In dem durch  $VW$  gehenden Mittelschnitt zeichnen wir nun das wahre Profil  $VK$  in der der Länge von  $VW$  entsprechenden Größe so auf, daß  $V$  sein tiefster Punkt ist und legen von  $D_1$  aus eine Tangente daran;  $V'$  sei ihr Berührungspunkt. Durch den Punkt  $V'$  legen wir nun eine Horizontalebene; sie schneidet die Umdrehungsfläche in einem Kreise, der sich wieder als Ellipse abbildet. Das Bild  $M'$  des Mittelpunkts des Kreises finden wir, indem wir durch  $V'$  eine Horizontale ziehen und mit einer durch  $M$  gehenden Vertikalen schneiden. Indem wir  $M'W' = M'V'$  machen, von  $V'$  und  $W'$  aus Gerade nach  $D_1$  ziehen und sie mit einer von  $H$  durch  $M'$  gezogenen Geraden schneiden, erhalten wir die übrigen, den Punkten  $X$  und  $Z$  entsprechenden Berührungspunkte  $X'$  und  $Z'$  der Ellipse. Wir können nun also das Trapez  $P'Q'R'S'$ , das das Bild des dem entsprechenden Kreise umschriebenen Quadrats ist, vervollständigen und ihm in bekannter Weise die Ellipse einzeichnen. Legen wir endlich von  $D_1$  aus eine Tangente an die Ellipse, die sie in  $T$  berührt, so ist dieser Punkt die gesuchte Spitze der einhüllenden Kurve, also der untere Endpunkt des sichtbaren Seitenumrisses. Für die linke untere und die rechte obere Spitze kommt der rechtseitige Distanzpunkt  $D_1$ , für die linke obere und die rechte untere Spitze der linkseitige Distanzpunkt  $D_2$  in Betracht.

## § 25. Die Vogel- und die Froschperspektive.

In der Regel versteht man unter der Vogelperspektive eine perspektivische Abbildung auf vertikaler Bildebene mit sehr hoch liegendem Horizonte, unter der Froschperspektive eine ebensolche Abbildung mit sehr tief liegendem Horizonte. Selbstverständlich gelten die abgeleiteten Gesetze für die Abbildung auf vertikaler Bildebene, die ja von der Höhe des Horizontes ganz unabhängig sind, auch für diese Fälle. Manchmal bezeichnet man mit den genannten Benennungen auch Abbildungen auf horizontalen Bildebenen; bei der Vogelperspektive befindet sich dann das Auge über, bei der Froschperspektive unter der Bildebene. Diese Abbildungen auf horizontaler Bildebene werden im II. Abschnitte behandelt werden.





## Zweites Kapitel.

### Die Konstruktion der Schatten im perspektivischen Bilde.

#### § 26. Allgemeines über Eigen- und Schlagschatten.

Wird eine körperliche Oberfläche durch eine punktförmige Lichtquelle bestrahlt, so zerfällt sie in zwei Teile. Der dem Licht zugewandte Teil wird beleuchtet, d. h. es wird in jedem seiner Punkte eine gewisse Helligkeit erzeugt, die von der Beschaffenheit der Oberfläche,\*) von der Entfernung des leuchtenden Punkts vom beleuchteten Punkte und von dem Winkel abhängt, den der in diesem Punkte einfallende Lichtstrahl mit der Normalen der Fläche bildet. Den von der Lichtquelle abgewandten Teil der Oberfläche, der natürlicherweise nicht beleuchtet wird, bezeichnet man als Körper- oder Eigenschatten. Beide Teile der Oberfläche werden durch eine Kurve oder einen Linienzug — die Streiflinie oder Schattengrenze — getrennt; sie ist die Linie, deren Punkte die Berührungspunkte der die Fläche berührenden Strahlen sind. Diese die Oberfläche berührenden Strahlen bilden eine Kegelfläche allgemeinsten Art, deren Scheitel der leuchtende Punkt und deren Leitlinie eben die Streiflinie ist.

Befindet sich nun — in der Richtung der einfallenden Strahlen gerechnet — hinter dem bestrahlten Körper eine zweite körperliche Oberfläche, so wird diese von der Kegelfläche der den ersten Körper berührenden Strahlen in einer Kurve oder einem Linienzuge geschnitten. Diese Kurve oder dieser Linienzug zerlegt die zweite Oberfläche in zwei Teile — einen von der Lichtquelle bestrahlten und einen andern Teil, dem durch den ersten Körper das Licht entzogen wird. Dieser nicht beleuchtete Teil der zweiten Oberfläche wird als Schlagschatten, sein Umriss — eben die Schnittlinie der Kegelfläche mit dieser Oberfläche — als Schlagschattengrenze bezeichnet. Diese Schlagschattengrenze ist, wie man sofort erkennt, der Schlagschatten der Streiflinie.

Es ist vielfach üblich, bei der zeichnerischen Darstellung der Schatten die Schlagschatten durch dunklere Tönung von den Eigenschatten zu

\*) Die Abhängigkeit der Helligkeit von der physikalischen Beschaffenheit der Oberfläche zeigt, daß eine allgemeine Konstruktion der Kurven gleicher Helligkeit (Lichtgleichen oder Isophoten), bei der von dieser Beschaffenheit abgesehen wird und nur die Entfernung des Punkts von der Lichtquelle und der Einfallswinkel des Strahles in Rechnung gezogen werden, ohne jede physikalische Bedeutung ist.



unterscheiden. Eine innere Berechtigung hat diese Unterscheidung nicht. Eine nicht vom Lichte bestrahlte Fläche hat die Helligkeit „Null“ und die Null hat keine Abstufungen. Aus welchem Grunde ein Teil einer Oberfläche die Helligkeit Null besitzt — ob deswegen, weil er vom Lichte abgewandt ist, oder deswegen, weil ein anderer Körper ihm das Licht entzieht — ist vollständig gleichgültig. Oft wird die hellere Tönung der Eigenschatten damit begründet, daß sie durch reflektiertes Licht aufgehellt werden. Diese Beleuchtung durch reflektiertes Licht aber läßt sich in allgemeiner Weise weder rechnerisch noch zeichnerisch ermitteln; sie hängt ganz von der Lage, Größe und Reflexionsfähigkeit (Albedo) der reflektierenden Fläche ab und muß daher bei der rein geometrischen Behandlung der Schattenbegrenzung, um die es sich hier ausschließlich handelt, außer Betracht bleiben. Jede konventionelle Annahme über die Wirkungsweise des diffus reflektierten Lichts ist zu verwerfen. Im Besonderen ist es unberechtigt, den Projektionsebenen eine reflektierende Wirkung in allgemeiner Weise zuzuschreiben, denn diese Ebenen sind nur Hilfsvorstellungen für die Konstruktion und brauchen durchaus keine materiellen Oberflächen zu sein. Bei einem frei im Raume schwebenden Körper ist der Eigenschatten überhaupt unsichtbar, was wir beim Monde deutlich erkennen.

Ganz anders liegt die Sache natürlich, wenn der Maler Körper nach der Natur malt. Der Künstler hat die Helligkeitsgrade und Farbentöne, die sein Auge wahrnimmt, so treu wie möglich darzustellen, ohne nach dem Warum und Woher lange zu fragen. Aber Malerei und geometrische Konstruktion sind eben zwei ganz verschiedene Dinge, und wenn auch die letztere der ersteren oft wesentliche Dienste leisten kann, sollte man doch die erstere nicht in das Gebiet der letzteren hineinziehen.

Von ganz besonderer Wichtigkeit ist der Fall des unendlich fernen leuchtenden Punkts, der Fall der parallelen Bestrahlung also. In diesem Falle geht der den bestrahlten Körper berührende Strahlenkegel in einen Strahlenzylinder, der Schlag Schatten umriß also in den Durchschnitt dieses Zylinders mit der beschatteten Oberfläche über.

Die Sonne, der für uns weitaus wichtigste leuchtende Körper, ist ebenfalls unendlich fern, d. h. im Vergleiche mit ihrer Entfernung von der Erde sind die Maße aller irdischen Körper verschwindend klein. Die von einem Punkte der Sonnenoberfläche aus auf die verschiedenen Punkte eines irdischen Körpers fallenden Strahlen sind daher in aller Strenge als parallel zu betrachten; auch nicht mit dem feinsten Meßinstrumente sind wir im Stande, einen Richtungsunterschied dieser



Strahlen nachzuweisen. Anders aber liegt die Sache, wenn wir umgekehrt die Strahlen betrachten, die von verschiedenen Punkten der Sonnenoberfläche aus durch einen Punkt eines irdischen Körpers gehen; sie sind nicht parallel, sondern bilden Winkel mit einander, die bis zu der sehr wahrnehmbaren Größe eines halben Grades wachsen können. Ziehen wir nämlich von zwei gegenüberliegenden Punkten des Sonnenrandes aus Strahlen durch einen irdischen Punkt, so bilden diese einen Winkel miteinander, den man als scheinbare Größe der Sonne bezeichnet, und der im Jahresmittel etwa gleich einem halben Grade (31') ist.

Diese scheinbare Größe der Sonne ist die Ursache der verschwommenen Ränder der durch die Sonne erzeugten Schlag-  
schatten, der sogenannten Halbschatten; wie man aus der Abb. 101 sofort erkennt, nimmt die Breite  $AB$  dieses verschwommenen Randes mit der Entfernung des Schattenwerfenden Körpers von der Schattenempfangenden Oberfläche zu. Dieser Rand würde verschwinden, wenn die von verschiedenen Punkten der Sonne aus durch einen irdischen Punkt gehenden Strahlen parallel wären, wenn also die scheinbare Größe der Sonne — wie die eines Fixsterns — gleich Null wäre. Wäre ein Fixstern hell genug, um deutliche Schlag-  
schatten zu erzeugen, so würden diese vollständig scharf begrenzt sein.

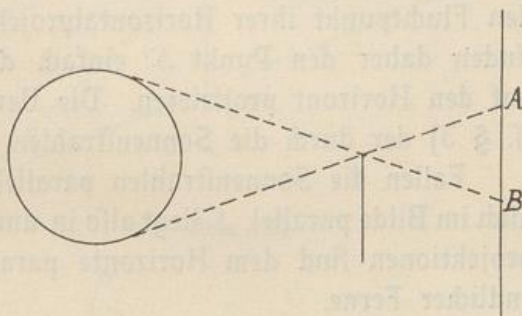


Abb. 101

Wir wollen uns nun zunächst mit den durch die Sonne erzeugten Schatten befassen und dabei die Sonnenstrahlen als parallel annehmen, also den verschwommenen Rand vorläufig außer Acht lassen.

## I. Schatten bei unendlich ferner Lichtquelle.

### § 27. Die Annahme des Sonnenpunktes.

Die Sonnenstrahlen besitzen, wie alle Parallelen, einen Fluchtpunkt, den wir einfach dadurch finden, das wir durch das Auge einen Sonnenstrahl legen und ihn mit der Bildebene schneiden. Diesen Fluchtpunkt der Sonnenstrahlen wollen wir kurz „Sonnenpunkt“ nennen und mit  $S$  bezeichnen; er ist offenbar nichts anderes, als das perspektivische Bild des Sonnenmittelpunktes. Wenn die Strahlenrichtung nicht



durch irgend eine Annahme festgelegt ist, können wir diesen Punkt ganz beliebig annehmen. Denken wir uns die Sonne im Rücken des Beschauers, so liegt der Punkt  $S$ , wie aus seiner Konstruktion unmittelbar folgt, unter dem Horizonte; steht aber die Sonne vor dem Beschauer, so daß sie selbst ein wirkliches perspektivisches Bild ergibt, so liegt  $S$  über dem Horizonte.

Die Horizontalprojektionen der parallelen Sonnenstrahlen sind natürlich ebenfalls parallel; sie besitzen also ebenfalls einen Fluchtpunkt, der mit  $S'$  bezeichnet werden mag. Wie wir schon im § 9 sahen, liegt der Fluchtpunkt einer beliebig geneigten Geraden in der durch den Fluchtpunkt ihrer Horizontalprojektion gehenden Vertikalen; wir finden daher den Punkt  $S'$  einfach dadurch, daß wir den Punkt  $S$  auf den Horizont projizieren. Die Vertikale  $SS'$  ist die Fluchtgerade (s. § 3) der durch die Sonnenstrahlen gehenden Vertikalebenen.

Fallen die Sonnenstrahlen parallel der Bildebene ein, so sind sie auch im Bilde parallel,  $S$  liegt also in unendlicher Ferne; ihre Horizontalprojektionen sind dem Horizonte parallel,  $S'$  liegt ebenfalls in unendlicher Ferne.

Sind die durch die Sonnenstrahlen gehenden Vertikalebenen rechtwinklig zur Bildebene, so fällt  $S'$  mit dem Hauptpunkte  $H$  zusammen und  $S$  liegt in der durch  $H$  gehenden Vertikalen über oder unter dem Horizonte.

Steht die Sonne gerade am Horizonte, so fällt  $S$  mit  $S'$  zusammen; die Schatten auf der Horizontalebene stehender Körper auf diese Ebene werden jetzt unendlich lang.

Auch die Fluchtpunkte der Projektionen der Sonnenstrahlen auf nicht horizontale Ebenen können von Wichtigkeit sein. Wie der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen der Strahlen auf der Fluchtgeraden der Horizontalebenen, dem Horizonte, liegt, so liegt der Fluchtpunkt der Projektionen der Strahlen auf irgend eine andere Ebene auf der Fluchtgeraden dieser Ebene. So wird beispielsweise der Fluchtpunkt der Projektionen der Strahlen auf eine zur Bildebene rechtwinklige Vertikalebene gefunden, indem man durch den Hauptpunkt eine vertikale Gerade zieht und den Punkt  $S$  auf sie projiziert.

Die Projektionen der Sonnenstrahlen auf die Bildebene selbst oder eine mit ihr parallele Ebene sind auch im Bilde parallel; ihr Fluchtpunkt liegt also in unendlicher Ferne und zwar in der Richtung, die sich durch Verbindung der Punkte  $S$  und  $H$  ergibt. Diese Verbindungslinie  $HS$  ist nämlich offenbar die Fluchtgerade der Ebenen, die auf der Bildebene rechtwinklig stehen und durch die Sonne gehen. Mit dieser Richtung sind daher die Projektionen der Strahlen auch im Bilde parallel.



## § 28. Der Schatten eines Punkts auf die Grundebene.

$P$  sei ein beliebiger Punkt des Raumes,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene. Ziehen wir die gerade Linie  $PS$ , so stellt diese den durch  $P$  gehenden Sonnenstrahl dar. Denken wir uns durch diesen Strahl eine vertikale Ebene gelegt, so schneidet sie die Grundebene in  $P'S'$ ; der Schnittpunkt  $P''$  von  $PS$  und  $P'S'$  ist also der Schnittpunkt des Strahls mit der Grundebene, d. h. der Schatten des Punkts  $P$  auf diese Ebene. — Denken wir uns etwa  $PP'$  als einen dünnen, vertikal stehenden Stab, so ist  $P'P''$  sein Schlag-schatten auf die Grundebene. Die Abbildungen 102 und 103 zeigen diese Konstruktion für einen über und für einen unter dem Horizonte liegenden Sonnenpunkt. — Liegt  $S$  über dem Horizonte und ist im Bilde  $SS' = PP'$ , so ist  $SP \parallel S'P'$ ,  $P''$  fällt also in unendliche Ferne (s. Abb. 104). Tatsächlich aber wirft ein noch so langer vertikaler Stab, wenn die Sonne auch noch so tief steht, stets einen endlichen Schatten auf die Grundebene. Wie erklärt sich dieser scheinbare Widerspruch? In diesem Falle erstreckt sich der Schatten des vertikalen Stabes bis an die Gegen-

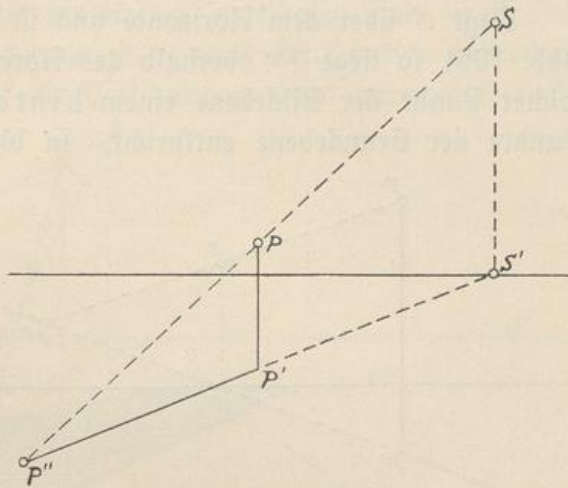


Abb. 102

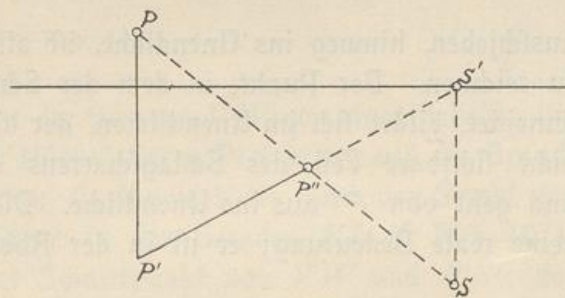


Abb. 103

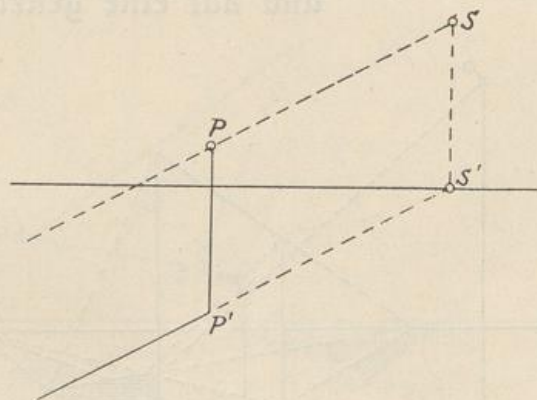


Abb. 104



gerade, die durch die Projektion des Auges auf die Grundebene gehende Parallele zur Grundlinie. Wir wissen bereits, daß sich jeder Punkt der Gegengeraden in unendlicher Ferne abbildet.

Liegt  $S$  über dem Horizonte und ist im Bilde  $SS' < PP'$  (siehe Abb. 105), so liegt  $P''$  oberhalb des Horizonts. Wir wissen, daß ein solcher Punkt der Bildebene einem hinter dem Beschauer liegenden Punkte der Grundebene entspricht. In Wahrheit liegt jetzt also der

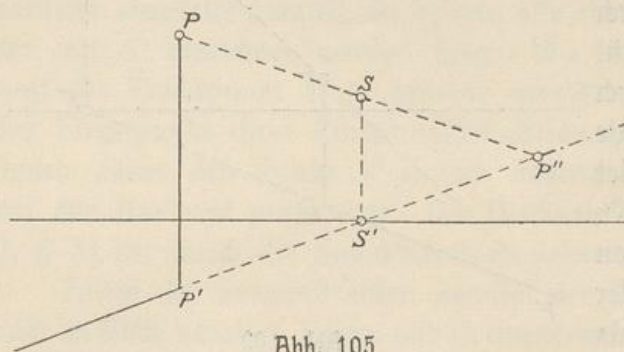


Abb. 105

Endpunkt des Schlagschattens des Stabes im Rücken des Beschauers,  $P''$  ist sein virtuelles Bild; das Bild des Schlagschattens geht über den unteren Rand des Bildes, wenn wir ihn auch noch so weit hin-

ausschieben, hinweg ins Unendliche, ist also stets bis an diesen Rand zu zeichnen. Der Punkt, in dem der Schlagschatten die Gegengerade schneidet, bildet sich im Unendlichen, der hinter dem Beschauer liegende nicht sichtbare Teil des Schlagschattens oberhalb des Horizonts ab und geht von  $P''$  aus ins Unendliche. Dieser Teil hat natürlicherweise keine reale Bedeutung; er ist in der Abbildung strichpunktirt.

## § 29. Der Schatten eines Punkts auf eine vertikale und auf eine geneigte Ebene.

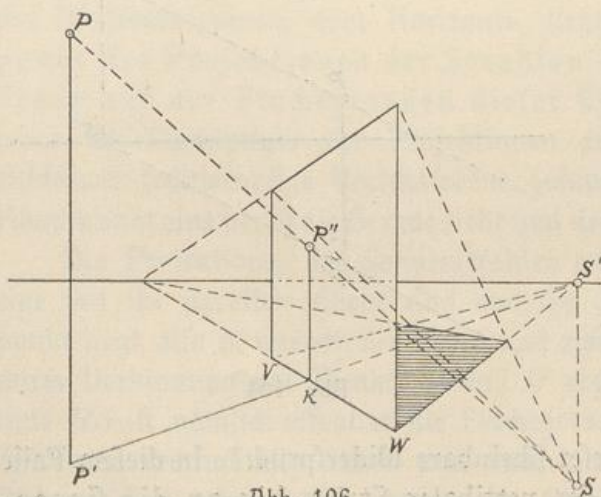


Abb. 106

Wieder sei (s. Abb. 106)  $P$  ein Punkt des Raumes,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene,  $VW$  die Schnittlinie der Grundebene mit einer beliebig begrenzten, vertikalen Ebene.  $P'S'$  ist wieder die Horizontalprojektion des Lichtstrahls  $PS$ ; sie schneidet  $VW$  im Punkte  $K$ . Die durch den Strahl gehende



Vertikalebene schneidet die durch  $VW$  gehende Vertikalebene in einer von  $K$  ausgehenden Vertikalen; der Schnittpunkt  $P''$  dieser Vertikalen mit dem Strahle  $PS$  ist der gesuchte Schatten von  $P$  auf die Vertikalebene. Denken wir uns  $PP'$  als dünnen, vertikalen Stab, so ist  $P'K$  sein Schatten auf die Grundebene; in  $K$  wird der Schatten gebrochen, geht als vertikale Linie auf die Vertikalebene über und endet in  $P''$ .

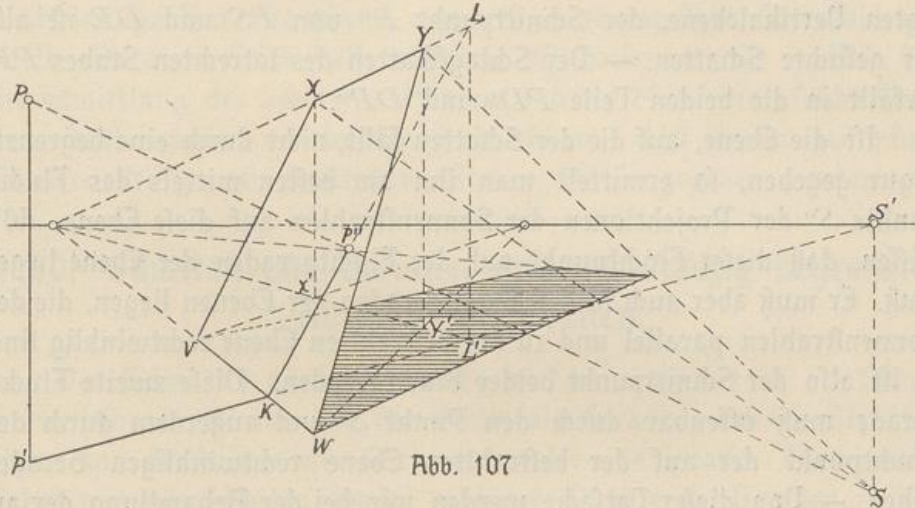


Abb. 107

Wird die Grundebene in der Geraden  $VW$  von einer beliebig begrenzten, geneigten Ebene  $VWXY$ , deren Projektion auf die Grundebene  $VWX'Y'$  ist, geschnitten, so schneidet die durch den Strahl  $PS$  gelegte Vertikalebene die Ebene in der Geraden  $KL$  (s. Abb. 107);  $K$  ist, wie in Abb. 106 der Schnittpunkt von  $VW$  und  $P'S'$ ; der Punkt  $L$  wird einfach dadurch erhalten, daß man durch den Punkt  $L'$ , in dem  $X'Y'$  und  $P'S'$  sich schneiden, eine Vertikale zieht und mit  $XY$  schneidet. Der Schnittpunkt  $P''$  von  $PS$  und  $KL$  ist der Schatten des Punktes  $P$ . — Denken wir uns wieder  $PP'$  als materiellen Stab, so ist  $P'KP''$  sein Schatten.

Ist die Schnittlinie der geneigten Ebene und der Grundebene nicht in der Zeichnung vorhanden, so braucht man sie nicht erst auf-

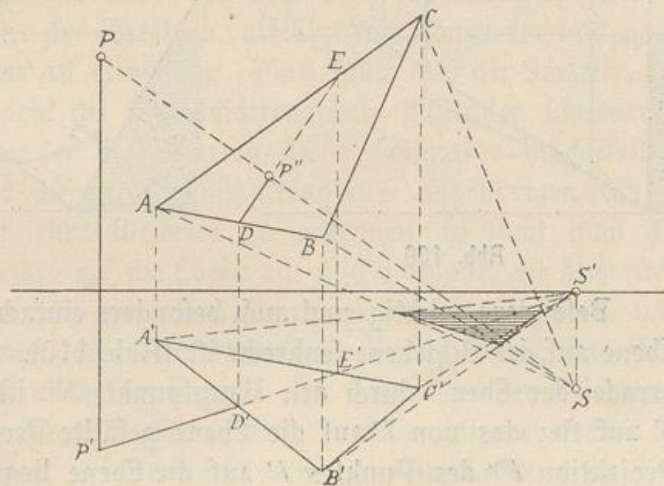


Abb. 108



zufinden, sondern kann auch direkt den Schatten des Punktes  $P$  auf eine beliebig begrenzte ebene Figur  $ABC$  (s. Abb. 108), deren Projektion auf die Grundebene  $A'B'C'$  ist, ermitteln. Die Gerade  $P'S'$  schneidet  $A'B'C'$  in  $D'$  und  $E'$ ; zieht man durch diese Punkte Vertikale, die den Umriß  $ABC$  in  $D$  und  $E$  schneiden, so ist offenbar  $DE$  die Schnittlinie der Ebene  $ABC$  mit der durch den Strahl gelegten Vertikalebene, der Schnittpunkt  $P''$  von  $PS$  und  $DE$  ist also der gesuchte Schatten. — Der Schlagschatten des lotrechten Stabes  $PP'$  zerfällt in die beiden Teile  $PD'$  und  $DP''$ .

Ist die Ebene, auf die der Schatten fällt, nicht durch eine begrenzte Figur gegeben, so ermittelt man ihn am besten mittels des Fluchtpunktes  $S''$  der Projektionen der Sonnenstrahlen auf diese Ebene. Wir wissen, daß dieser Fluchtpunkt auf der Fluchtgeraden der Ebene liegen muß. Er muß aber auch in der Fluchtgeraden der Ebenen liegen, die den Sonnenstrahlen parallel und zu der bestrahlten Ebene rechtwinklig sind, er ist also der Schnittpunkt beider Fluchtgeraden. Diese zweite Fluchtgerade muß offenbar durch den Punkt  $S$  und außerdem durch den Fluchtpunkt der auf der bestrahlten Ebene rechtwinkligen Geraden gehen. — Von dieser Tatsache werden wir bei der Behandlung der am normalen Zylinder auftretenden Schatten Gebrauch machen.

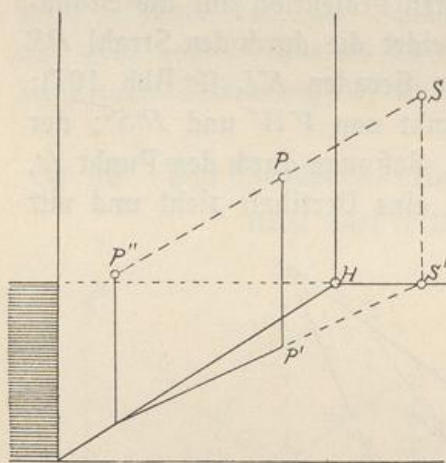


Abb. 109

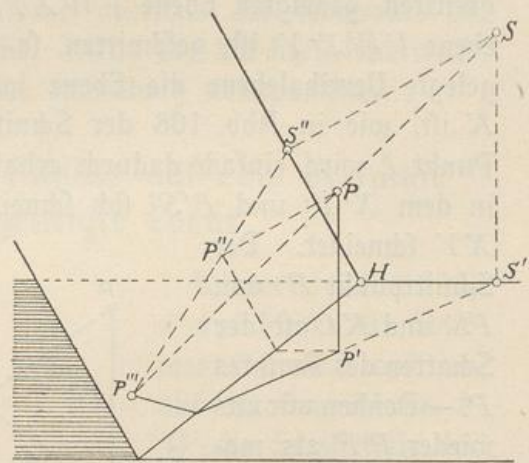


Abb. 110

Besonders wichtig und auch besonders einfach ist der Fall, daß die Ebene auf der Bildebene senkrecht ist (Abb. 110). Jetzt geht die Fluchtgerade der Ebene durch den Hauptpunkt,  $S''$  ist die Projektion von  $S$  auf sie; das von  $P$  auf die Ebene gefällte Perpendikel, in dem die Projektion  $P''$  des Punktes  $P$  auf die Ebene liegen muß, ist ebenfalls senkrecht auf der Fluchtgeraden. Dieser Punkt  $P''$  wird gefunden,



indem man vom Grundriß  $P'$  des Punktes  $P$  eine Parallele zum Horizonte und von deren Schnittpunkt mit der Horizontalspur der Ebene eine Parallele zur Vertikalspur zieht. Die Parallele schneidet die von  $P$  aus senkrecht zur Vertikalspur gezogene Linie in  $P''$ . Der gesuchte Schatten  $P'''$  ist nun einfach der Schnittpunkt von  $SP$  und  $S''P''$ .

Daß diese Konstruktion ohne Weiteres auch auf eine zur Bildebene rechtwinklige Vertikalebene anwendbar ist, versteht sich wohl von selbst. Da aber dieser Fall besonders oft vorkommt, ist in Abb. 109 die Ermittlung des Schattens  $P''$  eines Punktes  $P$  auf eine solche Ebene dargestellt worden. — In den Abb. 109 und 110 ist der gebrochene Schatten des ganzen senkrechten Stabes  $PP'$  angegeben worden.

### § 30. Schatten von Geraden und ebenflächig begrenzten Körpern auf Ebenen.

Der Schatten einer Geraden auf eine Ebene ist als Schnitt zweier Ebenen — nämlich der durch die Gerade gehenden Strahlenebene und der beschatteten Ebene — wieder eine Gerade. Man braucht daher nur die Schatten zweier beliebiger Punkte der Geraden auf die Ebene aufzufinden und durch die beiden Schattenpunkte eine Gerade zu ziehen. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene ist stets sein eigener Schatten; ist dieser Punkt also im Bilde vorhanden oder leicht zu ermitteln, so braucht man nur noch den Schatten eines andern Punktes der Geraden aufzufinden und durch ihn und den Schnittpunkt eine Gerade zu legen.

Handelt es sich um den Schatten eines ebenflächig begrenzten Körpers, so hat man, wie schon aus dem im § 26 Gesagten hervorgeht, nur die Schatten der einzelnen, die Eigenschattengrenze bildenden Kanten auf die Ebene zu ermitteln. Man sucht also die Schatten der Eckpunkte auf, die dem die Eigenschattengrenze bildenden Linienzuge angehören und verbindet die Schatten dieser Eckpunkte in derselben Reihenfolge. — Sind die der Eigenschattengrenze angehörigen Kanten und Eckpunkte nicht ohne Weiteres zu erkennen, so sucht man die Schatten aller Eckpunkte auf die Ebene auf und verbindet die äußersten dieser Punkte. So erhält man den Umriss des Schlagshattens, und die Kanten des Körpers, deren Schatten diesen Umriss bilden, sind eben die die Schattengrenze bildenden Kanten. Die Eckpunkte, deren Schatten in das Innere des gefundenen Schlagshattens fallen, sind entweder im Licht oder im Schatten, gehören also dem ganz im Lichte oder dem ganz im Schatten befindlichen Teile der körperlichen Oberfläche an.



Die Ermittlung des Schlag Schattenumrisses durch Verbindung der äußersten Schattenpunkte setzt allerdings voraus, daß der Körper keine einspringenden Flächenwinkel besitzt; ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so muß man den Körper in mehrere Teile, die keine einspringenden Flächenwinkel enthalten, zerlegen und den Schatten jedes dieser Teile für sich ermitteln.

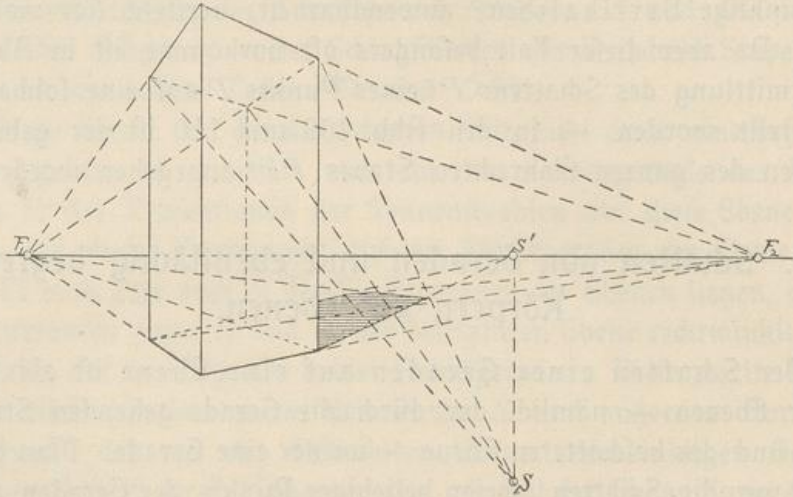


Abb. 111

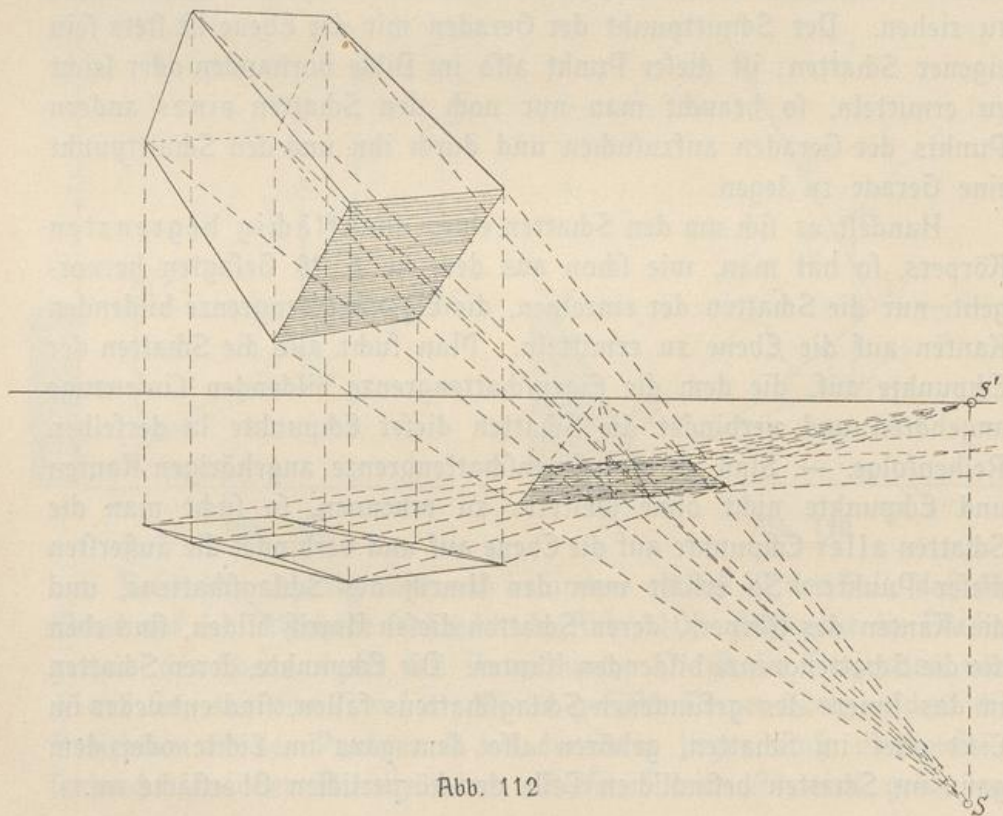


Abb. 112



Die Abb. 111 zeigt den Schlagschatten, den ein auf der Grundebene stehendes, rechtwinkliges Parallelepiped auf diese Ebene wirft. Da der Körper auf der Grundebene steht, kommen nur zwei vertikale Kanten und zwei Seiten der oberen Grundfläche als Schattenwerfend in Betracht. Die Schatten der vertikalen Kanten gehen nach  $S'$ ; die Schatten der Seiten der oberen Grundfläche sind einzeln diesen Kanten parallel, und jeder Schatten geht daher nach dem Fluchtpunkte der betreffenden Kante.

Die Abb. 112 zeigt den Schlagschatten, den ein in ganz beliebiger Lage über der Grundebene schwebendes Parallelepiped auf diese Ebene wirft. Ein solches Prisma besitzt drei Gruppen von je vier gleich langen und parallelen Kanten; die Eigenschattengrenze besteht aus je zwei gegenüberliegenden Kanten aus jeder dieser Gruppen. Da die Schatten, die gleich lange, parallele Strecken auf eine Ebene bei paralleler Bestrahlung werfen, gleich lang und parallel sind, ist der Umriss des Schlagschattens in jeder Lage des Körpers ein Sechseck, dessen gegenüberliegende Kanten paarweise gleich und parallel sind. Je zwei gegenüberliegende Seiten des Schlagschattens gehen daher im Bild nach einem im Horizonte liegenden Fluchtpunkte.

In der Abb. 113 ist der Schatten dargestellt, den eine auf der Grundebene stehende regelmäßige, in

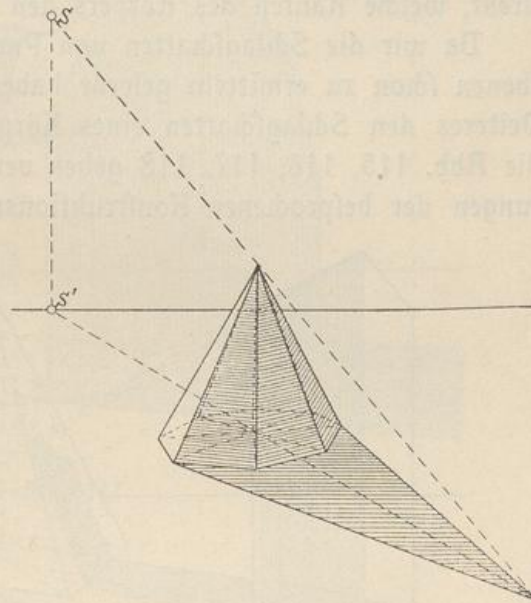


Abb. 113

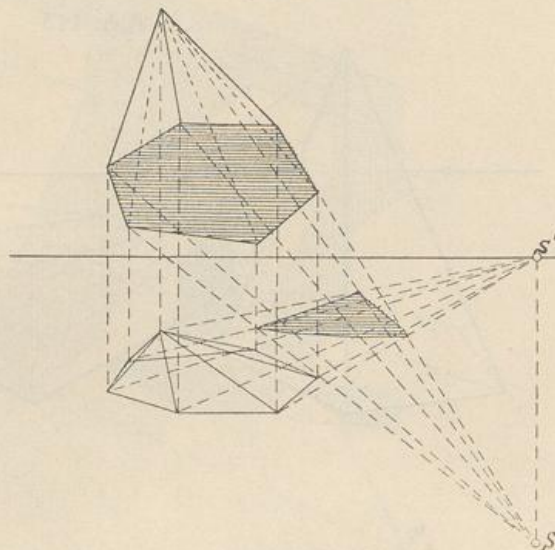


Abb. 114



Abb. 114 der Schatten, den eine in ganz allgemeiner Lage befindliche, beliebig gestaltete Pyramide auf die Grundebene wirft. Man findet diesen Schatten, indem man den Schatten der Grundfläche und den der Spitze auffucht und den Schatten der Spitze mit den beiden Eckpunkten des Schattens der Grundfläche verbindet, die von ihm aus gesehen die äußersten sind. Da die den Umriss des Schlagschattens bildenden Linien stets die Schlagschatten der die Eigenschattengrenze bildenden Kanten sind, erkennt man aus dem Schlagschatten auch direkt, welche Kanten des Körpers den Eigenschatten begrenzen.

Da wir die Schlagschatten von Punkten auf verschieden liegende Ebenen schon zu ermitteln gelernt haben, können wir nun auch ohne Weiteres den Schlagschatten eines Körpers auf einen andern finden. Die Abb. 115, 116, 117, 118 geben verschiedene Beispiele als Anwendungen der besprochenen Konstruktionsmethoden. Bei der Abb. 117

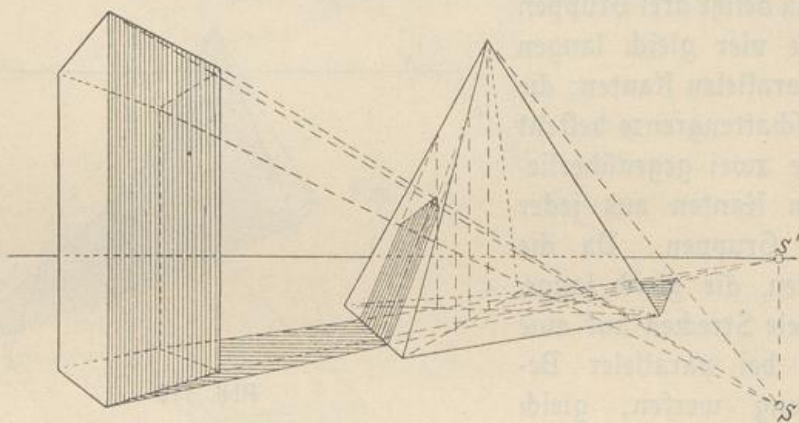


Abb. 115

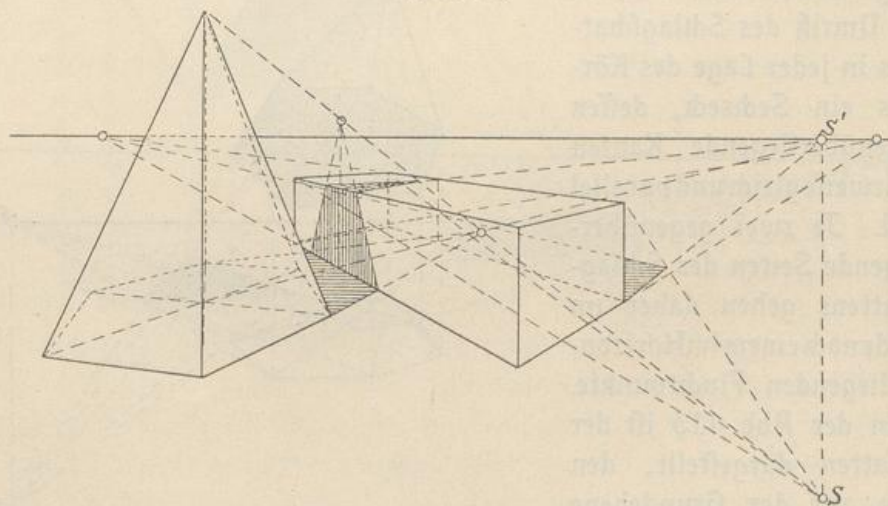


Abb. 116



ist auch angegeben, wie die Schnittlinien der Dächer direkt im Bilde konstruiert werden können. Die Abb. 118 zeigt eine Reihe von Konsolen, von denen jedes seinen Schatten auf das folgende wirft.

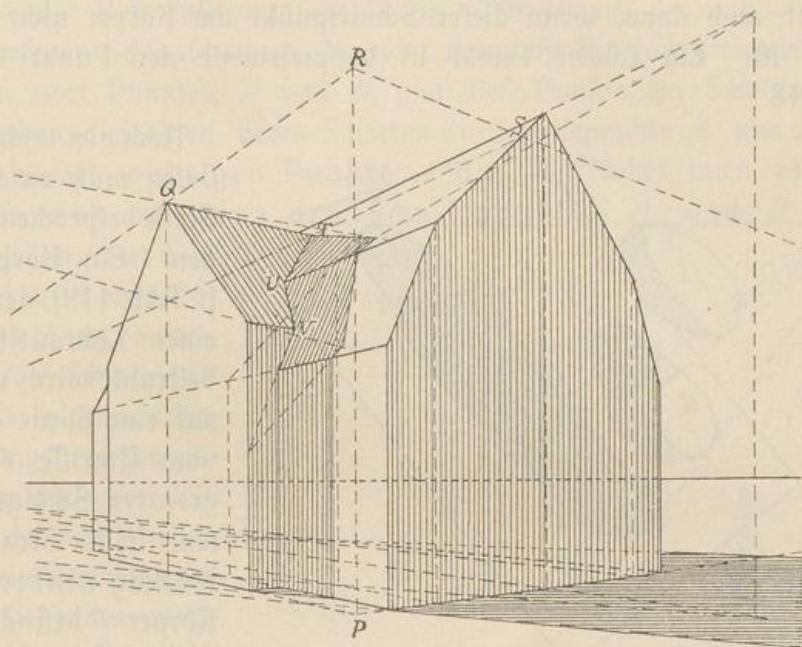


Abb. 117

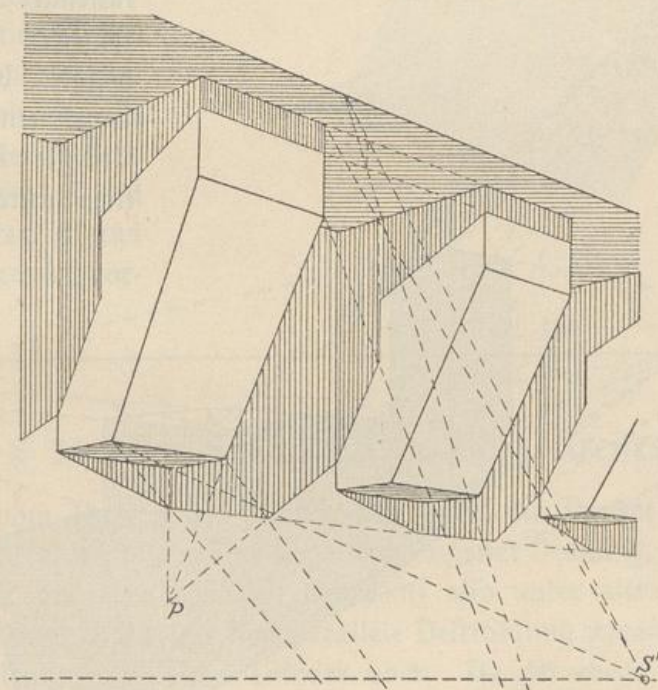


Abb. 118



Bei diesen Konstruktionen läßt sich mit Vorteil die schon erwähnte Tatsache benutzen, daß der Schatten, den eine Gerade auf eine Ebene wirft, stets durch den Punkt gehen muß, in dem die Gerade die Ebene schneidet, auch dann, wenn dieser Schnittpunkt am Körper nicht vorhanden ist. Ein solcher Punkt ist beispielsweise der Punkt  $P$  in Abb. 118.

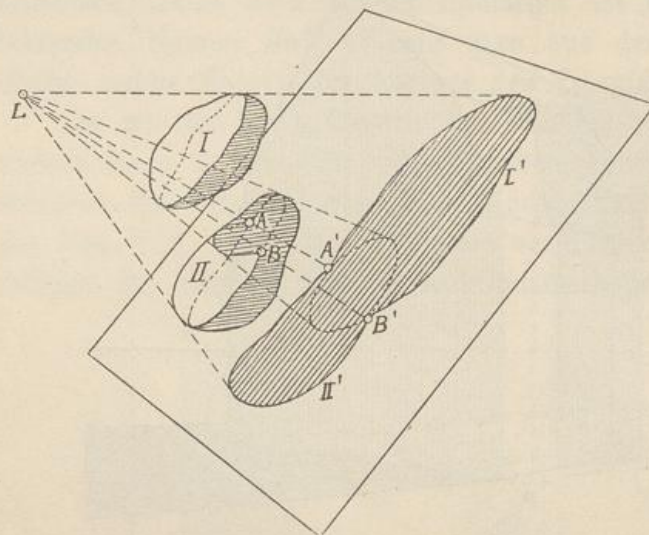


Abb. 119

Noch ein wichtiges Gesetz muß an dieser Stelle besprochen werden. Ein Körper  $I$  (s. Abb. 119), der von einer Lichtquelle  $L$  bestrahlt wird, werfe auf eine Ebene einen vom Umriss  $I'$  begrenzten Schlagschatten. In der Strahlenrichtung hinter dem Körper  $I$  befinde sich ein Körper  $II$ , dessen auf dieselbe Ebene fallender Schlagschatten den Umriss  $II'$  besitzt. Wir wollen annehmen, daß die Umrisse  $I'$  und  $II'$  sich durchschneiden;

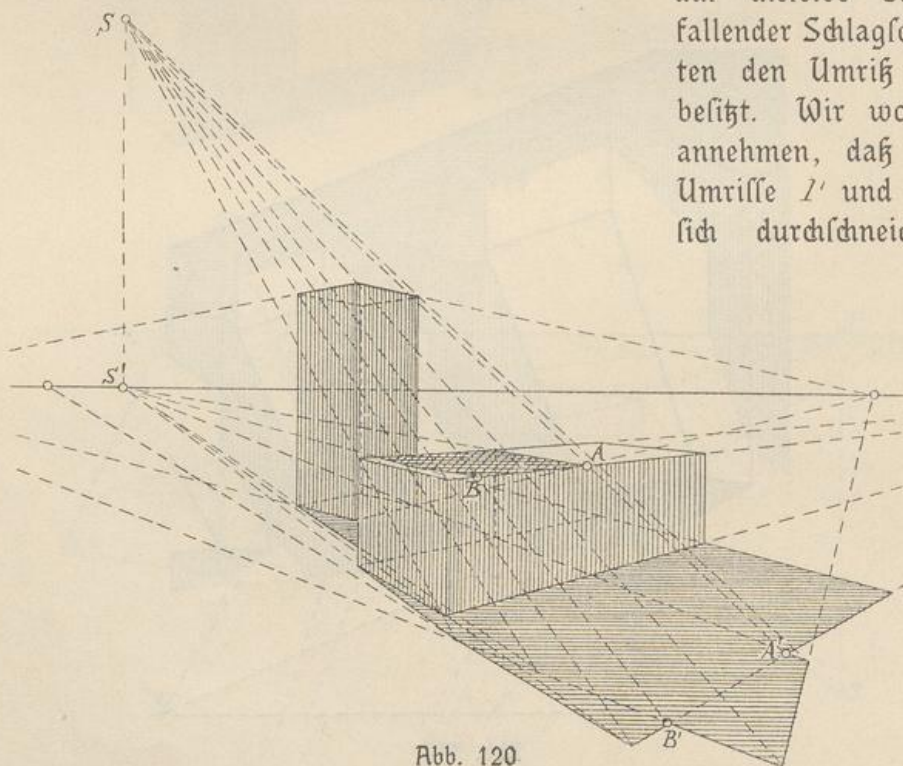


Abb. 120



ihre Schnittpunkte seien  $A'$  und  $B'$ . — Der Körper  $I$  wirft nun auch einen Schatten auf den Körper  $II$ ; wenn  $I$  und  $II$  sich durchschneiden, fällt aber der Schatten von  $I$  nicht ganz, sondern nur teilweise auf  $II$  — der Rest fällt auf die Ebene. Der Umriß des von  $I$  auf  $II$  geworfenen Schlagschattens schneidet dann die Eigenschattengrenze von  $II$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$ , und diese Punkte der Schattengrenze sind eben diejenigen, deren Schatten die Schnittpunkte  $A'$  und  $B'$  sind. Die höchst wichtigen Punkte  $A$  und  $B$  findet man also dadurch, daß man von den Schnittpunkten  $A'$  und  $B'$  Lichtstrahlen zurück-

zieht und mit der Schattengrenze von  $II$  schneidet.

Die folgenden Abbildungen zeigen einige Beispiele. Abb. 120 stellt den Schatten dar, den ein stehendes auf ein liegendes rechtwinkliges Parallelepiped wirft. In Abb. 121 wirft eine stehende Pyramide ihren Schatten auf ein liegendes Prisma. In beiden Fällen sind die Punkte  $A$  und  $B$  und ihre Schatten  $A'$  und  $B'$  besonders hervorgehoben.

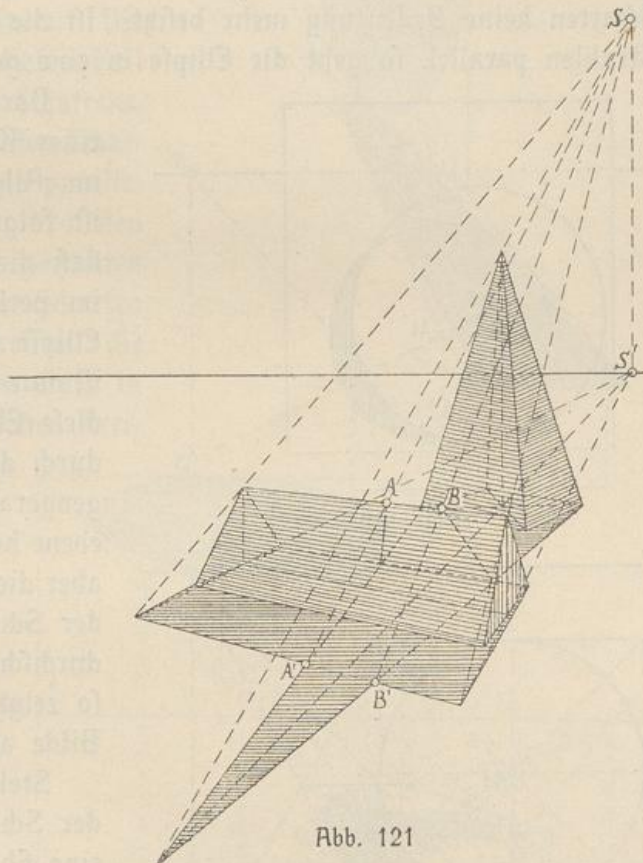


Abb. 121

### § 31. Der Schlagschatten eines Kreises.

Die vom leuchtenden Punkte aus durch die Punkte des Kreises gehenden Strahlen bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung, der Schatten des Kreises auf eine beliebige Ebene ist also unter allen Umständen ein Kegelschnitt. Da wir hier parallele Bestrahlung voraussetzen, geht der Strahlenkegel in einen Zylinder über. Da der ebene Schnitt eines Kreiszylinders oder eines Zylinders zweiter Ordnung im Allgemeinen



eine Ellipse ist, muß bei paralleler Bestrahlung der Schatten eines Kreises auf eine Ebene eine Ellipse sein. — In besonderen Fällen geht die Ellipse in einen Kreis von dem Radius des Schattenwerfenden Kreises oder in zwei parallele Gerade über. Ersterer Fall tritt ein, wenn der Kreis der bestrahlten Ebene parallel ist, oder wenn die Ebene des Kreises und die bestrahlte Ebene Wechselschnitte des Strahlenzylinders sind, letzterer Fall ergibt sich, wenn die bestrahlte Ebene den Kreis durchschneidet und den Strahlen parallel ist. Dann hat allerdings die ganze bestrahlte Ebene die Helligkeit Null, so daß der Schatten keine Bedeutung mehr besitzt. Ist die Ebene des Kreises den Strahlen parallel, so geht die Ellipse in eine gerade Strecke über.

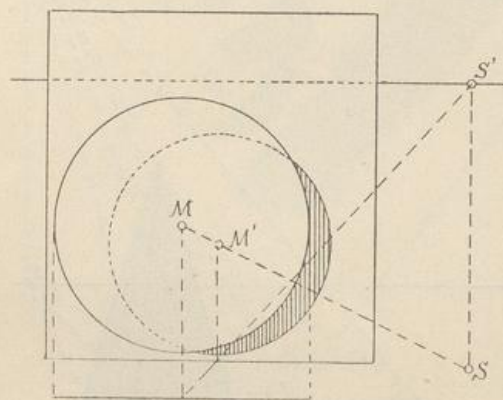


Abb. 122

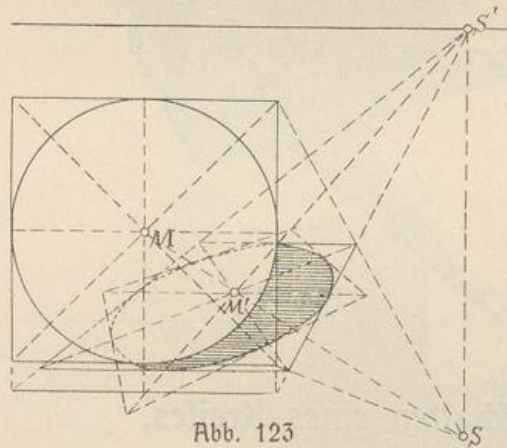


Abb. 123

Daraus, daß der Schatten eines Kreises auf eine Ebene im Allgemeinen eine Ellipse ist, folgt natürlich keineswegs, daß dieser Schatten sich auch im perspektivischen Bilde als Ellipse darstellen müsse. Das ist nur dann der Fall, wenn diese Ellipse nicht bis an die durch das Auge und die Gegengerade gehende Vertikalebene heranreicht. Berührt sie aber diese Ebene, so bildet sich der Schatten als Parabel ab, durchschneidet sie diese Ebene, so zeigt sich der Schatten im Bilde als Hyperbel.

Stellt sich, wie gewöhnlich, der Schatten des Kreises auf eine Ebene als Ellipse dar, so finden wir diese stets am bequemsten dadurch, daß wir dem Kreise zwei um  $45^\circ$  gegen

einander gedrehte Quadrate umschreiben und die Schatten dieser Quadrate und ihrer Diagonalen auf die Ebene auffuchen; so erhalten wir stets 8 Tangenten mit ihren Berührungspunkten.

Wirft der Kreis auf eine Ebene einen kreisförmigen Schatten, so ist damit selbstverständlich nicht gesagt, daß der Schattenkreis sich auch im Bilde als Kreis darstelle. Das ist, wie wir wissen, nur dann der



Fall, wenn der Schattenkreis der Bildebene parallel ist oder aber dann, wenn die bestrahlte Ebene und die Bildebene Wechselschnitte des Sehstrahlenzylinders sind.

Ist die Ebene des Schattenwerfenden Kreises der bestrahlten Ebene und der Bildebene parallel, so ist der Schatten in Wahrheit und im Bilde ein Kreis. Die Abb. 122 zeigt für diesen Fall die Konstruktion des Schattens.

Die Abb. 123 stellt den Schatten eines der Bildebene parallelen Kreises, die Abb. 124 den eines andern vertikal gestellten Kreises, die Abb. 125 den Schatten eines wagerechten Kreises, die Abb. 126 den Schatten eines in beliebiger Lage befindlichen Kreises auf die Grundebene dar. Endlich zeigt Abb. 127 den Schatten eines beliebigen Kreises auf eine in beliebiger Lage befindliche ebene Figur. Ueber die angewandten Konstruktionen ist nichts Neues zu sagen; in allen Fällen wurden in bekannter Weise die Schatten zweier um  $45^\circ$  gegen einander gedrehter, dem Kreise umschriebener Quadrate mit ihren Diagonalen oder der Schatten des regelmäßigen Achtecks aufgesucht und die Ellipsen eingezeichnet.

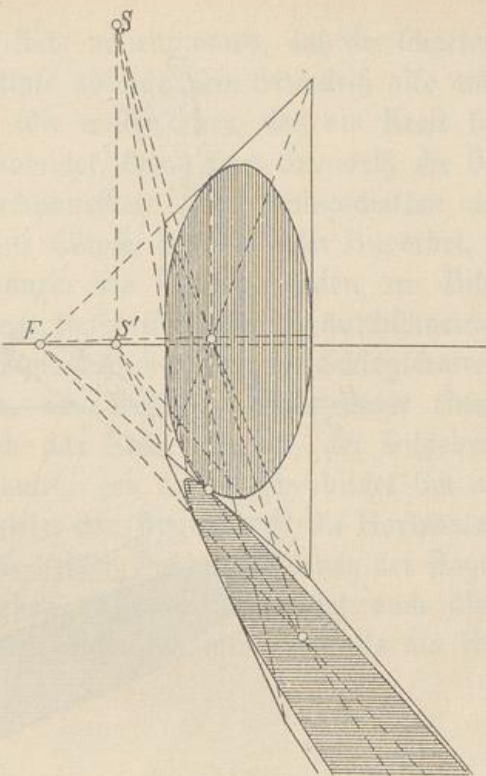


Abb. 124

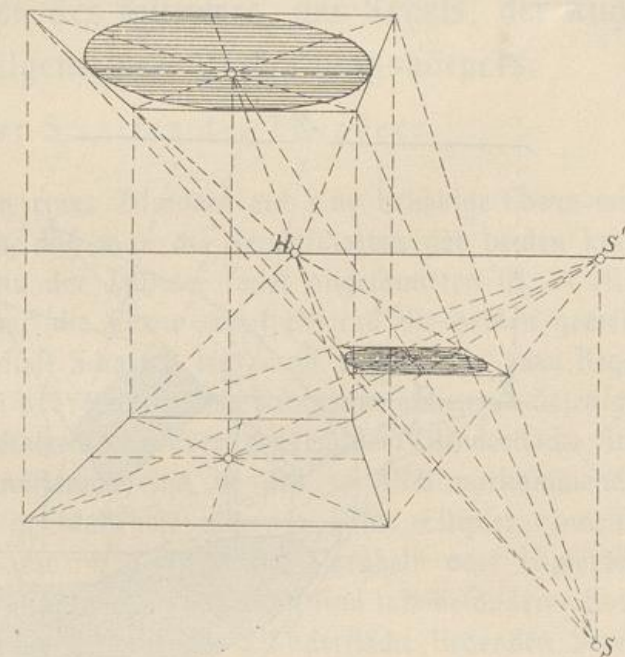


Abb. 125

ihren Diagonalen oder der Schatten des regelmäßigen Achtecks aufgesucht und die Ellipsen eingezeichnet.



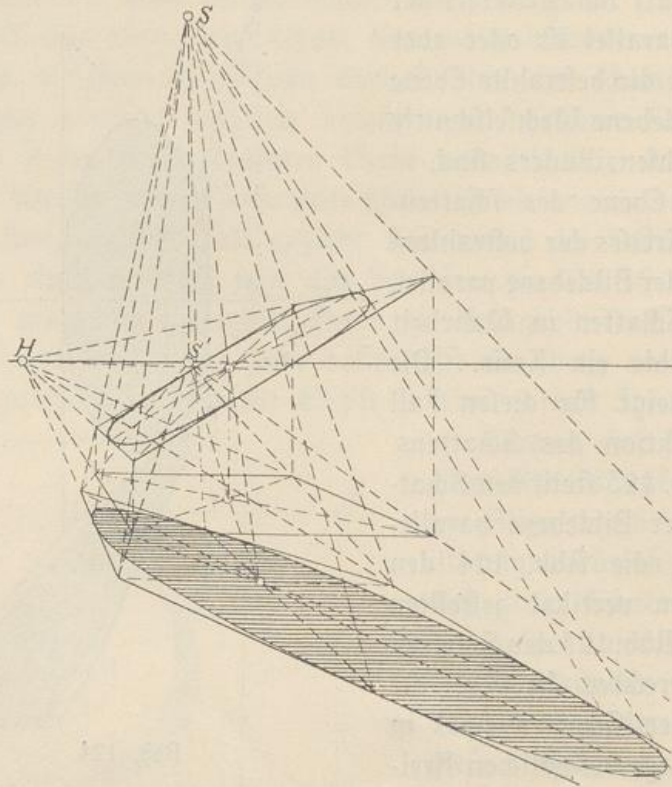


Abb. 126

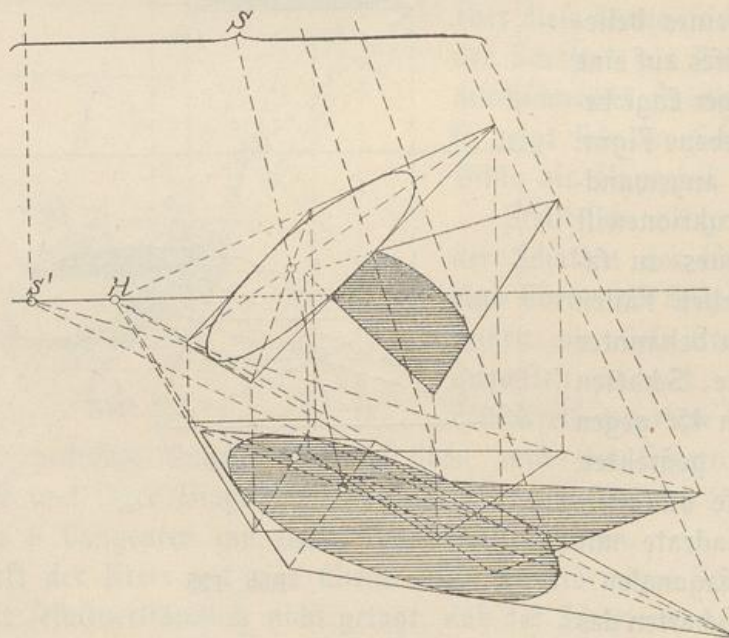


Abb. 127



Bei diesen Beispielen wurde stets angenommen, daß der Schattenwerfende Kreis selbst sich als Ellipse abbilde, sein Grundriß also nicht bis an die Gegengerade reiche. Wir wissen aber, daß ein Kreis sich als Parabel oder als Hyperbel abbildet, wenn sein Grundriß die Gegengerade berührt oder sie durchschneidet. Der Schlagschatten des Kreises ist auch jetzt im Bilde eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem er ganz außerhalb der durch das Auge gehenden, zur Bildebene parallelen Vertikalebene liegt, sie berührt oder sie durchschneidet. So zeigt Abb. 124 einen im Bilde hyperbolisch begrenzten Schlagschatten.

Stellen wir uns z. B. vor, der Beschauer stehe unter einem Brückenbogen, der also die durch das Auge gehende, der Bildebene parallele Vertikalebene durchschneidet; der Kreisbogen bildet sich als Hyperbelbogen ab. Da der Schatten des Bogens auf die Horizontalebene eine Ellipse ist, die durch die beiden Punkte, in denen der Bogen die Horizontalebene schneidet, gehen muß, durchschneidet auch diese Ellipse die genannte Vertikalebene, bildet sich also ebenfalls als Hyperbelbogen ab.

## §. 32. Die Schatten des Zylinders, des Kegels, der Kugel und des allgemeinen Umdrehungskörpers.

### 1. Der Schatten des Zylinders.

Der Schlagschatten eines Zylinders auf eine beliebige Ebene wird stets dadurch gefunden, daß man die Schlagschatten der beiden kreisförmigen oder — wenn der Zylinder schief abgeschnitten ist — elliptischen Grundflächen auf die Ebene ermittelt und die beiden gemeinsamen Tangenten an diese Schatten legt, und zwar — da zwei Kegelschnitte im Allgemeinen vier gemeinsame Tangenten haben — diejenigen von ihnen, die die Schatten von Erzeugenden der Zylinderfläche sind. Die Schatten der Grundflächen sind in den wirklich vorkommenden Fällen in der Regel in Wahrheit und im Bilde Ellipsen, indessen können sie auch, wie wir im § 31 sahen, Parabeln oder Hyperbeln sein. Die Berührungspunkte der Tangenten sind mit besonderer Sorgfalt zu bestimmen, da sie die auf der Zylinderfläche liegenden Streiflinien ergeben. Ziehen wir nämlich von den Berührungspunkten der Tangenten Strahlen zurück, so schneiden diese Strahlen nach dem im § 26 allgemein Ausgeführten die Umrisse der zugehörigen Grundflächen



in den Punkten, durch die die Streiflinien gehen. Die Streiflinien selbst sind natürlicherweise Erzeugende, müssen also im Bilde nach dem Fluchtpunkte der Erzeugenden gehen.

Die den Schlagschatten begrenzenden gemeinsamen Tangenten der Schattenumrisse der beiden Grundflächen sind als Schatten paralleler Gerader — nämlich zweier Erzeugender der Zylinderfläche — auf eine Ebene parallel, gehen also im Bilde nach einem Fluchtpunkte, der in der Fluchtgeraden der beschatteten Ebene liegen muß. Die Aufsuchung dieser Fluchtgeraden haben wir im § 5 bereits kennen gelernt. Da die beiden Tangenten als Schatten paralleler Erzeugender aber auch in der Fluchtgeraden der durch die Erzeugenden gehenden Strahlenebenen liegen müssen, ist der gesuchte Fluchtpunkt der Schnittpunkt der beiden Fluchtgeraden.

Die den Schlagschatten begrenzenden Tangenten finden wir nun nach der im § 19 angegebenen Konstruktion. Die Berührungspunkte können, wie schon erwähnt, zur Auffindung der Streiflinien dienen.

Die Punkte, in denen die Streiflinien das Bild eines Grundkreises schneiden, sind in Wahrheit Endpunkte eines Durchmesser dieses Kreises. Im Bilde muß also ihre Verbindungslinie durch das Bild des Mittelpunktes des Kreises gehen.

Wir können aber auch direkt, ohne Vermittlung des Schlagschattens, die Streiflinien finden. Wir projizieren nämlich einen beliebigen Strahl auf eine der beiden Endflächen des Zylinders, indem wir durch einen beliebigen Punkt  $P$  des Umrisses der Endfläche einen Strahl legen, auf ihm einen beliebigen Punkt  $Q$  annehmen, durch ihn eine Parallele zu den Erzeugenden ziehen, sie mit der verlängerten Endfläche schneiden und den Schnittpunkt  $Q'$  mit  $P$  verbinden. Die mit  $PQ'$  parallelen Tangenten berühren offenbar den Umriss der Endfläche in den Punkten, von denen aus die Streiflinien gehen, da die den Zylinder berührenden Strahlenebenen die Endflächen in eben diesen parallelen Tangenten schneiden. Im Bilde gehen die parallelen Tangenten natürlich nach einem Fluchtpunkte, der in der Fluchtgeraden der Endfläche liegen muß. — Die hier im Allgemeinen angedeutete Konstruktion werden wir in den jetzt zu behandelnden besonderen Fällen durchführen.

Wir denken uns zuerst einen auf der Grundebene stehenden, rechtwinkligen Kreiszylinder. Sein Bild haben wir bereits im § 19 kennen gelernt. Den Schatten des oberen Grundkreises als eines der Grundebene parallelen Kreises können wir ohne Weiteres finden. Die den Schlagschatten begrenzenden Tangenten gehen in diesem einfachsten Falle als Schatten vertikaler Erzeugender durch  $S'$ ; wir finden sie



also, indem wir von  $S'$  aus Tangenten an den Umriss der Grundfläche legen (s. Abb. 128).

Wir benutzen dabei die in Abb. 65 (S. 71) angegebene Konstruktion; von den so gefundenen Berührungspunkten aus gehen die vertikalen Streiflinien. Die von  $S'$  aus gezogenen Tangenten müssen auch den Schattenumriss der oberen Grundfläche berühren.

Wenn die durch das Auge und die Zylinderaxe gehende Vertikalebene auf der Bildebene rechtwinklig, das perspektivische Bild des Zylinders also symmetrisch ist, kann man die Berührungspunkte der von  $S'$  an den Umriss der Grundfläche gelegten Tangenten auch auf eine andere Weise finden.

Da nämlich die in der Abb. 65 benutzten Schnittpunkte von Geraden mit der Ellipse naturgemäß immer etwas ungenau ausfallen, empfiehlt es sich, die Ellipse durch einen Kreis zu ersetzen. Bei der gemachten Annahme liegen die Hauptachsen der Ellipse stets wagerecht und senkrecht, und es giebt unter den rechtwinkligen Schnitten des unbegrenzt zu denkenden Zylinders stets zwei, die sich als Kreise abbilden. Diese kreisförmigen Bilder haben wir im § 18 bereits kennen gelernt; sie treten, wie wir wissen, auf, wenn die Ebene des Kreises und die Bildebene Wechselschnitte des Sehstrahlenkegels sind. — Ermitteln wir nun einen dieser beiden Kreise, so brauchen wir nur von  $S'$  aus die Tangenten an ihn zu legen; durch ihre Berührungspunkte gehen die gesuchten Streiflinien.

In Abb. 129 ist ein auf der Grundebene, also horizontal liegender rechtwinklig abgesehnener Kreiszyylinder dargestellt. Die den auf die Grundebene fallenden Schlagschatten begrenzenden Tangenten sind jetzt den Erzeugenden parallel, gehen also nach dem im Horizonte liegenden Fluchtpunkte  $F_2$  der letzteren. Die direkte Konstruktion der Streiflinien fällt hier sehr einfach aus. — Ein durch den ganz beliebigen

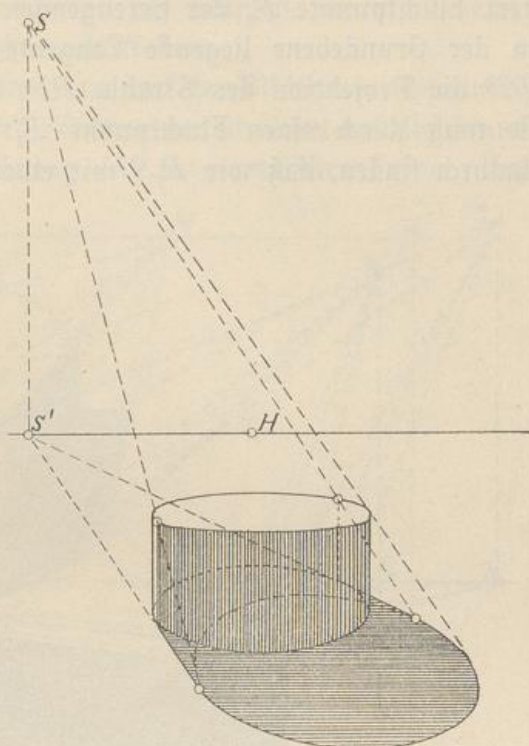


Abb. 128



Punkt  $P$  des Umrissbildes der einen Endfläche gelegter Strahl schneidet die Grundebene im Schatten  $P''$  dieses Punktes; eine von  $P''$  nach dem Fluchtpunkte  $F_2$  der Erzeugenden gezogene Gerade schneidet die in der Grundebene liegende Tangente  $BC$  im Punkte  $D$ . Jetzt ist  $PD$  die Projektion des Strahls  $PP''$  auf die Endfläche des Zylinders; sie muß durch einen Fluchtpunkt  $F_1'$  gehen, den wir ganz einfach dadurch finden, daß wir  $F_2S$  mit einer durch  $F_1$  gehenden Vertikalen

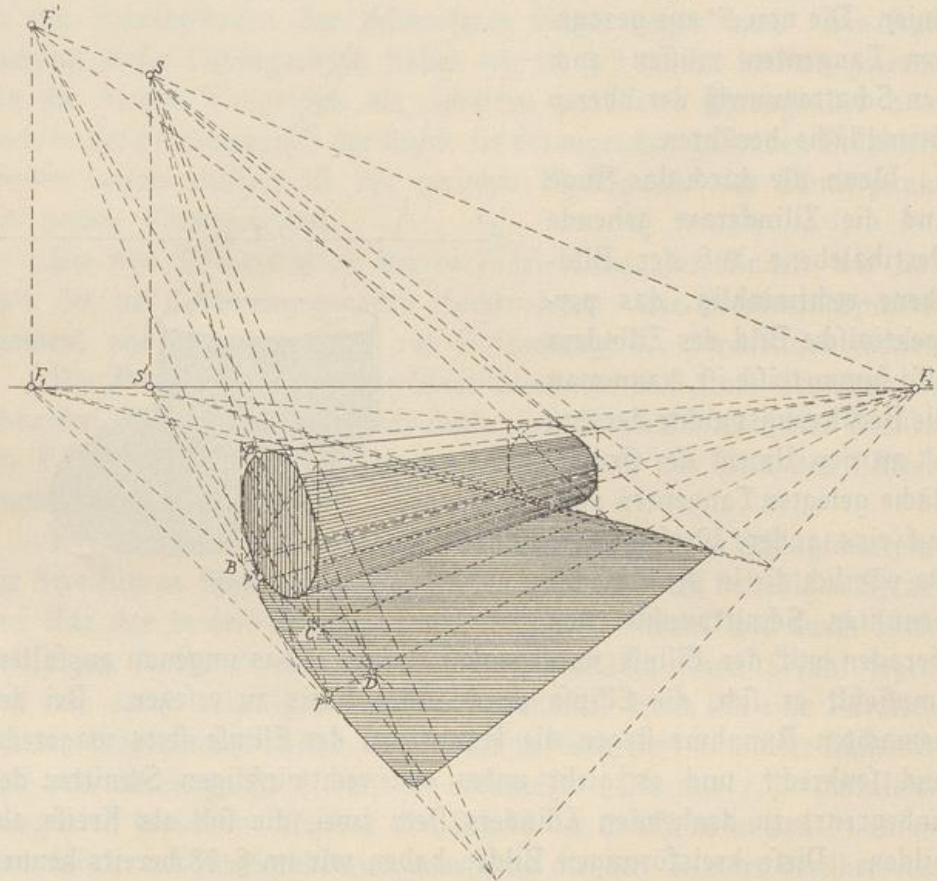


Abb. 129

schneiden;  $F_2S$  ist nämlich offenbar die Fluchtlinie der den Erzeugenden des Zylinders und den Sonnenstrahlen parallelen Ebenen, die durch  $F_1$  gezogene Vertikale die Fluchtlinie der den Grundflächen des Zylinders parallelen Ebenen. Die Projektion des Strahls auf die Grundfläche des Zylinders ist aber die Schnittlinie einer Ebene der ersten mit einer der zweiten Art, muß also einen Fluchtpunkt besitzen, der der Schnittpunkt beider Fluchtlinien ist (vgl. § 3 und § 27). — Von diesem Fluchtpunkte  $F_1'$  aus, den wir also ohne Vermittelung des Punkts  $P$  direkt finden können, ziehen wir die Tangenten an die die Endflächen



darstellenden Ellipsen. Durch die Berührungspunkte gehen die Bilder der Streiflinien und durch die Schatten der Berührungspunkte die den Schlagschatten begrenzenden Tangenten der Ellipsen, die die Schatten der Endflächen auf die Grundebene darstellen.

In dem Falle, daß die Zylinderaxe auf der Bildebene rechtwinklig ist, liegt der Fluchtpunkt der Projektionen der Strahlen auf die Grundfläche des Zylinders in der Richtung  $HS$  in unendlicher Ferne. Jetzt

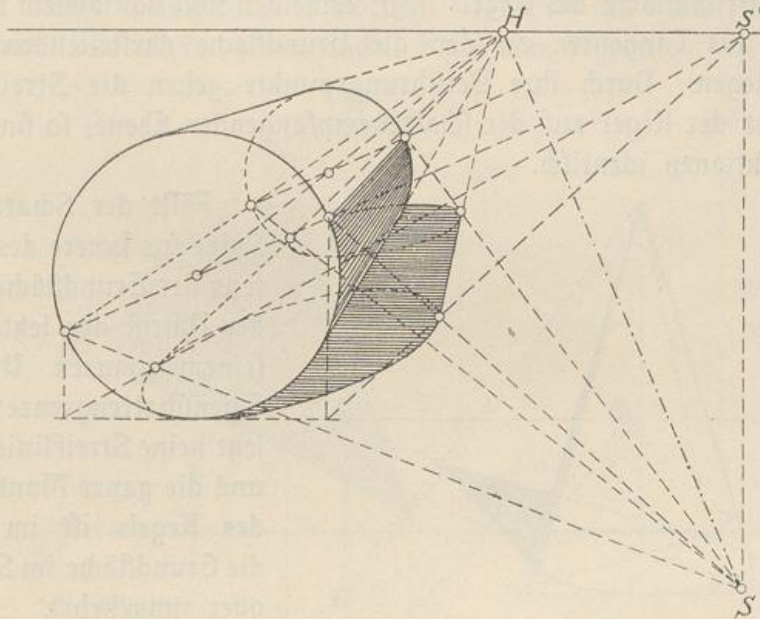


Abb. 130

haben wir, um die Streiflinien zu finden, also nur an den Grundkreis Tangenten zu legen, die mit  $HS$  parallel sind, also den Kreis mit dem auf  $HS$  rechtwinkligen Durchmesser zu schneiden und von den Schnittpunkten aus nach  $H$  zu ziehen (s. Abb. 130).

Die allgemeinste Lage des Zylinders wird im § 33 (Abb. 141) behandelt werden.

## 2. Der Schatten des Kegels.

Den Schlagschatten eines Kegels auf eine beliebige Ebene finden wir, indem wir zuerst den Schatten seiner Grundfläche auf diese Ebene bestimmen. Er stellt sich im Bilde, wie wir wissen als Kegelschnitt, gewöhnlich als Ellipse dar. Wir suchen weiter den Schatten der Spitze auf dieselbe Ebene auf und ziehen von diesem Schattenpunkte aus Tangenten an den den Umriss des Schlagschattens der Grundfläche darstellenden Kegelschnitt. Diese beiden Tangenten und der zwischen



ihren Berührungspunkten liegende, gegen die Spitze des Schattens konkave Bogen des Kegelschnitts bilden den Umriss des Schlagschattens. Ziehen wir von den Berührungspunkten der Tangenten Strahlen zurück und schneiden sie mit dem Umriss der Grundfläche, so erhalten wir auf ihm die beiden Punkte, von denen die Streiflinien ausgehen.

Die Streiflinien können wir auch direkt dadurch finden, daß wir einen durch die Spitze des Kegels gelegten Strahl mit der Ebene, in der die Grundfläche des Kegels liegt, schneiden und von diesem Schnittpunkte aus Tangenten an den die Grundfläche darstellenden Kegelschnitt legen. Durch ihre Berührungspunkte gehen die Streiflinien. — Steht der Kegel auf der schattenempfangenden Ebene, so sind beide Konstruktionen identisch.

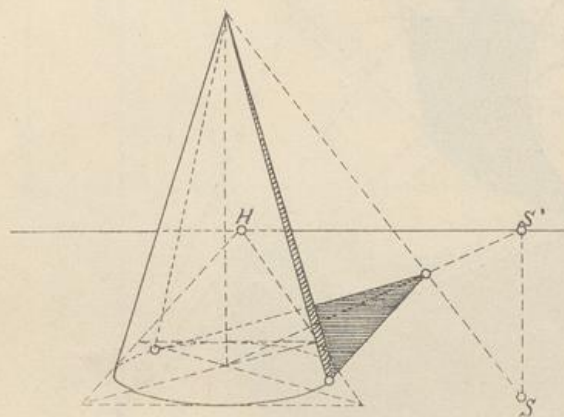


Abb. 131

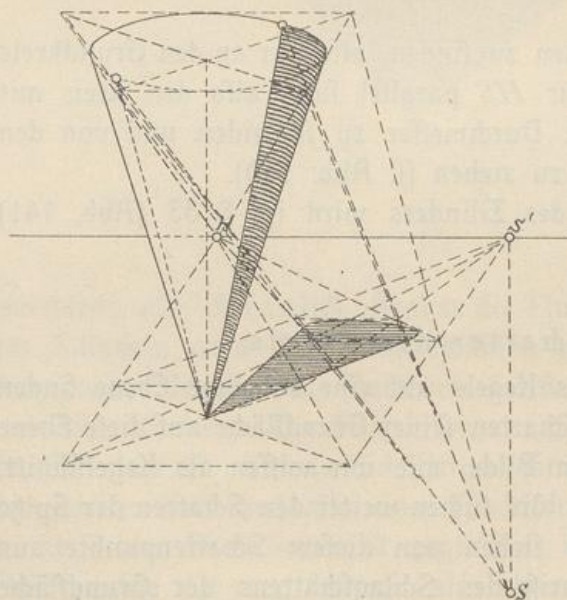


Abb. 132

Fällt der Schatten der Spitze ins Innere des Schattens der Grundfläche, so ist der Umriss der letzteren in seinem ganzen Umfange Eigenschattengrenze; es gibt jetzt keine Streiflinien mehr und die ganze Mantelfläche des Kegels ist im Lichte, die Grundfläche im Schatten oder umgekehrt.

Die Abb. 131, 132, 133 zeigen die Schatten eines mit der Grundfläche auf der Horizontalebene stehenden, eines mit der Spitze auf derselben Ebene stehenden und eines in geneigter Lage schwebenden Kegels. Die Abb. 133 zeigt die Benutzung des Punktes  $P$ , in dem der durch die Kegelspitze gelegte Strahl die verlängerte Grundfläche schneidet. Er muß auf der Linie  $VW$  liegen, in der eine durch die Sonne und die Kegelspitze gelegte Ver-



Horizontalebene die verlängerte Grundfläche schneidet und die sich aus den Punkten  $V'$  und  $W'$  sofort ergibt, in denen die Horizontalspur dieser Ebene zwei Seiten des in der Grundebene liegenden Parallelogramms schneidet, das die Horizontalprojektion des der Grundfläche des Kegels umschriebenen Quadrates ist. Die von  $P$  an den Umriss des Grundflächenbildes gelegten Tangenten ergeben in ihren Berührungspunkten die Ausgangspunkte der Streiflinien. — Von dem Schlagschatten ist nur ein kleiner Teil gezeichnet worden. Das Bild des Schattenumrisses der Grundfläche ist im vorliegenden Falle eine Hyperbel.

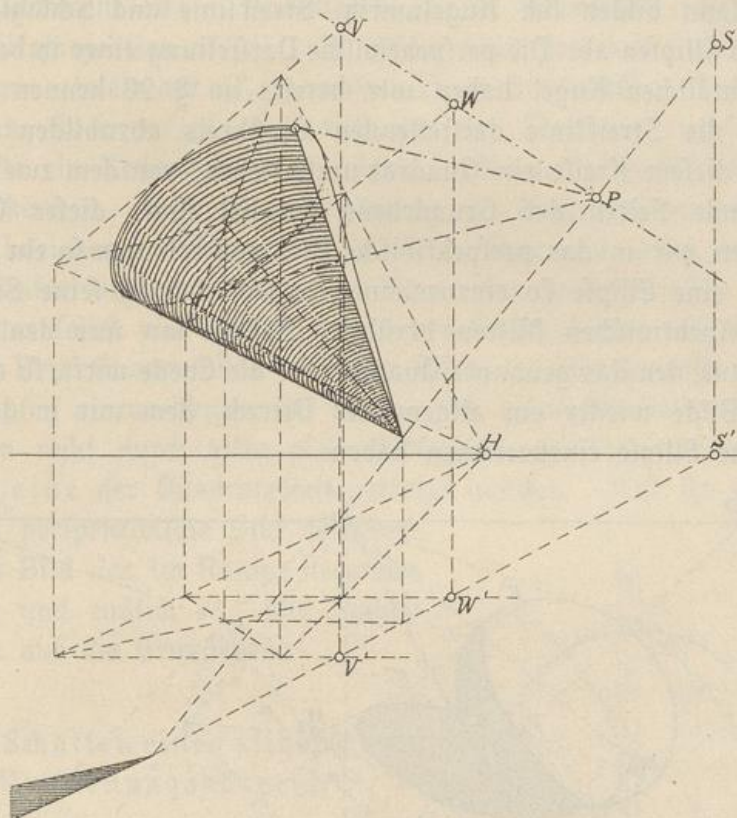


Abb. 133

### 3. Der Schatten der Kugel.

Die Schattengrenze einer parallel bestrahlten Kugel ist stets ein Großkreis, dessen Ebene auf der Strahlenrichtung senkrecht steht und den wir daher dadurch finden, daß wir durch den Mittelpunkt der Kugel eine zur Strahlenrichtung senkrechte Ebene legen und mit ihrer Oberfläche schneiden. Der diese Oberfläche in der Streiflinie berührende Strahlenzylinder schneidet eine beliebige Ebene in einer Ellipse, die den Umriss des auf diese Ebene fallenden Schlagschattens darstellt. Streif-



linie und Schlagshattenumriß bilden sich im perspektivischen Bilde gewöhnlich als Ellipsen ab; es kann aber auch jede dieser Kurven ein parabolisches oder hyperbolisches Bild ergeben, wenn sie die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene berührt oder durchschneidet.

Es soll nun die Streiflinie einer in beliebiger Lage befindlichen Kugel nebst ihrem Schlagshatten auf eine ebenfalls in beliebiger Lage befindliche Ebene ermittelt werden. Wir setzen den gewöhnlichen Fall voraus, daß weder die Kugel noch ihr Schlagshattenumriß mit der durch das Auge parallel zur Bildebene gelegten Ebene Punkte gemein haben; dann bilden sich Kugelumriß, Streiflinie und Schlagshattenumriß als Ellipsen ab. Die perspektivische Darstellung einer in beliebiger Lage befindlichen Kugel haben wir bereits im § 20 kennen gelernt. Um den die Streiflinie darstellenden Großkreis abzubilden, denken wir uns diesem Kreise ein Quadrat umschrieben, von dem zwei gegenüberliegende Seiten der Grundebene parallel sind; dieses Quadrat übertragen wir in das perspektivische Bild und erhalten so ein Viereck, dem wir eine Ellipse so einzuzeichnen haben, daß sie seine Seiten in ihren perspektivischen Mitten berührt. Suchen wir nun den Schlagshatten auf, den das genannte Quadrat auf die Ebene wirft, so erhalten wir im Bilde wieder ein allgemeines Viereck, dem wir in derselben Weise eine Ellipse einzuzeichnen haben.

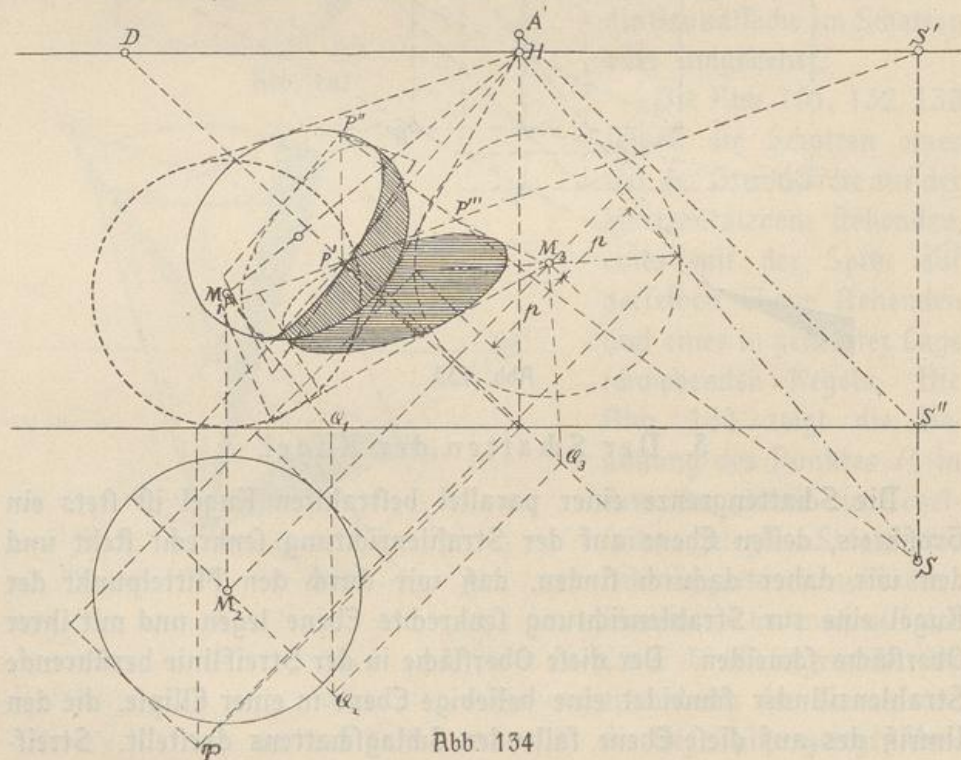


Abb. 134



Zunächst also handelt es sich um die Darstellung der Streiflinie (s. Abb. 134). Wir legen der Konstruktion die Abb. 75 zu Grunde. Ist  $S''$  die Projektion des Sonnenpunkts auf die Grundlinie, so ist offenbar  $A'S''$  der Grundriß,  $HS$  der Aufriß eines durch das Auge gelegten Strahls. Nach den Regeln der gewöhnlichen Schattenkonstruktionslehre finden wir nun die Streiflinie, indem wir die Kugel auf eine der Strahlenrichtung parallele Vertikalebene projizieren und diese Ebene in die Horizontalebene umklappen;  $M_3$  sei der Mittelpunkt der umgeklappten Hilfsprojektion. Der durch den Kugelmittelpunkt gelegte Lichtstrahl ist im Aufrisse  $M_1Q_1$ , im Grundrisse  $M_2Q_2$  und in der Hilfsprojektion  $M_3Q_3$ . In dieser Hilfsprojektion erscheint die Streiflinie als ein auf  $M_3Q_3$  rechtwinkliger Durchmesser. Nun erhalten wir ohne Weiteres als Grundriß des der Streiflinie umschriebenen Quadrats ein Rechteck, das wir direkt in das perspektivische Bild übertragen können. Unter Berücksichtigung des Maßes  $\rho$ , um welches die beiden horizontalen Seiten des Quadrats über und unter dem Kugelmittelpunkte liegen, erhalten wir ferner das perspektivische Bild des Quadrates selbst und endlich auch seinen Schlagschatten auf die Grundebene. Dem Quadratbilde und dem Bilde des Schattens des Quadrats die Ellipsen einzuzichnen, hat bekanntlich keine Schwierigkeiten.

Um nicht durch allzu viele Hülfslinien die Figur zu verwirren, ist nur eine der Quadratecken verfolgt worden.  $P$  ist ihr Grundriß,  $P'$  das perspektivische Bild desselben,  $P''$  das Bild des im Raume liegenden Punkts und endlich  $P'''$  sein Schlag-schatten auf die Grundebene.

#### 4. Der Schatten eines allgemeinen Umdrehungskörpers.

Wenn die Streiflinie eines Umdrehungskörpers bestimmt werden soll, geht man am besten von der Vorstellung einer normalen Kreiskegelfläche aus, die die Axe des Umdrehungskörpers zur Axe hat und ihn in einem Parallelkreise berührt. Diese Kegelfläche hat mit der Umdrehungsfläche einen unendlich schmalen, ringförmigen Flächenstreifen gemein; die Schnittpunkte der

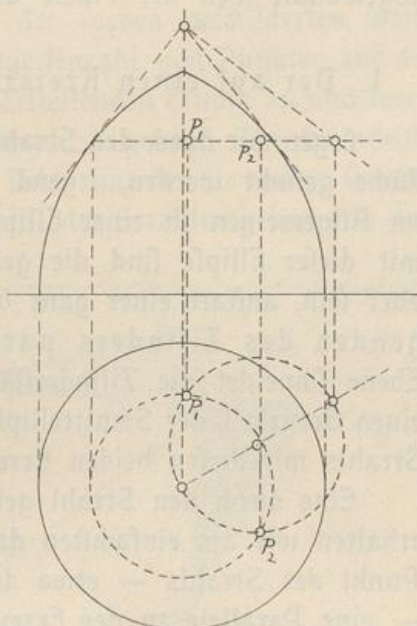


Abb. 135



Streiflinien des Kegels mit dem Parallelkreise sind daher Punkte der Streiflinie der Umdrehungsfläche.

Die Ausführung dieser Konstruktion im perspektivischen Bilde selbst ist umständlich und ungenau; es empfiehlt sich daher in diesem Falle ausnahmsweise, die Streiflinie im Grund- und Aufrisse zu konstruieren und sie dann punktweise in das Bild zu übertragen. Die anzuwendende Konstruktion ist für den Fall der vertikalen Axe in Abb. 135 angegeben.  $P_1$  und  $P_2$  sind Punkte der Streiflinie.

### § 33. Schlagschatten eines Punkts auf Zylinder, Kegel, Kugel und den allgemeinen Umdrehungskörper.

Bei diesen Aufgaben handelt es sich um die Ermittlung der Schnittpunkte einer Geraden — nämlich des durch den Punkt gelegten Lichtstrahls mit der Zylinder-, Kegel- oder Kugelfläche. Zylinder- und Kegelflächen zweiter Ordnung — also Zylinder- und Kegelflächen im gewöhnlichen Sinne — und Kugelflächen werden von jeder Geraden — wenn überhaupt — in zwei Punkten geschnitten; welcher von diesen beiden Schnittpunkten die Bedeutung eines Schlagschattenpunkts hat, das hängt davon ab, ob der dem Lichte zugewandte oder der von ihm abgewandte Teil der Fläche als Oberfläche körperlich vorhanden ist.

#### 1. Der auf einen Kreiszylinder fallende Schlagschatten.

Legen wir durch den Strahl, dessen Schnittpunkte mit der Zylinderfläche gesucht werden, irgend eine Ebene, so schneidet sie die Fläche im Allgemeinen in einer Ellipse, und die Schnittpunkte des Strahls mit dieser Ellipse sind die gesuchten Punkte. Zweckmäßig wird es aber sein, anstatt einer ganz beliebigen Ebene eine mit den Erzeugenden des Zylinders parallele Ebene zu wählen; eine solche Ebene schneidet die Zylinderfläche in zwei geraden Erzeugenden, die einen Grenzfall der Schnittellipse darstellen, und die Schnittpunkte des Strahls mit diesen beiden Erzeugenden sind die gesuchten Punkte.

Eine durch den Strahl gehende, den Erzeugenden parallele Ebene erhalten wir am einfachsten dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt des Strahls — etwa durch den Schattenwerfenden Punkt selbst — eine Parallele zu den Erzeugenden ziehen und durch diese Parallele und den Strahl eine Ebene legen.



Wir wollen diese Konstruktion für verschiedene Lagen des Zylinders ausführen. Steht ein normaler Zylinder vertikal (s. Abb. 136), ist  $P$  der Schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene, so ist  $PP'$  die durch  $P$  gezogene Parallele zu den Erzeugenden; die durch den Strahl parallel zu den Erzeugenden gehende Ebene schneidet die Grundebene in  $P'S'$ . Diese Gerade schneidet die den Grundkreis darstellende Ellipse in  $A'$  und  $B'$ ; ziehen wir also durch diese Punkte vertikale Erzeugende, so schneiden sie den Strahl in den gesuchten Schnittpunkten  $A$  und  $B$ , von denen, wenn der volle Zylinder körperlich vorhanden ist,  $A$  die Bedeutung des Schlagschattens von  $P$  besitzt. In der Figur ist der Schlagschatten eines lotrechten Stabes gezeichnet worden, dessen Endpunkt  $P$  ist.

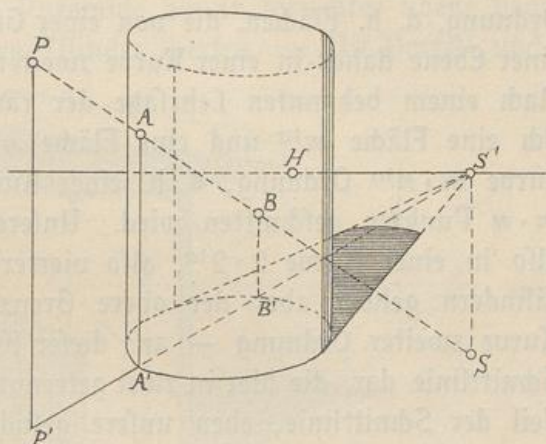


Abb. 136

Von ganz besonderem Interesse ist der Schlagschatten, den der obere Rand der Fläche auf ihre Innenseite wirft — vorausgesetzt natürlich, daß wir uns den Zylinder als eine oben offene Röhre vorstellen. Wir können dabei genau in der soeben geschilderten Weise verfahren — wir nehmen eine beliebige Anzahl von Punkten auf der die obere Grundfläche des Zylinders darstellenden Ellipse an und legen durch sie Lichtstrahlen, die im Bilde durch  $S'$  gehen. Die Grundrisse der angenommenen Punkte liegen im Bilde auf der die untere Grundfläche darstellenden Ellipse, die Grundrisse der Strahlen gehen also von diesen Punkten aus nach  $S'$ . So erhalten wir die Schlag-  
schattengrenze (s. Abb. 137), die die obere Ellipse in denselben Punkten schneiden muß, von denen die Streiflinien ausgehen, und diese Streiflinien erhalten wir, wie wir schon wissen, dadurch, daß wir von  $S'$  aus Tangenten an eine der

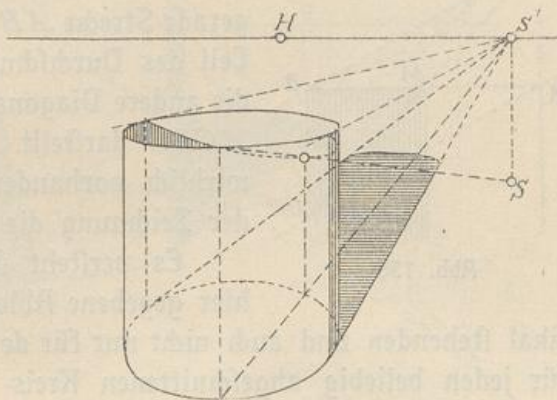


Abb. 137



beiden Ellipsen legen und durch die Berührungspunkte Erzeugende ziehen. Die gefundene Schlagschattenkurve ist selbst ein Stück einer Ellipse, und zwar das perspektivische Bild einer halben Ellipse. Das ergibt sich aus folgender Ueberlegung:

Die Schlagschattengrenze ist der Durchschnitt des gegebenen Zylinders mit einem Strahlenzylinder, dessen Leitlinie der obere Grundkreis des gegebenen Zylinders ist. Beide Zylinder sind Flächen zweiter Ordnung, d. h. Flächen, die von einer Geraden in zwei Punkten, von einer Ebene daher in einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten werden. Nach einem bekannten Lehrsatz der räumlichen Geometrie schneiden sich eine Fläche  $m^{\text{ter}}$  und eine Fläche  $n^{\text{ter}}$  Ordnung in einer Raumkurve  $m \cdot n^{\text{ter}}$  Ordnung, d. h. einer Kurve, die von einer Ebene in  $m \cdot n$  Punkten geschnitten wird. Unsere beiden Zylinder müssen sich also in einer Kurve  $2 \cdot 2^{\text{ter}}$ , also vierter Ordnung schneiden. Beiden Zylindern gehört aber der obere Grenzkreis des Zylinders — eine Kurve zweiter Ordnung — an; dieser Kreis stellt also einen Teil der Schnittlinie dar, die hier in zwei getrennte Kurven zerfällt; der andere Teil der Schnittlinie, eben unsere gesuchte Schattenkurve, muß also eine Kurve von der Ordnung  $4 - 2 = 2$ , also eine Kurve zweiter Ordnung sein. Eine Kurve zweiter Ordnung aber ist stets eine ebene Kurve, da jede Raumkurve von einer Ebene in mindestens drei Punkten geschnitten wird, also mindestens von der dritten Ordnung sein muß. Jeder ebene Schnitt eines Zylinders — also auch unsere Schattenkurve — ist aber eine Ellipse.

Die Sache wird noch klarer, wenn wir uns — ganz abgesehen von der perspektivischen Darstellung — den gegebenen Zylinder und den Strahlenzylinder auf eine den Strahlen parallele Vertikalebene projiziert denken. Die Endfläche des gegebenen Zylinders stellt sich dann (s. Abb. 138) als die gerade Strecke  $AB$  dar, während die den zweiten Teil des Durchschnitts bildende Ellipse sich als die andere Diagonale  $CD$  des Parallelogramms  $ACBD$  darstellt. Die als Schlagschattengrenze wirklich vorhandene Hälfte der Ellipse ist in der Zeichnung die halbe Diagonale  $MD$ .

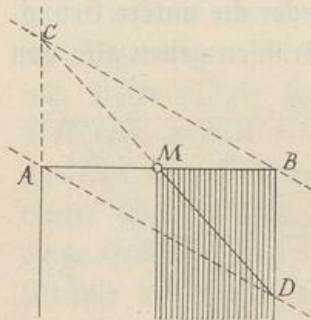


Abb. 138

Es versteht sich wohl von selbst, daß die hier gegebene Ableitung nicht nur für den vertikal stehenden und auch nicht nur für den normalen Zylinder, sondern für jeden beliebig abgeschnittenen Kreis- oder elliptischen Zylinder in ganz beliebiger Lage gilt. Bei jedem solchen Zylinder ist der Schlag-



Schatten, den der Rand der Abschnittfläche auf die innere Wand wirft, eine halbe Ellipse.

Da wir nunmehr den Schatten eines beliebigen Punkts auf eine vertikale Zylinderfläche finden können, bietet die Ermittlung des von einem beliebigen Körper auf den Zylinder geworfenen Schlagschattens keine Schwierigkeiten mehr. So zeigen Abb. 139, 140, 141 die Schlagschatten, die eine quadratische und eine kreisrunde Deckplatte, ein senkrecht stehendes Prisma, eine Pyramide, ein in lotrechter Ebene liegender Kreis auf den vertikalen Zylinder werfen. — Mit Vorteil und in

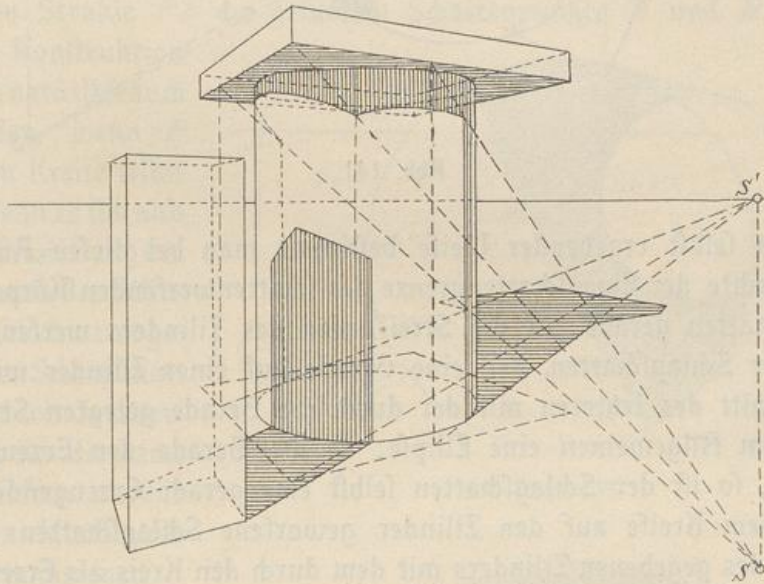


Abb. 139

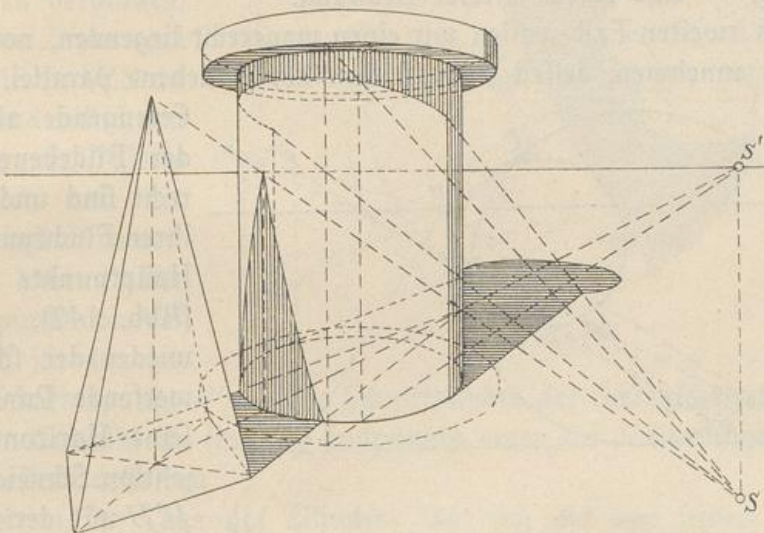


Abb. 140



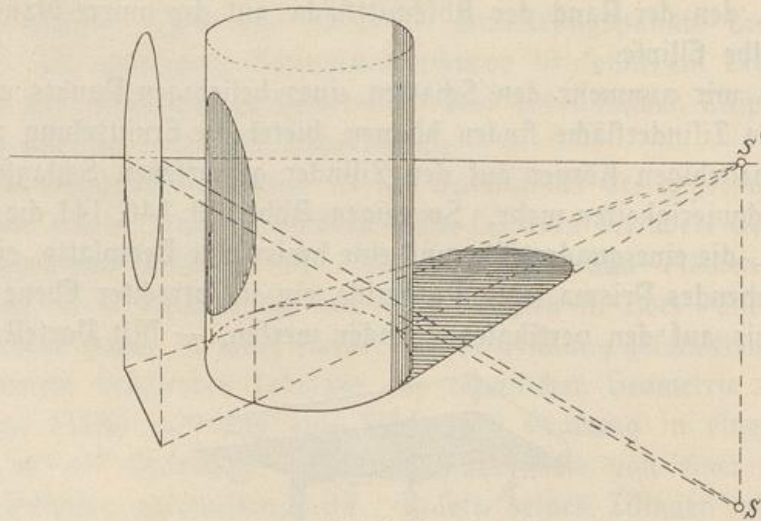


Abb. 141

sich von selbst ergebender Weise bestimmt man bei diesen Aufgaben die Punkte der Eigenschattengrenze des Schattenwerfenden Körpers, die ihre Schatten gerade auf die Streiflinien des Zylinders werfen.

Der Schlagschatten, den eine Gerade auf einen Zylinder wirft, ist als Schnitt des letzteren mit der durch die Gerade gelegten Strahlen-ebene im Allgemeinen eine Ellipse; ist die Gerade den Erzeugenden parallel, so ist der Schlagschatten selbst eine gerade Erzeugende. Der von einem Kreise auf den Zylinder geworfene Schlagschatten ist der Schnitt des gegebenen Zylinders mit dem durch den Kreis als Erzeugende bestimmten Strahlenzylinder, also — als Schnitt zweier Zylinder zweiter Ordnung — eine Kurve vierter Ordnung.

Als zweiten Fall wollen wir einen wagerecht liegenden, normalen Zylinder annehmen, dessen Grundflächen der Bildebene parallel, dessen

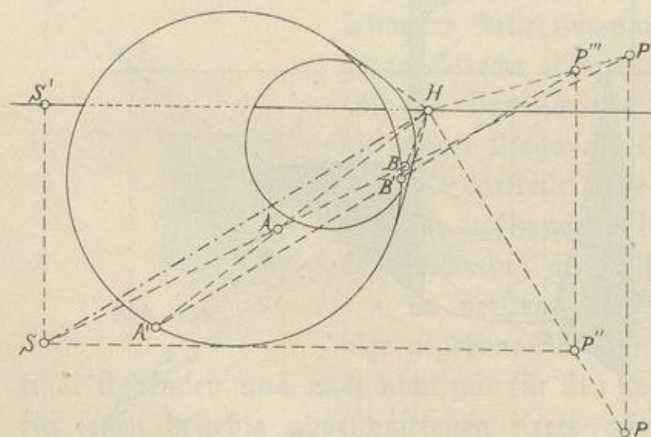


Abb. 142

Erzeugende also auf der Bildebene senkrecht sind und daher ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkte haben (Abb. 142).  $P$  sei wieder der Schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Horizontalprojektion. Schneiden wir  $P'H$  mit der in der Grundebene liegenden



Seite des dem Kreise umschriebenen Quadrats, ziehen von diesem Schnittpunkte  $P''$  aus eine Vertikale und schneiden sie mit  $PH$ , so ist der Schnittpunkt  $P'''$  die Projektion von  $P$  auf die Grundfläche des Zylinders. Die Projektionen der Strahlen auf dieselbe Grundfläche sind, wie wir schon an der Abbildung 130 erkannten, der Linie  $HS$  parallel; ziehen wir also von  $P'''$  aus eine Parallele zu  $HS$ , so stellt diese die Projektion des durch  $P$  gehenden Strahls auf die Grundfläche dar. Sie schneidet den Grundkreis in  $A'$  und  $B'$ ; verbinden wir also diese Punkte mit  $H$ , so sind die Schnittpunkte der Linien  $HA'$  und  $HB'$  mit dem Strahle  $PS$  die gesuchten Schattenpunkte  $A$  und  $B$ .

Die Konstruktion läßt sich natürlich auch anwenden, wenn  $P$  auf dem Kreise selbst liegt, wenn es sich also um die Ermittlung des vom Rande des Zylinders in sein Inneres geworfenen Schlagschattens handelt. Jetzt vereinfacht sich die Sache noch insofern, als wir nur den auf dem Rande angenommenen

Punkt  $P$  (s. Abb. 143) mit  $S$  zu verbinden, dann von  $P$  aus eine Parallele zu  $HS$  zu ziehen und endlich den Schnittpunkt  $B$  dieser Parallelen und des Kreises mit  $H$  zu verbinden haben. Der Schnittpunkt von  $HB$  und  $PS$  ist der gesuchte Schattenpunkt  $P'$ .

— Die Schnittpunkte des Schlagschattenrandes mit dem Grundkreise sind die Endpunkte eines auf  $HS$  rechtwinkligen Durchmessers desselben.

Bei dieser Lage des Zylinders läßt sich der von seinem Rande in sein Inneres geworfene Schlagschatten noch auf eine andere Weise

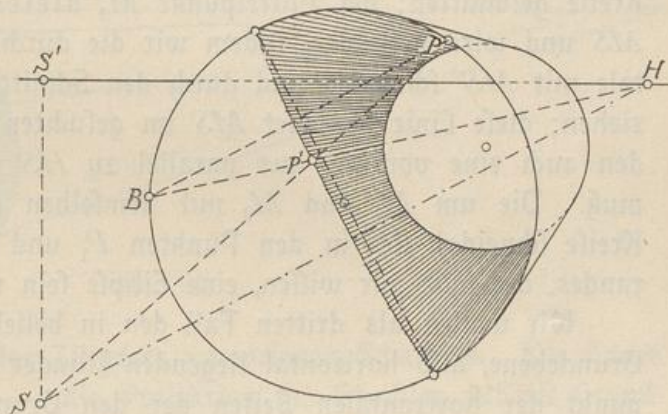


Abb. 143

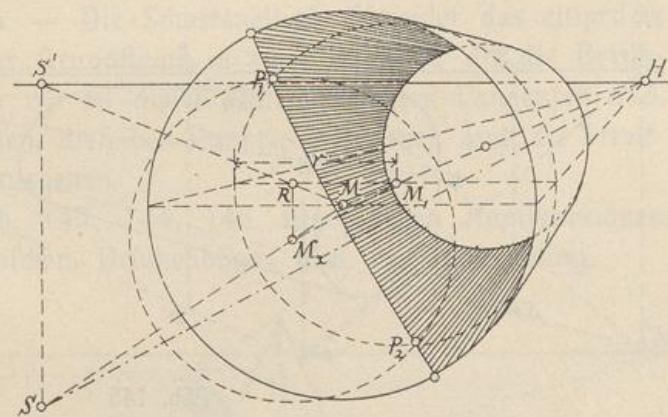


Abb. 144



finden. Legen wir nämlich in beliebiger Entfernung eine der Bildebene parallele Ebene durch den Zylinder, so schneidet sie ihn in einem der Bildebene parallelen Kreise vom Radius des Grundkreises. Dieser Kreis bildet sich wieder als Kreis ab, dessen Mittelpunkt  $M_1$  (Abb. 144) auf der Axe  $MH$  beliebig angenommen werden kann und dessen Radius  $r$  sich aus dem Horizontalschnitte direkt ergibt. Die durch alle Punkte des Grundkreises gehenden Strahlen bilden einen schiefen Zylinder, dessen Axe der durch den Mittelpunkt  $M$  des Grundkreises gehende Strahl  $MS$  ist. Dieser Strahlenzylinder wird von der Hülfs-ebene ebenfalls in einem sich als Kreis vom Radius  $r$  abbildenden Kreise geschnitten; der Mittelpunkt  $M_2$  dieses Bildkreises liegt auf  $MS$  und wird gefunden, indem wir die durch  $M_1$  gehende Horizontale mit  $MS'$  schneiden und durch den Schnittpunkt  $R$  eine Lotrechte ziehen; diese Linie schneidet  $MS$  im gesuchten Mittelpunkt  $M_2$ , durch den auch eine von  $M_1$  aus parallel zu  $HS$  gezogene Gerade gehen muß. Die um  $M_1$  und  $M_2$  mit demselben Radius  $r$  beschriebenen Kreise schneiden sich in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  des Schlagschattenrandes, der, wie wir wissen, eine Ellipse sein muß.

Wir wollen als dritten Fall den in beliebiger Richtung auf der Grundebene, also horizontal liegenden Zylinder betrachten. Der Fluchtpunkt der horizontalen Seiten der den Grundflächen umschriebenen Quadrate sei  $F_1$  (Abb. 145), der Fluchtpunkt der Erzeugenden  $F_2$ ;  $P$  sei wieder der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Horizontalprojektion.

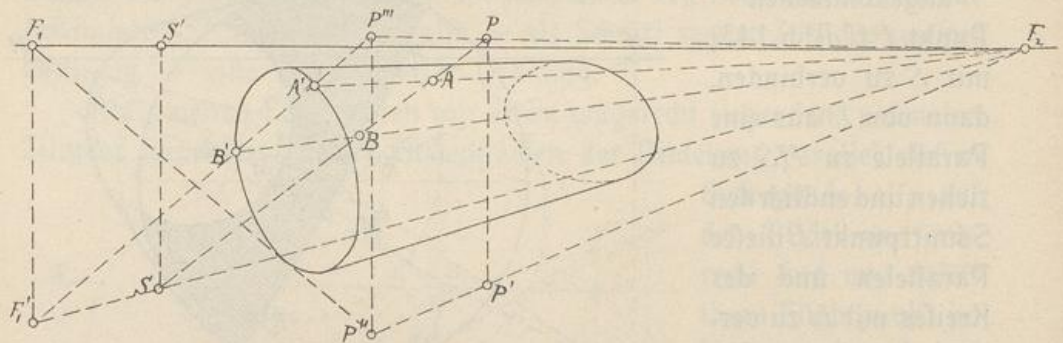


Abb. 145

Wir haben nun den Lichtstrahl  $SP$  auf die Grundfläche des Zylinders zu projizieren; die Projektion muß durch den uns bereits bekannten Fluchtpunkt  $F_1'$  der Projektionen der Strahlen auf die Grundfläche gehen, den wir bekanntlich finden, indem wir eine durch  $F_1$  gezogene Vertikale mit  $F_2S$  schneiden. — Ziehen wir ferner  $F_2P'$ , schneiden diese Linie mit der in der Grundebene liegenden Quadratseite, ziehen



durch den Schnittpunkt  $P''$  eine Vertikale und schneiden sie mit  $F_2P$ , so ist der Schnittpunkt  $P'''$  die Projektion von  $P$  auf die Grundfläche des Zylinders, also  $P'''F_1'$  die Projektion des Lichtstrahls auf dieselbe Ebene. Sie schneidet den Umriss der Grundfläche in  $A'$  und  $B'$ ; verbinden wir diese Punkte mit  $F_2$ , so sind die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  der Verbindungslinien mit dem Strahle  $SP$  dessen Schnittpunkte mit der Zylinderfläche, also die gesuchten Schattenpunkte.

Nehmen wir den Punkt  $P$  auf dem Umriss der Grundfläche an, so ist sein Schatten  $P'$  (s. Abb. 146) ein Punkt des von diesem Um-

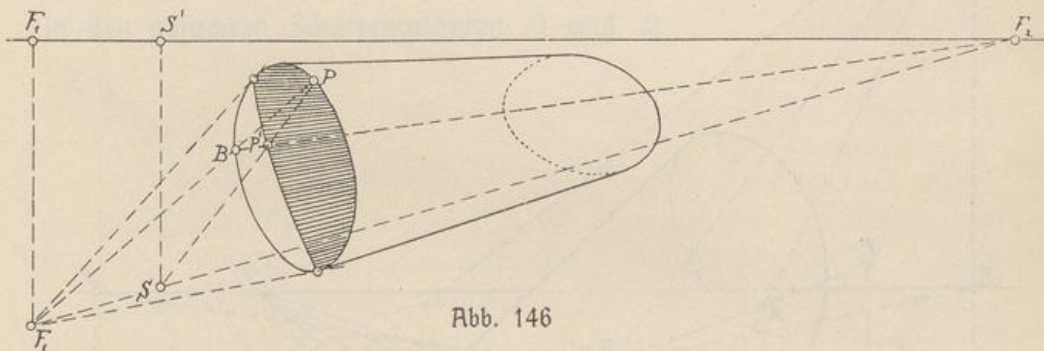


Abb. 146

risse in das Innere des Zylinders geworfenen Schattens. Wir finden ihn, indem wir  $PF_1'$  — die Projektion des Strahles auf die Grundfläche des Zylinders — ziehen, den zweiten Schnittpunkt  $B$  dieses Strahles und der Ellipse mit  $F_2$  verbinden und diese Linie mit dem Strahle  $PS$  schneiden. — Die Schattenellipse schneidet das elliptische Bild des Umrisses der Grundfläche in zwei Punkten, die die Berührungspunkte der von  $F_1'$  an diesen Umriss gelegten Tangenten sind. Es sind, wie wir wissen, dieselben Punkte, von denen auch die Streiflinien des Zylinders ausgehen.

Die in den Abb. 143, 144, 146 angegebenen Konstruktionen kommen bei Fensterbänken, Brückenbögen usw. zur Anwendung.

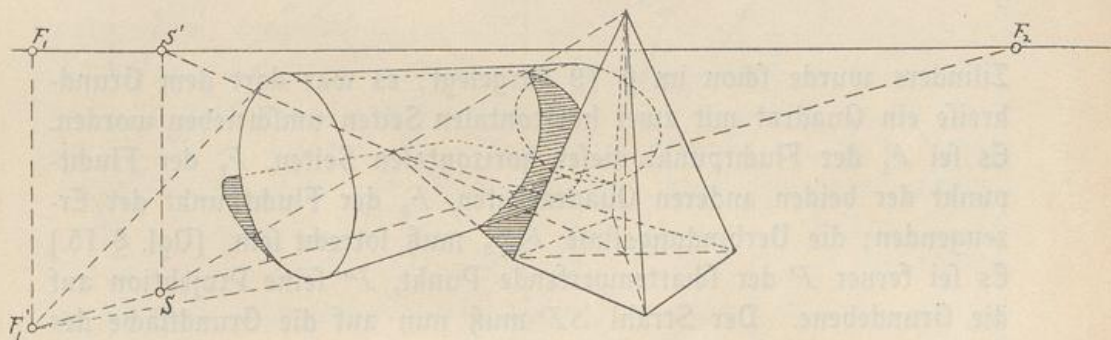


Abb. 147







Grundfläche sind parallel, besitzen also einen Fluchtpunkt  $F'$ , der der Schnittpunkt von  $F_1F_2$  und  $F_3S$  sein muß, weil diese Projektionen in der Grundfläche, deren Fluchtlinie  $F_1F_2$  ist, und weil sie ferner in den Erzeugenden parallelen Strahlenebenen, deren Fluchtlinie  $F_3S$  ist, liegen. Ist nun  $F_3'$  die Projektion von  $F_3$  auf den Horizont,  $P''$  der Schatten von  $P$  auf die Grundebene, so ist  $R$ , der Schnittpunkt der in die Grundebene fallenden Quadratseite mit  $F_3'P''$  die Projektion von  $P''$  auf diese Quadratseite,  $F'R$  also die gesuchte Projektion des Strahls. Sie schneidet den Umriß der Grundfläche in  $A'$  und  $B'$ ; die Verbindungslinien  $A'F_3$  und  $B'F_3$  schneiden nun den Strahl  $PS$  in den gesuchten Schattenpunkten  $A$  und  $B$ .

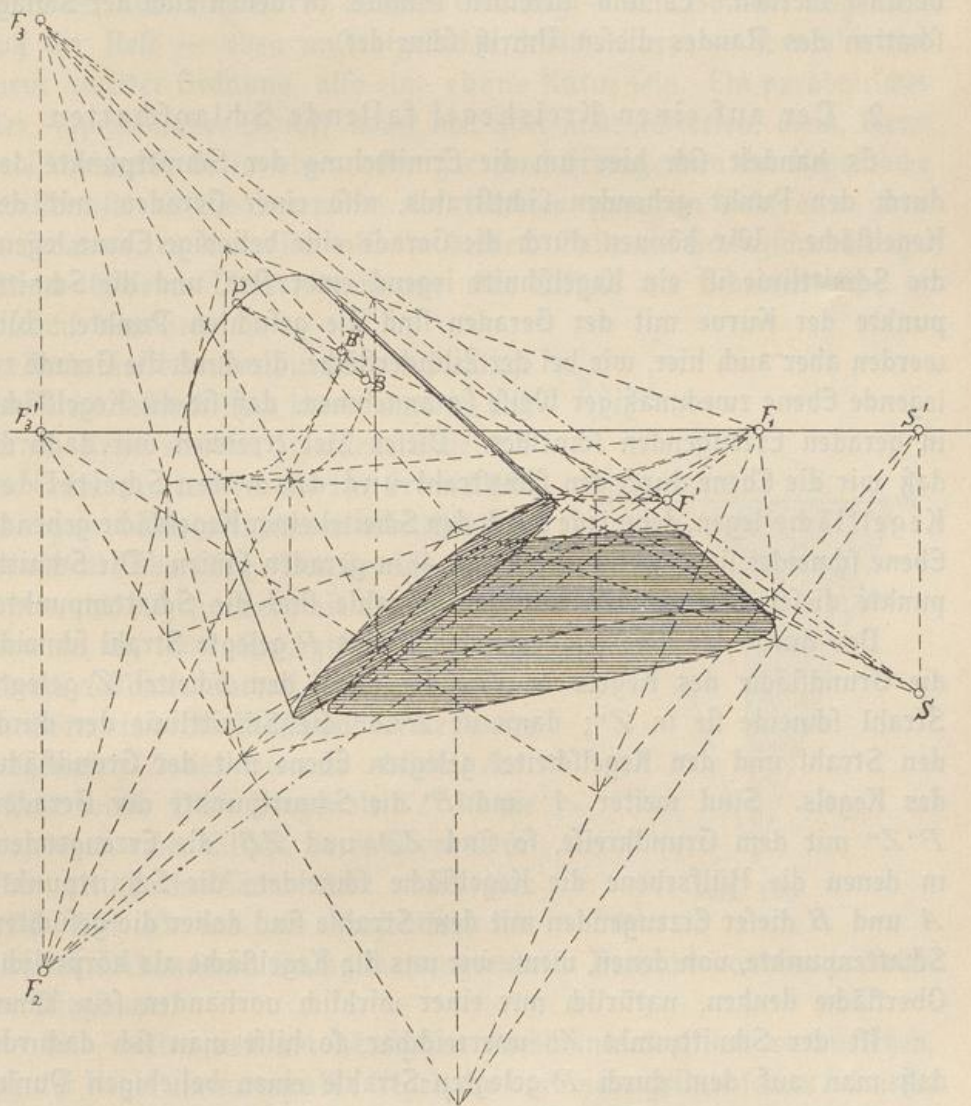


Abb. 149



In Abb. 149 ist der Fall des auf dem Rande selbst liegenden Punktes  $P$  behandelt. Um den von ihm in das Innere des Zylinders fallenden Schatten  $B$  zu finden, ziehen wir einfach die Linie  $PF'$ , die den Rand zum zweiten Male in  $B'$  schneidet, ziehen weiter  $F_3B'$  und  $PS$ . Diese beiden Linien schneiden sich im gesuchten Schattenpunkte  $B$ . — Auf diese Weise wurde der in der Abbildung unsichtbare Schatten ermittelt, den der Rand in das Innere des Zylinders wirft. Dieselbe Figur zeigt auch den von dem Zylinder in dieser allgemeinsten Lage auf die Grundebene geworfenen Schlagschatten sowie die Streiflinien, die von den Punkten der Grundflächenumrisse ausgehen, in denen diese von den von  $F'$  aus an sie gezogenen Tangenten berührt werden. Es sind dieselben Punkte, in denen auch der Schlagschatten des Randes diesen Umriß schneidet.

## 2. Der auf einen Kreiskegel fallende Schlagschatten.

Es handelt sich hier um die Ermittlung der Schnittpunkte des durch den Punkt gehenden Lichtstrahls, also einer Geraden, mit der Kegelfläche. Wir können durch die Gerade eine beliebige Ebene legen; die Schnittlinie ist ein Kegelschnitt irgend einer Art, und die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden sind die gesuchten Punkte. Wir werden aber auch hier, wie bei der Zylinderfläche, die durch die Gerade zu legende Ebene zweckmäßiger Weise so annehmen, daß sie die Kegelfläche in geraden Erzeugenden schneidet. Dieses Ziel erreichen wir dadurch, daß wir die Ebene durch den Lichtstrahl und durch den Scheitel der Kegelfläche legen, denn jede durch den Scheitel einer Kegelfläche gehende Ebene schneidet sie — wenn überhaupt — in geraden Linien. Die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Strahle sind die Schattenpunkte.

Der durch den Schattenwerfenden Punkt  $P$  gelegte Strahl schneide die Grundfläche des Kegels in  $P''$ , der durch den Scheitel  $Z$  gelegte Strahl schneide sie in  $Z''$ ; dann ist  $P''Z''$  die Schnittlinie der durch den Strahl und den Kegelscheitel gelegten Ebene mit der Grundfläche des Kegels. Sind weiter  $A'$  und  $B'$  die Schnittpunkte der Geraden  $P''Z''$  mit dem Grundkreise, so sind  $ZA'$  und  $ZB'$  die Erzeugenden, in denen die Hülfebene die Kegelfläche schneidet; die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  dieser Erzeugenden mit dem Strahle sind daher die gesuchten Schattenpunkte, von denen, wenn wir uns die Kegelfläche als körperliche Oberfläche denken, natürlich nur einer wirklich vorhanden sein kann.

Ist der Schnittpunkt  $Z''$  unerreichbar, so hilft man sich dadurch, daß man auf dem durch  $P$  gelegten Strahle einen beliebigen Punkt  $Q$  annimmt und den Schnittpunkt  $Q''$  der Verbindungslinie  $ZQ$  mit



der Grundfläche des Kegels auffucht. Da diese Verbindungslinie ebenfalls in der durch den Scheitel des Kegels und den Punkt  $P$  gehenden Lichtstrahlenebene liegen muß, ist jetzt  $P''Q''$  die Schnittlinie dieser Ebene mit der Grundfläche des Kegels und schneidet deren Umriss in den Punkten  $A'$  und  $B'$ .

Der Schlag Schatten des Randes in das Innere der Kegelfläche ist, wie beim Zylinder, stets eine Ellipse. Diese Schattenkurve ist nämlich der Schnitt der Kegelfläche mit der durch den Rand der Grundfläche gehenden, durch Lichtstrahlen gebildeten Zylinderfläche; diese Schnittlinie muß aber, als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, eine Kurve vierter Ordnung sein. Da nun der Umriss der Grundfläche — ein Kreis, also eine Kurve zweiter Ordnung — dem Schnitte angehört, muß der Rest — eben unsere gesuchte Schattenkurve — ebenfalls eine Kurve zweiter Ordnung, also eine ebene Kurve sein. Ein parabolischer oder hyperbolischer Schnitt kann hier aber nicht auftreten, denn, wenn die schneidende Ebene einer oder gar zwei Erzeugenden der Kegelfläche parallel ist, ist die Innenseite der letzteren ganz im Licht oder ganz im Schatten, es kann sich also in keinem Falle ein Schlag Schatten des Randes bilden. Daher kann nur eine Ellipse als Schattenkurve in Betracht kommen.

Auch hier können wir uns die Sachlage sehr leicht dadurch noch klarer machen, daß wir den Kegel und den Strahlenszylinder auf eine Ebene projizieren, die zur Grundfläche des Kegels rechtwinklig und den Lichtstrahlen parallel ist (Abb. 150). Der Grundkreis des Kegels, der zugleich Leitlinie des Strahlenszylinders ist, stellt sich jetzt als die gerade Strecke  $AB$  dar, während der zweite Teil des Durchschnitts beider Flächen durch die zweite Diagonale  $CD$  des Vierecks  $ACBD$  dargestellt wird. Diese Diagonale  $CD$  ist die Projektion einer Ellipse, deren Ebene senkrecht zur Zeichenfläche steht, und das Stück  $ED$  ist das als Projektion der wirklich vorhandenen Schlag Schatten grenze in Betracht kommende Stück der Diagonale.

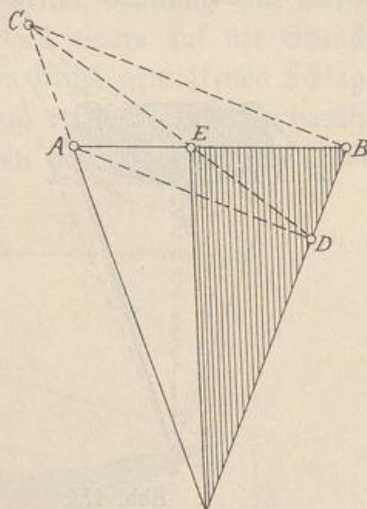


Abb. 150

Wir wollen den am häufigsten vorkommenden Fall voraussetzen, daß der Kegel ein normaler Kegel, die Verbindungslinie seines Scheitels mit dem Mittelpunkte der Grundfläche also auf letzterer senkrecht sei.



Steht der Kegel mit seiner Grundfläche auf der Grundebene, so ist die Sache überaus einfach.  $P$  sei wieder der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Horizontalprojektion; der durch  $P$  gelegte Strahl schneidet die Grundebene in  $P''$ , dem Schnittpunkte von  $SP$  und  $S'P'$ . Ebenso schneidet der durch den Scheitel  $Z$  gelegte Strahl die Grundebene in  $Z''$ , dem Schnittpunkte von  $SZ$  und  $S'Z'$  (f. Abb. 151).

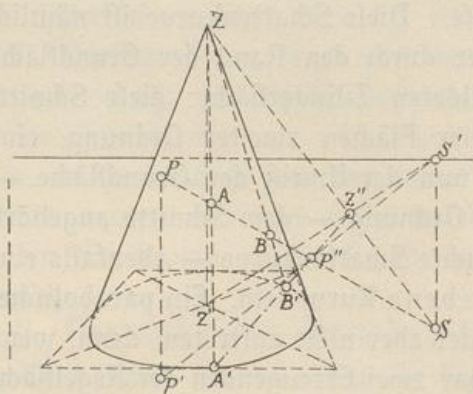


Abb. 151

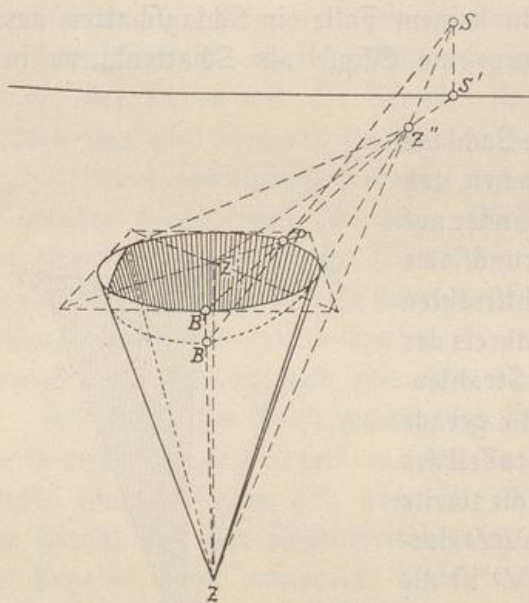


Abb. 152

Die Verbindungslinie  $P''Z''$  ergibt mit dem Umriss der Grundfläche die Schnittpunkte  $A'$  und  $B'$ , deren Verbindungslinien mit  $Z$  den Strahl in  $A$  und  $B$ , den gesuchten Schattenpunkten, schneiden.

Die Abb. 152 zeigt die entsprechende Konstruktion für den auf der Spitze stehenden Kegel und einen im Umriss der Grundfläche liegenden Punkt  $P$ , der jetzt zugleich der Punkt  $A'$  und der Punkt  $A$  ist. Wir haben also nur den durch den Scheitel gehenden Strahl mit der Ebene der Grundfläche zu schneiden und den Schnittpunkt  $Z''$  mit  $P$  zu verbinden; die Verbindungslinie schneidet den Grundriß zum zweiten Male in  $B'$ , und der Schnittpunkt von  $ZB'$  mit dem Strahle ist der gesuchte Schattenpunkt. Auf diese Weise finden wir beliebig viele Punkte der gesuchten Ellipse; sie muß den Umriss der Grundfläche

offenbar in den beiden Punkten schneiden, von denen die Streiflinien ausgehen.

Der Schatten einer beliebigen Geraden auf die Kegelfläche ist selbstverständlich ein Kegelschnitt — der Schnitt der Kegelfläche mit der durch die Gerade gehenden Strahlenebene. Die Art der Schnittlinie hängt offenbar von der Lage der Geraden ab; beispielsweise ist



der Schatten einer vertikalen Geraden als Schnitt der Kegelfläche mit einer der Axe parallelen Ebene stets ein Hyperbelast. Die Abb. 153 zeigt den Schlagschatten, den ein auf der Grundebene stehendes, normales Prisma auf den Kegel wirft; der Schatten, den die rechte, vordere Prismenkante auf den Kegel wirft, ist eine Hyperbel.

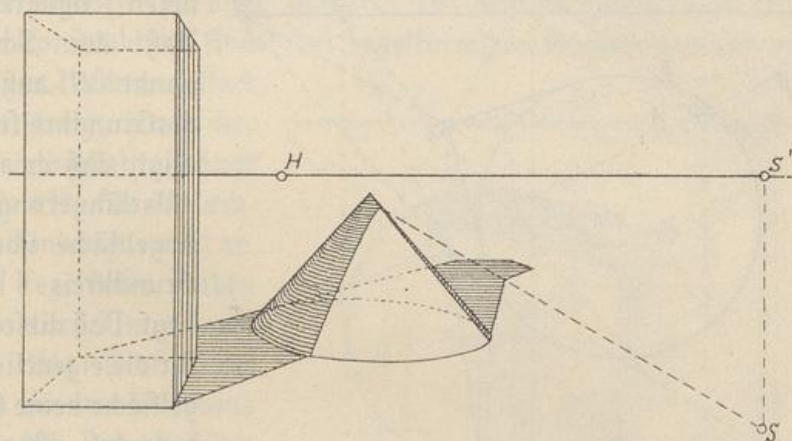


Abb. 153

Der Schatten eines Kreises auf eine Kegelfläche ist als Schnitt einer Zylinderfläche mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung eine Kurve vierter Ordnung; so zeigt Abb. 154 den von einem auf der Grundebene stehenden, normalen Zylinder auf den Kegel geworfenen Schlagschatten. Außer der Kurve vierter Ordnung tritt hier ein sie berührender Hyperbelbogen auf, der der Schatten der vorderen Streiflinie des Zylinders ist.

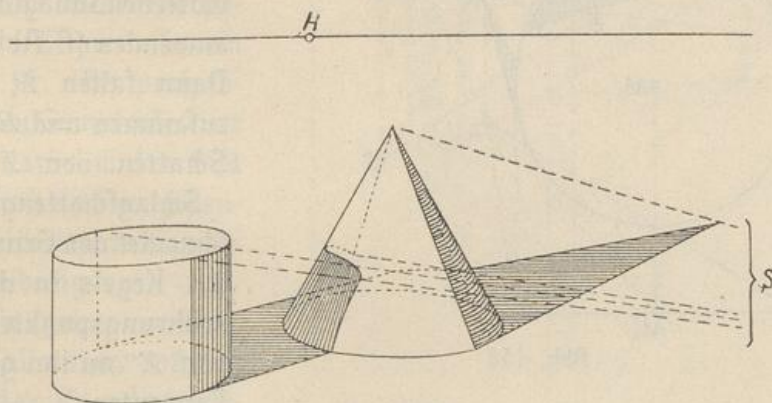


Abb. 154

Als zweiten wollen wir den Fall betrachten, daß die Grundfläche des Kegels der Bildebene parallel, seine Axe also auf ihr senkrecht ist. Projizieren wir den Grundkreis des Kegels auf die



Grundebene, so erhalten wir eine zur Grundlinie parallele gerade Strecke, deren Länge gleich dem Durchmesser des die Grundfläche darstellenden Kreises ist. Die in Abb. 155 dargestellte Konstruktion entspricht genau der vorhin gegebenen allgemeinen Erläuterung und bedarf

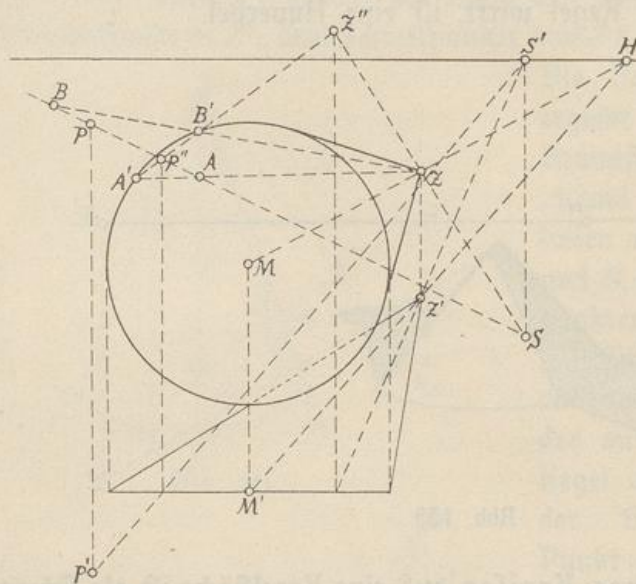


Abb. 155

daher keiner besonderen Beschreibung. Daß der Schattenpunkt  $B$  außerhalb des Grundkreises fällt, zeigt, daß er auf der Verlängerung der Kegelfläche über den Grundkreis hinaus liegt. Daß dieser Kreis für die eigentliche Kegelfläche keine Grenze bedeutet, ist uns ja hinlänglich bekannt.

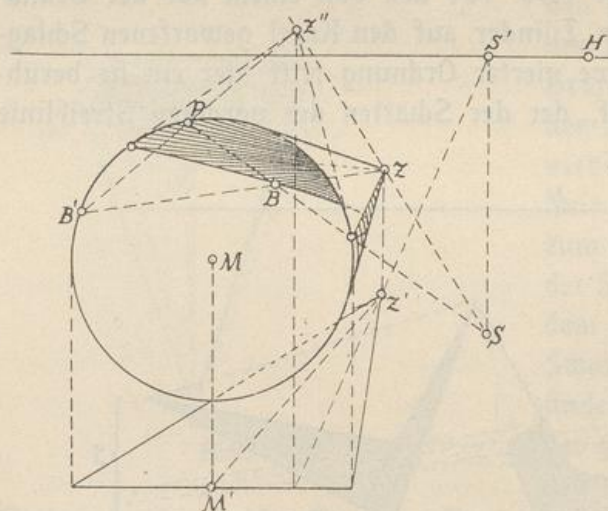


Abb. 156

Dieselbe Konstruktion läßt sich natürlich für auf dem Grundkreise liegende Punkte, also zur Ermittlung des von diesem Kreise in das Innere der Kegelfläche geworfenen Schlagshattens anwenden (s. Abb. 156). Dann fallen  $P, A, A'$  zusammen und  $B$  ist der Schatten von  $P$ . Die

Schlagshattengrenze schneidet den Grundkreis des Kegels in den Berührungspunkten der von  $Z''$  an ihn gelegten Tangenten.

Wir können aber in diesem Falle auch wieder, wie bei dem in derselben Lage befindlichen Zylinder, der Bildebene parallele Hülfs-ebenen anwenden. Eine solche Ebene schneidet die Kegelfläche in einem sich als Kreis abbildenden Kreise und auch die Zylinderfläche der durch



die Punkte des Grundkreises gehenden Strahlen wird in einem sich als Kreis abbildenden Kreise geschnitten. Die Schnittpunkte der in derselben Ebene liegenden Kreise sind Punkte der gesuchten Schattenkurve. — Die Abb. 157 zeigt die Konstruktion deutlich; die Radien der beiden zur Bestimmung eines Punkts der Kurve erforderlichen Kreise ergeben sich ohne Weiteres aus dem perspektivischen Grundrisse. Diese Konstruktion findet bei kegelförmigen Bogenleibungen an Türen, Fenstern, Nischen vielfach Anwendung, und ihre Anwendbarkeit hängt von dem Profile der Leibung offenbar garnicht ab. Eine Kegelfläche haben wir natürlich nur dann, wenn das Profil eine gegen die zur Bildebene senkrechte Axe geneigte gerade Linie ist. Aber auch bei jedem andern Profile läßt sich, wie man sofort erkennt, dieselbe Konstruktion anwenden, wenn nur die Leibungsfläche eine Umdrehungsfläche, ihr Schnitt mit einer zur Bildebene parallelen Ebene also ein Kreis ist. Im perspektivischen Grundrisse tritt dann natürlich das Bild des durch die Axe gehenden Horizontalschnitts der Leibung auf.

Wir gehen nun zu dem Falle über, daß die Axe des Kegels horizontal, aber nicht rechtwinklig zur Bildebene liegt. Jetzt ist die Grundfläche des Kegels

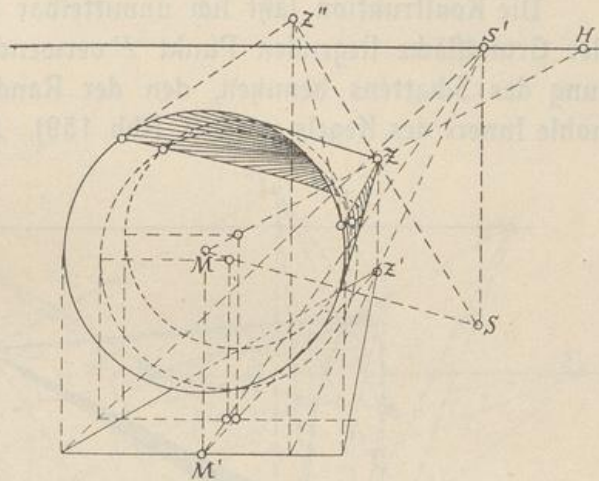


Abb. 157

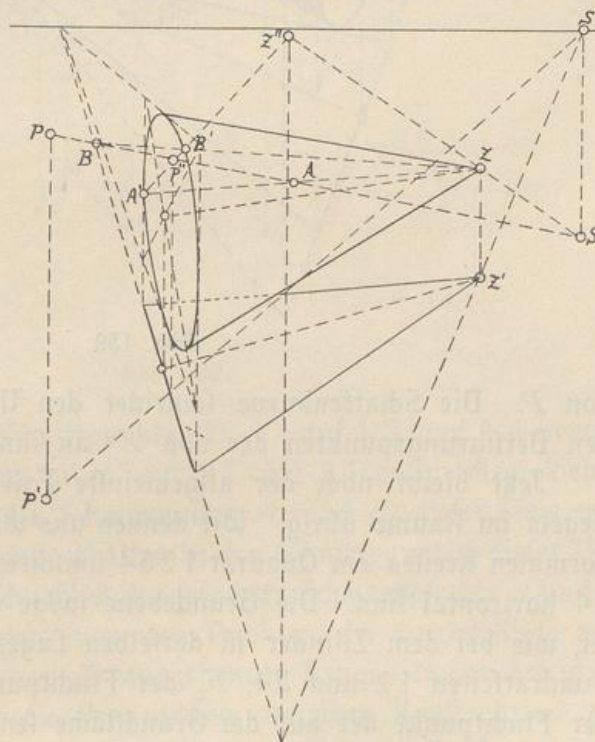


Abb. 158



vertikal, ihre Horizontalprojektion ist also wie im vorigen Falle eine gerade Strecke, die aber hier nicht dem Horizonte parallel ist. Die Horizontalprojektion des ganzen Kegels ist ein Dreieck. — Die Konstruktion ist genau nach dem allgemein gültigen Schema auszuführen (s. Abb. 158) und bietet durchaus keine Schwierigkeiten. Sie ist aus der Abbildung vollständig erkennbar. Der Schnittpunkt  $B$  liegt auf der Verlängerung der Kegelfläche.

Die Konstruktion läßt sich unmittelbar auch für einen im Umriss der Grundfläche liegenden Punkt  $P$  verwenden und also zur Ermittlung des Schattens benutzen, den der Rand der Grundfläche in das hohle Innere des Kegels wirft (s. Abb. 159).  $B$  ist der gesuchte Schatten

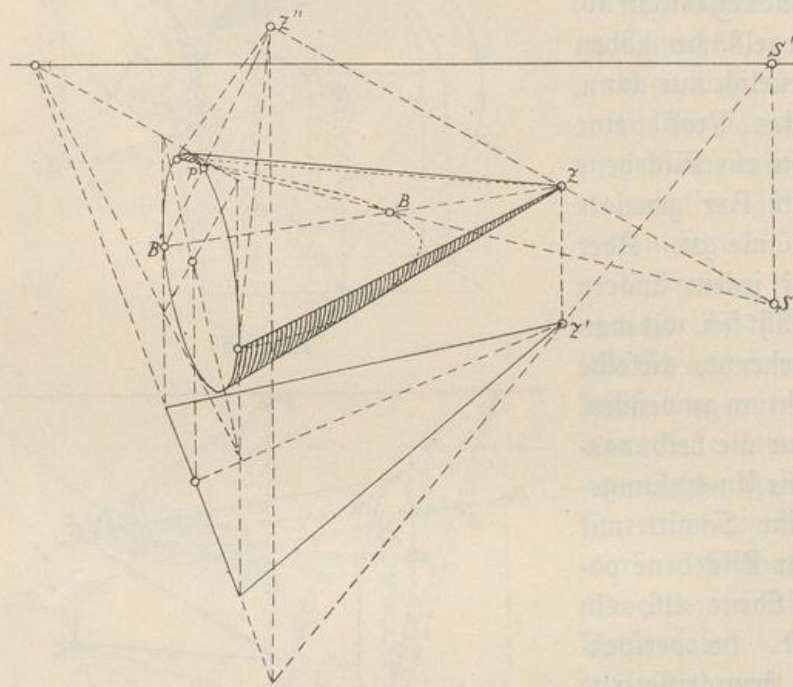


Abb. 159

von  $P$ . Die Schattenkurve schneidet den Umriss der Grundfläche in den Berührungspunkten der von  $Z''$  an ihn gezogenen Tangenten.

Jetzt bleibt noch der allgemeinste Fall der beliebigen Lage des Kegels im Raume übrig. Wir denken uns wieder dem Grundkreise des normalen Kreises ein Quadrat  $1234$  umschrieben, dessen Seiten  $12$  und  $34$  horizontal sind. Die Grundebene möge durch  $34$  gelegt sein. Es sei, wie bei dem Zylinder in derselben Lage,  $F_1$  der Fluchtpunkt der Quadratseiten  $12$  und  $34$ ,  $F_2$  der Fluchtpunkt von  $13$  und  $24$ ,  $F_3$  der Fluchtpunkt der auf der Grundfläche senkrechten Höhe des Kegels (s. Abb. 160). Dann ist die Verbindungslinie  $F_2F_3$  lotrecht und ihr



Schnittpunkt  $F_3'$  mit dem Horizonte der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen von 13, 24 und der Höhe. Die Horizontalprojektion  $S'P'$  des durch  $P$  gehenden Strahls schneidet 1'3 und 34 in  $V'$  und  $W'$ ; ersterem Punkt entspricht im Raume der Punkt  $V$ ; der Schnittpunkt  $P''$  der Linie  $VW$  mit dem Strahle  $SP$  ist also dessen Schnitt mit der Grundfläche. In ganz derselben Weise ermitteln wir den Schnittpunkt  $Z''$  des durch die Kegelspitze gelegten Strahls mit der

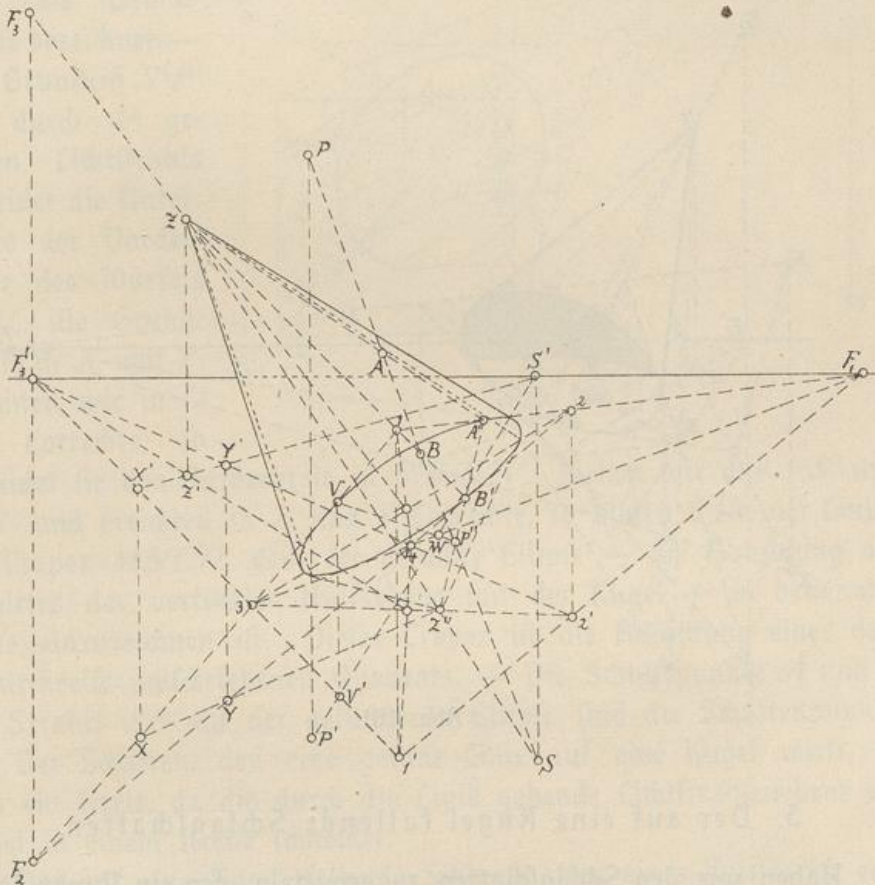


Abb. 160

Grundfläche, wobei die Schnittpunkte  $X'$ ,  $Y'$  auf 1'3 und 2'4 benutzt werden, denen die Punkte  $X$ ,  $Y$  auf 13 und 24 entsprechen, ziehen dann  $P''Z''$ , verbinden die Schnittpunkte  $A'$  und  $B'$  dieser Linie und der Grundellipse mit  $Z$  und erhalten in den Schnittpunkten dieser Verbindungslinien mit  $PS$  schließlich die gesuchten Schattenpunkte  $A$  und  $B$ .

Die Streiflinien gehen von den Punkten der Grundellipse aus, in denen diese von den von  $Z''$  ausgehenden Tangenten berührt wird.

Die Abb. 161 zeigt die Anwendung derselben Konstruktion auf einen Punkt des Umrisses der Grundfläche und damit die Ermittlung



des Schlagschattens, den dieser Umriss in das Innere der hohlen Kegel-  
fläche wirft.

Um in diesem Falle und den früher behandelten ähnlichen Fällen  
den Berührungspunkt der Schlagschattenkurve mit der Wendelinie des  
Kegels zu finden, braucht man nur den Punkt  $P$  so zu bestimmen,  
daß der zugehörige Punkt  $B'$  in die Wendelinie fällt, also ihr Be-  
rührungspunkt mit der Grundellipse ist.

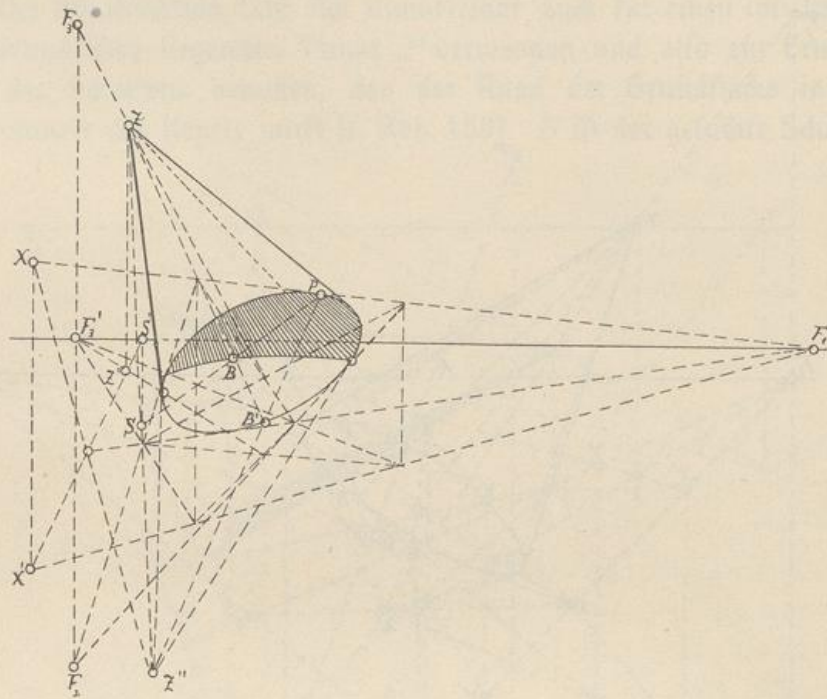


Abb. 161

### 3. Der auf eine Kugel fallende Schlagschatten.

Haben wir den Schlagschatten zu ermitteln, den ein Punkt  $P$  auf  
eine Kugel wirft, so legen wir durch ihn einen Lichtstrahl und durch  
diesen eine ganz beliebige Ebene, die die Kugel schneidet. Der Schnitt  
einer Kugel mit einer Ebene ist unter allen Umständen ein Kreis, der  
sich als Kegelschnitt, in den gewöhnlichen Fällen als Ellipse abbildet. Die  
Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit dem Strahle  $SP$  sind dessen  
Schnittpunkte mit der Kugel, von denen einer die physikalische Be-  
deutung des Schattens hat.

Am bequemsten ist es, wenn wir die durch den Strahl zu legende  
Ebene vertikal annehmen. Wir können uns nun der Kugel einen  
Würfel umschrieben denken, der mit einer Seitenfläche in der Grund-



ebene liegt, während zwei andere Seitenflächen der Bildebene parallel sind. Die Projektion der Kugel auf die Vorderfläche des Würfels stellt sich als Kreis, die Projektion auf die Grundebene im Allgemeinen als Kegelschnitt, gewöhnlich als Ellipse dar (Abb. 162), die dem Bilde der in die Grundebene fallenden Seitenfläche eingeschrieben ist. Wir wollen den Kreis kurz als Vorderkreis, die Ellipse als Grundellipse bezeichnen. —

Der Grundriß  $S'P'$  des durch  $P$  gelegten Lichtstrahls schneidet die Unterkante der Vorderfläche des Würfels in  $U$ , die Grundellipse in  $X$  und  $Y$ . Errichten wir in  $U$  eine Lotrechte, so

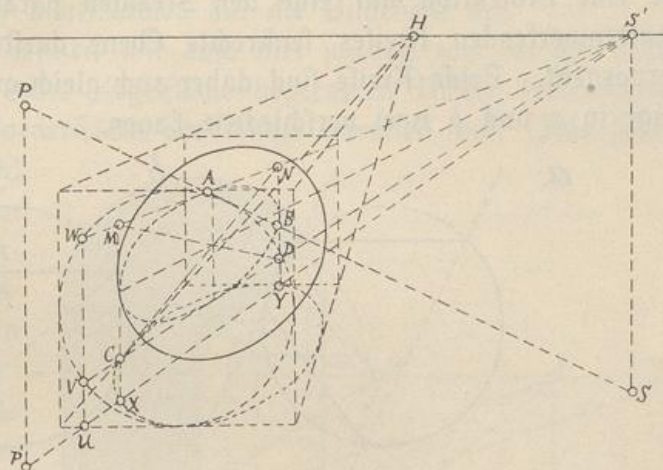


Abb. 162

schneidet sie den Vorderkreis in  $V$  und  $W$ . Ziehen wir nun  $VS'$  und  $WS'$  und errichten in  $X$  und  $Y$  Lotrechte, so bilden diese vier Linien ein Trapez  $MNCD$ , dem die gesuchte Ellipse — die Abbildung des Schnittes der vertikalen Hülfebene mit der Kugel — in bekannter Weise einzuzichnen ist. Dieses Trapez ist die Abbildung eines dem Schnittkreise umschriebenen Quadrats. — Die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  des Strahls  $SP$  mit der gefundenen Ellipse sind die Schattenpunkte.

Der Schatten, den eine gerade Linie auf eine Kugel wirft, ist stets ein Kreis, da die durch die Linie gehende Lichtstrahlenebene die Kugel in einem Kreise schneidet.

Der auf eine Kugel fallende Schlagschatten eines Kreises ist eine Kurve vierter Ordnung — der Schnitt der Kugel mit dem durch den Kreis bestimmten Strahlenszylinder. Diese Kurve vierter Ordnung geht in einen Kreis über, wenn die Ebene des Schattenwerfenden Kreises den Lichtstrahlen parallel ist.

Liegt der Kreis auf der Kugeloberfläche selbst, wirft also der Rand eines durch eine Ebene abgeschnittenen Segments seinen Schlagschatten in das Innere der hohlen Kugel, so hat diese mit dem Strahlenszylinder schon den Schnittkreis gemein; von der Kurve vierter Ordnung, die der vollständige Schnitt darstellen muß, bleibt also nur eine Kurve zweiter Ordnung, also eine ebene Kurve übrig. Da aber der ebene



Schnitt einer Kugel stets ein Kreis ist, muß der Schatten, den ein auf der Kugel liegender Kreis in ihr Inneres wirft, stets wieder ein Kreis sein.

Der Schattenwerfende Kreis und sein Schlagschatten sind ganz einfach Wechselschnitte des Strahlensylinders, was aus der Abb. 163, die eine Projektion auf eine den Strahlen parallele, zur Ebene des Schattenwerfenden Kreises senkrechte Ebene darstellt, ohne Weiteres hervorgeht. Beide Kreise sind daher auch gleich groß. Die Abbildung zeigt in *a* und *b* zwei verschiedene Lagen.

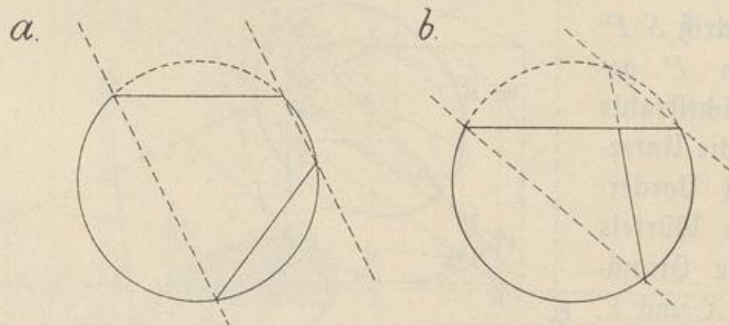


Abb. 163

Als besonders interessantes und oft vorkommendes Beispiel mag der an einer Nische, die oben durch eine Viertelkugel geschlossen ist, auftretende Schlagschatten ermittelt werden. Zunächst soll die Vorderfläche der Nische der Bildebene parallel angenommen werden. Jetzt können wir den Schlagschatten auf zwei verschiedene Arten finden. Erstens können wir die für einen beliebigen Schattenwerfenden Punkt gültige Konstruktion auch auf die Punkte des Schattenwerfenden Kreises anwenden (s. Abb. 164). In der Abbildung ist erstens der noch auf

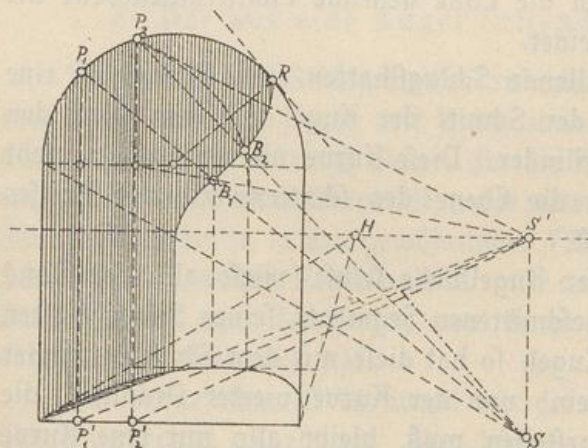


Abb. 164

die Zylinderfläche fallende Schatten  $B_1$  eines Punktes  $P_1$  in sich von selbst ergebender Weise ermittelt worden; auf den Punkt  $P_2$  aber, der seinen Schatten  $B_2$  auf die Kugeloberfläche wirft, wurde die soeben erläuterte, allgemein gültige Konstruktion angewandt. Selbstverständlich kommt hier nur der Bogen der Ellipse



in Betracht, der von  $P_2$  bis an das Bild des Kreises, in dem sich Kugel und Zylinder berühren, reicht. Der Punkt  $R$ , in dem die Schlag-schattengrenze den Grenzkreis der Nische schneidet, ist der Punkt, in dem dieser Kreis von einer zu  $HS$  parallelen Tangente berührt wird, denn diese Verbindungslinie giebt, wie wir schon wissen, die Richtung der Projektionen der Lichtstrahlen auf die Bildebene an.

Zweitens aber können wir auch hier wieder, wie bei der durch eine halbe Zylinder- oder Kegelfläche begrenzten Nische, Hülfs Ebenen benutzen, die der Vorderfläche der Nische parallel sind. Jede solche Ebene schneidet sowohl

die Kugel als auch den durch den Schattenwerfenden Kreis bestimmten Strahlenzylinder in einem Kreise, beide Kreise bilden sich als Kreise ab, und einer der Schnittpunkte dieser Kreise ist offenbar ein Punkt der gesuchten Schattenkurve. Den Radius des Schnittkreises der Ebene und der Kugel finden wir

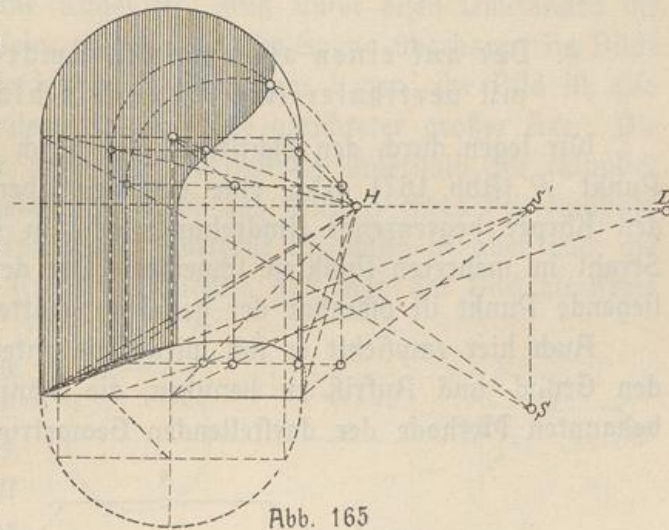


Abb. 165

aber augenscheinlich aus dem Grundrisse mit weit größerer Genauigkeit, als aus dem perspektivischen Bilde, und daher empfiehlt sich hier ausnahmsweise die Benutzung des Grundrisses für die Konstruktion des Schattens. Die Konstruktion selbst geht aus der Abb. 165 mit voller Klarheit hervor.

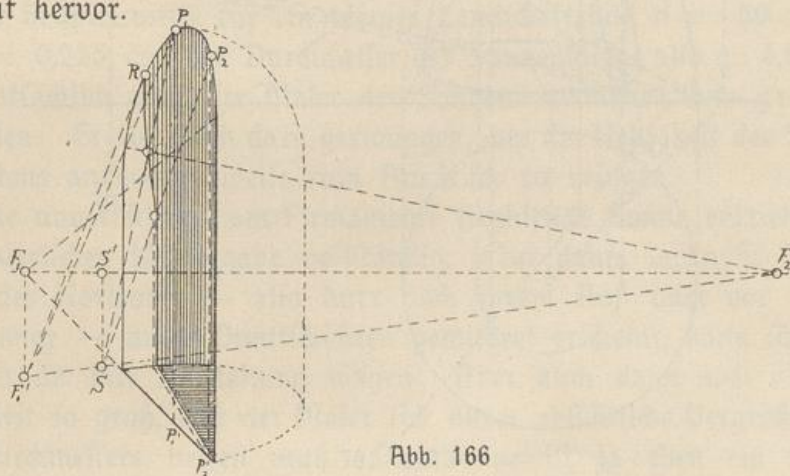


Abb. 166



Ist die Vorderfläche der Nische der Bildebene nicht parallel, so ist natürlicherweise nur noch die erstere Konstruktion anwendbar (Abb. 166). Der Punkt  $R$ , in dem der Schlagshattenumriß den Umriß der Nische schneidet, ist der Berührungspunkt der von  $F_1'$  an letzteren Umriß gelegten Tangente. Dieser Punkt  $F_1'$  ist der Fluchtpunkt der auf die Vorderfläche der Nische projizierten Sonnenstrahlen und wird bekanntlich gefunden, indem man eine durch den Fluchtpunkt  $F_1$  gezogene Lotrechte mit der Verbindungslinie  $F_2S$  schneidet.  $F_1$  und  $F_2$  sind die Fluchtpunkte zweier zu einander rechtwinkliger horizontaler Richtungen.

4. Der auf einen allgemeinen Umdrehungskörper mit vertikaler Axe fallende Schlag Schatten.

Wir legen durch den Lichtstrahl, der durch den Schattenwerfenden Punkt  $P$  (Abb. 167) geht, eine vertikale Ebene. Sie schneidet die den Körper begrenzende Umdrehungsfläche in einer Kurve, die den Strahl in mehreren Punkten schneidet. Der dem Punkte  $P$  zunächst liegende Punkt ist offenbar der gesuchte Schattenpunkt.

Auch hier empfiehlt es sich wieder im Interesse der Genauigkeit, den Grund- und Aufriß zu benutzen, die Schnittkurve also nach der bekannten Methode der darstellenden Geometrie zu konstruieren und

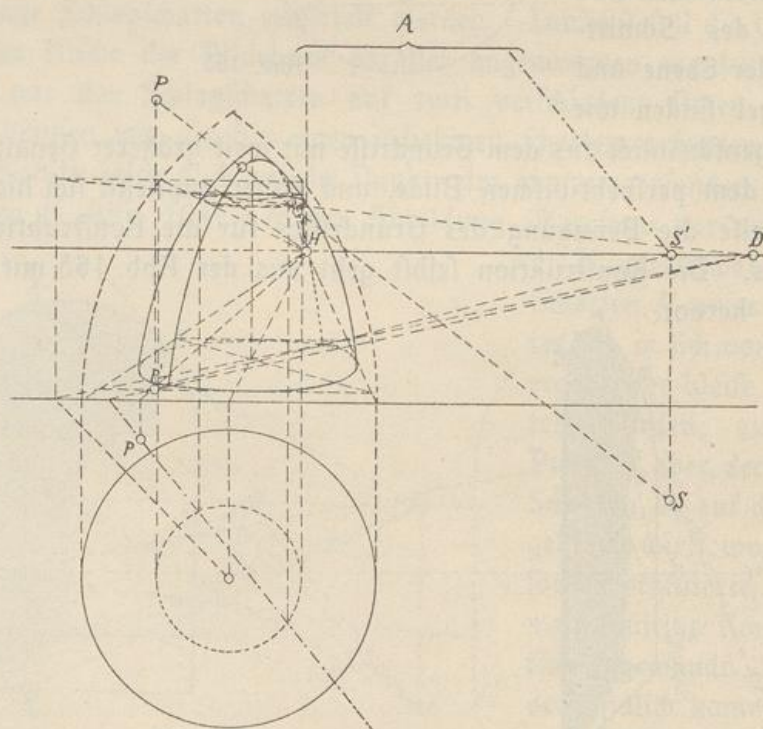


Abb. 167



die gewonnenen Punkte einzeln in das Bild zu übertragen. Die Abb. 167 zeigt deutlich die Ausführung der Konstruktion für einen allgemeinen Punkt. Der dabei benutzte Grundriß des Strahls ist, wie wir wissen, der Verbindungslinie des umgeklappten Auges mit  $S'$  parallel.

### § 34. Die Größe des Sonnenbildes und die Konstruktion des Halbschattens.

Da die Sonne eine Kugel ist, muß unter allen Umständen ihr Bild ein Kegelschnitt sein. Wenn aber die Sonne überhaupt im Bilde erscheinen soll, muß sie hinter der Bildebene liegen; ihr Bild ist also eine Ellipse mit nach dem Hauptpunkte gerichteter großer Ase. Die Sonne kann aber nur dann zur Darstellung innerhalb des räumlich beschränkten Bildes gelangen, wenn das Bild  $S$  ihres Mittelpunkts nur wenig vom Hauptpunkte  $H$  entfernt ist; dann ist aber auch die Ellipse so wenig vom Kreise verschieden, daß man das Bild als Kreis annehmen kann.

Die scheinbare Größe der Sonne schwankt etwas im Laufe des Jahres, ist aber im Durchschnitt etwa  $= 31'$ . Der Radius  $q$  des Sonnenbildes ist



Abb. 168

daher, wie man aus Abb. 168, in der der Winkel viel zu groß gezeichnet ist, sofort erkennt  $= a \cdot \tan 15,5'$ , wenn  $a$  wieder der Abstand des Auges von der Bildebene ist. Wir haben also

$$q = 0,0045 \cdot a.$$

Ist beispielsweise für ein kleines Landschaftsbild  $a = 50$  cm, so ist  $q = 0,225$  cm, der Durchmesser des Sonnenbildes also  $= 4,5$  mm.

Tatsächlich wird der Maler den Sonnendurchmesser stets größer darstellen. Er sieht sich dazu gezwungen, um die Helligkeit der Sonne wenigstens andeutungsweise zum Ausdruck zu bringen.

Die unverfälscht am Firmamente strahlende Sonne entzieht sich der malerischen Wiedergabe vollständig. Nur dann, wenn sie in der Nähe des Horizonts — also kurz nach ihrem Auf- oder vor ihrem Untergange — durch Dunstschichten gemildert erscheint, kann sich der Künstler an ihre Darstellung wagen. Aber auch dann noch ist ihre Helligkeit so groß, daß der Maler sich durch absichtliche Vergrößerung des Durchmessers helfen muß. Die Sonne ist ja eben ein selbst-



leuchtender, selbst Licht erzeugender Körper, während die Farben des Gemäldes nur im reflektierten Lichte leuchten. Jede Farbe des Bildes erscheint um so dunkler, je tiefer ihr Ton ist. Bei der Sonne aber hängt die Helligkeit, in der sie erscheint, nicht nur von der Tiefe ihrer Farbe, sondern in erster Linie von ihrer eigenen Leuchtkraft ab. So kann die Sonne, wenn sie durch dicke Dunstschichten strahlt, dunkelrot erscheinen; dennoch ist sie stets der hellste Fleck im Bilde. Wenn nun der Maler nur den Farbenton, nicht aber die Helligkeit berücksichtigt und sich daher verleiten läßt, die Sonne dunkelrot am hellblauen Himmel zu malen, so verkehrt er das Wesentliche der Erscheinung — das Verhältnis der Helligkeiten — in sein Gegenteil.

Der Künstler kann die beabsichtigte Wirkung nur dadurch annähernd erreichen, daß er die Sonnenscheibe absichtlich zu groß darstellt, ihre Farbe zu hell und ihre Umgebung zu dunkel macht. Nur auf diesem Wege ist es möglich, den durch die eigene Intensität der Sonne erzeugten Gegensatz wenigstens einigermaßen zur Anschauung zu bringen.

Für den Mond, dessen scheinbare Größe durchschnittlich gleich der der Sonne ist, gilt dasselbe. Auch er wird mit Recht stets viel zu groß dargestellt.

Die bekannte Tatsache, daß Sonne und Mond in der Nähe des Horizonts größer erscheinen, als wenn sie hoch am Himmel stehen, ist noch nicht genügend erklärt. Es handelt sich aber hier um eine optische Täuschung rein subjektiver Art. Die gemessene scheinbare Größe, der Winkel also, den man erhält, wenn man das Fernrohr auf zwei gegenüber liegende Punkte des Umrisses der Sonne oder des Mondes richtet, ist von der Stellung des Gestirns am Firmament unabhängig. Sie schwankt nur etwas mit den Jahreszeiten, erreicht bei der Sonne ihr Maximum am 1. Januar, ihr Minimum am 1. Juli. Die hier in Betracht kommenden Unterschiede sind aber viel zu klein, um für den Maler darstellbar zu sein.

Die schwach elliptische Gestalt der Sonnenscheibe, wenn sie dicht über dem Horizonte steht, wird durch die gegen die Erdoberfläche konkave Krümmung der Strahlen in der Luft bewirkt, die eine Folge der Brechung in der Atmosphäre, deren Dichtigkeit nach oben abnimmt, ist. In Folge der Krümmung der Strahlen wird nämlich jeder Punkt der Scheibe optisch gehoben; er erscheint in der Richtung der im Auge an den gekrümmten Strahl gelegten Tangente. Diese Hebung nimmt mit zunehmender Höhe ab; der höchste Punkt der Scheibe wird daher um etwas weniger gehoben, als der tiefste, so daß der vertikale Durch-



messer der Scheibe um die Differenz dieser Hebungen — fast 6' — kürzer erscheint, als der unveränderte horizontale Durchmesser. Das Axenverhältnis der Ellipse ist daher etwa  $= 25 : 31$  oder rund  $= 5 : 6$ .

Indem wir zwei diametral gegenüber liegende Punkte des Umrisses des Sonnenbildes als Sonnenpunkte annehmen, können wir den verschwommenen Rand des Schlagschattens, den Halbschatten, dessen Ursache schon im § 26 dargelegt wurde, ohne Weiteres konstruieren. In der Abb. 169 ist der auf die Grundebene fallende Schlagschatten

eines auf ihr stehenden rechtwinkligen Prismas mit seinem verschwommenen Rande konstruiert worden. Für die beiden Schlagschattenränder einer vertikalen Kante kommen die Endpunkte  $S_1$  und  $S_2$  eines horizontalen Durchmessers des

Sonnenbildes in Betracht; ihnen entsprechen die Horizontalprojektionen  $S_1'$  und  $S_2'$ . Für die beiden Schlagschattenränder einer horizontalen Kante sind die Endpunkte  $S_3$  und  $S_4$  eines vertikalen Durch-

messers des Sonnenbildes, deren Projektionen  $S_3'$  und  $S_4'$  zusammenfallen, zu benutzen. — In der Abbildung ist im Interesse der Deutlichkeit das Sonnenbild viel zu groß angenommen worden.

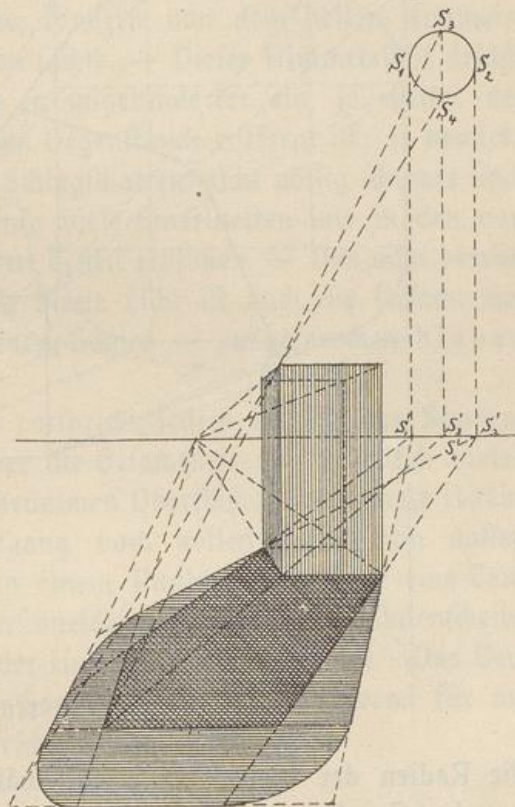


Abb. 169

Ist die Schattenwerfende Kante der beschatteten Ebene parallel, so sind, da für jeden Punkt der Kante das Sonnenbild denselben Durchmesser hat, die Ränder des Halbschattens parallel; ist die Kante aber gegen die Ebene geneigt, so nimmt der Radius des Sonnenbildes proportional der Entfernung des Punkts vom Schnittpunkte der Kante mit der Ebene zu; dann divergieren also die Ränder des Halbschattens von diesem Schnittpunkte aus. Beide Fälle treten an den wagerechten und lotrechten Kanten des Prismas in Abb. 169 auf.

Die durch die Sonne oder den Mond erzeugten Halbschatten eckiger Körper sind stets abgerundet. — Denken wir uns zunächst einen



materiellen Punkt, so erzeugt dieser einen Halbschattenkegel, dessen Oeffnung etwa  $= 31'$  ist. Stellen wir uns nun etwa ein Quadrat vor, so erzeugt die Gesamtheit der durch seinen Umriss gehenden Strahlen den in Abb. 170 parallelperspektivisch dargestellten Strahlenkörper, der von vier Ebenen und vier sie berührenden Viertelskegeln begrenzt wird und dessen Querschnitt daher mit wachsender Entfernung von dem Schattenwerfenden Quadrate zunimmt. Dabei nehmen aber nur

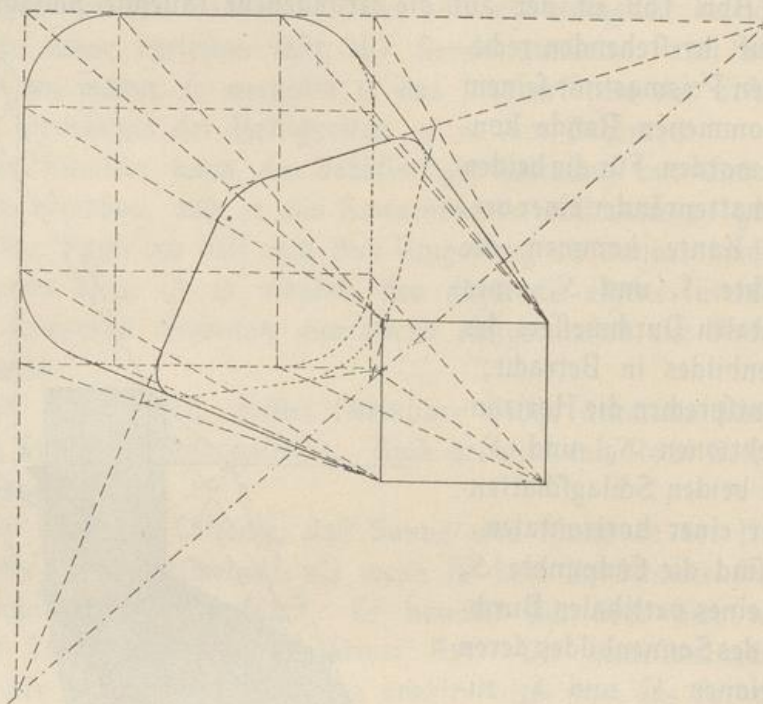


Abb. 170

die Radien der Viertelskreise zu, während die dazwischen liegenden geraden Strecken unveränderlich gleich der Seitenlänge des Quadrats bleiben. Durchschneiden wir nun diesen Strahlenkörper mit einer ganz

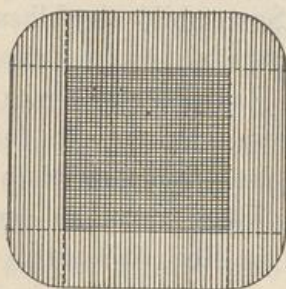


Abb. 171

beliebigen Ebene, so ist die Schnittfigur der Umriss des auf diese Ebene fallenden Halbschattens; er ist offenbar durch Kurven abgerundet, die je nach der Lage der schneidenden Ebene Kreise, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln sind. — Das- selbe gilt augenscheinlich für jeden eckigen Körper.

Die Abb. 171 zeigt den von einem Quadrate auf eine seiner Ebene parallele Ebene ge- worfenen Kern- und Halbschatten, also einen der Ebene des Quadrates parallelen Schnitt des



in Abb. 170 dargestellten Strahlenkörpers. Selbstverständlich sind in Wirklichkeit die Grenzen nicht scharf, sondern die Helligkeit nimmt von der Grenze des Kernschattens bis zu der des Halbschattens allmählich zu.

Demnach sollte der Kernschatten für alle Entfernungen des Schirmes gleich groß und gleich dunkel sein. Wenn er aber in Wirklichkeit mit zunehmender Entfernung des Schirmes blässer und verschwommener wird und schließlich ganz verschwindet, so liegt das an dem Eindringen des nicht direkt von der Sonne, sondern von dem hellen Himmelsgewölbe ausgehenden, zerstreuten Lichts. — Dieses Himmelslicht dringt offenbar von allen Seiten um so ungehinderter ein, je weiter der Schirm von dem schattenwerfenden Gegenstande entfernt ist; es bewirkt überhaupt, daß die Eigen- und Schlagschatten nicht völlig schwarz sind, daß wir vielmehr in ihnen ebenso viele Einzelheiten wie in den von direktem Sonnenlichte beleuchteten Teilen erblicken. — Das vom blauen Himmel allseitig herabströmende blaue Licht ist auch die Ursache der — namentlich auf frisch gefallenem Schnee — ausgesprochen blauen Färbung der Schatten.

Auf einem runden Körper entspricht jedem Punkte der Sonnenscheibe eine besondere Streiflinie; die Gesamtheit der unendlich vielen Streiflinien bestimmt auf der krummen Oberfläche eine schmale Halbschattenzone, die den Uebergang vom vollen Lichte zum vollen Schatten bildet. — Legt man in einem Punkte dieser Zone eine Tangentenebene an die Fläche, so zerschneidet diese Ebene die Sonnenscheibe in zwei Teile, von denen nur der eine den Punkt bestrahlt. Das Verhältnis dieses Teils zur vollen Sonnenscheibe ist maßgebend für die in dem bestrahlten Punkte herrschende Helligkeit.

## II. Schatten bei endlich entfernter Lichtquelle. (Zentralbeleuchtung.)

### § 35. Die Annahme des leuchtenden Punkts im Bilde.

Da der leuchtende Punkt — irgend eine künstliche Lichtquelle — ganz beliebig im Raume liegen kann, ist auch sein Bild  $Z$  ganz beliebig annehmbar. Ebenso wie der Sonnenpunkt  $S$  liegt er über oder unter dem Horizonte, je nachdem die Lichtquelle — vorausgesetzt, daß sie höher als das Auge liegt — sich vor oder hinter dem Beschauer befindet. Im ersteren Falle kann der leuchtende Gegenstand — wenn



das Bild ausgedehnt genug ist — selbst zur Darstellung gelangen, im letzteren Falle nicht. Liegt die Lichtquelle tiefer als das Auge, so erscheint sie im Bilde, wenn  $L$  unter dem Horizonte liegt, während sie sich hinter dem Beschauer befindet, wenn  $L$  darüber liegt.

Die hier vorkommenden Konstruktionen unterscheiden sich von den für Sonnenlicht gültigen im Wesentlichen nur dadurch, daß das Bild  $L'$  der Horizontalprojektion der Lichtquelle sich jetzt natürlich nicht auf dem Horizonte befindet, sondern darüber oder darunter.

Die verschiedenen möglichen Lagen der Punkte  $L$  und  $L'$  erhalten wir durch folgende Erwägung. Der Punkt  $L'$  kann erstens unter dem Horizonte liegen; dann liegt, wie wir schon im § 8 sahen, die Horizontalprojektion der Lichtquelle in Wahrheit vor dem Beschauer, also innerhalb des tatsächlich übersehenen Teils der Grundebene. Der Punkt  $L$  liegt in der durch  $L'$  gehenden Vertikalen, und zwar über oder unter dem Horizonte, je nachdem der leuchtende Punkt über oder unter Augenhöhe liegt. — Der Punkt  $L'$  kann aber zweitens über dem Horizonte liegen; dann liegt nach § 8 die Horizontalprojektion der Lichtquelle hinter dem Rücken des Beschauers, kann also nicht gesehen werden. Der Punkt  $L$  liegt in der durch  $L'$  gehenden Vertikalen, und zwar über dem Horizonte, wenn der leuchtende Punkt unter, unter dem Horizonte, wenn der leuchtende Punkt über Augenhöhe liegt.

Liegt die Lichtquelle in der durch das Auge parallel zur Bildebene gelegten Ebene, so liegt auch ihre Horizontalprojektion in derselben Ebene;  $L$  und  $L'$  liegen dann in unendlicher Ferne.

### § 36. Die Ermittlung der auf verschiedene Ebenen fallenden Schlagschatten von Geraden und ebenflächig begrenzten Körpern.

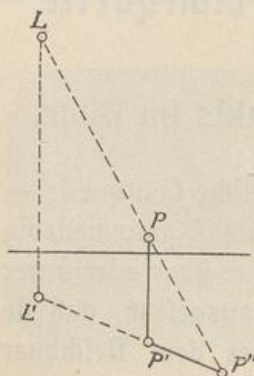


Abb. 172

Der auf die Grundebene fallende Schlagschatten eines Punktes  $P$ , dessen Horizontalprojektion  $P'$  ist (Abb. 172), wird in derselben Weise wie bei paralleler Bestrahlung gefunden.  $LP$  ist der durch  $P$  gehende Lichtstrahl; er schneidet die Grundebene in dem gesuchten Punkte  $P''$ , der der Schnittpunkt von  $LP$  und  $L'P'$  ist. Das gilt für jede Lage der Punkte  $L$ ,  $L'$ ,  $P$  und  $P'$ , denn der Lichtstrahl und seine Horizontalprojektion liegen



stets in einer vertikalen Ebene. Denken wir uns  $PP'$  als senkrechten Stab, so ist  $P'P''$  sein Schlagschatten.

Daß der Schatten einer Geraden auf eine Ebene auch bei zentraler Beleuchtung stets wieder eine Gerade ist, geht einfach daraus hervor, daß die durch die verschiedenen Punkte der Geraden gehenden Strahlen in einer Ebene liegen; der Schnitt dieser Strahlenebene mit der bestrahlten Ebene ist selbstverständlich eine Gerade. Wir brauchen daher, wenn der von einer Geraden auf eine Ebene geworfene Schlagschatten gefunden werden soll, nur den Schatten eines ihrer Punkte zu ermitteln und ihn mit dem Schnittpunkte der Geraden und der Ebene zu verbinden.

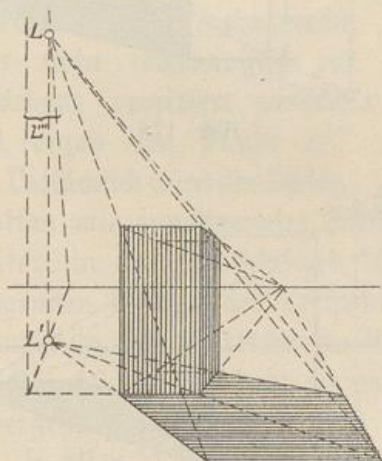


Abb. 173

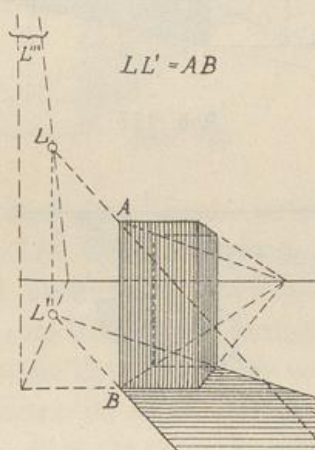


Abb. 174

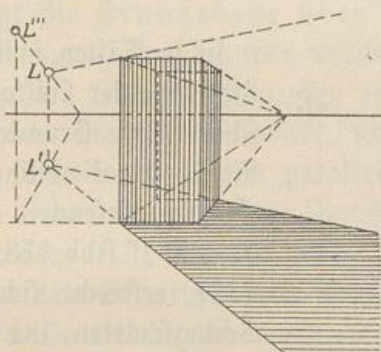


Abb. 175

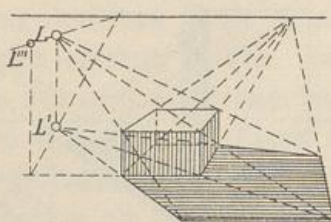


Abb. 176

Die Ermittlung der Schlagschatten ebenflächig begrenzter Körper ist damit ohne Weiteres erledigt. Die Abb. 173—183 zeigen den von einem auf der Grundebene stehenden rechtwinkligen Prisma auf diese Ebene geworfenen Schlagschatten in den verschiedenen möglichen Lagen von  $L$  und  $L'$ . Die Abb. 180 zeigt den Schlagschatten in dem besonders interessanten Falle, daß die Lichtquelle in der durch das Auge parallel



zur Bildebene gelegten Ebene liegt;  $L$  und  $L'$  liegen jetzt in unendlicher Ferne, die Strahlen sowohl wie ihre Horizontalprojektionen erscheinen also im Bilde parallel.

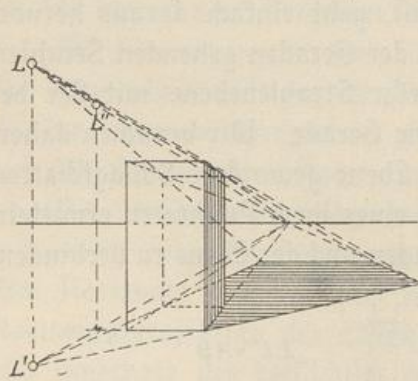


Abb. 177

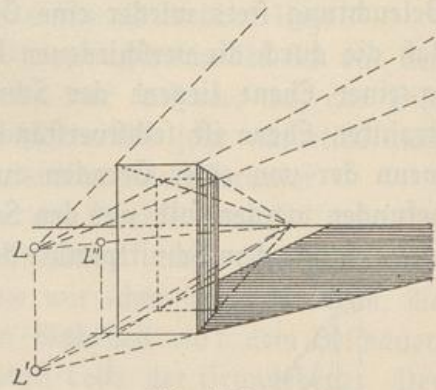


Abb. 178

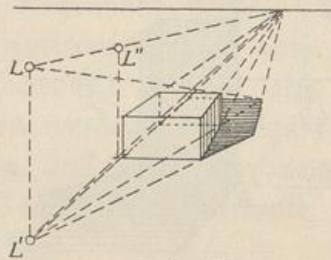


Abb. 179

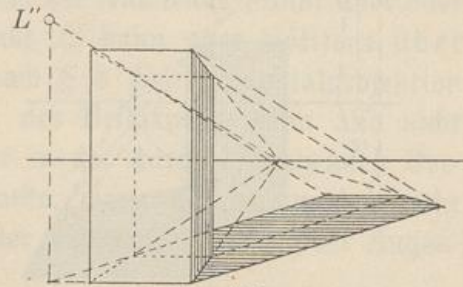


Abb. 180

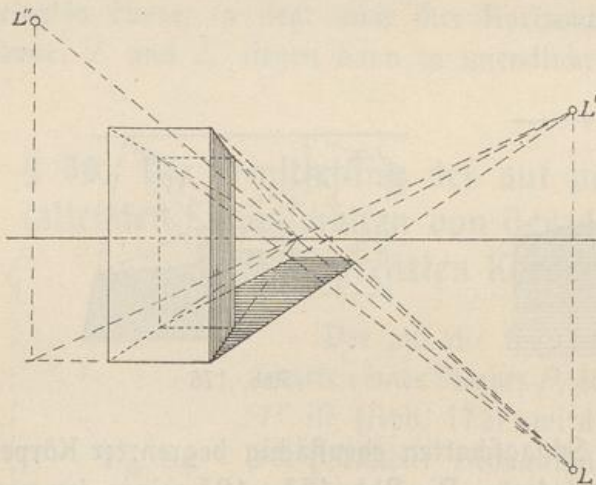


Abb. 181

In den Fällen, in denen die Höhe der Lichtquelle über der Grundebene kleiner als die Höhe des Schattenwerfenden Körpers ist (s. Abb. 178, 182, 183), erstreckt sich der Schlagschatten ins Unendliche. — Geht das vordere Ende des Schlagschattens über die Gegen-gerade hinaus, so erscheint, wie wir wissen,

dieses Ende nicht mehr im wirklich gesehenen Bilde. Dieser Fall liegt in Abb. 175 vor, in der die Höhe des Punkts  $L$  über der Grundebene in Wahrheit größer als die Höhe des Prismas ist.



Um die Vergleichung der Höhenlage der Lichtquelle mit der Höhe des Prismas zu ermöglichen, ist in den Abb. 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183 die Projektion  $L''$  des Punktes  $L$  auf die Ebene der Vorderfläche des Prismas angegeben worden. In den Abb. 173, 174, 175, 176 ist zu demselben Zwecke der Punkt  $L$  wagerecht, aber nicht rechtwinklig zur Bildebene projiziert worden und ergab den Punkt  $L'''$ .

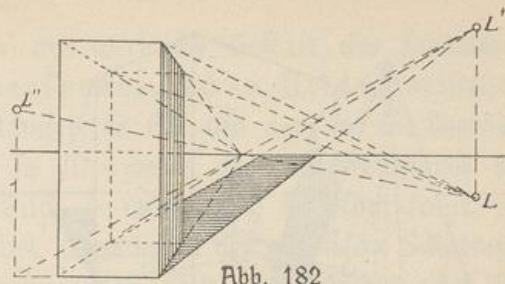


Abb. 182

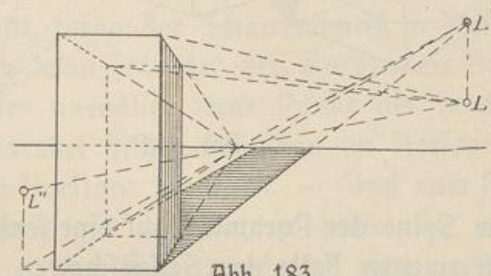


Abb. 183

Tatsächlich wird der Schlag-schatten mit zunehmender Entfernung von dem Körper natürlich stets breiter; in den Abbildungen 181, 182, 183 wird aber durch den überwiegenden Einfluß der perspektivischen Verkürzung die Divergenz der Grenzlinien des Schattens im Bilde in eine Konvergenz verwandelt. In der Abb. 180 endlich hebt die perspektivische Verkürzung die vorhandene Divergenz gerade auf, so daß die Grenzen im Bilde parallel werden.

In allen 11 Fällen befindet sich die Lichtquelle über der Grundebene, so daß der Schlag-schatten des auf ihr stehenden Körpers auf sie fällt. Liegt die Grundebene über der Lichtquelle, so erhält man durch Umkehrung der Figuren wieder 11 Fälle.

Der Schlag-schatten, den ein Punkt  $P$  auf irgend eine nicht horizontale ebene Figur wirft, ist in ganz derselben Weise zu ermitteln, die schon im § 29 für parallele Strahlen erörtert wurde. Eine durch den Strahl  $LP$  gehende Vertikalebene schneidet die Grundebene in der Geraden  $L'P'$ , die den perspektivischen Grundriß der Figur schneidet. Aus den Schnittpunkten erhalten wir, indem wir vertikale Gerade durch sie ziehen, die entsprechenden Punkte am Umrisse des perspektivischen Bildes der Figur, und die Verbindung dieser Punkte liefert uns die Schnittlinie der Figur mit der vertikalen Hülfs Ebene. Der Punkt, in dem diese Schnittlinie den Strahl schneidet, ist der Schatten  $P''$  des Punktes  $P$ . Ist die beschattete Ebene selbst vertikal, so vereinfacht die Konstruktion sich noch insofern, als wir nur durch den Schnittpunkt von  $L'P'$  mit dem Grundrisse der Figur, der in diesem Falle eine gerade Linie ist, eine vertikale Linie zu ziehen und mit dem Strahle zu schneiden haben.



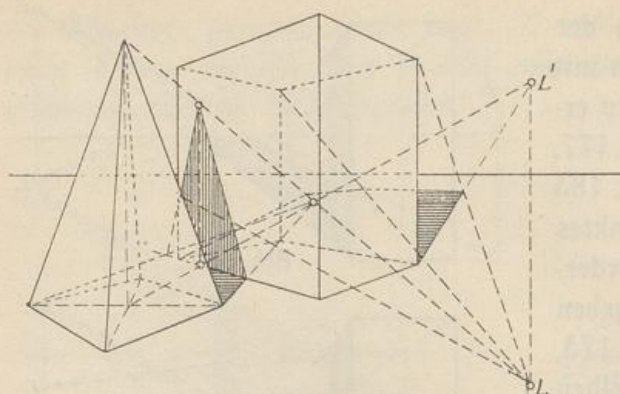


Abb. 184

Die Abb. 184 und 185 zeigen die Anwendungen dieser Konstruktion; eine auf der Grundebene stehende Pyramide wirft ihren Schatten auf ein auf derselben Ebene stehendes senkrecht und auf ein auf ihr liegendes Prisma. Im ersten Falle haben wir den Schlag-

schatten zu ermitteln, den die Spitze der Pyramide auf eine senkrecht stehende ebene Figur wirft, im zweiten Falle den Schlag Schatten zu finden, der auf eine geneigte ebene Figur fällt. Dabei sind verschiedene Lagen von  $L$  und  $L'$  zur Anwendung gebracht worden.

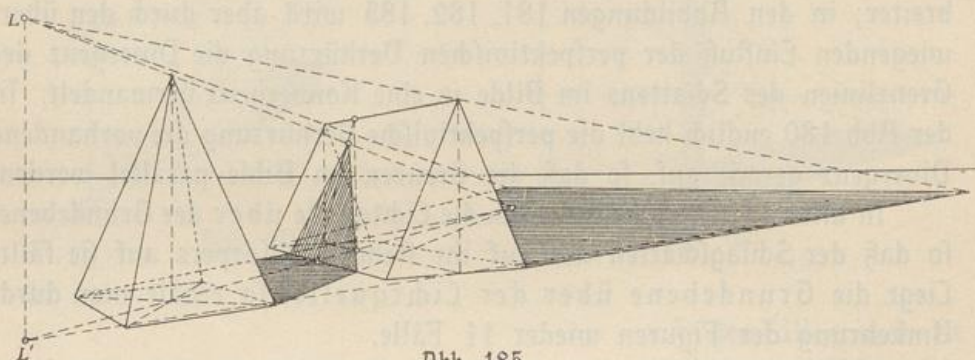


Abb. 185

### § 37. Der Schlag Schatten des Kreises und der runden Körper.

Die Strahlen, die von dem leuchtenden Punkte aus durch die Punkte des Kreises gehen, bilden eine gewöhnliche Kegelfläche zweiter Ordnung; der Schlag Schatten des Kreises auf eine Ebene ist also als Schnitt dieser Ebene mit der Kegelfläche eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Ebene nur eine Hälfte oder beide Hälften der Kegelfläche trifft. Im letzteren Falle hat natürlich nur der eine Hyperbelast die physikalische Bedeutung eines Schattenumrisses, da die zweite Hälfte der Kegelfläche, auf der der andere Ast liegt, tatsächlich gar nicht vorhanden ist. — Auch eine Parabel kann natürlich als Grenzfall auftreten, dann nämlich, wenn ein Strahl der beschatteten Ebene parallel ist.



Mit der Entscheidung über die wirkliche Gestalt des Schatten-  
umrisses ist die Gestalt seines perspektivischen Bildes natürlich  
noch keineswegs entschieden. Handelt es sich um den auf die Grund-  
ebene fallenden Schlagschatten, so ist, wenn der Schattenumriß in  
Wahrheit eine Ellipse ist, sein Bild — wie aus § 8 sofort folgt —  
eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der elliptische Schatten-  
umriß ganz außerhalb der Gegengeraden fällt, sie berührt oder sie  
durchschneidet. Ganz dasselbe gilt, wenn der Schattenumriß in Wahr-  
heit eine Parabel ist; auch dann kann jede der drei Kurven als Bild  
auftreten, auch eine Ellipse. Der unendlich ferne Punkt der in der  
Grundebene liegenden Schattenparabel bildet sich dann im Horizonte  
ab, die Bildellipse muß also den Horizont berühren. — Und auch für  
einen hyperbolischen Schattenumriß gilt dasselbe; er bildet sich nur  
dann als Hyperbel ab, wenn er die Gegengerade in zwei reellen  
Punkten schneidet, denen dann auch zwei unendlich ferne Punkte des  
Bildes entsprechen müssen. Berührt die Hyperbel die Gegengerade,  
so kann das Bild nur einen unendlich fernen Punkt enthalten, muß  
also eine Parabel sein. Schneidet aber die Gegengerade die Hyperbel  
überhaupt nicht (sind die Schnittpunkte imaginär), geht sie also zwischen  
beiden Hyperbelästen hindurch, so kann das Bild keinen unendlich  
fernen Punkt enthalten, muß also eine Ellipse sein. Diese Ellipse  
schneidet den Horizont in zwei Punkten, die den beiden unendlich  
fernen Punkten der Hyperbel entsprechen; der unterhalb des Horizonts  
liegende Ellipsenbogen entspricht dem vom Beschauer wirklich über-  
sehenen Hyperbelaste, während der oberhalb des Horizonts liegende  
Bogen das virtuelle Bild des hinter dem Rücken des Beschauers  
liegenden Hyperbelastes ist.

Die Abb. 186—194 erläutern in schematischer Weise die gegen-  
seitige Lage des Schattenwerfenden Kreises, des auf die Grundebene  
fallenden Schlagschattens und des perspektivischen Bildes des letzteren.  
Die Ebene des Schattenwerfenden Kreises wurde der Einfachheit und

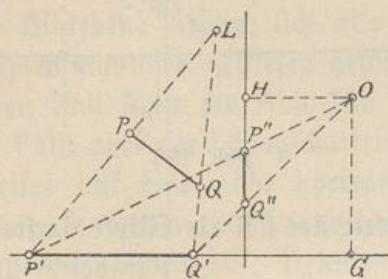


Abb. 186

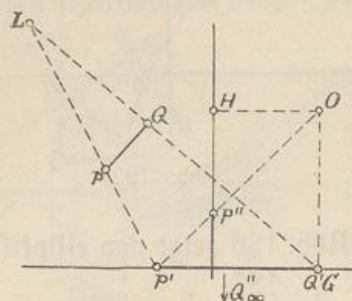


Abb. 187



Uebersichtlichkeit wegen der Grundlinie parallel angenommen; die Figuren stellen rechtwinklige Projektionen auf eine zur Grundlinie rechtwinklige Ebene dar, so daß die Bildebene, die Grundebene und der Schattenwerfende Kreis sich als gerade Linien darstellen; der Schatten fällt mit der die Grundebene darstellenden Geraden zusammen.

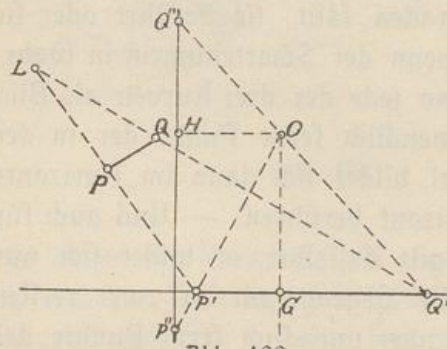


Abb. 188

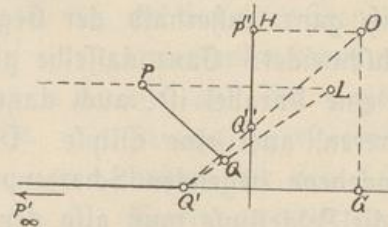


Abb. 189

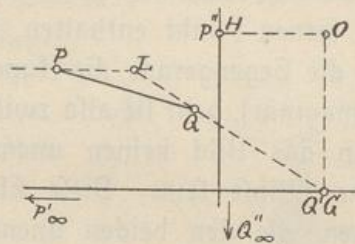


Abb. 190

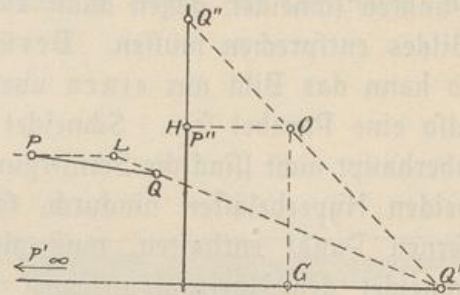


Abb. 191

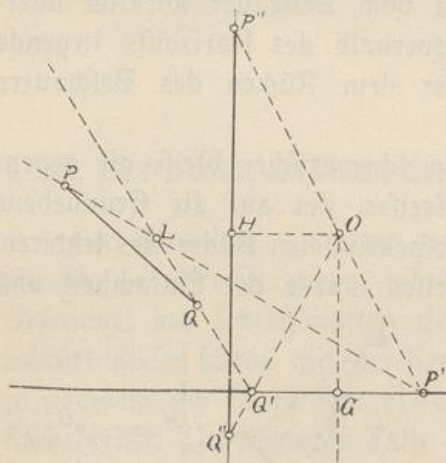


Abb. 192

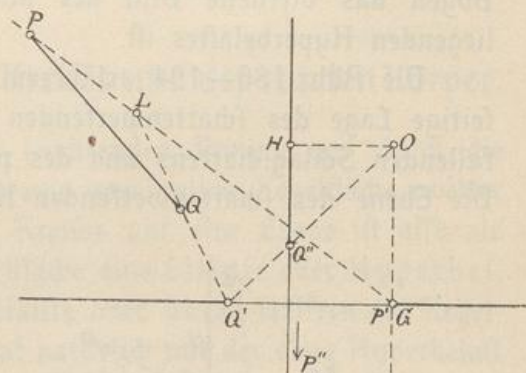


Abb. 193

Die Abb. 186 zeigt den elliptischen Schatten, der sich als Ellipse darstellt,

„	„	187	„	„	„	„	„	„	„	Parabel	„
„	„	188	„	„	„	„	„	„	„	Hyperbel	„







zylindrischen Gefäßes brenne eine Flamme, die ihre Strahlen über den Rand des Gefäßes hinaus auf eine vertikale Wand wirft. Der Strahlenkegel wird durch die vertikale Ebene jetzt offenbar in einer Hyperbel geschnitten. Diesen hyperbolischen Schatten zeigt die Abb. 196.

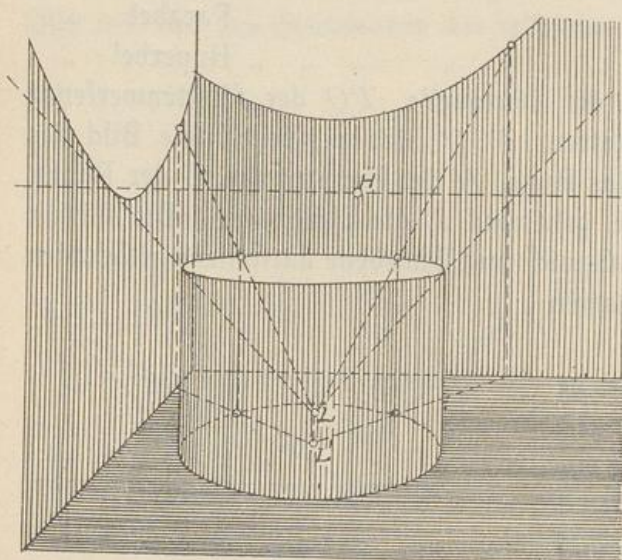


Abb. 196

handelt die Tangenten, die vom Schatten der Spitze aus an den Schattenumriß der Grundfläche gezogen werden können. Aus den Berührungspunkten der Tangenten ergeben sich dann sofort die Punkte der Grundkreise, von denen die Streiflinien ausgehen.

Aber auch direkt, ohne Vermittlung des Schlagschattens können wir die Streiflinien finden. Sind zunächst die Streiflinien eines Zylinders aufzufinden, so brauchen wir nur durch die Lichtquelle  $L$  eine Parallele

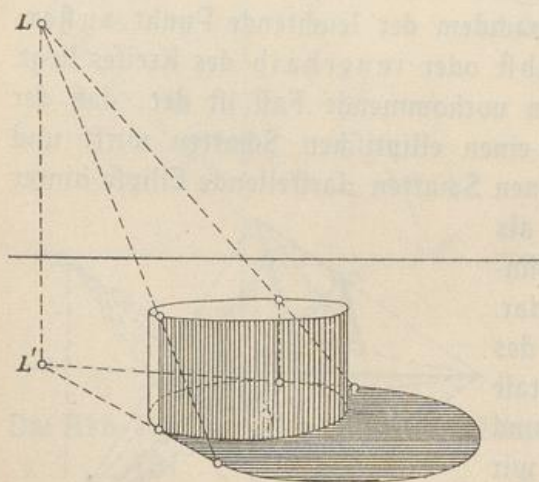


Abb. 197

zu den Erzeugenden des Zylinders zu ziehen, sie mit der Ebene einer seiner Grundflächen zu durchschneiden und von dem Schnittpunkte aus Tangenten an den Umriss derselben Grundfläche zu ziehen; von den Berührungspunkten müssen die Streiflinien ausgehen. Die Abb. 197, 198 zeigen diese Konstruktion für zwei besonders wichtige Lagen des Zylinders, den stehenden und den liegenden Zylinder.

Ueber die von Zylindern und Kegeln auf Ebenen geworfenen Schlagschatten ist nun kaum noch etwas zu sagen nötig. Die Schlagschatten der Grundkreise sind Kegelschnitte, im gewöhnlichen Falle Ellipsen, die sich auch als Ellipsen darstellen. Die Schatten der Streiflinien sind, wenn es sich um einen Zylinder handelt, zwei der gemeinsamen Tangenten, wenn es sich um einen Kegel



In der Abb. 198 ist  $L'''$ , der Schnittpunkt von  $F_2 L'$  mit der Grundkante des hinteren Quadratbildes, die Projektion von  $L'$  auf die hintere Grundfläche des Zylinders. Eine durch  $L'''$  gezogene Vertikale schneidet  $F_2 L$  in  $L''$ , der Projektion von  $L$  auf dieselbe Grundfläche. Die von  $L''$  aus gezogenen Tangenten berühren den Umriß des Bildes dieser Grundfläche in den Punkten, von denen die Streiflinien ausgehen. — Die Linie  $F_2 L$  ist jetzt die oben erwähnte Parallele zu den Erzeugenden des Zylinders.

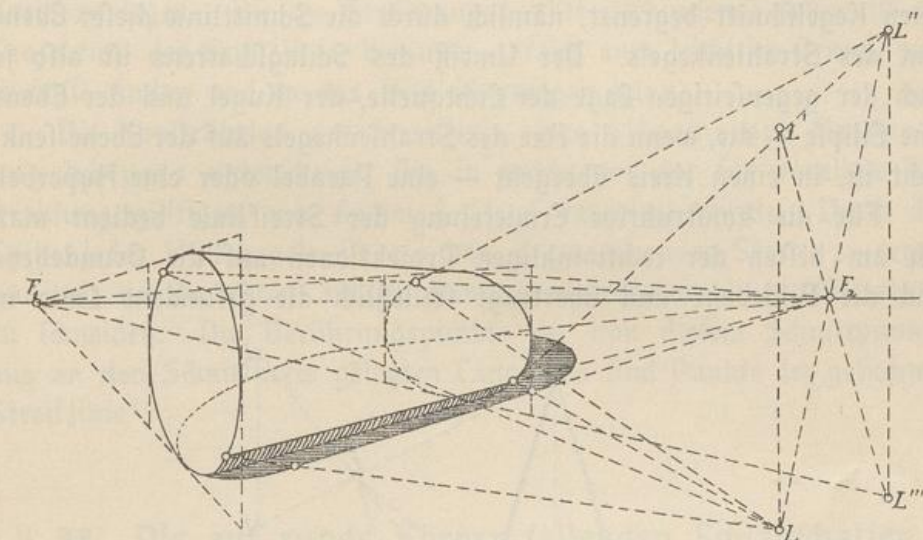


Abb. 198

Um die Streiflinien eines Kegels zu bestimmen, legen wir — genau wie bei paralleler Bestrahlung — einen Strahl durch seine Spitze, schneiden ihn mit der Ebene der Grundfläche und ziehen vom Schnittpunkte aus Tangenten an ihren Umriß; von den Berührungspunkten gehen die Streiflinien aus. Diese Konstruktion ist für verschiedene Lagen des Kegels in den Abb. 199 und 200 dargestellt. — Der in Abb. 199 auftretende Schlagschatten erstreckt sich in Folge der niedrigen Lage der Lichtquelle tatsächlich — immer breiter werdend — ins Unendliche. Die perspektivische Verkürzung aber verwandelt die Divergenz der Grenzen des Schlagschattens in eine Konvergenz.

In der Abb. 200, die einen Kegel mit wagerechter Axe darstellt, ist  $L'''$  der Schnittpunkt von  $L'Z'$  mit der Grundseite des Quadratbildes; eine von  $L'''$  aus gezogene Vertikale schneidet  $LZ$  in  $L''$ , dem Schnittpunkt des durch die Spitze  $Z$  gezogenen Strahls mit der Grundfläche. Von  $L''$  gehen die Tangenten aus, die den Umriß des Bildes der Grundfläche in den Punkten berühren, nach denen die Streiflinien gehen.



Die Streiflinie einer Kugel ist stets ein Kreis, freilich nicht, wie bei paralleler Bestrahlung, ein Großkreis. Die die Kugeloberfläche berührenden Strahlen bilden eine normale Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Axe durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugel geht. Die Berührungspunkte der Strahlen liegen auf einem Kreise — eben der Streiflinie — dessen Ebene zu der Axe des Kegels rechtwinklig und die Polarebene des leuchtenden Punkts ist. — Der Schlagschatten der Kugel auf eine beliebige Ebene wird stets durch einen Kegelschnitt begrenzt, nämlich durch die Schnittlinie dieser Ebene und des Strahlenkegels. Der Umriß des Schlagschattens ist also je nach der gegenseitigen Lage der Lichtquelle, der Kugel und der Ebene eine Ellipse — die, wenn die Axe des Strahlenkegels auf der Ebene senkrecht ist, in einen Kreis übergeht — eine Parabel oder eine Hyperbel.

Für die konstruktive Ermittlung der Streiflinie bedient man sich am besten der rechtwinkligen Projektionen auf die Grundebene und die Bildebene und überträgt schließlich die gefundene Linie in

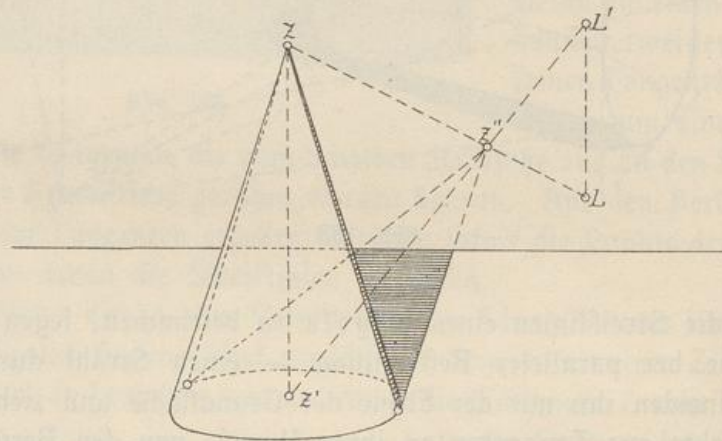


Abb. 199

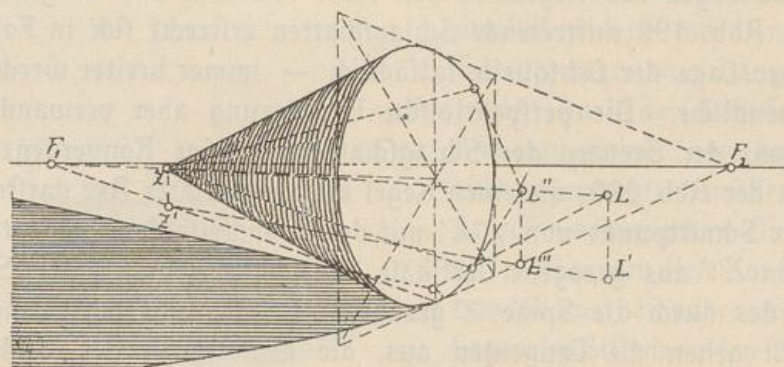


Abb. 200



das Bild. Als Hülfebene benutzt man mit Vorteil eine durch den Kugelmittelpunkt und die Lichtquelle gehende Vertikalebene oder eine dieser Ebene parallele Ebene. Eine solche Ebene ist offenbar der Axe des Strahlenkegels parallel, daher zur Ebene der Streiflinie senkrecht; diese Linie projiziert sich demnach auf sie als gerade Linie. Wenn man also die Lichtquelle und die Kugel auf die genannte Hülfebene projiziert und sie in die Grundebene umklappt, so hat man nur von der Projektion der Lichtquelle Tangenten an den die Kugel darstellenden Kreis zu legen. Die die Berührungspunkte verbindende Sehne ist die Projektion der Streiflinie, die man daraus auch leicht im Grund- und Aufrisse finden und in das Bild übertragen kann.

Die Konstruktion der Streiflinie eines allgemeinen Umdrehungskörpers unterscheidet sich in nichts von der für parallele Bestrahlung gültigen, wie sie im § 32, 4 dargelegt wurde. Durch die Spitze jedes Hilfskegels ist ein von  $L$  ausgehender Strahl zu legen und mit der benutzten, zur Umdrehungsaxe rechtwinkligen Hülfebene zu schneiden. Die Berührungspunkte der von diesem Schnittpunkte aus an den Schnittkreis gelegten Tangenten sind Punkte der gesuchten Streiflinie.

### § 38. Die auf runde Körper fallenden Schlagschatten.

Die Konstruktion des Schlagschattens, den ein Punkt auf eine Zylinderfläche wirft, ist ganz dieselbe, die auch für parallele Bestrahlung gilt (s. § 33); nur sind selbstverständlich die Punkte  $S$  und  $S'$  durch die Punkte  $L$  und  $L'$  zu ersetzen. Der Schlagschatten, den der Rand einer zylindrischen Röhre auf ihre Innenfläche wirft, ist auch bei zentraler Beleuchtung eine Ellipse, denn der Schnitt der Zylinderfläche mit der Kegelfläche der Strahlen, deren Leitlinie der Rand der Oeffnung ist, ist auch hier wieder eine Kurve vierter Ordnung, der der Rand selbst als Kurve zweiter Ordnung angehört, so daß für den Schlagschattenumriß eine Kurve zweiter Ordnung, also ein ebener Schnitt des Zylinders — eine Ellipse — übrig bleibt.

Die Abb. 201 zeigt die Projektion auf eine durch die Lichtquelle und die Zylinderaxe gehende Ebene; der Schattenwerfende Rand und der

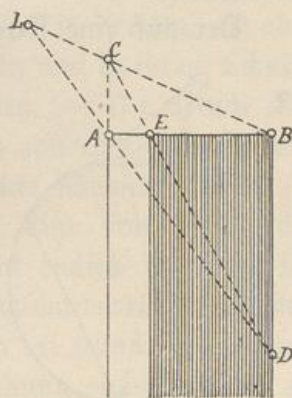


Abb. 201



Schlagschatten erscheinen als gerade Strecken  $AB$  und  $CD$ ;  $ED$  stellt den wirklich vorhandenen Schatten dar.

Auch die Konstruktion des von einem Punkte auf eine Kegelfläche geworfenen Schlagschattens weicht von der im § 33 für parallele Strahlen angegebenen Konstruktion in keiner Weise ab. In jedem Falle handelt es sich um den Schnittpunkt der Kegelfläche mit einem Lichtstrahl, und es bleibt sich offenbar ganz gleich, ob dieser

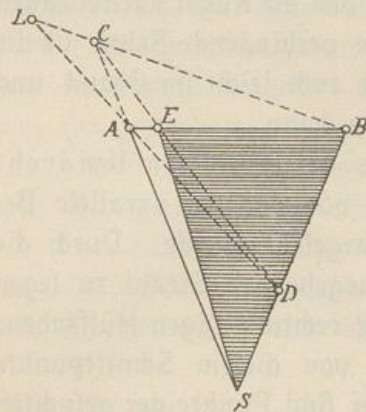


Abb. 202

Strahl von einer endlich oder einer unendlich entfernten Lichtquelle ausgeht. — Der Schlagschatten des Randes in das Innere der Kegelfläche ist auch bei Zentralbeleuchtung stets eine Ellipse. Das geht aus der Abb. 202, die eine Projektion auf eine durch die Lichtquelle und die Axe des Kegels gehende Ebene darstellt, klar hervor.  $S$  sei die Spitze,  $AB$  der Grundkreis des Kegels,  $L$  die Lichtquelle.

Die Schnittkurve der beiden Kegelflächen zweiter Ordnung zerfällt auch hier wieder in zwei ebene Kurven, die auf der Projektionsebene senkrecht sind und sich daher als gerade Linien darstellen, nämlich als die Diagonalen des Vierecks  $ACBD$ . Eine von ihnen ist der Grundkreis  $AB$  des Kegels, während die andere einen zweiten elliptischen Schnitt der Kegelflächen,  $CD$  darstellt, von dem das Stück  $ED$  die Projektion des wirklich auftretenden Schlagschattens ist. Ein parabolischer oder hyperbolischer Schatten kann nicht vorkommen, weil dazu eine Strahlenrichtung erforderlich wäre, bei der das Innere der Kegelfläche ganz im Lichte oder ganz im Schatten sein würde.

Der auf eine Kugelfläche fallende Schlagschatten eines Punkts

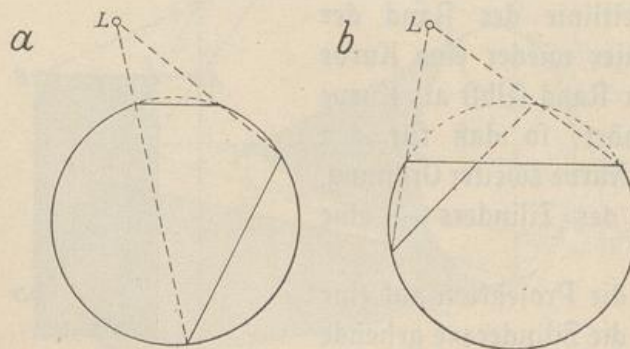


Abb. 203

wird ebenso wie bei paralleler Bestrahlung mittels einer durch den Lichtstrahl gelegten Vertikalebene gefunden. Der Schatten eines auf der Kugel selbst liegenden Kreises ist auch bei zentraler Beleuchtung ein Kreis, da der Licht-







des Punktes  $R$  allerdings gilt nur für den Fall, daß das Profil die Vorderfläche rechtwinklig schneidet. — Andernfalls muß man erst einen Kegel ermitteln, der die Leibungsfläche im Grenzkreise berührt, dessen Spitze also in der horizontalen Axe dieser Fläche liegt, den Schatten der Spitze auf die Vorderfläche bestimmen und von diesem Schattenpunkte aus eine Tangente an den die Nische begrenzenden Halbkreis legen. Diese Tangente berührt den Halbkreis in dem gesuchten Punkte  $R$ .

Der auf eine beliebige Umdrehungsfläche fallende Schlag Schatten eines Punkts wird auch hier wieder mit Hülfe einer durch den Strahl gelegten Vertikalebene gefunden.

### § 39. Die Konstruktion des Halbschattens. Schlagschatten bei verschiedenen Lichtquellen.

Wie beim Sonnenlichte, so macht sich auch oft bei künstlicher Beleuchtung die Größe der Lichtquelle dadurch bemerkbar, daß sie einen verschwommenen Rand des Schattens, einen sogenannten Halbschatten erzeugt. Wenn beispielsweise eine Gasflamme von einer Milchglasglocke umgeben ist, so bewirken die in dem Milchglase fein verteilten undurchsichtigen Teilchen eine derartige Zurückwerfung des Lichts nach allen Seiten, daß die Glocke ebenso wirkt, wie ein selbstleuchtender Körper von derselben Größe. Jedem Punkte der Oberfläche des

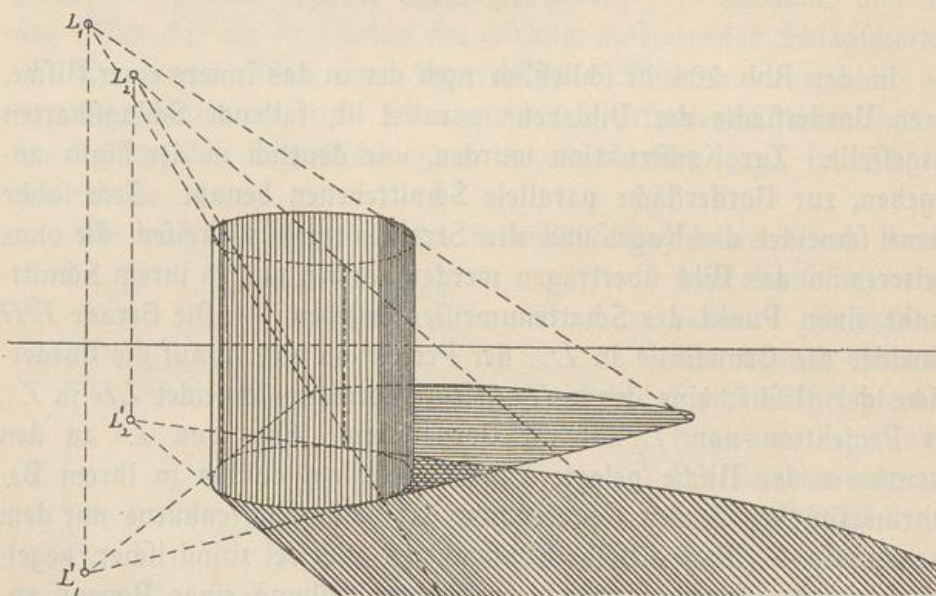


Abb. 205



leuchtenden Körpers entspricht nun ein besonderer Punkt  $Z$  und ein besonderer Punkt  $Z'$ , und mit Hülfe dieser Punkte können wir den Halbschatten in derselben Weise konstruieren, wie es im § 34 für parallele Strahlung geschehen ist. Auch was dort über die Halbschattenzone auf einem runden Körper gesagt wurde, gilt unverändert für Zentralbeleuchtung.

Wird ein Körper von zwei Lichtquellen beleuchtet, so erzeugt jede von ihnen einen Eigenschatten und einen Körperschatten. Der durch die erste erzeugte Schatten wird durch die zweite, der durch die zweite erzeugte Schatten durch die erste erhellt. Nur der Teil des Eigen- und des Schlagschattens, der den durch beide einzelnen Lichtquellen erzeugten Schatten gemeinsam ist, erhält überhaupt kein Licht, ist also vollständig dunkel. — Die Abb. 205 zeigt einen solchen Doppelschatten eines auf der Grundebene stehenden, normalen Zylinders, der von zwei Lichtquellen  $L_1$  und  $L_2$  beleuchtet wird.





### Drittes Kapitel.

#### Die Konstruktion der durch Spiegelung und Brechung erzeugten Bilder im perspektivischen Bilde.

##### § 40. Allgemeines über die Entstehung eines Spiegelbildes.

Die Theorie der Entstehung der Spiegelbilder gehört der geometrischen Optik an. Wenn die durch einen ebenen Spiegel erzeugten Bilder in einem Lehrbuche der Perspektive behandelt werden, so hat das seinen Grund darin, daß solche Bilder innerhalb einer perspektivischen Darstellung sehr häufig vorkommen. Vor allen Dingen spielen die durch eine horizontale Wasserfläche erzeugten Spiegelbilder in der Landschaft eine so wichtige Rolle, daß sie schlechterdings nicht übergangen werden dürfen; dann aber kommen auch bei der Darstellung von Innenräumen oft vertikal oder etwas geneigt aufgehängte Spiegel vor, in denen sich Teile der Innenräume spiegeln, und diese Spiegelbilder müssen dem perspektivischen Bilde eingefügt werden.

Also nur die durch ebene Spiegel erzeugten Bilder sind es, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben. Zwar kann es vorkommen, daß beispielsweise in einem Garten eine jener geschmacklosen glänzenden Kugeln aufgestellt ist, in denen sich die umgebende Landschaft in häßlicher Verzerrung spiegelt; indessen ist dieses Spiegelbild für die ganze Darstellung von so untergeordneter Bedeutung, ist auch in der Regel so klein, daß es hier für uns nicht in Betracht kommt.

Der Entstehung jedes Spiegelbildes liegt das Spiegelungs- oder Reflexionsgesetz zu Grunde, das schon im Altertume bekannt war. Es lautet folgendermaßen: Fällt ein Lichtstrahl auf eine spiegelnde Körperoberfläche, so wird er so zurückgeworfen, daß der gespiegelte Strahl in der Einfallsebene, d. h. in der durch den einfallenden Strahl und die im Einfallspunkte auf der Fläche errichtete Normale gehenden Ebene liegt; in dieser Ebene bilden der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit der Normalen gleiche Winkel.



Aus diesem Grundgesetze ergibt sich für die durch eine spiegelnde Ebene erzeugten Bilder eine überaus einfache Konstruktion.

Es sei  $AB$  (s. Abb. 206) der durch den leuchtenden Punkt  $L$  gelegte rechtwinklige Durchschnit der spiegelnden Ebene,  $LP$  ein beliebiger Lichtstrahl,  $PN$  das im Einfallspunkte  $P$  errichtete Einfallslot. Ist nun  $\angle LPN = \angle NPQ$ , so ist  $PQ$  der reflektierte Strahl; verlängern wir ihn rückwärts bis zum Schnitte mit dem von  $L$  auf  $AB$  gefällten Perpendikel, das  $AB$  in  $C$  schneidet, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke  $LCP$  und  $L'CP$ , daß  $LC = CL'$  ist. Dasselbe gilt für alle andern von  $L$  ausgehenden, in den verschiedensten Punkten der Ebene auffallenden Strahlen; alle diese Strahlen gehen also nach ihrer Zurückwerfung scheinbar vom Punkte  $L'$  aus. Dieser Punkt  $L'$  ist also das durch Spiegelung erzeugte Bild des Punkts  $L$ , und es wird einfach dadurch gefunden, daß man von  $L$  aus ein Perpendikel auf die Ebene fällt und um sich selbst verlängert.

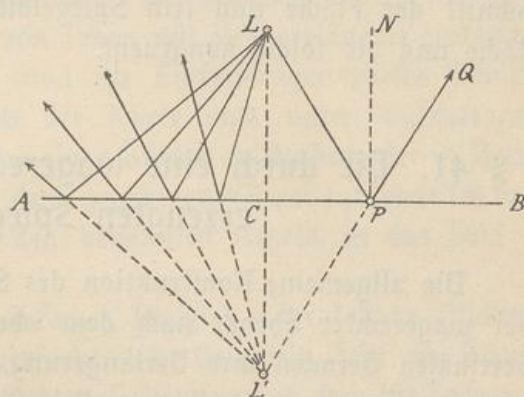


Abb. 206

Mit dieser überaus einfachen Erkenntnis ist die Konstruktion der durch einen ebenen Spiegel erzeugten Bilder grundsätzlich erledigt. Ein Gegenstand und sein Spiegelbild sind ganz einfach in Bezug auf die spiegelnde Ebene symmetrische Gebilde; das Bild jeder Kurve, jeder körperlichen Oberfläche finden wir dadurch, daß wir die Bilder ihrer einzelnen Punkte auffuchen. Um beispielsweise das Spiegelbild einer Geraden zu finden, brauchen wir nur die Bilder zweier beliebiger Punkte aufzufuchen und eine Gerade durch sie zu legen; die Bildgerade und die gegebene Gerade schneiden die spiegelnde Ebene in demselben Punkte, der gewissermaßen sein eigenes Spiegelbild ist. Ist also dieser Schnittpunkt erreichbar, so brauchen wir nur noch das Bild eines Punktes der Geraden aufzufuchen und mit ihm zu verbinden. — Ist die Gerade der spiegelnden Ebene parallel, so ist das Bild ihr selbst parallel; ist die Gerade auf der spiegelnden Ebene senkrecht, so ist das Spiegelbild ihre Verlängerung, fällt also in dieselbe Gerade. Bildet die Gerade endlich einen beliebigen Winkel mit der spiegelnden Ebene, so bildet das Spiegelbild nach der anderen Seite denselben Winkel mit ihr. —



Schneidet eine allgemeine Zylinderfläche von ganz beliebigem Querschnitte die spiegelnde Ebene rechtwinklig, so sind ein beliebiger schiefer Schnitt der Fläche und sein Spiegelbild Wechselschnitte der Zylinderfläche und als solche kongruent.

#### § 41. Die durch eine wagerechte Ebene (Wasserfläche) erzeugten Spiegelbilder.

Die allgemeine Konstruktion des Spiegelbildes gilt natürlich auch bei wagerechter Ebene; nach dem oben Gesagten ist das Bild einer vertikalen Geraden ihre Verlängerung, während das Bild einer horizontalen Geraden mit ihr parallel ist, also mit ihr den Fluchtpunkt gemein hat. Das Bild jedes beliebigen Punktes liegt um ebensoviel unter der Wasserfläche, wie er selbst über ihr liegt.

Der Fluchtpunkt des Spiegelbildes einer beliebig geneigten Geraden wird erhalten, indem man den Abstand des Fluchtpunkts der Geraden vom Horizont auf der durch ihn gelegten Lotrechten nach der andern Seite abträgt — nach unten, wenn der Fluchtpunkt der Geraden über, nach oben, wenn er unter dem Horizonte liegt.

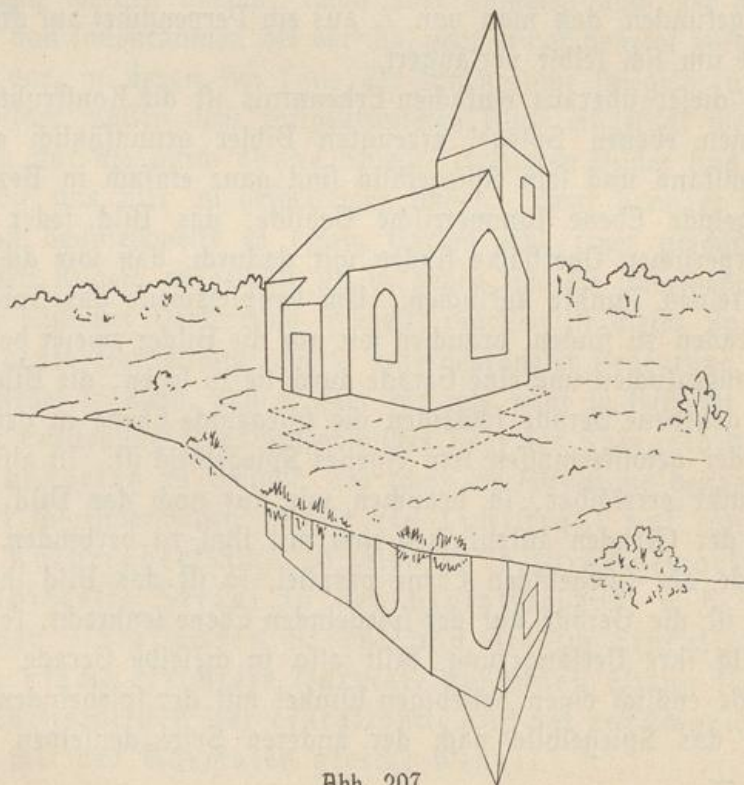


Abb. 207



Da es sich bei der Konstruktion eines Spiegelbildes in der Regel um das eines Gebäudes handelt, kommen in erster Linie lotrechte und waggeredte gerade Linien in Betracht. Wir haben daher die lotrechten Kanten zu verlängern, jede von ihnen mit der verlängert gedachten Wasseroberfläche zu schneiden und die Entfernungen dieses Schnittpunktes von den Endpunkten der Kante nach unten aufzutragen. Ueberhaupt haben wir uns nur einen Körper zu denken, der in Bezug auf die spiegelnde Ebene mit dem gegebenen Körper symmetrisch liegt und diesen Bildkörper nach den bekannten Regeln in das Bild zu übertragen.

Die Abb. 207 giebt ein einfaches Beispiel einer solchen Bildkonstruktion. — Der punktierte perspektivische Grundriß stellt den Schnitt des nach unten verlängert gedachten Gebäudes mit dem Wasserspiegel dar. Nach dem schon früher Ausgeführten ist es ohne Weiteres klar, daß die nach rechts steigenden Giebelkanten ihren Fluchtpunkt mit den Spiegelbildern der nach links steigenden gemein haben und umgekehrt. Die in Abb. 20 mit  $F_1$  und  $F_2$  bezeichneten Fluchtpunkte sind daher auch für die Konstruktion des Spiegelbildes zu gebrauchen.

Daß die Schattenumrisse sich in derselben Weise spiegeln, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Wollte man für das Spiegelbild den Schatten direkt konstruieren, so müßte man auch das Spiegelbild der Lichtquelle der Konstruktion zu Grunde legen, während ihre Horizontalprojektion unverändert bleiben würde.

Auch kann es vorkommen, daß die Sonnenstrahlen an einer vertikalen und an einer horizontalen Ebene reflektiert werden. Das Auge befinde sich in  $O$  oberhalb einer Wasserfläche  $MN$  (s. Abb. 208); jenseits derselben stehe ein Gebäude, dessen senkrechte Vorderfläche  $VW$  mit zahlreichen Fenstern besetzt ist. Bei tief stehender Sonne erblicke das Auge ein Bild der Sonne in einem der Fenster. Muß jetzt auch das Spiegelbild der Sonne in dem im Wasser sichtbaren Spiegelbild der Fläche  $VW$  sichtbar sein? Kann es

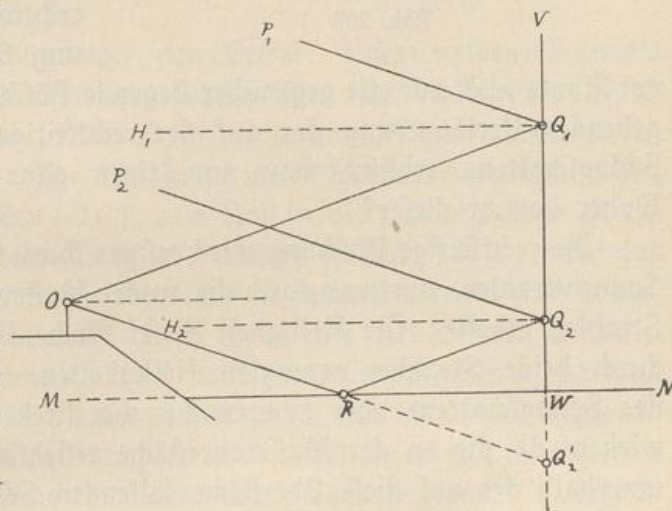


Abb. 208



vorkommen, daß das Spiegelbild der Sonne in dem im Wasser gespiegelten Bilde eines Fensters, aber in keinem der Fenster selbst sichtbar ist? Erstere Frage ist zu verneinen, letztere zu bejahen.

Denken wir uns zunächst die ganze Fläche  $VW$  spiegelnd, so erscheint das direkte Spiegelbild der Sonne im Punkte  $Q_1$ , der so liegt, daß  $\angle P_1 Q_1 H_1 = \angle H_1 Q_1 O$  ist. Ein zweiter Sonnenstrahl wird auf dem Wege  $P_2 Q_2 RO$  in das Auge reflektiert; es ist  $\angle P_2 Q_2 H_2 = \angle H_2 Q_2 R = \angle Q_2 R_2 N = \angle ORM$ . Das durch zweimalige Reflexion erzeugte Sonnenbild ist nun  $Q_2'$ , das im Schnittpunkte von  $VW$  und  $OR$  liegt; die Abstände  $Q_1 W$  und  $Q_2' W$  unterscheiden sich offenbar um das Doppelte der Höhe des Punkts  $O$  über der Wasserfläche von einander. Fällt nun  $Q_1$  in ein Fenster,  $Q_2'$  in das Spiegelbild eines Fensters, so erblicken wir beide Sonnenbilder; fällt  $Q_1$  in ein Fenster,  $Q_2'$  aber nicht in das Spiegelbild eines solchen, so ist nur das Bild  $Q_1$  sichtbar; fällt  $Q_1$  nicht in ein Fenster,  $Q_2'$  aber in das Spiegelbild eines Fensters, so erblicken wir nur das Bild  $Q_2'$ .

Die an der Wasseroberfläche zurückgeworfenen Strahlen können auch erhellend wirken. Zwei Beispiele mögen diese Wirkung zeigen.

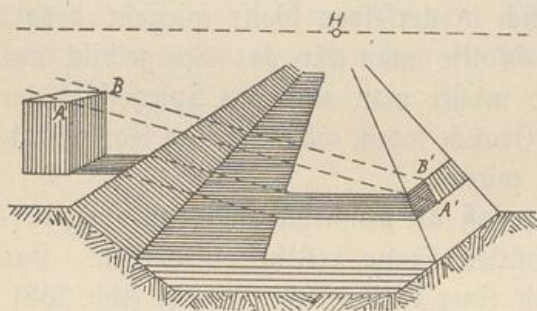


Abb. 209

Ein Wasserlauf befinde sich zwischen zwei Böschungen (Abb. 209). An der Oberkante der einen Böschung stehe etwa ein prismatisch zugehauener Stein. Bei tief stehender Sonne und zu der Richtung des Wasserlaufs rechtwinkliger Strahlenrichtung fällt der Schatten  $A'B'$

der Kante  $AB$  auf die gegenüber liegende Böschung. In der nach oben gehenden Verlängerung des auf der rechtseitigen Böschung liegenden Schlagschattens erblickt man nun einen ganz zarten Halbschatten. Woher kommt dieser?

Die rechtseitige Böschung wird erstens durch die direkt auffallenden Sonnenstrahlen, zweitens durch die an der Wasseroberfläche reflektierten Strahlen erhellt. Die Helligkeit dieser Fläche ist also die Summe der durch beide Strahlen erzeugten Helligkeiten. In der Verlängerung des Schlagschattens aber können nur die direkt auffallenden Strahlen wirken, da die an der Wasseroberfläche reflektierten Strahlen, die ja innerhalb des auf diese Oberfläche fallenden Schlagschattens auffallen müßten, an dieser Stelle wegfallen. Der in der Verlängerung des



Schlagschattens liegende Streifen der Böschung ist daher etwas dunkler als die benachbarten Teile derselben, und zwar um so viel, wie die durch die am Wasser reflektierten Strahlen erzeugte Helligkeit beträgt. Der Unterschied ist freilich nur klein, so daß der zarte Halbschatten nur bei aufmerksamer Beobachtung sichtbar ist.

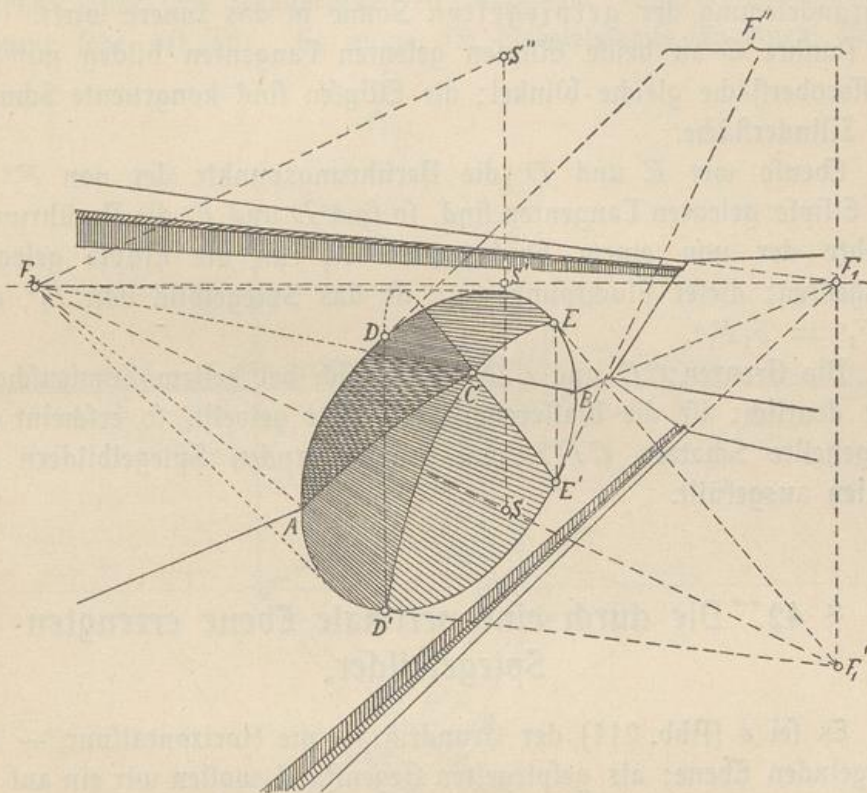


Abb. 210

Ein Brückengewölbe von der Gestalt eines halben Zylinders (Abb. 210) befindet sich über einer Wasseroberfläche. Der Halbkreis  $ADEB$  ergibt das Spiegelbild  $AD'E'B$ ; beide zusammen bilden einen Kreis, im Bilde eine Ellipse. Der Halbkreis wirft seinen Schatten zum Teil auf die Wasseroberfläche ( $AC$ ), zum Teil in die Leibungsfläche ( $CE$ ). Dieser Schatten, den wir als Ellipse kennen (s. Abb. 146), ergibt das Spiegelbild  $CE'$ . Das Stück  $CBE$  der Zylinderfläche wird nun wieder durch die direkt auffallenden und durch die reflektierten Strahlen erhellt; letztere aber erhellen auch noch einen Teil des Schlagschattens, und zwar ist dieser Teil nach hinten durch die Linie  $CD$  begrenzt, in der die längs des Ellipsenbogens  $AC$  auffallenden und reflektierten Strahlen die Zylinderfläche schneiden. Diese Schattengrenze  $CD$  ergibt das Spiegelbild  $CD'$ . — Da wir uns die Spiegelbilder  $CE'$  und  $CD'$



auch direkt durch die gespiegelte Sonne  $S''$  entstanden denken können, erkennt man leicht, daß  $CD'$  die Fortsetzung des Ellipsenbogens  $CE$ ,  $CE'$  die des Ellipsenbogens  $CD$  ist;  $ED'$  ist nichts anderes als der Schlagschatten, den der Rand des vollen Zylinders in das Innere wirft,  $DE'$  ist der Schatten, den der Rand des vollen Zylinders unter Zugrundelegung der gespiegelten Sonne in das Innere wirft. Die im Punkte  $C$  an beide Ellipsen gelegten Tangenten bilden mit der Wasseroberfläche gleiche Winkel; die Ellipsen sind kongruente Schnitte der Zylinderfläche.

Ebenso wie  $E$  und  $D'$  die Berührungspunkte der von  $F_1'$  an die Ellipse gelegten Tangenten sind, so sind  $D$  und  $E'$  die Berührungspunkte der von einem Fluchtpunkte  $F_1''$  an die Ellipse gelegten Tangenten; dieser Fluchtpunkt  $F_1''$  ist das Spiegelbild von  $F_1'$ , also  $F_1F_1' = F_1F_1''$ .

Die Grenzen  $CD$  und  $CD'$  zeigen sich bei hellem Sonnenscheine sehr deutlich; ist die Wasseroberfläche leicht gewellt, so erscheint der aufgehellte Schatten  $CDE$  von den glitzernden Spiegelbildern der Wellen ausgefüllt.

## § 42. Die durch eine vertikale Ebene erzeugten Spiegelbilder.

Es sei  $e$  (Abb. 211) der Grundriß — die Horizontalspur — der spiegelnden Ebene; als gespiegelten Gegenstand wollen wir ein auf der Grundebene stehendes rechtwinkliges Parallelepiped annehmen, dessen Grundfläche  $BCDE$  sei; ihr Spiegelbild ist  $B'C'D'E'$ . Ist wieder  $A$  das umgeklappte Auge, so finden wir in bekannter Weise den Fluchtpunkt  $F_1$  von  $e$ , den Fluchtpunkt  $F_2$  der auf den Spiegel gefällten Perpendikel, die Fluchtpunkte  $F_a$  und  $F_b$  der Seiten des Rechtecks  $BCDE$  und die Fluchtpunkte  $F_a'$  und  $F_b'$  der Seiten des gespiegelten Rechtecks  $B'C'D'E'$ . Da die Höhe des Spiegelbildes gleich der des Gegenstandes ist, hat nun die Konstruktion des perspektivischen Bildes des Spiegelbildes nicht die geringsten Schwierigkeiten mehr. Wir haben das Spiegelbild genau so wie einen körperlichen Gegenstand zu behandeln. Die Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  sind offenbar für die Konstruktion gar nicht erforderlich; immerhin ergibt es eine gute Kontrolle, daß die Bilder der auf den Spiegel gefällten Perpendikel durch  $F_2$  gehen müssen. Die Abbildung zeigt das Spiegelbild und auch die durch  $F_2$  gehenden Bilder der Perpendikel.



Auch zweifache Spiegelungen an vertikalen Ebenen kommen vor. Zwar hat der Fall, daß in einem Innenraume sich zwei vertikale Spiegelflächen befinden und das durch die eine erzeugte Spiegelbild eines Gegenstandes sich noch einmal in der anderen spiegelt, keine praktische Bedeutung; übrigens wäre dieser Fall, wie man sofort erkennt, ohne jede Schwierigkeit zu behandeln. Aber etwas Aehnliches kommt sehr oft vor. Es möge sich beispielsweise an einem Möbel

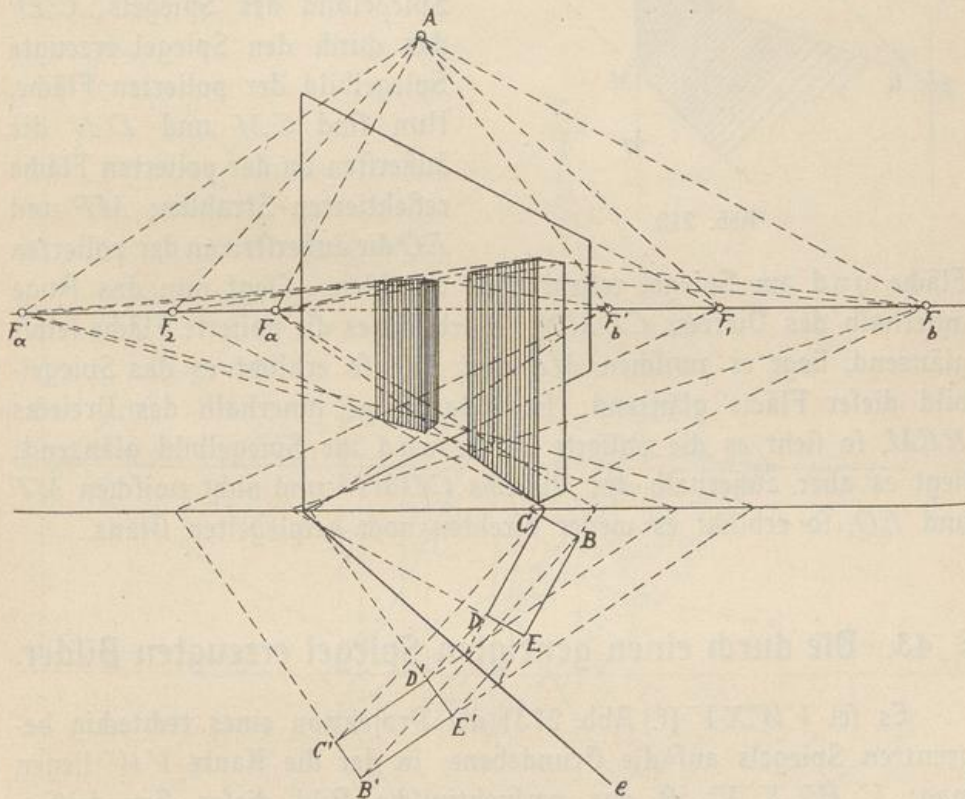


Abb. 211

eine polierte Fläche befinden, die die durch das Fenster eindringenden Lichtstrahlen in das Auge des Beschauers reflektiert, die also glänzt. In einem vertikalen Spiegel erblickt der Beschauer das Spiegelbild des Möbels; muß dieses Spiegelbild auch glänzen? Ist es möglich, daß das Möbel glänzt, sein Spiegelbild aber nicht? Kann es auch vorkommen, daß das Möbel nicht glänzt, wohl aber sein Spiegelbild?

Der Fall ist offenbar ganz analog dem im § 41 behandelten Falle des am Ufer eines Gewässers stehenden, mit vielen Fenstern versehenen Hauses. Wie sich dort die Strahlen auf eine vertikale Ebene projizieren, so projizieren sie sich hier auf eine horizontale.



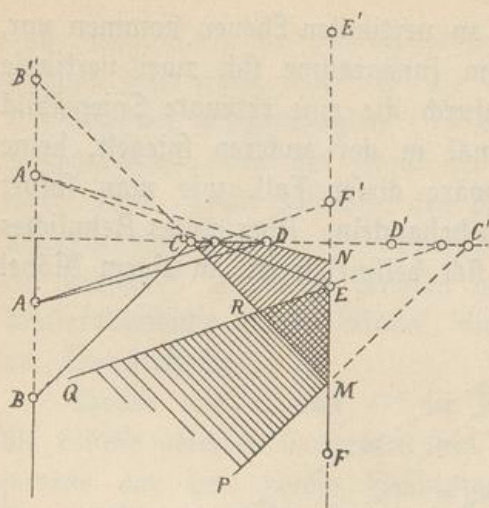


Abb. 212

Es sei (Abb. 212)  $AB$  das Fenster,  $CD$  die polierte Vorderfläche des Möbels,  $EF$  der Spiegel im Grundriss, also  $A'B'$  das durch die polierte Fläche erzeugte Spiegelbild des Fensters,  $E'F'$  das durch dieselbe Fläche erzeugte Spiegelbild des Spiegels,  $C'D'$  das durch den Spiegel erzeugte Spiegelbild der polierten Fläche. Nun sind  $CM$  und  $DN$  die äußersten an der polierten Fläche reflektierten Strahlen;  $MP$  und  $EQ$  die äußersten an der polierten

Fläche und am Spiegel reflektierten Strahlen. Liegt nun das Auge innerhalb des Vierecks  $CDMN$ , so erblickt es die polierte Fläche selbst glänzend, liegt es zwischen  $MP$  und  $EQ$ , so erblickt es das Spiegelbild dieser Fläche glänzend; liegt das Auge innerhalb des Dreiecks  $REM$ , so sieht es die polierte Fläche und ihr Spiegelbild glänzend; liegt es aber außerhalb des Vierecks  $CDMN$  und nicht zwischen  $MP$  und  $EQ$ , so erblickt es weder direkten noch gespiegelten Glanz.

### § 43. Die durch einen geneigten Spiegel erzeugten Bilder.

Es sei  $VWXY$  (s. Abb. 213) die Projektion eines rechteckig begrenzten Spiegels auf die Grundebene, in der die Kante  $VW$  liegen mag;  $V'W'X'Y'$  ist das perspektivische Bild dieses Grundrisses,  $V''W''X''Y''$  das Bild des Spiegels selbst. Um die Zeichnung möglichst einfach und übersichtlich zu gestalten, wollen wir uns auf das Bild eines einzelnen Punkts beschränken;  $P$  sei sein Grundriß,  $P'$  das Bild dieses Grundrisses,  $P''$  das Bild des räumlichen Punktes. Wir legen — etwa durch  $WX$  — eine zur Grundkante  $VW$  rechtwinklige, vertikale Hülfeebene und klappen sie in die Grundebene um; in der Umklappung zeigt sich der Spiegel als die Strecke  $WX'''$ , während der Punkt nach  $P'''$  fällt. Selbstverständlich sind die Höhen  $h_1$  und  $h_2$  der Punkte  $X'''$  und  $P'''$  über der Grundkante nach bekannten Gesetzen mit dem perspektivischen Bilde in Uebereinstimmung zu bringen. Füllen wir nun von  $P'''$  ein Perpendikel auf  $WX'''$  und verlängern es um sich selbst, so erhalten wir in der Umklappung das Spiegelbild  $P^{IV}$ ,







In dieser Weise können wir das Bild jedes Punktes, also auch das perspektivische Bild des Spiegelbildes jedes beliebigen Körpers ermitteln. Die Konstruktion vereinfacht sich aber außerordentlich, wenn wir bedenken, daß die perspektivischen Bilder der von beliebigen Punkten auf den Spiegel gefällten Perpendikel durch einen Punkt gehen müssen. Dieser Fluchtpunkt  $F'$  liegt offenbar in der durch  $F$ , den Fluchtpunkt von  $V'Y'$  und  $W'X'$ , gezogenen Lotrechten und ist daher der Schnittpunkt dieser Lotrechten mit  $P''P''''$ . Selbstverständlich können wir  $F'$  auch in der gewöhnlichen Weise dadurch finden, daß wir durch das Auge eine Normale des Spiegels legen und mit der Bildebene schneiden.

Weiter kann man sich die Konstruktion des Spiegelbildes dadurch erleichtern, daß man stets berücksichtigt, daß eine Linie und ihr Spiegelbild sich in der Ebene des Spiegels schneiden und daß die Spiegelbilder paralleler Kanten im perspektivischen Bilde nach einem Fluchtpunkte gehen müssen.

#### § 44. Die durch Strahlenbrechung an einer Wasseroberfläche erzeugten Bilder.

Die durch das Wasser hervorgerufenen Täuschungen sind allgemein bekannt. Blickt man von oben in das Wasser hinein, so erscheint seine Tiefe kleiner, als sie in Wahrheit ist; ein schräg in das Wasser gesteckter Stab erscheint in seinem Schnittpunkte mit der Wasseroberfläche geknickt. Mit dem Zustandekommen dieser durch Strahlenbrechung erzeugten Bilder und ihrer konstruktiven Ermittlung wollen wir uns jetzt ganz kurz befassen.

Eine eingehende Behandlung der Strahlenbrechung an der Ebene gehört völlig in das Gebiet der Optik; Leser, die sich mit dem Gegenstande gründlicher befassen wollen, seien auf des Verfassers „Geometrische Optik“ (Halle a. S. 1886), „Lehrbuch der Optik“ (Weimar 1889) und „Elemente der geometrischen Optik“ (Hannover 1908) verwiesen. Hier kann von der Sache nur soviel gebracht werden, wie unumgänglich nötig ist, um die Entstehung dieser Bilder grundsätzlich zu verstehen.

Die Bilder, von denen hier die Rede ist, werden oft als optische Täuschungen bezeichnet. Um Täuschungen im eigentlichen Sinne des Wortes handelt es sich hier nicht; wenn beispielsweise ein Stab im Wasser geknickt erscheint, so liegt sein wirkliches, konstruierbares Bild da, wo wir es sehen. Um eine wirkliche optische Täuschung handelt



es sich aber beispielsweise, wenn uns eine ungeteilte gerade Strecke länger erscheint, als eine in derselben Lage gegen das Auge befindliche, mehrfach geteilte Strecke von gleicher Länge.

Die durch Strahlenbrechung im Wasser erzeugten Bilder pflegen in der Malerei kaum beachtet zu werden. Stellt der Künstler beispielsweise eine Diana im Bade dar, so zeichnet er den ganzen Umriss der Göttin ohne Rücksicht auf die sehr wesentliche Veränderung, die die Umrisse der unter Wasser befindlichen Teile durch die Strahlenbrechung erleiden, und unterscheidet bei der malerischen Behandlung diese Teile von den außerhalb des Wassers befindlichen nur dadurch, daß er den bläulichgrünen Farbton des Wassers über sie legt. Eine solche Behandlung — und mag sie noch so allgemein und von noch so großen Künstlern geübt werden — entspricht nicht der Wahrheit. Zuzugeben ist, daß der durch die Strahlenbrechung erzeugte Umriss nicht eben schön aussieht; wenn aber das der Fall ist, sollte man lieber auf die Darstellung teilweise im Wasser befindlicher Körper verzichten, als sie unrichtig darstellen.

Geht von einem unter Wasser befindlichen Punkte *A* (Abb. 214) ein Lichtstrahl aus, der die Wasseroberfläche in *B* trifft, so wird er beim Uebergang in die Luft von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Bildet der Strahl *AB* im Wasser mit dem im Punkte *B* errichteten Einfallslot den Einfallswinkel  $\alpha$ , so bildet er nach seinem Austritte aus dem Wasser mit demselben Lote einen größeren Winkel  $\beta$ , den sogenannten Brechungswinkel.

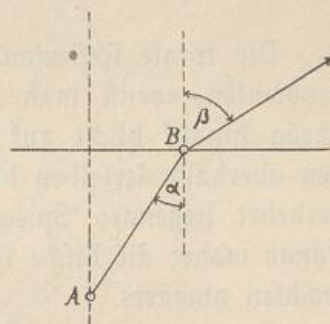


Abb. 214

Der Winkel  $\beta$  ist durch den Winkel  $\alpha$  bestimmt; beide hängen durch das sogenannte Snellius'sche Brechungsgesetz zusammen, das ausagt, daß das Verhältnis des Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels für alle Strahlen dasselbe ist. Der für den Uebergang der Strahlen aus einem bestimmten Stoffe in einen anderen bestimmten Stoff unveränderliche Wert dieses Verhältnisses wird „Brechungsquotient“ genannt und gewöhnlich mit  $n$  bezeichnet. Es ist daher

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \quad \text{also} \quad \sin \beta = n \cdot \sin \alpha$$

Mit Hülfe dieser einfachen Gleichung können wir aus dem Einfallswinkel eines Strahls seinen Brechungswinkel berechnen. Der Sinus eines Winkels kann bekanntlich den Wert 1 nicht überschreiten; also



kann höchstens  $\sin \beta = 1$  sein. Daraus folgt dann für diesen Maximalwert von  $\sin \beta$ , dem der Wert  $\beta = 90^\circ$  entspricht, ein Einfallswinkel  $\alpha'$ , der durch die Gleichung

$$\sin \alpha' = \frac{1}{n}$$

bestimmt ist. Dieser Wert  $\alpha'$  ist der höchste Wert des Winkels  $\alpha$ , bei dem noch eine Brechung möglich ist; ihm entspricht ein mit der Wasseroberfläche zusammenfallender gebrochener Strahl. Ueberschreitet der Winkel  $\alpha$  diesen Grenzwert, so kann der Strahl nicht mehr in die Luft austreten; er wird an der Wasseroberfläche vollständig zurückgeworfen, es tritt „totale Reflexion“ ein.

Für den Uebergang aus Wasser in Luft ist etwa  $n = \frac{4}{3}$ , also  $\sin \alpha' = \frac{3}{4}$ . Daraus ergibt sich für den Winkel  $\alpha'$ , den „Grenzwinkel der totalen Reflexion“ der Wert

$$\alpha' = 48^\circ 35'.$$

Die totale Reflexion an einer Wasseroberfläche läßt sich trefflich beobachten, wenn man durch die gläserne Wand eines Aquariums schräg hinauf blickt auf die Oberfläche. Man sieht dann nichts von den oberhalb derselben befindlichen Gegenständen, nimmt hingegen die verkehrt liegenden Spiegelbilder der im Wasser befindlichen Gegenstände wahr; die Fische schwimmen auf dem Rücken und die Pflanzen wachsen abwärts.

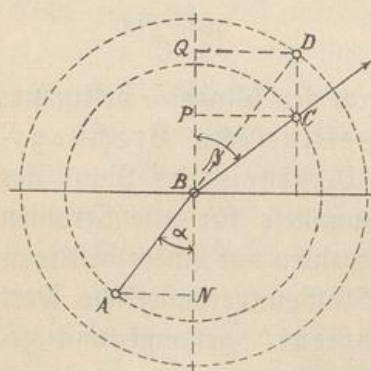


Abb. 215

Der zu irgend einem einfallenden Strahle gehörige gebrochene Strahl läßt sich auch sehr einfach konstruieren. Um den Einfallspunkt  $B$  (Abb. 215) des in der Zeichenebene liegenden Strahls  $AB$  beschreiben wir zwei Kreise, deren Radien sich  $1 : n$  verhalten, verlängern den einfallenden Strahl, bis er den größeren Kreis in  $D$  schneidet und ziehen von  $D$  aus eine Parallele zum Einfallslot, die den kleineren Kreis in  $C$  schneidet;  $BC$

ist der gebrochene Strahl. Ziehen wir nämlich  $AN$  und  $CP$  senkrecht zum Einfallslot, so ist

$$\sin \alpha = \frac{AN}{AB}, \sin \beta = \frac{CP}{BC}, \text{ also } \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{CP}{BC} \cdot \frac{AN}{AB} = \frac{CP}{AN} \cdot \frac{AB}{BC}$$



Nun ist aber  $AB = BC$ , also  $\frac{AB}{BC} = 1$ , ferner  $\frac{CP}{AN} = \frac{DQ}{AN} = \frac{BD}{AB}$   
 $= \frac{n}{1} = n$ , also  $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n$ .

Aus der Konstruktion ergibt sich auch der Grenzwinkel der totalen Reflexion; diese tritt ein, wenn  $CD$  den kleineren Kreis berührt.

Dann ist offenbar  $\beta = 90^\circ$ ,  $\sin \beta = 1$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{n}$ .

Wir wollen nun (s. Abb. 216) alle Strahlen verfolgen, die von dem Punkte  $A$  ausgehen;  $A'$  sei die Projektion von  $A$  auf die Wasseroberfläche. Da der Strahlenverlauf in allen durch das Lot  $AA'$  gehenden Schnitten derselbe ist, genügt es vollständig, wenn wir in der Ebene des Papiers einen solchen Schnitt darstellen. Wenn wir eine größere Anzahl

von Strahlen auswählen und nach der angegebenen Konstruktion die zugehörigen gebrochenen Strahlen ermitteln, so finden

wir, daß diese gebrochenen Strahlen nicht mehr durch einen Punkt gehen; sie berühren eine Kurve, die sich vollständig ergeben würde, wenn wir alle Strahlen verfolgen könnten. Sie

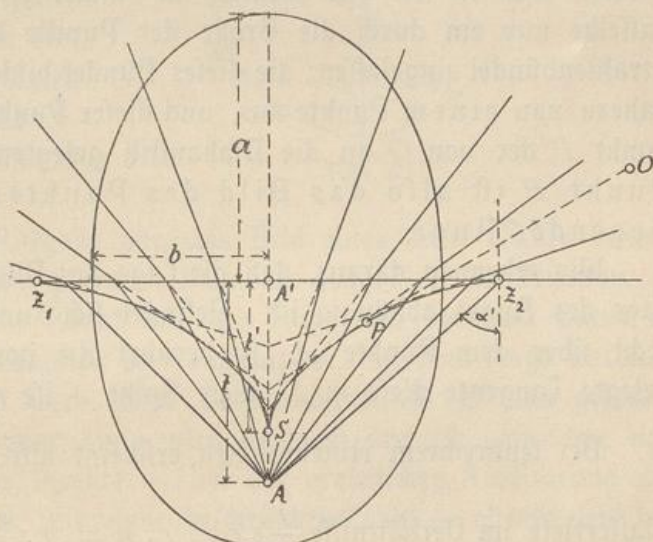


Abb. 216

ist die einhüllende Kurve oder Enveloppe der gebrochenen Strahlen und wird hier, wo sie durch Strahlenbrechung entsteht, als Diakauistik bezeichnet. Sie ist, wie für den mathematisch geschulten Leser hinzugefügt werden mag, die Hälfte der Evolute einer Ellipse, deren Mittelpunkt  $A'$  ist. Bezeichnen wir die Tiefe des Punktes  $A$  unter der Oberfläche mit  $t$ , so ist die in der Richtung  $AA'$  fallende halbe große Axe der Ellipse  $a = n \cdot t$ , die in die Wasseroberfläche fallende halbe kleine Axe  $b = \sqrt{n^2 - 1} \cdot t$  und daher die Exzentrizität  $e = t$ . Daraus folgt, daß der Punkt  $A$  einer der Brennpunkte der Ellipse ist. Die Diakauistik besitzt eine im Lote  $AA'$  liegende Spitze  $S$ , die von  $A'$



den Abstand  $t' = \frac{t}{n}$  hat; sie berührt die die Wasseroberfläche darstellende Horizontale in den Punkten  $Z_1$  und  $Z_2$ , in denen die totale Reflexion beginnt und deren Abstand von  $A$

$$t \cdot \operatorname{tg} \alpha' = \frac{t \cdot \sin \alpha'}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha'}} = \frac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{t}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

ist. Für  $n = \frac{4}{3}$  ist  $t' = \frac{3}{4} t$ ,  $a = \frac{4}{3} t$ ,  $b = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} \cdot t = \frac{t}{3} \cdot \sqrt{7} = 0,8819 \cdot t$ .

Die Kenntnis der Diakustik ist die unerläßliche Vorbedingung für das Verständnis und die Konstruktion der durch Brechung erzeugten Bilder. Denken wir uns nämlich im Punkte  $O$  ein Auge, so wird in dasselbe nur ein durch die Größe der Pupille bedingtes, sehr enges Strahlenbündel eingelassen; die dieses Bündel bildenden Strahlen gehen nahezu von einem Punkte aus, und dieser Punkt ist der Berührungspunkt  $P$  der von  $O$  an die Diakustik gelegten Tangente. Dieser Punkt  $P$  ist also das Bild des Punktes  $A$  für ein in  $O$  liegendes Auge.

Wir erkennen daraus, daß die Lage des Bildes durchaus von der Lage des Auges abhängig ist. Befindet sich zunächst das Auge senkrecht über dem Punkte  $A$ , so berührt die von ihm an die Kurve gelegte Tangente diese in  $S$ ; diese Spitze  $S$  ist also jetzt das Bild von  $A$ . Bei senkrechtem Hineinblicken erscheint also, da  $t' = \frac{t}{n}$  ist, die

Wassertiefe im Verhältnisse  $\frac{1}{n} : 1 = 1 : n = 1 : \frac{4}{3} = 3 : 4$  verkleinert.

Bewegt sich nun das Auge nach der Seite, so gleitet der Punkt  $P$  an der Kurve hinauf, das Bild nähert sich also fortgesetzt der Wasseroberfläche und dem Auge. Je flacher wir also in ein Gewässer blicken, um so geringer erscheint seine Tiefe.

Der gesuchte Berührungspunkt  $P$  des Strahl mit der Diakustik ist der Krümmungsmittelpunkt der erwähnten Ellipse in ihrem Schnittpunkte mit dem Strahle. Diese Tatsache setzt uns in den Stand, die gewöhnliche, aus der Theorie der Kegelschnitte bekannte Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts hier anzuwenden und dadurch den gesuchten Berührungspunkt  $P$ , das Bild des Punktes  $A$  für das Auge  $A$ , bedeutend schärfer zu bestimmen. — Der die Diakustik berührende



Strahl schneide die Ellipse in  $N$  (Abb. 217), ihre große Axe in  $K$ . Für den Schnittpunkt  $N$  ist  $NO$  die Normale, der Punkt  $P$  Krümmungsmittelpunkt. Um ihn genau zu finden, ziehen wir  $NA$  durch den bereits als Brennpunkt der Ellipse erkannten Punkt  $A$ , errichten in  $K$  ein Perpendikel auf  $NO$ , das  $NA$  in  $L$  schneidet und errichten schließlich in  $L$  wieder ein Perpendikel auf  $NL$ , das  $NK$  im gesuchten Berührungspunkte  $P$  schneidet. — Die Konstruktion beruht darauf, daß der Krümmungsmittelpunkt  $P$  für einen beliebigen Punkt  $N$  eines Kegelschnittes erhalten wird, wenn man den Abschnitt  $NK$  der Normalen durch das Quadrat des Cosinus des Winkels  $KNA$  dividiert.

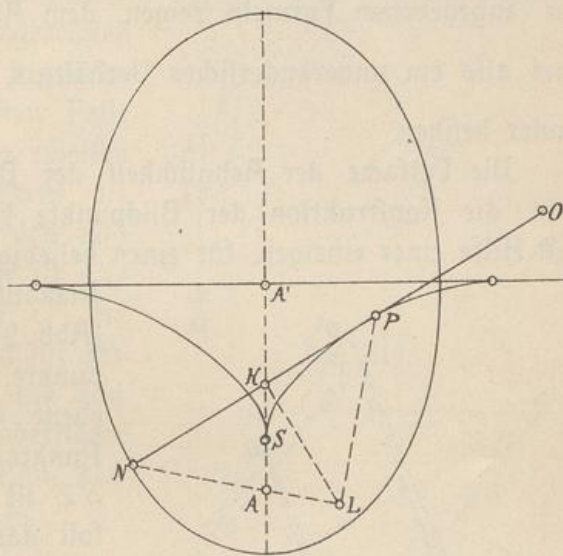


Abb. 217

Liegt nun die Aufgabe vor, das Bild eines unter Wasser befindlichen Punktes für eine gegebene Lage des Auges zu konstruieren, so haben wir durch den Punkt und das Auge eine vertikale Ebene zu legen, in ihr die Diakauistik zu konstruieren und vom Auge aus eine Tangente an sie zu legen. Der Berührungspunkt ist das gesuchte Bild. — Das Bild einer Linie wird demnach dadurch gefunden, daß man mit jedem ihrer Punkte — bei der praktischen Ausführung der Konstruktion natürlich mit einer beschränkten Zahl — ebenso verfährt und die gefundenen Bildpunkte durch eine Kurve verbindet. Das Bild einer Geraden ergibt sich auf diese Weise als eine krumme Linie, die erst bei unendlicher Entfernung des Auges in eine Gerade übergeht. In diesem Falle sind nämlich die vom Auge an die den einzelnen Punkten der Geraden entsprechenden Diakaustiken gelegten Tangenten parallel, und die Berührungspunkte paralleler Tangenten, die an ähnliche und perspektivisch liegende Kurven gezogen werden, liegen auf einer durch den Ähnlichkeitspunkt gehenden Geraden.

Die Ausführung der angegebenen Konstruktion ist natürlich recht umständlich. Sie vereinfacht sich aber dadurch ganz wesentlich, daß die hier auftretende Diakauistik nur einer einzigen Gestalt fähig ist, daß also die den verschiedensten Lagen des Punktes  $A$  ent-



sprechenden Diakaustiken geometrisch ähnliche Kurven sein müssen. Das ergibt sich sofort daraus, daß die Diakaustik nur von einer Konstanten, nämlich dem Abstände  $t$  abhängt; es folgt ferner daraus, daß sie die Evolute einer Ellipse ist, deren Hauptachsen, wie die angegebenen Formeln zeigen, dem Abstände  $t$  proportional sind und also ein unveränderliches Verhältnis, nämlich  $\frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$ , zu einander besitzen.

Die Tatsache der Aehnlichkeit der Diakaustiken ermöglicht uns nun, die Konstruktion der Bildpunkte beliebig vieler Objektpunkte mit Hilfe einer einzigen, für einen beliebigen Objektpunkt gezeichneten

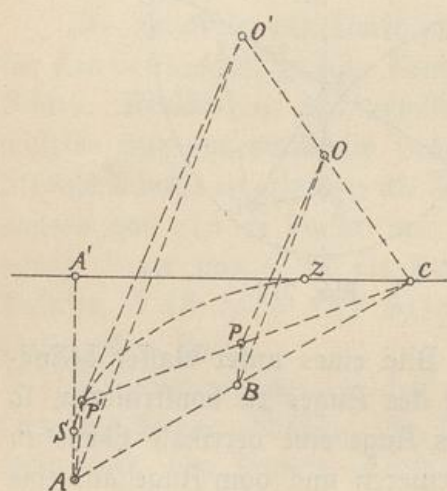


Abb. 218

Diakaustik auszuführen. Es seien (Abb. 218)  $A$  und  $B$  zwei Objektpunkte,  $O$  das in ihrer Vertikalebene liegende Auge. Die dem Punkte  $A$  entsprechende Diakaustik  $SZ$  ist konstruiert worden. Man soll das Bild des Punktes  $B$  für das Auge  $O$  bestimmen.

Es kommt nun darauf an, einen Punkt  $O'$  zu finden, der in Bezug auf die Diakaustik des Punktes  $A$  ebenso liegt, wie der Punkt  $O$  in Bezug auf die nicht gezeichnete Diakaustik des Punktes  $B$ . Zu diesem Zwecke ziehen wir die Gerade  $AB$

und schneiden sie mit der Wasseroberfläche; der Schnittpunkt  $C$  ist der Aehnlichkeitspunkt der beiden Diakaustiken. Ziehen wir also  $CO$  und schneiden diese Gerade mit einer von  $A$  aus parallel zu  $BO$  gezogenen Geraden, so haben wir den gesuchten Punkt  $O'$ . Eine von  $O'$  an die Diakaustik des Punktes  $A$  gelegte Tangente ergibt in ihrem Berührungspunkte das Bild  $P'$  des Punktes  $A$  für ein in  $O'$  liegendes Auge; ziehen wir schließlich  $P'C$  und von  $B$  aus eine Parallele zu  $AP'$  oder auch von  $O$  aus eine Parallele zu  $O'P'$ , so haben wir sofort das gesuchte Bild  $P$ . Die Dreiecke  $AP'O'$  und  $BPO$  sind ähnlich.

Dadurch, daß man nur eine Diakaustik zu zeichnen braucht, wird nicht nur die Konstruktion sehr vereinfacht, sondern auch die Genauigkeit ganz bedeutend erhöht. Diese eine Kurve muß natürlich mit möglichster Sorgfalt und Genauigkeit gezeichnet werden.



Die Abb. 219, 220 und 221 zeigen die auf diese Weise ermittelten Bilder einer vertikalen, einer in der durch das Auge und den leuchtenden Punkt gehenden Vertikalebene liegenden wagerechten und einer in derselben Ebene liegenden geneigten Geraden. Im ersten Falle fällt  $C$  mit  $A'$  zusammen; im zweiten Falle liegt  $C$  in unendlicher Ferne, die Geraden  $AC$  und  $P'G$  werden also horizontal. — In jeder Figur ist  $PQ$  die abzubildende Gerade,  $P'Q'$  ihr durch Brechung erzeugtes Bild für das in  $O$  liegende Auge; Objekt und Bild müssen sich in der Wasseroberfläche schneiden, es fallen also in Abb. 219 und 221  $P$  und  $P'$  zusammen.

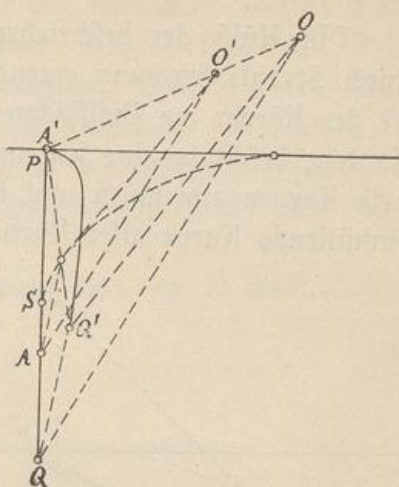


Abb. 219

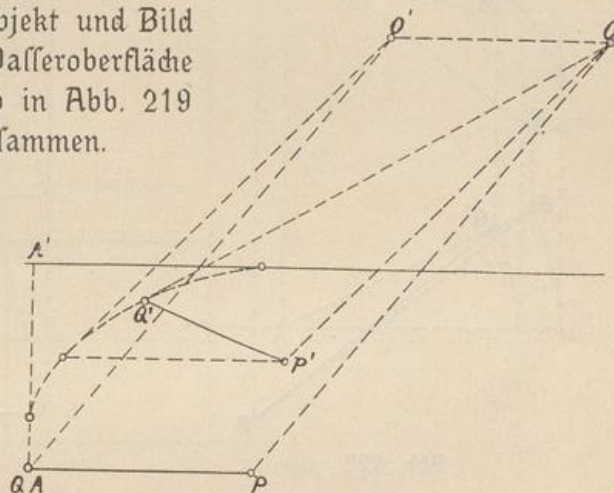


Abb. 220

Soll das Bild einer nicht in einer durch das Auge gehenden vertikalen Ebene liegenden Linie ermittelt werden, so muß man auf ihr einzelne Punkte annehmen, durch jeden Punkt und das Auge eine vertikale Ebene legen, diese um eine durch das Auge gezogene vertikale Gerade in eine zur Zeichenfläche parallele Lage drehen, dann die oben geschilderte Bildkonstruktion vornehmen und schließlich die Ebene wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückdrehen. — Die Abb. 222 zeigt die Anwendung dieser Konstruktion auf eine ganz beliebig im Raume liegende Gerade  $PQ$ ; die Gerade selbst und ihr Bild  $PQ'$  sind im Grund- und Aufrisse dargestellt.

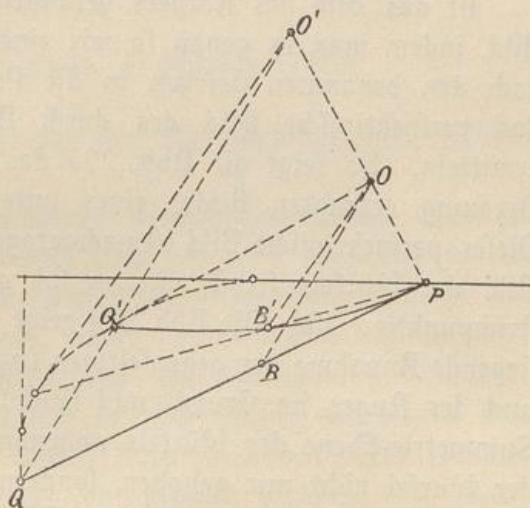


Abb. 221



Mit Hülfe der beschriebenen Konstruktionen kann man nun das durch Strahlenbrechung erzeugte Bild jedes beliebigen Körpers finden. Ist der Körper ein Vielflächner, so ermittelt man die Bilder sämtlicher Kanten; besitzt er eine krumme Oberfläche, so muß man auf ihr geeignete Kurven annehmen und deren Bilder punktweise auffuchen. Die einhüllende Kurve aller Kurvenbilder ist der Umriss des Bildes.

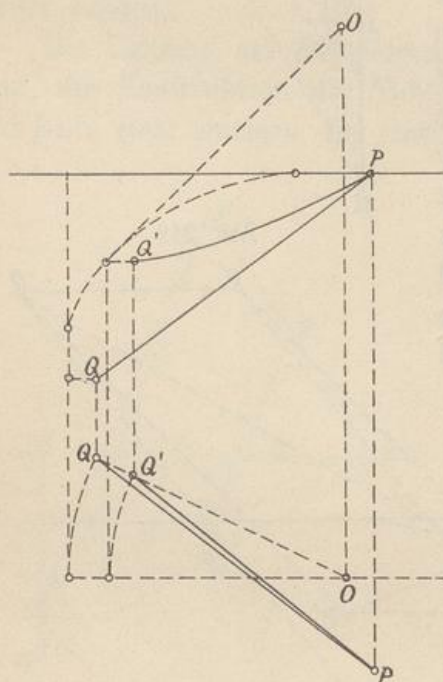


Abb. 222

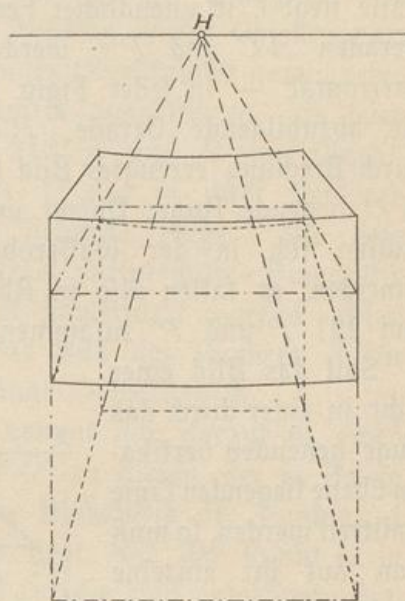


Abb. 223

Ist das Bild des Körpers gefunden, so hat man schließlich dieses Bild, indem man es genau so wie einen wirklichen Körper behandelt, nach den bekannten Gesetzen in die Perspektive zu übertragen, also das perspektivische Bild des durch Brechung erzeugten Bildes zu ermitteln. So zeigt die Abb. 223 das perspektivische Bild des durch Brechung erzeugten Bildes eines unter Wasser befindlichen Würfels. Dieses perspektivische Bild ist nachgezogen, während das perspektivische Bild des Würfels selbst, wie es sich ohne das Wasser zeigen würde, strichpunktiert ist. Die Abb. 224 zeigt die der Konstruktion zu Grunde liegende Annahme der gegenseitigen Lage der Wasserfläche, des Würfels und des Auges im Grund- und Aufrisse. Das Auge wurde in einer Symmetrie-Ebene des Würfels angenommen. Die Abb. 223 zeigt, daß der Würfel nicht nur gehoben, sondern daß auch seine Höhe auf etwa die Hälfte vermindert erscheint. Die wagerechten Kanten erscheinen



schwach gekrümmt, während die Bilder der vertikalen Kanten gerade bleiben und gegen die Bilder der direkt, ohne bedeckendes Wasser, gesehenen Kanten keine Verschiebung erleiden. Das hat seinen Grund einfach darin, daß das, wie wir wissen, tatsächlich gekrümmte Bild einer Vertikalen in der durch sie und das Auge gelegten Vertikalebene liegt, so daß die Krümmung im perspektivischen Bilde nicht in die Erscheinung treten kann.

Je flacher wir in das Wasser hineinblicken, um so mehr erscheint der Körper gehoben und dem Auge — auch in waghereditem Sinne — genähert, um so geringer erscheint gleichzeitig seine Höhe.

Von dem durch die Brechung an einer Ebene erzeugten Astigmatismus der räumlichen Elementar-  
bündel, der auf das wirklich wahrgenommene Bild keinen merk-  
baren Einfluß hat, ist bei dieser Betrachtung abgesehen worden.

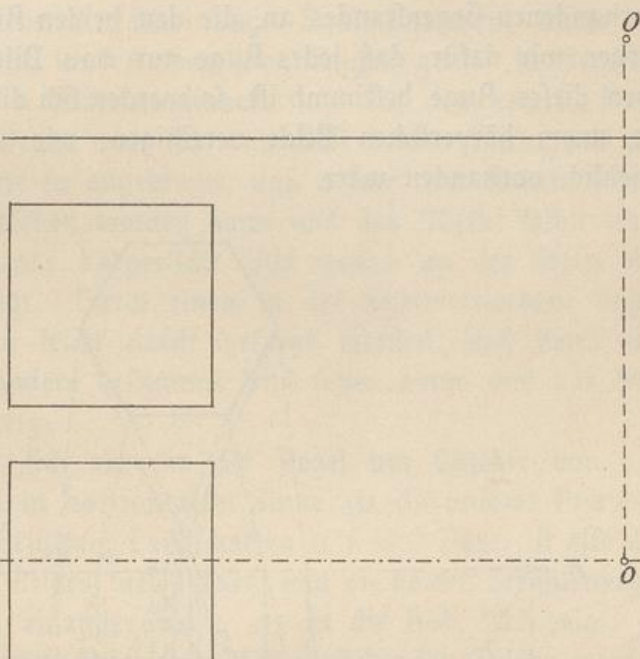


Abb. 224

## Anhang zum I. Abschnitte.

### § 45. Die Konstruktion der stereoskopischen Bilder.

Daß wir die uns umgebenden körperlichen Gebilde nicht flächenhaft, sondern körperhaft sehen, daß wir also die Dicke der Gegenstände und ihre Entfernungen vom Auge — innerhalb gewisser Grenzen wenigstens — schätzen können, beruht auf der Zweiheit unseres Sehorgans. So lange die Entfernung des betrachteten Körpers nicht sehr groß ist im Vergleich mit der Entfernung der beiden Pupillen von einander, entstehen in beiden Augen merkbar verschiedene Bilder des Körpers. Wir können das sehr deutlich wahrnehmen, wenn wir



einen nahen Gegenstand abwechselnd mit beiden Augen betrachten, aber mit jedem für sich allein, indem wir das andere schließen. — Diese beiden verschiedenen ebenen Bilder werden in den Raum zurück projiziert und vereinigen sich hier wieder zum körperlichen Bilde.

Das körperliche Sehen ist also durch die Verschiedenheit der Bilder bedingt, die ein Gegenstand auf den Netzhäuten unserer beiden Augen erzeugt. Beide Bilder sind selbstverständlich perspektivische Bilder. Fertigen wir also zwei perspektivische Bilder eines tatsächlich gar nicht vorhandenen Gegenstandes an, die den beiden Augen entsprechen, und sorgen wir dafür, daß jedes Auge nur das Bild sehen kann, das für eben dieses Auge bestimmt ist, so werden sich die beiden Bilder ebenso zu einem körperlichen Bilde vereinigen, wie wenn der Gegenstand wirklich vorhanden wäre.

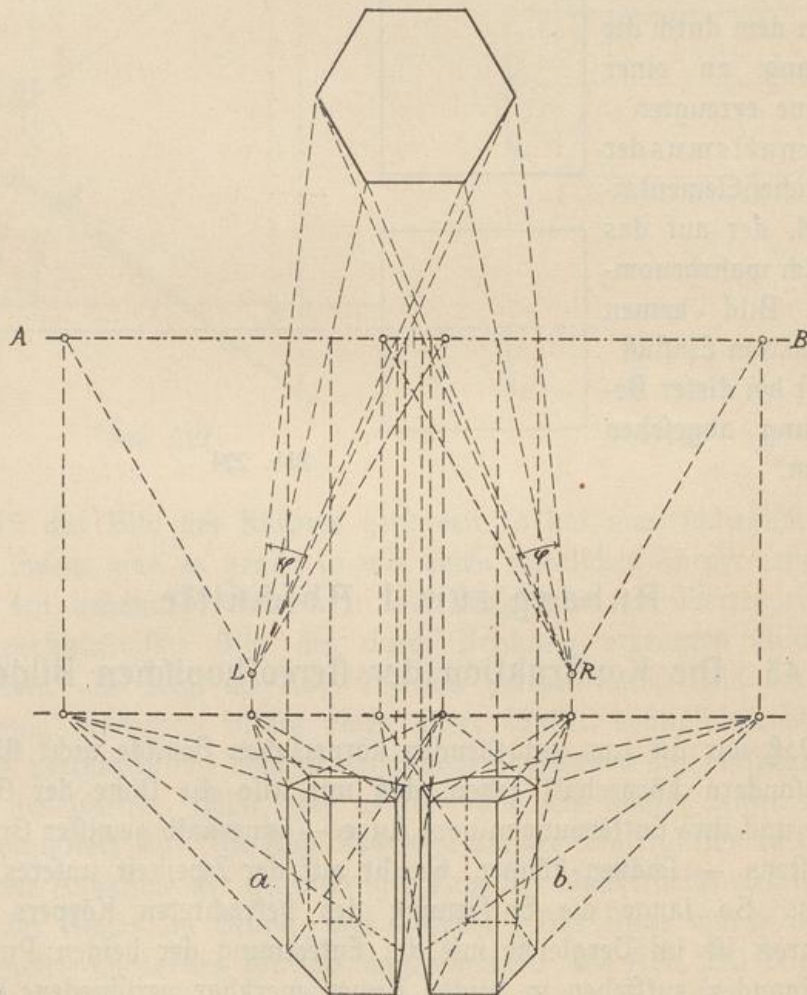


Abb. 225



Ein optisches Instrument, das bewirkt, daß von zwei verschiedenen, den beiden Augen entsprechenden perspektivischen Bildern eines Objekts jedes nur dem ihm entsprechenden Auge sichtbar gemacht wird, heißt Stereoskop.

Die Verschiedenheit der beiden Bilder wird durch Abb. 225, die einen Grundriß darstellt, veranschaulicht. Als Objekt wurde ein senkrecht stehendes, regelmäßig sechseitiges Prisma angenommen, von dem zwei gegenüber liegende Seitenflächen der Bildebene  $AB$  parallel sind und dessen zur Bildebene rechtwinklige Symmetrieebene durch die Mitte der beiden in  $L$  und  $R$  liegenden Augen geht. In der Abbildung sehen wir in  $a$  das dem linken, in  $b$  das dem rechten Auge entsprechende Bild. Denkt man sich nun diese beiden Bilder auf der gemeinsamen Bildebene so angebracht, daß  $a$  nur vom linken,  $b$  nur vom rechten Auge gesehen werden kann und das Objekt selbst weggenommen, so wird das körperliche Bild genau an der Stelle des Objekts wieder erzeugt. Durch einen in der Symmetrieebene angebrachten Schirm kann leicht dafür gesorgt werden, daß keins der Augen das für das andere bestimmte Bild sehen kann, und das Stereoskop ist damit fertig.

Nun handelt es sich aber in der Regel um Objekte von viel größerer Ausdehnung in horizontalem Sinne als die unseres Prismas, um große Gebäude, Gruppen, Landschaften u. s. w. Dann ist also der Gesichtswinkel  $\varphi$  des Bildes viel größer, und die beiden Strahlenkegel greifen viel mehr in einander über, als es die Abb. 225 zeigt. — Die auf der gemeinsamen Bildebene  $AB$  entstehenden Bilder werden also nur dann nicht in einander übergreifen, wenn wir diese Ebene sehr dicht an das Auge rücken, wodurch die Bilder entsprechend klein werden. Diese ganz dicht vor den Augen liegenden Bilder aber würden wieder nicht deutlich gesehen werden können, da sich die Augen einer Entfernung von wenigen Zentimetern nicht anzupassen vermögen. Da das Ineinandergreifen der beiden Bilder in derselben Bildebene selbstverständlich von vornherein ausgeschlossen ist, weil es die Grundbedingung des Stereoskops unerfüllbar machen würde, müssen wir uns nach anderen Mitteln umsehen, diese Grundbedingung, daß jedes Auge nur das für es bestimmte Bild erblicke, zu erfüllen.

Das älteste, das Wheatstone'sche Stereoskop, erfüllt diese Bedingung dadurch, daß es jedes der beiden Bilder durch einen unter  $45^\circ$  gegen die Bildebene gestellten, lotrechten Spiegel in das Auge reflektieren läßt, für das es bestimmt ist. Die Augen erblicken also nicht die Zeichnungen selbst, sondern Spiegelbilder von ihnen und



vereinigen diese beiden ebenen Spiegelbilder zum körperlichen Bilde. Selbstverständlich ist darauf Rücksicht zu nehmen, daß durch die Spiegelung Rechts und Links vertauscht werden; die Bilder müssen also mit Vertauschung von Rechts und Links gezeichnet sein. Im Uebrigen sind sie genau nach den Regeln der Perspektive für die Bildebene, in der die Spiegelbilder erscheinen, und für den wirklichen Abstand der Augen von ihnen zu konstruieren.

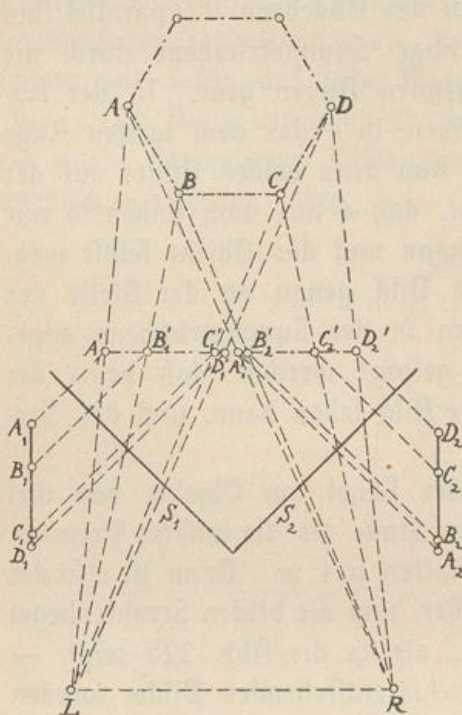


Abb. 226

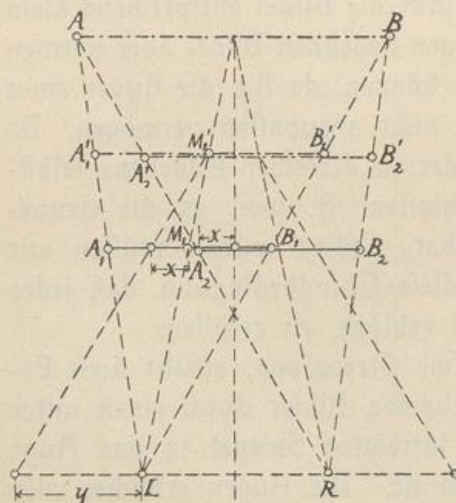


Abb. 227

Die Abb. 226 giebt schematisch den Grundriß des Instruments an;  $L$  und  $R$  sind wieder die beiden Augen,  $S_1$  und  $S_2$  die Spiegel,  $A_1B_1C_1D_1$  und  $A_2B_2C_2D_2$  die durch Zeichnung oder Photographie hergestellten Bilder. Der Spiegel  $S_1$  erzeugt von  $A_1B_1C_1D_1$  das Spiegelbild  $A_1'B_1'C_1'D_1'$ , der Spiegel  $S_2$  von  $A_2B_2C_2D_2$  das Spiegelbild  $A_2'B_2'C_2'D_2'$ . Indem nun jedes Auge nur das ihm entsprechende Bild wahrnimmt, kommt das körperliche Bild  $ABCD$  zu Stande.

Ein Nachteil dieses Stereokops liegt darin, daß die Bilder  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  sehr genau eingestellt werden müssen. Sobald sie sich nicht genau an der richtigen Stelle befinden, ergeben sie nicht das gewünschte körperliche Bild.

Das heutzutage wohl ausschließlich angewandte Stereoskop ist das Brewster'sche. Es gestattet, die beiden fest verbundenen Zeichnungen in derselben Ebene anzubringen. Die zur Erzeugung des körperlichen Bildes erforderliche seitliche Verschiebung der ebenen Bilder wird durch Linsen bewirkt.

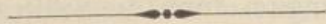
Die Abb. 227 erläutert die Wirkungsweise des Instruments in schematischer Weise. Die Punkte  $A$  und



$B$  mögen die Grenzen des räumlichen Bildes angeben;  $A_1'B_1'$  und  $A_2'B_2'$  seien die durch zwei Linsen, deren Mitten zunächst in  $L$  und  $R$  zu denken sind, erzeugten Bilder, die von den einzelnen Augen betrachtet werden und deren Zusammenwirkung eben das räumliche Bild ergibt. Diese Bilder sind die optischen Bilder zweier perspektivischer, den beiden Augen entsprechender Zeichnungen  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$ . Die Optik lehrt, daß eine Sammellinse von einem innerhalb ihrer Brennweite befindlichen Objekte ein entfernteres, aufrechtes, virtuelles, vergrößertes Bild erzeugt; die Zeichnungen  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  müssen sich also innerhalb der Brennweiten der Linsen befinden. Diese Zeichnungen überdecken sich nun teilweise; der Streifen  $A_2B_1$  gehört beiden an. Verschieben wir nun  $A_1B_1$  nach links,  $A_2B_2$  nach rechts um das Stück  $x = \frac{1}{2} A_2B_1$ , so haben beide Zeichnungen neben einander Platz. Es tritt nun die Frage auf, wie weit wir die Linsenmitten nach links und rechts verschieben müssen, damit trotz der Verschiebung der Zeichnungen  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  die Bilder  $A_1'B_1'$  und  $A_2'B_2'$  ihre Plätze behalten, das räumliche Bild  $AB$  also in unveränderter Weise erzeugt wird. Ziehen wir von der Mitte  $M_1'$  des Bildes  $A_1'B_1'$  durch die um das Stück  $x$  verschobene Mitte  $M_1$  der Zeichnung  $A_1B_1$  eine Gerade, so ergibt diese auf der Geraden  $LR$  offenbar das gesuchte Stück  $y$ , um das die Linse verschoben werden muß, und dasselbe gilt auf der anderen Seite. Bei der perspektivischen Ausführung wird eine Sammellinse in zwei Hälften geschnitten, die vertauscht eingesetzt werden.

Die Zeichnungen  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$  sind in Bezug auf  $L$  und  $R$  als Augenörter und in der Ebene  $A_1A_2B_1B_2$  liegende Bildebenen in der gewöhnlichen Weise zu konstruieren. Die optischen Bilder sind natürlicherweise den als Objekte fungierenden Zeichnungen oder Photographen ähnlich und erzeugen daher in korrekter Weise das räumliche Bild.

Näheres über die Abbildung durch Linsen findet man in den schon im § 44 angegebenen Büchern des Verfassers, Genaueres über das Stereoskop, besonders über die in Betracht kommenden Maße, in dem „Lehrbuch der Optik“.





## II. Abschnitt.

### Die Abbildungen auf anderen Bildflächen.

#### § 46. Allgemeines.

Die Bildflächen, die außer der ausführlich behandelten vertikalen Bildebene vorkommen und in diesem Abschnitte kurz behandelt werden sollen, sind die nicht vertikalen Bildebenen, die zylindrische und die kugelförmige Bildfläche. Von den ebenen Bildflächen ist es außer der vertikalen nur die horizontale Bildebene, die — für Deckengemälde — noch eine gewisse Bedeutung besitzt. — Daß eine perspektivische Darstellung auf geneigter Bildebene ausgeführt werden soll, kommt wohl kaum vor. Ganz von selbst ergeben sich Abbildungen auf geneigter Bildebene manchmal bei Photogrammen, wenn nämlich der Photograph, um beispielsweise sehr hohe Gebäude auf das Bild zu bekommen, die Axe des Apparates schief nach oben gerichtet hat. Da die Platte stets senkrecht zur Axe ist, stellt sie jetzt eine geneigte Bildebene dar, für die natürlich alles gilt, was schon im § 3 der Einleitung ausgeführt wurde. Im Besonderen besitzen jetzt die Bilder vertikaler Gerader einen weit oberhalb des Bildes liegenden Fluchtpunkt, den wir einfach dadurch finden, daß wir durch den hinteren Hauptpunkt des Objektivs, der für das Bild die Stelle des Auges vertritt, eine vertikale Gerade ziehen und mit der Ebene der photographischen Platte schneiden; im umgekehrten, auf der Platte erscheinenden Bilde liegt dieser Punkt natürlich unten. Diese Bilder erscheinen jetzt um so stärker geneigt, je weiter sie von der Mitte des Bildes entfernt sind. Diese Neigung der Bilder vertikaler Gerader — sofern es sich dabei nicht um eine Krümmung handelt — ist also nicht, wie oft geglaubt wird, eine „photographische Verzerrung“, sondern sie entspricht genau den Gesetzen der Perspektive.

Im Uebrigen ist es, wie Jeder weiß, durchaus nicht erforderlich, die Ebene einer Zeichnung oder eines Gemäldes in die Lage zu bringen, in der das Bild ursprünglich durch die Sehstrahlen erzeugt zu denken ist. Wir können eine Zeichnung, die für eine vertikale Bildebene entworfen wurde, auf einen wagerechten Tisch legen oder in eine beliebig geneigte Lage bringen, ohne daß der Eindruck darunter leidet oder



gar die Zeichnung schwerer verständlich wird. Unser Verstand denkt sich eben ohne Schwierigkeit die Ebene des Bildes in die vertikale Lage gebracht oder umgekehrt die dargestellten Gegenstände entsprechend gedreht. So ist es beispielsweise auch gar nicht unbedingt nötig, die zu bemalende wagerechte Decke eines Raumes als wagerechte Bildfläche im Sinne der Perspektive zu behandeln. Stellen wir auf ihr Gegenstände ebenso dar, wie wir sie auf vertikaler Bildebene darstellen würden, so wird Niemand daran Anstoß nehmen. Was für die auf der Tischfläche liegende Zeichnung gilt, ist auch für die wagerechte Decke gültig. — Nur dann, wenn durch die Bemalung der Decke die Täuschung erweckt werden soll, daß wir durch sie hindurch auf über ihr befindliche Gegenstände blicken, auf sich vom Himmel abhebende Teile der Architektur oder gar — wie das bei der kirchlichen Malerei oft vorkommt — auf himmlische Erscheinungen, dann natürlich haben wir die Decke als wagerechte Bildebene im Sinne der Perspektive zu behandeln. Diese Täuschung aber steht stets auf sehr schwachen Füßen, vor allen Dingen deswegen, weil es ganz unmöglich ist, der Decke eine solche Lichtmenge zuzuführen, daß ihre Helligkeit der des Himmels gewölbes auch nur annähernd gleichkommt. Es bedarf schon einer recht künstlichen Seitenbeleuchtung durch unmittelbar unter der Decke angebrachte Fenster, um — wenigstens bei hellem Wetter — eine einigermaßen genügende Helligkeit der Decke zu erzeugen.

#### § 47. Die wagerechte Bildebene.

Alles, was im § 3 über die allgemeine Bildebene ausgeführt wurde, gilt selbstverständlich auch für die wagerechte. Besonders charakteristisch ist für sie, daß es auf ihr keinen Horizont giebt. Die durch das Auge gelegte Horizontalebene ist mit der Bildebene parallel, die Schnittlinie beider Ebenen — der Horizont — liegt also in unendlicher Ferne. Der Hauptpunkt ist, wie immer, die rechtwinklige Projektion des Auges auf die Bildebene, liegt also senkrecht über ihm.

Auch bei vertikaler Bildebene ist ja — rein geometrisch genommen — der Horizont nichts weiter als eine Fluchtgerade auf der Bildebene rechtwinkliger, paralleler Ebenen. Alle nicht gerade horizontalen, zur Bildebene rechtwinkligen, parallelen Ebenen besitzen eben so wohl eine durch den Hauptpunkt gehende Fluchtgerade, und wenn wir dem Horizonte bei der Konstruktion eine so weit gehende Bedeutung einräumten, so geschähe es genau genommen nur deswegen, weil bei den praktischen Anwendungen die in horizontalen Ebenen liegenden Figuren



eine so wichtige Rolle spielen. Bei horizontaler Bildebene nun fällt eine derartige Bevorzugung vollständig weg; die in den verschiedensten Richtungen liegenden, zur Bildebene rechtwinkligen, also vertikalen Ebenen besitzen durch den Hauptpunkt gehende Fluchtgerade, von denen keine vor der anderen einen Vorzug genießt.

Ueber die Konstruktion selbst etwas zu sagen, ist kaum nötig; denken wir uns nämlich die abzubildenden Gegenstände nebst der Bildebene um eine beliebige Fluchtgerade um einen rechten Winkel gedreht, so wird die Bildebene vertikal, und wir können genau nach den im ersten Abschnitte gegebenen Anleitungen konstruieren. Die gewählte Fluchtgerade ist jetzt zum Horizonte geworden.

Daß zur Bildebene rechtwinklige, also vertikale Gerade den Hauptpunkt zum Fluchtpunkte haben, daß horizontale, also zur Bildebene parallele Figuren sich mit sich selbst ähnlich abbilden, bedarf wohl kaum der Erwähnung. Ebenso selbstverständlich erscheint, daß Gerade, die unter  $45^\circ$  gegen die Bildebene geneigt sind, ihren Fluchtpunkt auf dem Distanzkreise haben, dessen Mittelpunkt der Hauptpunkt  $H$  und dessen Radius die Entfernung des Auges von der Bildebene ist.

Einer kurzen Betrachtung bedarf nur noch die Konstruktion der Schatten, für die wir hier natürlicherweise parallele Sonnenstrahlen voraussetzen. Der Sonnenpunkt  $S$  kann in einem ganz beliebigen Punkte der Bildebene angenommen werden; die von der Sonne auf die Bildebene gefällte Senkrechte bildet sich in der Verbindungslinie  $HS$  ab und schneidet die Bildebene in einem ihrer unendlich fernen Punkte. Die Projektionen der Sonnenstrahlen auf diese Ebene sind also der Geraden  $HS$  parallel, die die Fluchtgerade der durch die Sonnenstrahlen gehenden Vertikalebene ist. — Für die Konstruktion dürfen wir, wie wir schon sahen, irgend eine, uns gerade bequem liegende, durch  $H$  gehende Gerade als Horizont betrachten; der zugehörige Punkt  $S'$  ist dann die Projektion des Sonnenpunkts auf diese Gerade. Er ist der Fluchtpunkt der Projektionen der Sonnenstrahlen auf eine vertikale Ebene, deren Fluchtgerade die gewählte Gerade ist.

Die Abb. 228 zeigt eine praktische Anwendung, die Ecke einer perspektivisch bemalten Decke. Die oberen Ränder der senkrechten Wände sind von einer nach innen vorspringenden Deckplatte überragt gedacht; in der Ecke erhebt sich auf einem quadratischen, wieder mit einer kleinen Deckplatte versehenen Sockel eine zylindrische Säule. Zum Zwecke der Bestimmung der Schatten wurde der Horizont jeweils mit



der in Betracht kommenden Kante parallel angenommen; so ergaben sich die Punkte  $S_1'$  und  $S_2'$ . Der Eigenschaften der Säule ergibt sich ganz einfach, indem man ihre sich als Kreis darstellende Grundfläche Tangenten legt, die mit der Verbindungslinie  $HS$  parallel sind.

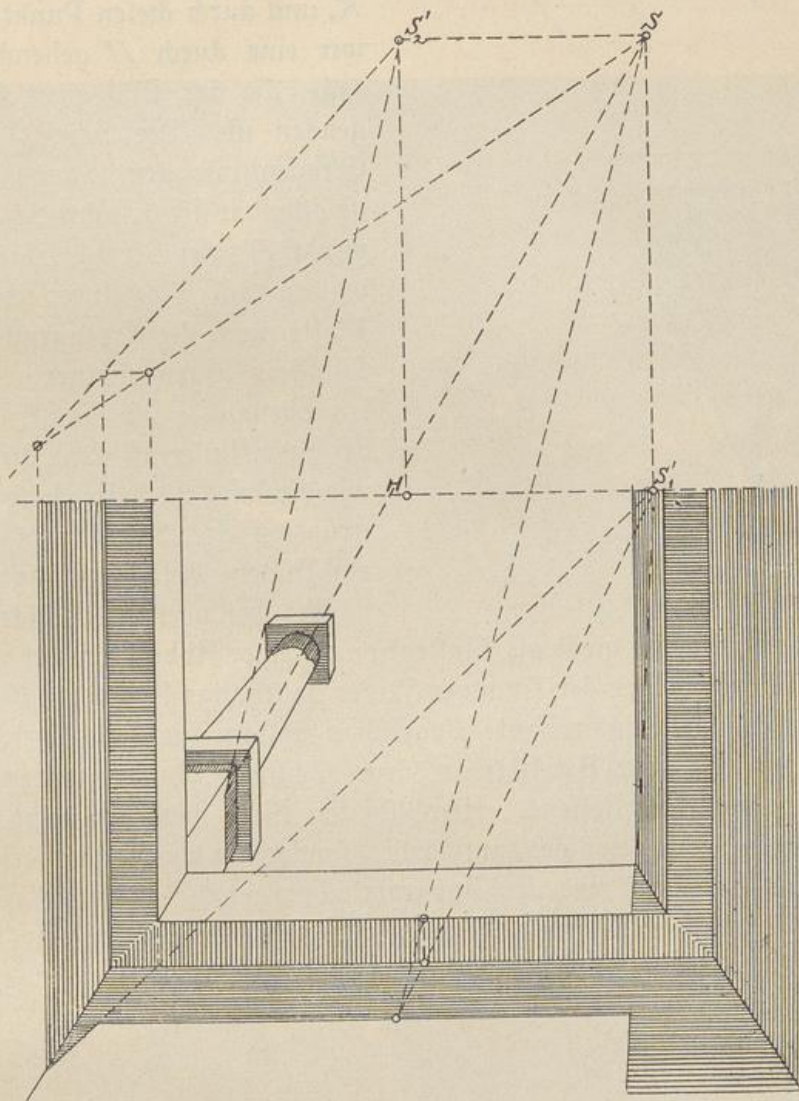


Abb. 228

Die Konstruktion des Schattens der das Säulenkapital ersetzenden quadratischen Platte auf den Säulenschaft ist in der Abb. 229 in größerem Maßstabe und für anders liegende Punkte  $H$  und  $S$  dargestellt. Durch einen auf dem Schattenwerfenden Rande der Platte angenommenen Punkt  $P$  wurde der Sonnenstrahl  $SP$  gelegt; sodann wurde durch  $P$  eine Gerade parallel zu  $SH$  gezogen — sie stellt die



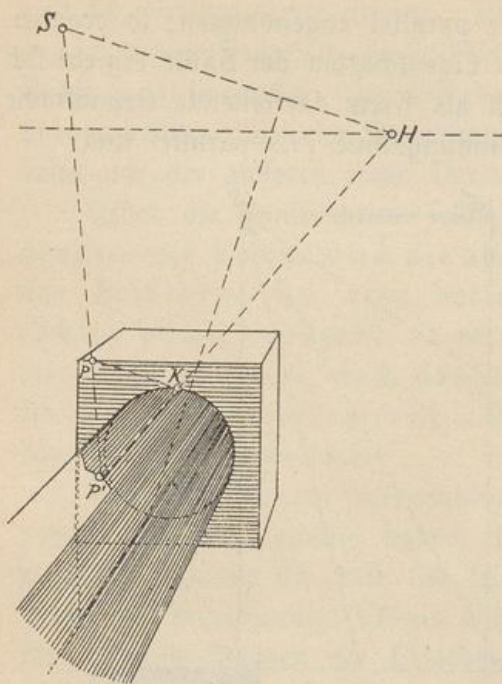


Abb. 229

Projektion des Sonnenstrahls auf die Unterseite der Platte dar. Diese Gerade schneidet den oberen Grenzkreis des Zylinders in  $K$ , und durch diesen Punkt legen wir eine durch  $H$  gehende Gerade, die das Bild einer Erzeugenden ist. Der Schnitt dieser Geraden mit dem Sonnenstrahl ist offenbar der gesuchte Schattenpunkt  $P'$ ; der Strahl, seine Projektion auf die Unterseite der Platte und die Erzeugende des Zylinders liegen in einer vertikalen Ebene. — Die Konstruktion der Streiflinien ist ganz dieselbe, wie die im § 32 behandelte Konstruktion der Streiflinien eines zur Bildebene rechtwinkligen Zylinders bei vertikaler Bildebene.

Die Abb. 230 giebt als Illustration zu einer Abbildung auf wagerechter Bildebene eine der Nummer 32 des Jahrgangs 1908 der „Woch“ entnommene, sehr interessante Vogelschau-Ansicht aus New-York, den Blick vom „Singer-Building“, dem höchsten „Wolkenkratzer“, auf den Broadway darstellend. Hier ist der Blick natürlich nicht, wie bei einem Deckengemälde, aufwärts, sondern abwärts gerichtet. Uebrigens stand die Axe des Apparats nicht genau lotrecht, die Bildebene also auch nicht genau, sondern nur annähernd wagerecht; man erkennt das daran, daß die Bilder wagerechter Kanten nicht genau parallel laufen.

## § 48. Der Zylinder als Bildfläche.

Eine zylindrische Bildfläche liegt bei den Panoramen vor; ein derartiges Rundbild ist, wenn es gut ausgeführt ist, von ganz überraschender Wirkung und vermag, namentlich wenn die Vermittelung des Innenraums mit dem Gemälde durch wirkliche Gegenstände geschieht hergestellt ist, tatsächlich zu täuschen. Bei den Rundgemälden ist die Bildfläche eine vertikale Zylinderfläche, in deren Axe das Auge liegt;



der kleine, für die Beschauer bestimmte Platz befindet sich in der Mitte, und durch einen über diesem Platze angebrachten, ein Dach oder dergl. darstellenden Schirm ist dafür gesorgt, daß man den oberen Rand der Leinwand nicht sehen kann.

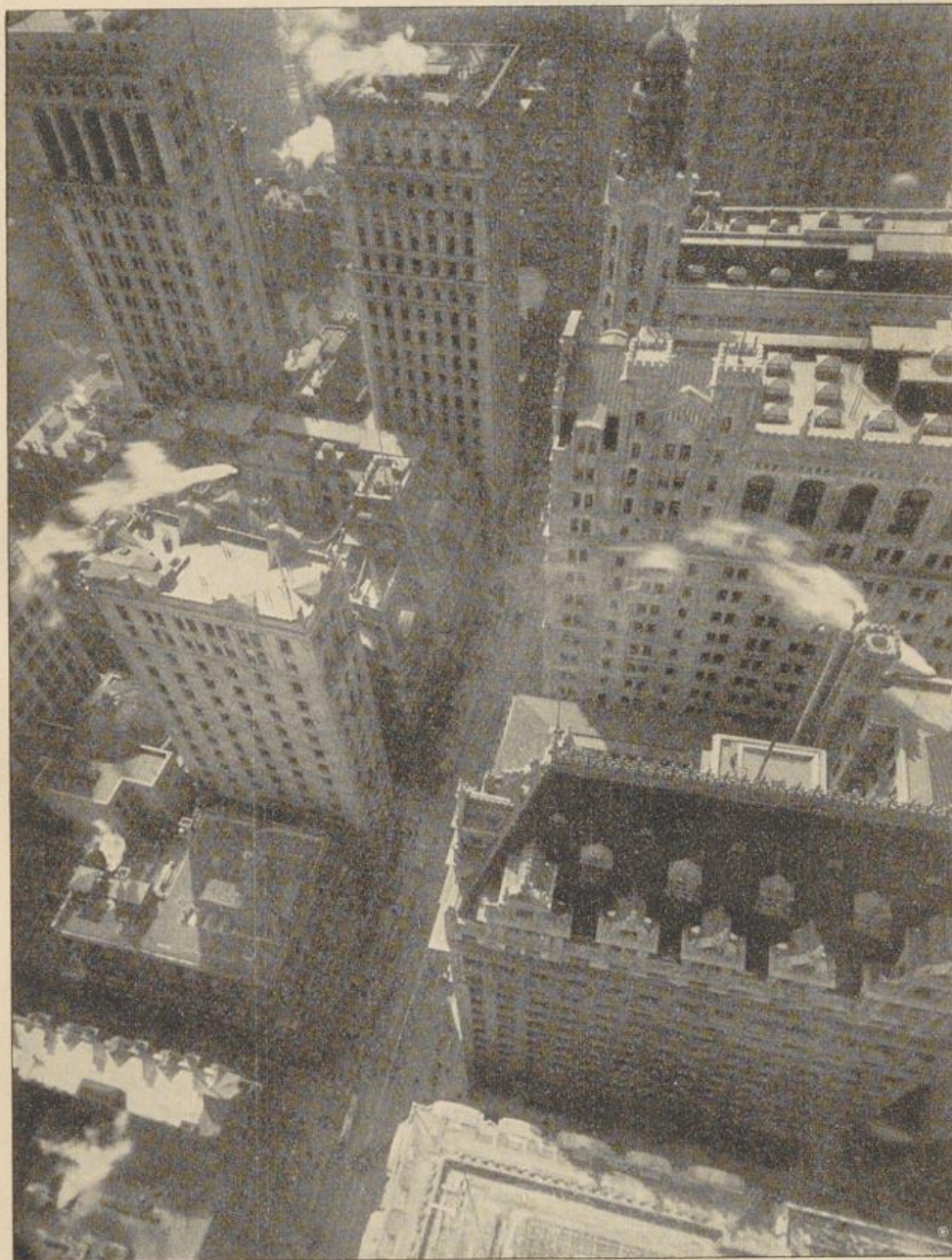


Abb. 230



Die Darstellung auf vertikaler Zylinderfläche ist bei Objekten, die in horizontalem Sinne sehr ausgedehnt sind, der Darstellung auf der Ebene weit vorzuziehen. Die perspektivische Verzerrung im genannten Sinne fällt vollständig weg, jede wagerechte Blickrichtung ist rechtwinklig zur Bildfläche, es giebt keine bevorzugte Richtung. Für in vertikalem Sinne sehr ausgedehnte Objekte freilich ist die Verzerrung dieselbe wie auf ebener Bildfläche.

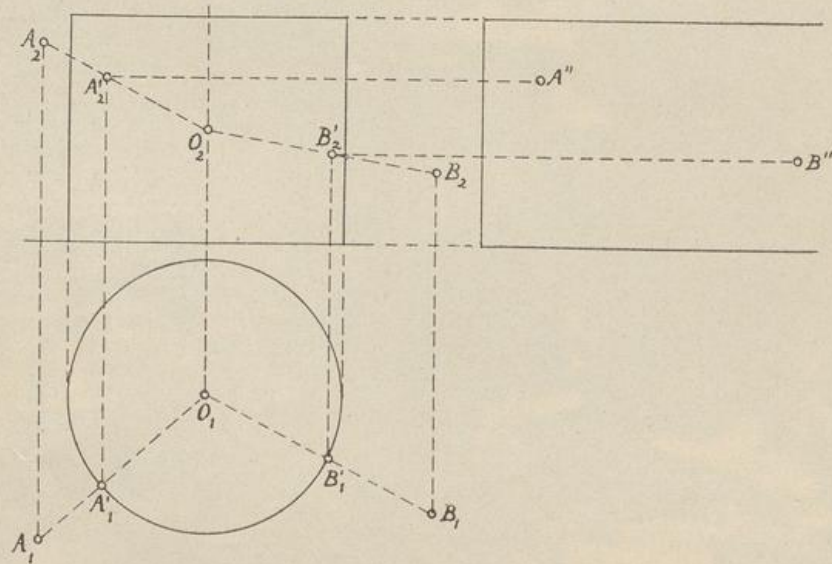


Abb. 231

Wir wollen also nun die auf normalzylindrischer Bildfläche entstehenden Bilder unter der Voraussetzung ermitteln, daß sich das Auge in der Axe des Zylinders befindet. Die Abb. 231 zeigt den Zylinder im Grund- und Aufrisse;  $A_1$  ist der Grundriß,  $A_2$  der Aufriss eines beliebigen Punktes  $A$ ,  $O_1$  der Grundriß,  $O_2$  der Aufriss des Auges  $O$ . Der Sehstrahl  $OA$  schneidet die Bildfläche in einem Punkte  $A'$ , der das Bild von  $A$  ist. Der Grundriß  $A_1'$  dieses Punktes ist einfach der Schnittpunkt von  $O_1A_1$  mit dem Kreise; der Aufriss  $A_2'$  ergibt sich sofort daraus. In genau derselben Weise ergeben sich die Projektionen  $B_1'$  und  $B_2'$  des Bildes  $B'$  eines durch seine Projektionen  $B_1$  und  $B_2$  bestimmten Punktes  $B$ .

Schneiden wir nun die Bildfläche längs irgend einer Erzeugenden auf und wickeln sie in die Ebene des Papiers ab, so erhalten wir die Punkte  $A''$  und  $B''$ . Ihr horizontaler Abstand ist gleich der Länge des Kreisbogens  $A_1'B_1'$ , während ihre Höhen durch die Abwicklung keine Veränderung erleiden. In dieser einfachen Weise können wir die Bilder beliebig vieler Punkte in der Abwicklung bestimmen.



Wir wollen nun die Abbildung einer geraden Linie untersuchen. Diese Abbildung ist die Schnittlinie des Zylinders mit einer durch das Auge und die Gerade gelegten Ebene, der Sehstrahlenebene.

Ist die Gerade lotrecht, so ist auch die Sehstrahlenebene lotrecht; sie schneidet also den Zylinder in einer Erzeugenden, einer lotrechten Geraden. Alle vertikalen Geraden bilden sich also als vertikale Gerade ab, und auch in der Abwicklung bleiben diese Bilder, da sie mit Erzeugenden zusammenfallen, offenbar vertikale Gerade.

Es sei eine wagerechte Gerade gegeben. Wir wollen sie, da wir ja die vertikale Projektionsebene ganz beliebig stellen können, zu dieser Ebene senkrecht in der Horizontalebene annehmen.

Zunächst ist klar, daß das Bild der Geraden zwei Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  besitzen muß, die wir einfach dadurch finden, daß wir durch das Auge eine Parallele mit der Geraden ziehen und mit dem

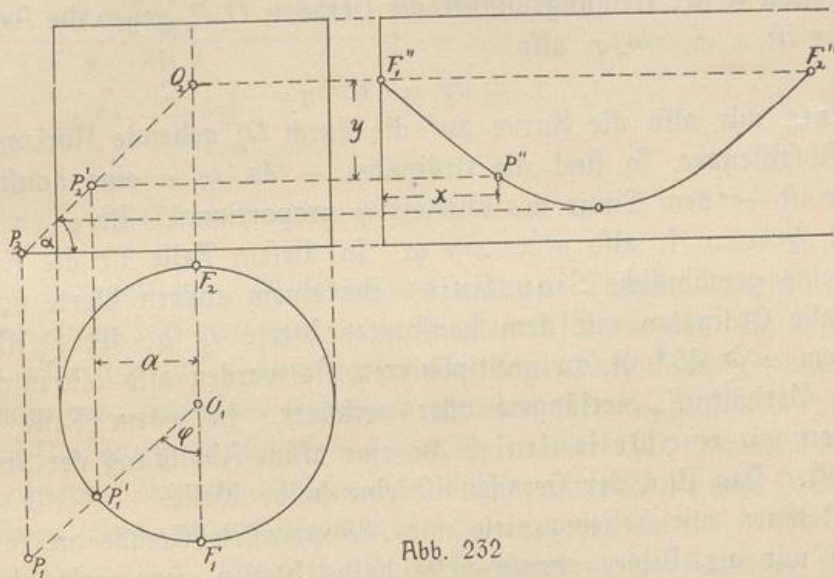


Abb. 232

Zylinder schneiden (Abb. 232). Diese Fluchtpunkte ergeben in der Abwicklung die Punkte  $F_1''$  und  $F_2''$ , wobei die Bildfläche in der durch  $F_1$  gehenden Erzeugenden aufgeschnitten gedacht ist. Wir erkennen ferner sofort, daß die Fluchtpunkte der verschiedenen wagerechten Richtungen auf einem Kreise liegen, der der Schnitt der Bildfläche mit einer durch das Auge gehenden Horizontalebene ist. Dieser Kreis ist der Horizont; er erscheint in der Abwicklung als die durch  $F_1''$  und  $F_2''$  gehende wagerechte Gerade. Der Abstand  $F_1''F_2''$  ist offenbar gleich dem halben Umfange des Kreises.



Um das Bild der Geraden zu finden, müssen wir durch sie und das Auge eine Ebene legen. Diese Ebene schneidet den Zylinder in einer Ellipse, deren in der Abbildung links liegende, durch die Fluchtpunkte begrenzte Hälfte das Bild der Geraden ist. In der Abwicklung erhalten wir die dargestellte, von  $F_1''$  nach  $F_2''$  reichende Kurve.

Es sei nun  $P$  ein beliebiger Punkt der Geraden,  $P_1$  und  $P_2$  seine Projektionen; sein Bild  $P'$ , das sich in  $P_1'$  und  $P_2'$  projiziert, ist der Schnitt des Strahls  $OP$  mit der Bildebene. In der Abwicklung erhalten wir den zugehörigen Punkt  $P''$ , indem wir vom linken Rande aus den Abstand  $x$ , der gleich der Bogenlänge  $F_1P_1'$  ist, auftragen, durch den gefundenen Punkt eine Vertikale ziehen und sie mit einer durch  $P_2'$  gezogenen Horizontalen schneiden. Bezeichnen wir den Winkel  $F_1O_1P_1'$  mit  $\varphi$  und nehmen den Radius des Kreises als Einheit an, so ist  $x = \varphi$ . Der vertikale Abstand der Punkte  $F_1''$  und  $P''$  ist  $y = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ , wenn  $a$  der Abstand der Parallelen  $O_1O_2$  und  $P_1P_2$  und  $\alpha$  der Neigungswinkel der Geraden  $O_2P_2$  gegen die Axe ist. Ferner ist  $a = \sin \varphi$ , also

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Beziehen wir also die Kurve auf die durch  $O_2$  gehende Horizontale als Abszissenaxe, so sind die Ordinaten — da  $\operatorname{tg} \alpha$  eine konstante Größe ist — dem Sinus des Winkels  $\varphi$  proportional. Ist  $\alpha = 45^\circ$ , so ist  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , also  $y = \sin \varphi$ . In diesem Falle ist die Kurve also eine gewöhnliche Sinuslinie. Bei einem andern Werte von  $\alpha$  sind alle Ordinaten mit dem konstanten Werte  $\operatorname{tg} \alpha$ , der  $\geq 1$  ist, je nachdem  $\alpha \geq 45^\circ$  ist, zu multiplizieren, sie werden also alle in demselben Verhältnisse verlängert oder verkürzt. In jedem Falle also erhalten wir eine Wellenlinie, die eine affine Abbildung der Sinuslinie ist. Das Bild der Geraden ist eine halbe Welle.

Nehmen wir beliebig viele mit  $AB$  parallele Gerade an, so erhalten wir als Bilder ebenso viele halbe Wellen von verschiedenen Höhen, die alle von  $F_1$  bis  $F_2$  reichen und deren Scheitel auf einer Vertikalen liegen, die durch die Mitte der beiden Fluchtpunkte geht.

Endlich wollen wir das Bild einer unter beliebigem Winkel gegen die Horizontalebene geneigten Geraden  $PQ$  (Abb. 233) ermitteln;  $P_1Q_1$  und  $P_2Q_2$  seien ihre Projektionen; der Punkt  $P_1$  ist ihre Horizontalspur. Da wir die Vertikalebene ganz beliebig annehmen können, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir  $P_1Q_1$  der Projektionsaxe parallel legen. In der rechts gezeichneten dritten Projektion erscheint die Gerade als die Vertikale  $P_3Q_3$ . Zunächst erhalten wir die Fluchtpunkte  $F_1$  und  $F_2$  wieder dadurch, daß wir durch







Abwicklung übertragen. Die Wellenlinie muß durch  $F_1''$  und  $F_2''$ , die in die Abwicklung übertragenen Fluchtpunkte gehen, und das zwischen diesen Punkten liegende Stück der Kurve ist das abgewinkelte Bild der Geraden. — Die Wendepunkte des Bildes einer beliebigen Geraden liegen also stets im Horizonte. Die Abwicklung ist nicht gezeichnet worden.

Den Neigungswinkel  $\alpha$  der durch  $O$  und  $PQ$  gelegten Ebene gegen die Horizontalebene können wir leicht konstruieren. Wir brauchen nur von  $N_1$  das Perpendikel  $N_1T_1$  auf  $P_1R_1$  zu fällen, ferner durch  $N_1$  eine Parallele zu  $P_1R_1$  zu ziehen, auf ihr von  $N_1$  aus die Höhe  $N_1S_1 = h_2$  des Punktes  $N_2$  über der Axe abzutragen und  $S_1T_1$  zu ziehen; dann ist  $S_1T_1N_1$  der gesuchte Winkel  $\alpha$ , und die Ordinate des Punktes der Welle ist wieder, wie bei der Abbildung der wagerechten Geraden  $y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \varphi$ , wobei  $\varphi$  von  $O_1A_1$  oder  $O_1B_1$  aus gerechnet ist.

Auch rechnerisch läßt sich der Winkel  $\alpha$  leicht ermitteln. Sehen wir die Höhe des Auges über der Horizontalebene  $= h_1$ ,  $P_1N_1 = a$ ,  $O_1N_1 = p$ ,  $N_1R_1 = P_3R_3 = z$ ,  $N_1T_1 = y$ , so ist

$$z : h_2 = p : (h_1 - h_2),$$

also 
$$z = \frac{h_2 p}{h_1 - h_2},$$

ferner 
$$y = \frac{a z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{a h_2 p}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 a^2 + h_2^2 p^2}},$$

schließlich 
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_2}{y} = \frac{\sqrt{(h_1 - h_2)^2 a^2 + h_2^2 p^2}}{a p}$$

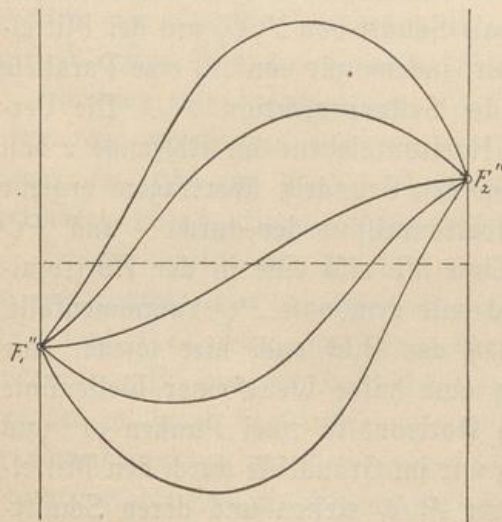


Abb. 234

Sind mehrere parallele, geneigte Gerade abzubilden, so gehen ihre Bilder natürlich alle durch die Fluchtpunkte, in denen sie endigen. In der Abwicklung erhalten wir halbe Wellen, die von  $F_1''$  bis  $F_2''$  reichen und sehr verschiedene Höhen besitzen (Abb. 234). Eine Gerade, für die der Schnittpunkt  $N$  in gleicher Höhe mit dem Auge liegt, bildet sich als halbe Welle ab, deren Scheitelpunkte gerade die Fluchtpunkte  $F_1''$  und  $F_2''$  sind; eine andere



Parallele bildet sich als halbe Welle von größerer Höhe ab; die Koordinaten der Fluchtpunkte in Bezug auf die zugehörigen Scheitel sind entgegengesetzt gleich. Liegt die Gerade in einer durch das Auge gehenden Vertikalebene, so zerfällt ihr Bild in zwei gegenüber liegende Erzeugende.

Die Abb. 235 giebt das abgewinkelte Bild eines einfachen Häus-  
diens mit Satteldach als Beispiel.

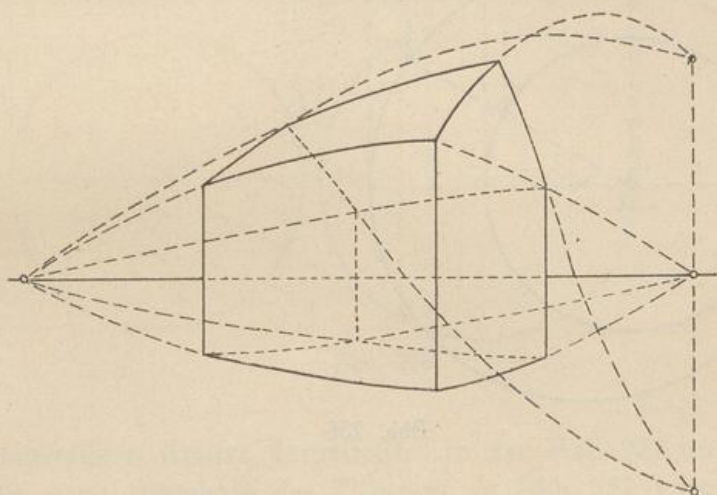


Abb. 235

Schneidet die abzubildende Gerade den Zylinder, so gehören die zwei Durchstoßpunkte dem Bilde an. Für die wirkliche Abbildung im Panorama kommen natürlich nur die beiden außerhalb des Zylinders liegenden Halbstrahlen in Betracht, deren Bilder von je einem Durchstoßpunkte bis zu dem zugehörigen Fluchtpunkte gehen. Das innerhalb des Zylinders liegende Stück der Geraden ist körperlich darzustellen. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn eine Mauer sich durch den Raum des Panoramas nach beiden Seiten bis in weite Ferne erstreckt; der innerhalb des Zylinders liegende Teil wird nun tatsächlich als Mauer ausgeführt, während die außerhalb liegenden Teile so gemalt werden, daß die Kanten sich als Ellipsenbögen nach den Fluchtpunkten hinziehen. Geht eine Kante durch die Mitte des Zylinders, so geht ihr Bild in zwei gegenüber liegende vertikale Gerade über.

Die Abbildung eines Kreises ist als Schnitt des Zylinders mit dem Strahlenkegel — da beide Flächen zweiter Ordnung sind — eine Kurve vierter Ordnung. Diese Kurve nimmt je nach der Lage des Kreises sehr verschiedene Gestalten an. In den Abb. 236, 237, 238 sind die Bilder nebst ihren Abwickelungen für verschiedene Lagen



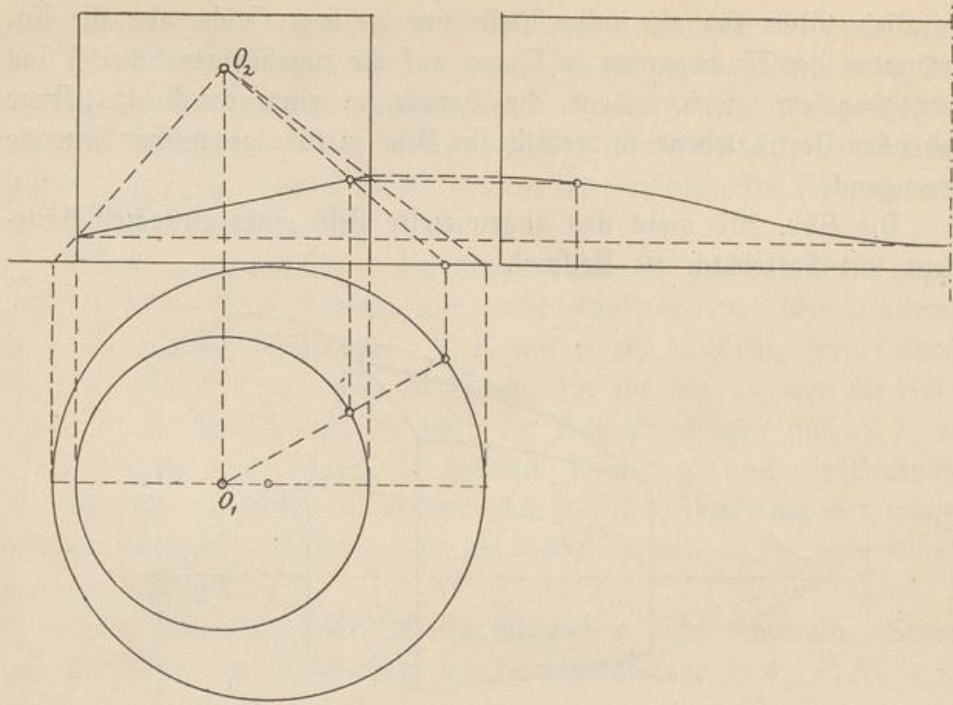


Abb. 236

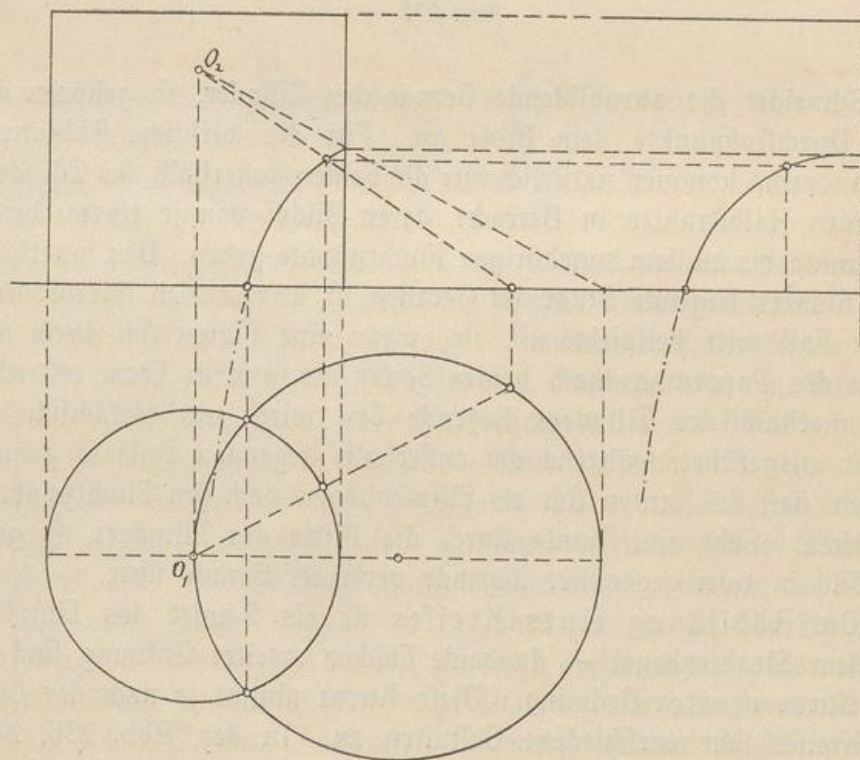


Abb. 237



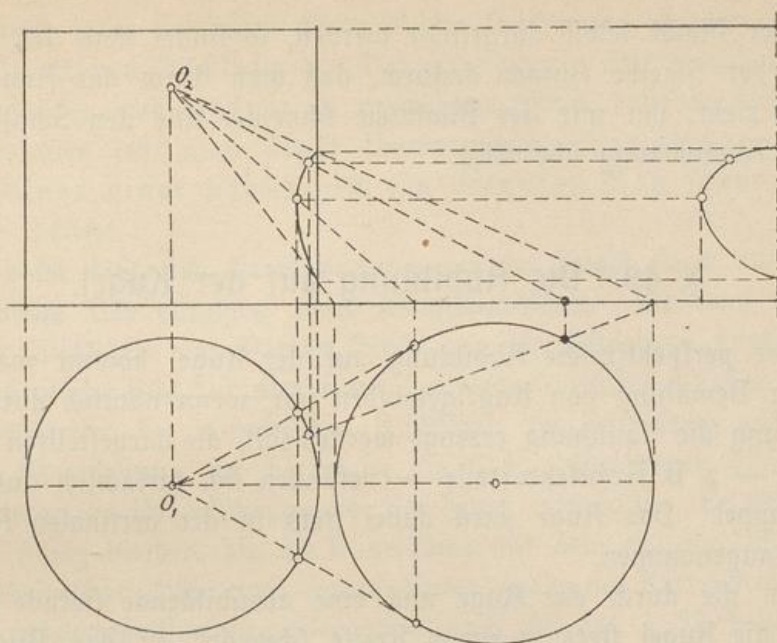


Abb. 238

eines wagerechten Kreises dargestellt. In den Abb. 236 und 238 liegt der Kreis ganz außerhalb des Zylinders, in Abb. 237 teils außerhalb, teils innerhalb. In Abb. 238 liegt der Kreis ganz an einer Seite des Beschauers, in Abb. 237 geht er durch den Standpunkt des Beschauers, in Abb. 236 schließt er diesen Standpunkt ein. Der innerhalb des Zylinders liegende Teil des Kreises — einer runden Mauer etwa — ist körperlich darzustellen; für die wirkliche Abbildung kommt immer nur der außerhalb des Zylinders liegende Teil in Betracht. Die Abbildung des innerhalb liegenden Teils hat nur die Bedeutung eines virtuellen Bildes und ist in Abb. 237 strichpunktiert. — Ueberall ist die halbe Abwicklung der Kurve dargestellt worden; die in Abb. 237 auftretende Kurve besitzt zwei vertikale Asymptoten.

Die Konstruktion der Schatten direkt im abgewickelten Bilde ist, wenn auch theoretisch möglich, so doch praktisch fast unausführbar und daher wertlos. Alle zur Konstruktion erforderlichen Linien mit Ausnahme der vertikalen Geraden sind Wellenlinien, und das Aufzeichnen derselben würde nicht nur sehr mühsam sein, sondern auch höchst ungenaue Schnittpunkte ergeben. Es bleibt also nichts übrig, als die Konstruktion der Schatten nach den Regeln der gewöhnlichen Schattenkonstruktion im Grund- und Aufrisse anzuführen und die ermittelten Schattenumrisse genau so wie die körperlichen Umrisse in das perspektivische Bild und die Abwicklung zu übertragen. Soll die Sonne



oder der Mond selbst dargestellt werden, so findet man den Mittelpunkt der Scheibe einfach dadurch, daß man durch das Auge einen Strahl zieht, ihn mit der Bildfläche schneidet und den Schnittpunkt in die Abwicklung überträgt.

### § 49. Die Abbildung auf der Kugel.

Die perspektivische Abbildung auf der Kugel kommt manchmal bei der Bemalung von Kugelgewölben vor, wenn nämlich durch diese Bemalung die Täuschung erzeugt werden soll, die dargestellten Gegenstände — z. B. Architekturteile — befänden sich tatsächlich außerhalb der Kuppel. Das Auge wird dabei stets in der vertikalen Axe der Kugel angenommen.

Da die durch das Auge und eine abzubildende Gerade gelegte Ebene die Kugel stets in einem Kreise schneidet, ist das Bild einer Geraden ein durch die beiden Fluchtpunkte begrenzter Kreisbogen. Diese Fluchtpunkte, von denen bei einem Gewölbe gewöhnlich nur einer vorhanden ist, werden, wie immer, gefunden, indem man eine durch das Auge parallel zur abzubildenden Geraden gezogene Gerade mit der Kugel schneidet. — Vertikale Gerade haben ihren Fluchtpunkt im Scheitel, wagerechte Gerade haben zwei Fluchtpunkte im Horizonte, der der Schnitt der Kugel mit einer durch das Auge gelegten Horizontalebene ist. — Da bei einem Gewölbe das Auge in der Regel unter dem unteren Grenzkreise des vorhandenen Kugelabschnittes liegt, ist der Horizont gewöhnlich nicht vorhanden; eine oberhalb des Gewölbes liegende wagerechte Gerade bildet sich jetzt als Kreisbogen ab, der bis an die untere Grenze des Gewölbes reicht. Wäre die Kugel vollständig vorhanden, so würde das Bild der Geraden für ein unterhalb ihres tiefsten Punktes liegendes Auge ein voller Kreis sein.

Das Bild eines Kreises ist als Schnitt der Kugel mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung eine Kurve vierter Ordnung.

Liegt das Auge im Mittelpunkte der Kugel, so ist das Bild jeder Geraden die Hälfte eines Großkreises; die Fluchtpunkte sind diametral gegenüber liegende Punkte.

Die um das Auge als Mittelpunkt beschriebene Kugel ist die ideale Bildfläche; so erscheint uns der mit Sternen erfüllte unendliche Weltraum als Kugelfläche, deren Mittelpunkt unser Auge ist, und auf die sich die Himmelskörper projizieren. Bei dieser Bildfläche giebt es keine perspektivischen Verzerrungen; alle Richtungen sind gleich



berechtigt, jeder Sehstrahl schneidet die Bildfläche rechtwinklig. Wie bei zylindrischer Bildfläche die Verzerrungen in horizontalem Sinne verschwanden, während sie in vertikalem Sinne bestehen blieben, so verschwinden jetzt auch diese Verzerrungen. Die lineare Größe des Bildes einer Strecke ist ein direktes Maß ihrer scheinbaren Größe.

Leider läßt sich die Abbildung auf der Kugel durch auf Papier gezeichnete Darstellungen nicht veranschaulichen. Während wir bei ebener Bildfläche das Papier selbst uns als Bildebene denken, das perspektivische Bild also direkt auf dem Papiere entstehen lassen können, während wir bei zylindrischer Bildfläche die Abbildung wenigstens durch Abwicklung der Fläche in die Ebene überführen können, ist eine derartige Ueberführung bei der Kugel unmöglich. Es würde uns nichts übrig bleiben, als die Kugelfläche mit dem auf ihr befindlichen perspektivischen Bilde nach irgend einem der in der Kartenprojektionslehre gelehrteten Verfahren — etwa nach der im § 22 behandelten stereographischen Projektion — abermals auf der Ebene abzubilden. Wir erhielten dann also ein Bild eines Bildes, gleichsam ein Bild zweiter Ordnung. Da aber jede Abbildung der Kugel auf der Ebene, wie wir das auch bei der stereographischen Projektion sahen, mit sehr erheblichen Verzerrungen verbunden ist, so würde uns dieses Bild doch keine richtige Vorstellung von der Beschaffenheit des auf der Kugel entstandenen Bildes liefern, uns also wenig nützen.

## Anhang zum zweiten Abschnitte.

### § 50. Die Relief-Perspektive.

Während das Relief der alten Babylonier und Assyrer, der alt-ägyptischen und altgriechischen Kunst uns den strengen Relief-Stil zeigt und auf jede malerische, perspektivische Wirkung verzichtet, macht sich in der Hoch-Renaissance das Bestreben geltend, auch durch das plastische Relief eine räumliche Tiefenwirkung zu erzielen. Das berühmteste Werk dieser Art, ein Werk, in dem dieses Ziel in unübertrefflicher Weise erreicht worden ist, sind die Bronze-Türen des Baptisteriums San Giovanni zu Florenz, jene Türen, von denen Michelangelo gesagt haben soll, sie seien würdig, die Pforten des Paradieses zu schmücken. Dieses unsterbliche Meisterwerk des Lorenzo Ghiberti, dessen Herstellung ihn 1425—1447 beschäftigte, enthält in 10 Feldern



Szenen aus dem alten Testamente. Ganz abgesehen von der hohen, künstlerischen Schönheit der Komposition ist die Sicherheit, mit der der große Künstler ohne Kenntnis der damals noch gar nicht geschaffenen Theorie die Tiefenverhältnisse beherrschte, auf's Höchste zu bewundern.

Während bei der Flächen-Perspektive der ganze unendliche Raum — wenigstens der vor dem Beschauer befindliche Teil desselben — auf einer Fläche abgebildet wird, erfolgt bei der Relief-Perspektive die Abbildung des jenseits der Bildebene liegenden Teils des Raums innerhalb einer Schicht, die von der Bildebene und einer ihr in beliebigem Abstände parallelen Ebene, der Fluchtebene, begrenzt wird. Jedem Punkte des Raumes entspricht als Bild ein Punkt der Schicht. Die Bildebene entspricht sich selbst; jedem Punkte der Bildebene, als Punkt des abzubildenden Raumes aufgefaßt, entspricht ein mit ihm zusammenfallendes, der Bildschicht angehöriges Bild. — Die Fluchtebene aber entspricht der ihr parallelen unendlich fernen Ebene des Raumes, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, der Kugel von unendlich großem Radius. Das Bild des unendlich fernen Punkts einer gegebenen Geraden finden wir also einfach dadurch, daß wir durch das Auge eine Parallele zu ihr ziehen und mit der Fluchtebene schneiden, während der Durchstoßpunkt der Geraden mit der Bildebene sich in sich selbst abbildet.

Da das Bild eines Körpers im Relief wieder ein Körper ist, sind wir genötigt, Objekt und Bild in Projektionen darzustellen und wählen dazu am besten die gewöhnliche rechtwinklige Projektion.

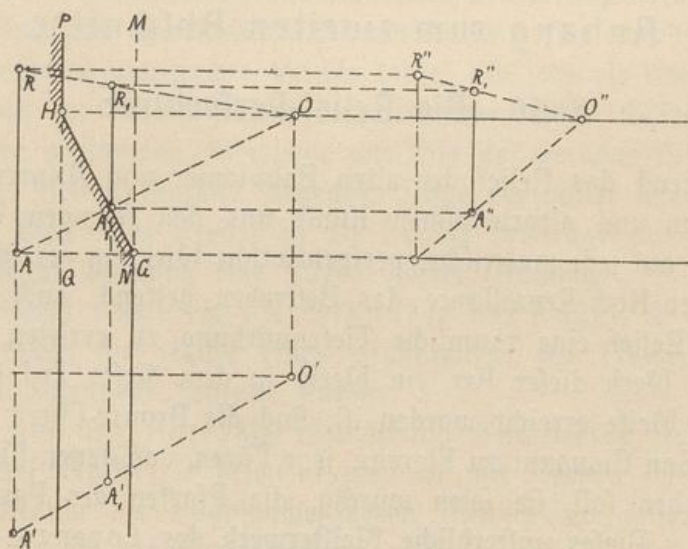


Abb. 239



In der Abb. 239 stellt der links oben gezeichnete Aufriß einen zur Bildebene rechtwinkligen Vertikalschnitt dar. Der Grundriß ist darunter, die Seitenansicht rechts daneben dargestellt.  $O$  ist das Auge,  $MN$  die Bild-,  $PQ$  die Fluchtebene. Die in beliebiger Höhe angenommene Grundebene schneidet die Bildebene in der Grundlinie, deren Schnitt der Punkt  $G$  ist. Eine durch das Auge gelegte Horizontalebene schneidet die Fluchtebene im Horizonte, dessen Schnitt der Punkt  $H$  ist. Dieser Punkt ist zugleich der Hauptpunkt, der im Seitenriß mit dem Auge  $O'$  zusammenfällt, im Grundriß auf der durch den Grundriß des Auges gehenden Parallelen zur Axe liegt. Der Hauptpunkt ist, wie bei ebener Bildfläche, das Bild des unendlich fernen Punkts der zur Bildebene rechtwinkligen Geraden.

Das Bild der Grundebene ist eine durch die Grundlinie und den Horizont gehende Fläche. Daß sie eine Ebene sei, ist nicht unbedingt notwendig; wir wollen sie aber willkürlich als Ebene annehmen. Zunächst ist es offenbar naturgemäß, daß das Bild einer Ebene wieder eine Ebene ist. Ferner aber kommt diese Annahme, wie wir sogleich sehen werden, darauf hinaus, daß das Bild einer Geraden wieder eine Gerade ist. Auch diese Folgerung, von der wir ebenso wohl als von einer Annahme ausgehen könnten, ist augenscheinlich naturgemäß. Diese Annahme würde uns umgekehrt zu der Folgerung führen, daß das Bild einer Ebene, also auch das der Grundebene wieder eine Ebene sein muß.

Die Ebene, die das Bild der Grundebene ist, wird im Vertikalschnitte durch die Gerade  $GH$  dargestellt. Um das Bild eines beliebigen Punkts  $A$  der Grundebene, dessen Grundriß  $A'$  ist, zu finden, brauchen wir nur den Strahl  $OA$  mit  $GH$  zu schneiden. Der Schnittpunkt  $A_1$  ist das Bild, dem der Grundriß  $A_1'$  und die Seitenansicht  $A_1''$  entsprechen. Haben wir eine in der Grundebene liegende Gerade abzubilden, so verfahren wir mit jedem ihrer Punkte ebenso; alle Sehstrahlen liegen nun in einer Ebene, die das Bild der Grundebene in einer Geraden, dem Bilde der gegebenen Geraden, schneidet. Hätten wir aber als Bild der Horizontalebene eine durch  $G$  und  $H$  gehende krumme Fläche angenommen, so hätte sich als Bild der Geraden eine Kurve ergeben.

Um einen ganz beliebig im Raume liegenden Punkt  $R$  abzubilden, ermittelt man zunächst das in der Ebene  $GH$  liegende Bild  $A_1''$  seines Grundrisses  $A$ , zieht durch dieses Bild eine Vertikale und schneidet sie mit dem Sehstrahle  $OR$ .



Soll eine im Raume beliebig liegende Gerade  $g$  abgebildet werden, deren Horizontalprojektion eine in der Grundebene liegende Gerade  $g'$  ist, so legen wir zunächst durch  $O$  und  $g'$  eine Ebene, die die Ebene  $GH$  in ihrem Bilde  $g_1$  schneidet. Legen wir nun durch diese Bildgerade eine Vertikalebene, so ist diese das Bild der durch  $g$  gehenden Vertikalebene, ihr Schnitt mit der durch  $O$  und  $g$  gehenden Ebene ist das gesuchte Bild von  $g$ . Da sich zwei Ebenen stets in einer Geraden schneiden, so sehen wir, daß in Folge der Annahme der Ebene  $GH$  als Bild der Grundebene das Bild einer beliebigen Geraden wieder eine Gerade ist.

Mit einer beliebigen, im Raume liegenden Kurve  $k$  verfahren wir ebenso. Zunächst ermitteln wir ihren Grundriß  $k'$ , legen durch diesen und das Auge als Scheitelpunkt eine Kegelfläche, die die Ebene  $GH$  in einer Kurve  $k_1$  schneidet, legen durch  $k_1$  als Direktrix eine Zylinderfläche mit vertikalen Erzeugenden und durchschneiden diese schließlich mit einer Kegelfläche, deren Scheitelpunkt das Auge und deren Leitlinie die Kurve  $k$  ist. Der Durchschnitt ist das gesuchte Bild.

Ist im Besonderen die Kurve  $k$  ein jenseits der Bildebene beliebig liegender Kreis, so ist  $k'$  im Allgemeinen eine Ellipse,  $k_1$  ebenfalls eine Ellipse, das Bild also der Durchschnitt eines vertikalen elliptischen Zylinders und eines schiefen Kreiskegels. Wir erhalten eine Kurve vierter Ordnung, die in zwei Ellipsen zerfällt, von denen die eine, nach derselben Seite wie der Kreis geneigte das gesuchte Bild ist.

Befindet sich der Kreis in wagerechter Lage, so ist  $k'$  ein Kreis,  $k_1$  eine Ellipse, das Bild also ebenfalls eine Ellipse.

Liegt der Kreis der Bildebene parallel, so ist  $k'$  eine der Grundlinie parallele Strecke,  $k_1$  ebenfalls eine der Grundlinie parallele Strecke, der durch  $k_1$  bestimmte vertikale Zylinder geht also in eine der Bildebene parallele Ebene über. Ihr Schnitt mit der Kegelfläche der Sehstrahlen — eben das gesuchte Bild — ist also als ein dem Grundkreise paralleler, ebener Schnitt der Kegelfläche ein Kreis.

Ganz allgemein bildet sich jede der Bildebene parallel liegende ebene Figur als der Bildebene parallel liegende, ähnliche Figur ab.

Als einfachstes Beispiel der Abbildung eines Körpers im Relief wollen wir ein rechtwinkliges Parallelepiped annehmen (Abb. 240). Wir bilden in der geschilderten Weise die in der Grundebene liegende Grundfläche des Prismas ab. Dadurch erhalten wir ein in der Ebene  $GH$  liegendes Viereck, durch dessen Ecken wir vertikale Gerade legen und sie mit den durch die Ecken der oberen Grundfläche gehenden Sehstrahlen schneiden. Der dadurch entstehende schmale Körper ist in



Abb. 240 in allen drei Projektionen dargestellt. Die Vorderansicht stimmt mit dem gewöhnlichen perspektivischen Bilde überein.

Das Bild einer Kugel ist ein dreiachsiges Ellipsoid.

Bei der Ausführung des Reliefs würde selbstverständlich die Rückseite des Bildes, die ja von vorn nicht sichtbar ist, mit der Fluchtebene zusammenhängend gearbeitet werden.

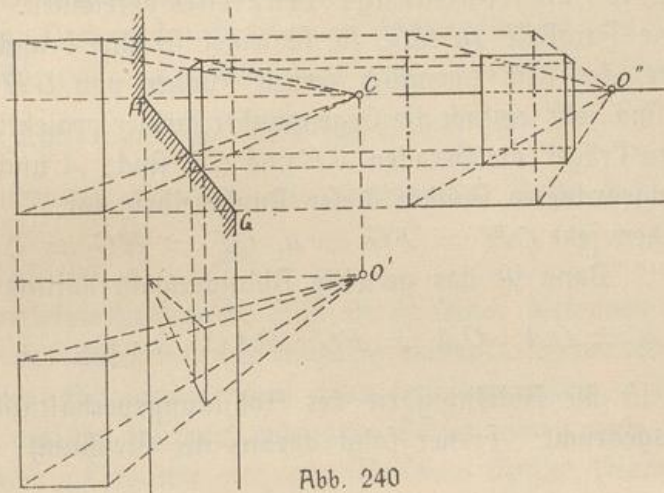


Abb. 240

Man erkennt leicht, daß der abzubildende Körper und sein reliefperspektivisches Bild nicht etwa ähnliche Gebilde sind. Mit zunehmender Entfernung des Körpers vom Auge nehmen — genau so wie bei der Abbildung auf einer Bildfläche — die der letzteren parallelen Abmessungen des Bildes — Höhe und Breite — ab. Die Dicke des körperlichen Bildes nimmt ebenfalls ab, aber weit schneller, als die Höhe und Breite, so daß mit zunehmender Entfernung des Objekts das Bild auch im Verhältnisse zu den parallel der Bildebene genommenen Maßen sehr schnell dünner wird.

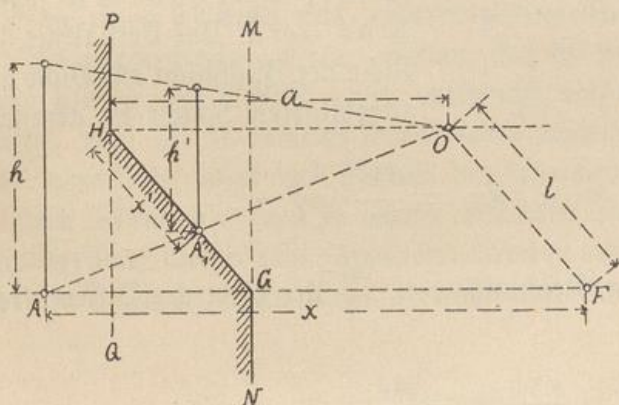


Abb. 241

Wir wollen uns die Aufgabe stellen, den Zusammenhang zwischen der Abnahme der Höhe — oder irgend eines andern der Bildebene parallelen Maßes — und der Abnahme der Dicke festzustellen.

Zusammenhang zwischen der Abnahme der Höhe — oder irgend eines andern der Bildebene parallelen Maßes — und der Abnahme der Dicke festzustellen.



Wir betrachten einen zur Bild- und zur Fluchtebene rechtwinkligen Schnitt (Abb. 241), in dem sich diese Ebenen sowie auch die Grundebene und ihr Bild als gerade Linien darstellen. Im Punkte  $A$  der Grundlinie, dessen Bild  $A_1$  ist, denken wir uns eine der Bildebene parallele Strecke von der Höhe  $h$ ; ihr entspricht als Bild eine ebenfalls der Bildebene parallele Strecke von der Höhe  $h'$ . Das Verhältnis  $h':h$  wollen wir als Abbildungsverhältnis bezeichnen. Ziehen wir durch  $O$  eine Parallele zu  $GH$ , so schneidet sie die Grundlinie in  $F$ , dem Punkte, der dem unendlich fernen Punkte von  $GH$  entspricht.  $H$  und  $F$  sind jetzt einfach die Gegenpunkte zweier projektiver Punktreihen, deren Träger die Geraden  $AF$  und  $GH$  sind;  $A$  und  $A_1$  stellen ein Paar zugeordneter Punkte dieser Punktreihen dar.

Wir setzen jetzt  $OH = FG = a$ ,  $OF = HG = l$ ,  $AF = x$ ,  $HA_1 = x'$ . Dann ist das gesuchte Abbildungsverhältnis

$$h':h = OA_1:OA = FG:FA = a:x = x':l.$$

Damit ist die Abhängigkeit des Abbildungsverhältnisses von  $x$  oder  $x'$  ausgedrückt. Ferner folgt daraus die Gleichung

$$xx' = al,$$

$$\text{also} \quad x' = \frac{al}{x}$$

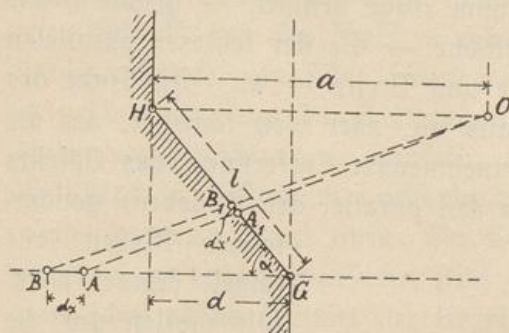


Abb. 242

Wir wollen uns nun (Abb. 242) einen Körper von der unendlich kleinen Dicke  $AB = dx$  denken. Dem Punkte  $B$  entspricht das Bild  $B_1$ ; die Dicke des Bildkörpers ist also, wenn wir  $A_1B_1 = dx'$ ,  $\angle HGA = \alpha$  setzen,  $= dx' \cdot \cos \alpha$ . Das Verhältnis der Dicke der Bildschicht zur Dicke der abgebildeten Schicht ist demnach

$$dx' \cdot \cos \alpha : dx = \frac{dx'}{dx} \cdot \cos \alpha.$$

Nun folgt aber aus der Gleichung  $x' = \frac{al}{x}$  der Wert des Differentialquotienten

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{al}{x^2},$$



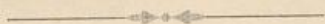
ferner ist  $\cos \alpha = \frac{d}{l}$ , wenn  $d$  der Abstand der Bild- von der Fluchtebene, also die Dicke des ganzen Reliefs ist. Daher ist, da das Minuszeichen hier ohne Bedeutung ist, der Wert des gesuchten Verhältnisses

$$\frac{al}{x^2} \cdot \frac{d}{l} = \frac{ad}{x^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^2 \cdot \frac{d}{a} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \cdot \frac{d}{a}$$

Wir sehen also, daß für ein Paar zugeordneter Ebenen das Verhältnis der Dicken der Bild- und Objektschicht dem **Quadrate** des Verhältnisses der Höhen proportional ist. Wenn also mit wachsender Entfernung die Höhe des Bildes auf  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$  der Höhe des Gegenstandes abnimmt, so nimmt die Dicke des Bildes auf  $\frac{1}{4} \cdot \frac{d}{a}, \frac{1}{9} \cdot \frac{d}{a}, \frac{1}{16} \cdot \frac{d}{a} \dots$  ab.

Das reliefperspektivische Bild ist in seiner Wesenheit genau dasselbe, wie das durch ein Linsensystem erzeugte körperliche Bild eines Gegenstandes; für dieses gelten ganz dieselben Gesetze. Näheres über die durch optische Systeme erzeugten Bilder findet man in des Verfassers Buche „Elemente der geometrischen Optik“ (Hannover 1908, Verlag von Dr. Max Jänecke).

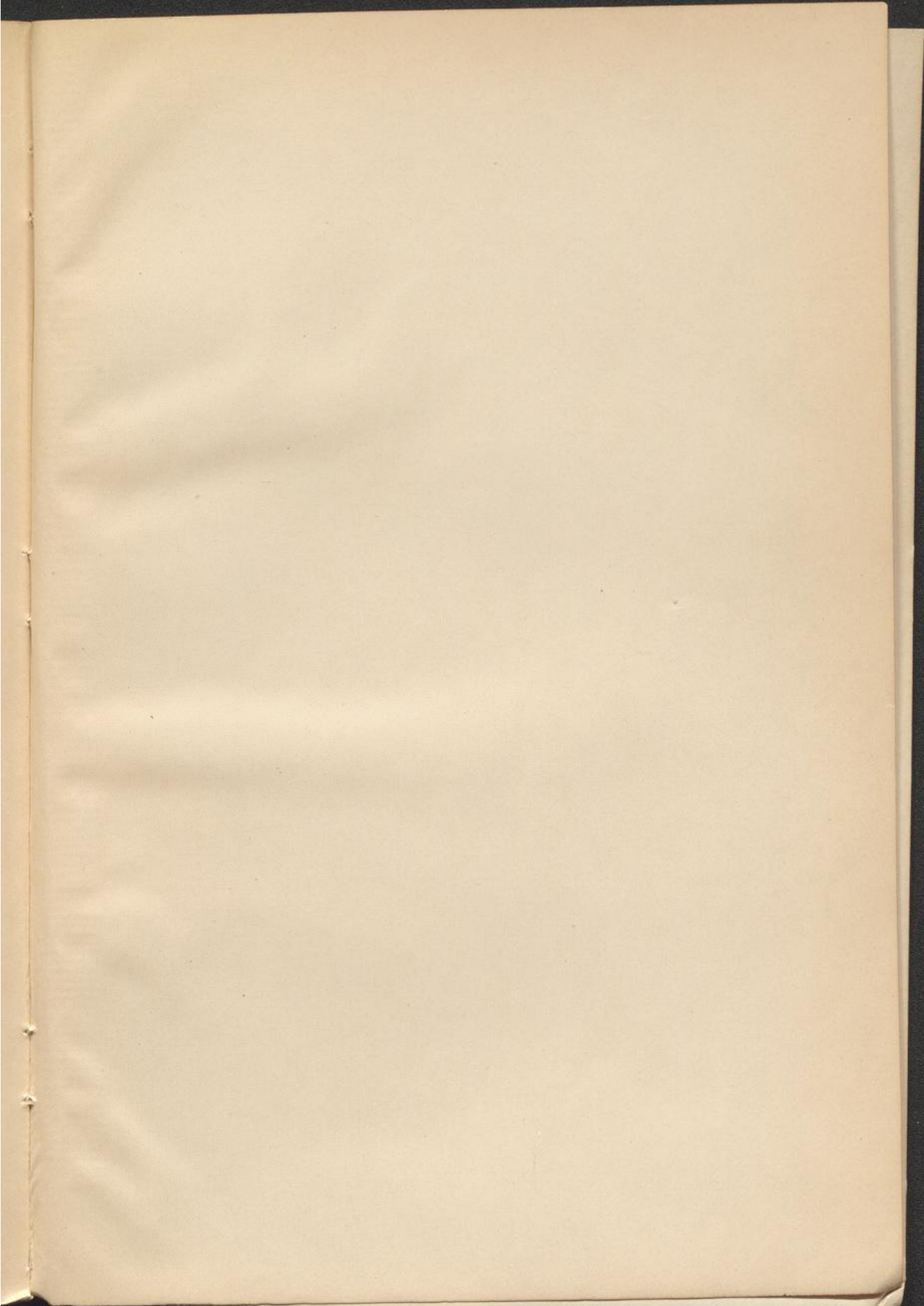
Der wunde Punkt des perspektivisch gearbeiteten Reliefs ist der Schatten. Da das Bild selbst ein Körper ist, so wirft es bei direkter Bestrahlung auf die die horizontale Ebene darstellende geneigte Ebene und auf die Fluchtebene Schatten, die von den perspektivischen Bildern der durch den Objektkörper erzeugten Schlagschatten selbstverständlich vollständig verschieden sind. Diese Schatten sind so überaus störend, sie vernichten so vollständig jede Illusion, daß man ein derartiges Relief nie anders als bei zerstreutem Tageslichte betrachten sollte. Ueberhaupt wird wohl trotz aller Bewunderung, die wir den Meisterwerken eines Ghiberti und anderer großer Künstler schuldig sind, die Ansicht ausgesprochen werden dürfen, daß die perspektivische Abbildung dem Wesen der Plastik nicht entspricht und wir im altgriechischen Relief, das im Parthenon-Fries seine höchste Vollendung erreichte, das eigentliche Ideal des Reliefs zu erkennen haben. Malerei und Plastik sollten als zwei in ihrem innersten Wesen verschiedene Arten künstlerischer Wiedergabe räumlicher Gebilde auseinander gehalten, nicht aber, wie im perspektivischen Relief, vermischt werden.







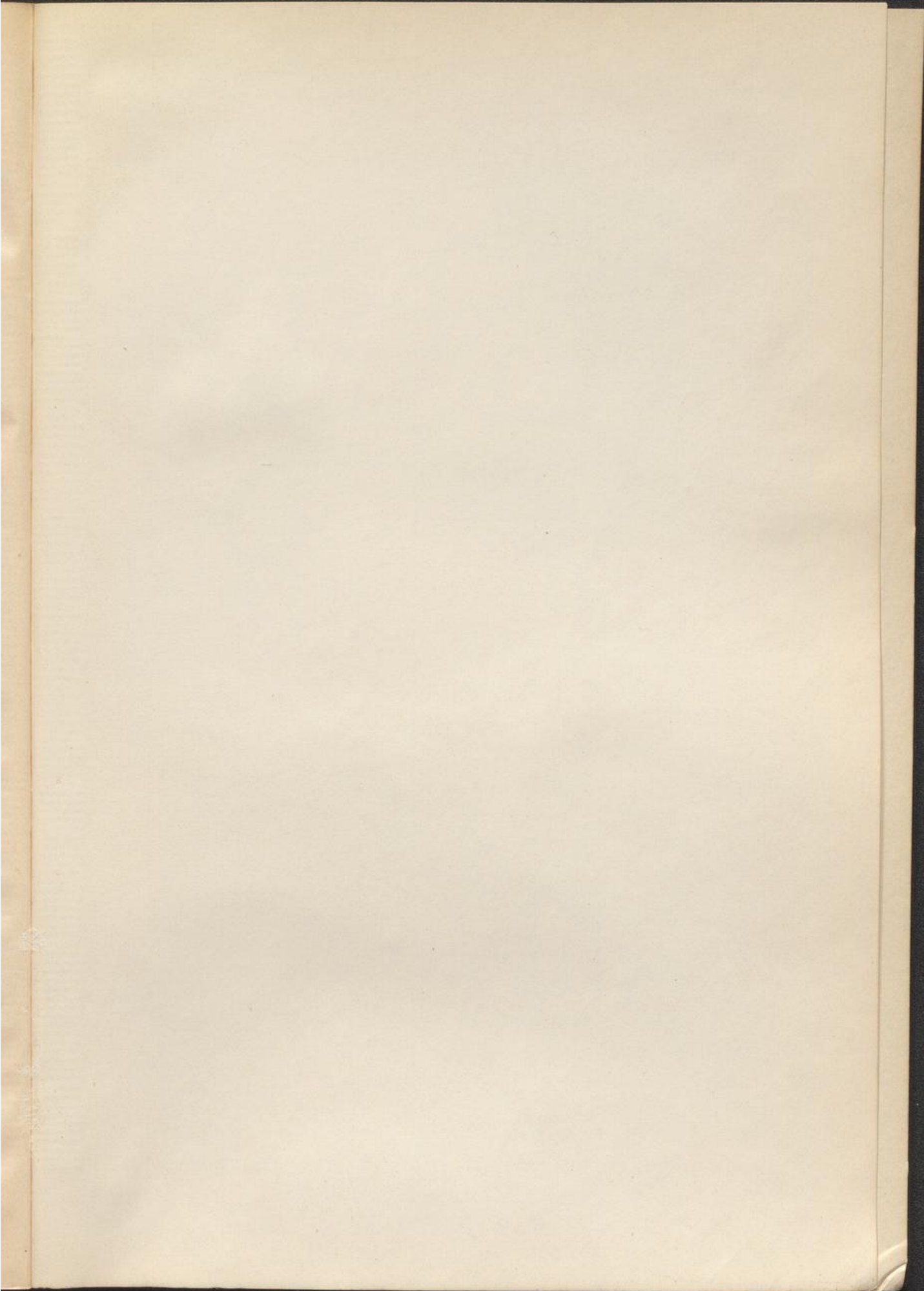








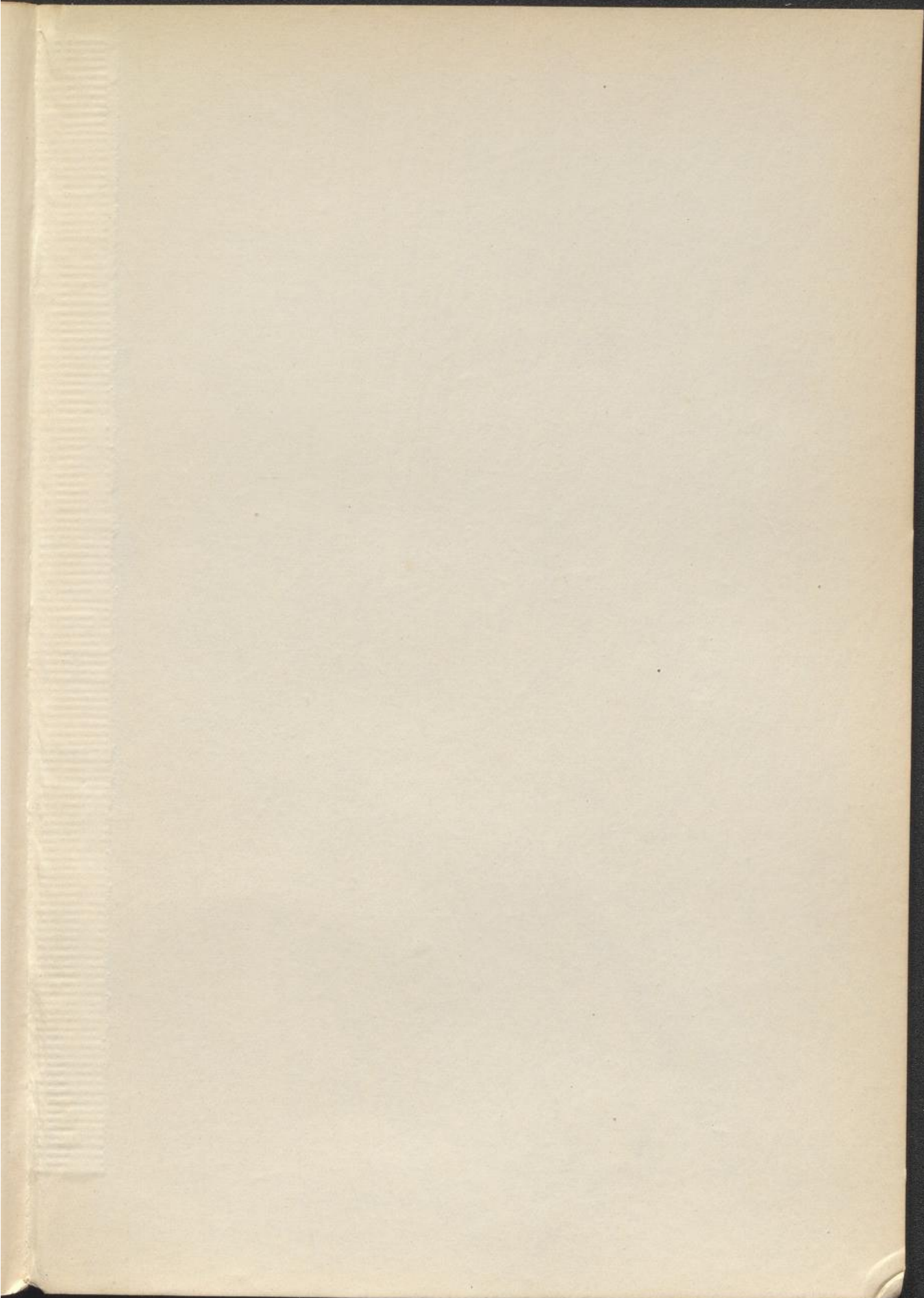
















03M36047





P  
03

M  
36047

AM  
11