Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 15. Bild eines Körpers in allgemeiner Lage.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

bar ſind, daß ihre Oberkanten in jeder Lage durch dieſen Punkt gehen und die feſtſtellbar ſind. Bewegt man nun das Inſtrument ſo, daß zwei Kanten durch feſte Punkte gehen, ſo beſchreibt der Drehpunkt einen Kreis, durch deſſen Mittelpunkt — den unerreichbaren Fluchtpunkt — die dritte Kante nach einmaliger Einſtellung in jeder Lage geht.

§ 15. Bild eines Körpers in allgemeiner Lage.

Soll das perſpektiviſche Bild eines Körpers in ganz allgemeiner Lage gefunden werden, ſo kann man das ſtets in der Weiſe machen, daß man zuerſt Grund- und Aufriß des Körpers in der verlangten Lage nach den bekannten Geſetzen der Projektionslehre ermittelt, dann den Grundriß in Perſpektive ſetzt und in bekannter Weiſe die Höhen der einzelnen Punkte in das Bild trägt.

Handelt es ſich aber um einen irgendwie geſetzmäßig geſtalteten Körper, ſo iſt ein ſolches Verfahren durchaus verwerflich. Es iſt mühſam, zeitraubend und liefert vor allen Dingen höchſt ungenaue Reſultate. Bei jeder Darſtellung eines geſetzmäßig geſtalteten Körpers hat man die ſeine Geſtalt bedingenden Geſetze auch der Darſtellung zu Grunde zu legen. Vor allen Dingen ſind, wo parallele Kanten vorhanden ſind, deren Fluchtpunkte zu benutzen.

Als Beiſpiel mag das perſpektiviſche Bild eines in ganz beliebiger Lage befindlichen Würfels aufgeſucht werden. An ihm treten drei zu einander rechtwinklige Kantenrichtungen auf. Um deren Fluchtpunkt zu beſtimmen, haben wir vom Auge aus Gerade in dieſen drei Richtungen zu ziehen und mit der Bildebene zu ſchneiden. Dieſe drei vom Auge ausgehenden geraden Linien ſind natürlich ebenfalls zu einander rechtwinklig; ſie ſind die Kanten einer gleichſeitigen, dreiſeitigen Ecke, deren Seiten rechte Winkel ſind. Dieſe Ecke wird von der Bildfläche in einem Dreiecke geſchnitten, deſſen Ecken eben die geſuchten Fluchtpunkte ſind. Dieſes Dreieck kann jede beliebige Geſtalt haben, und — da über die Lage des Würfels und des Auges keine Annahme gemacht wurde — können wir die drei Fluchtpunkte F_1, F_2, F_3 (ſ. Abb. 38) ganz beliebig annehmen.

Das Auge liegt nun ſo im Raume, daß ſeine Verbindungslinien mit F_1, F_2 und F_3 rechte Winkel mit einander bilden. Sollen die Verbindungslinien des Auges mit F_1 und F_2 einen rechten Winkel einſchließen, ſo muß das Auge auf einer Kugel liegen, deren Mittelpunkt in M_3, der Mitte zwiſchen F_1 und F_2, liegt, und deren Radius $= M_3F_1 = M_3F_2$ iſt. Dieſe Kugel ſchneidet die Bildebene in einem durch F_1 und F_2 gehenden Kreise, dessen Mittelpunkt M_3 ist; wir brauchen uns nur die vor der Zeichenfläche liegende Halbkugel als vorhanden vorzustellen. Ebenso muß das Auge, da seine Verbindungslinien mit F_2 und F_3 einen rechten Winkel bilden müssen, auf einer Halbkugel liegen, die die Zeichenfläche in einem durch F_2 und F_3 gehenden Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt in M_1, der Mitte zwischen

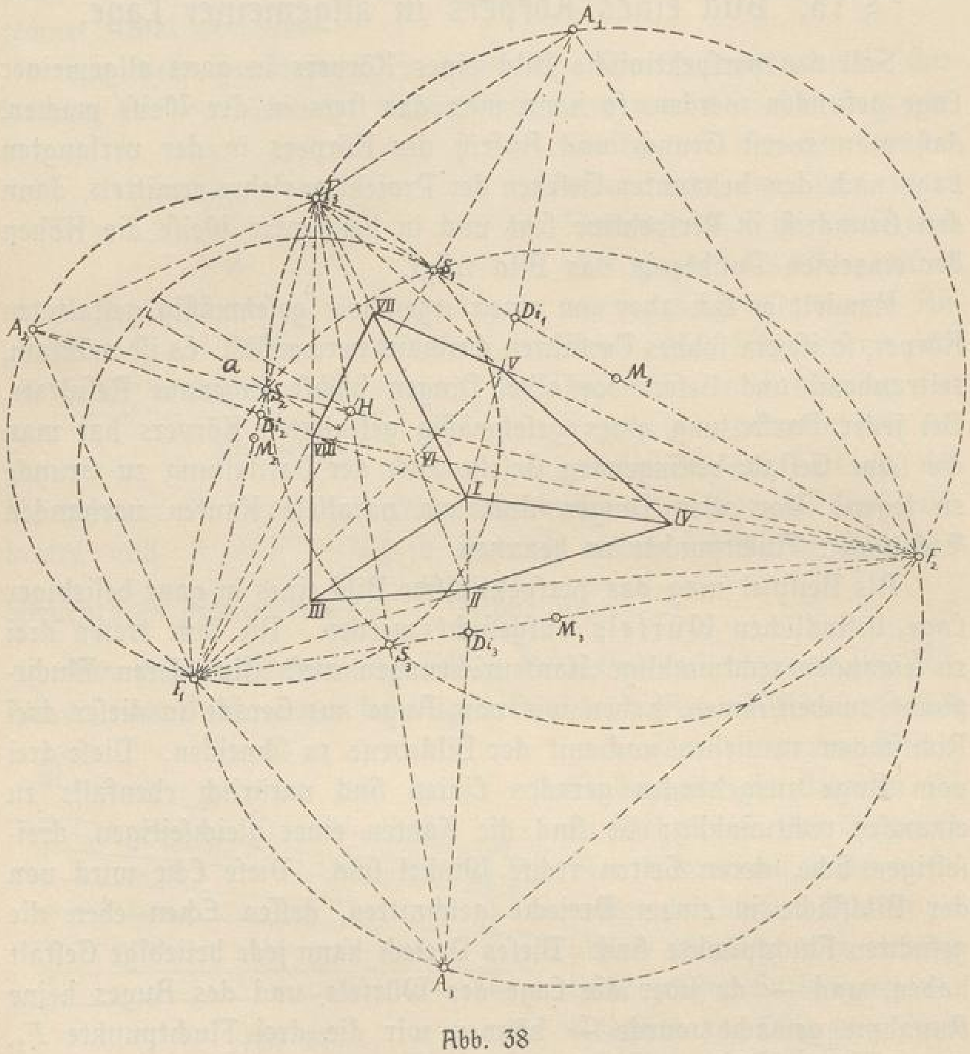

Abb. 38

F_2 und F_3, liegt. Da endlich auch die Verbindungslinien des Auges mit F_3 und F_1 einen rechten Winkel einschließen müssen, liegt das Auge auch auf einer Halbkugel, die die Zeichenfläche in einem durch F_3 und F_1 gehenden Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt M_2, die Mitte zwischen diesen Punkten ist. Das Auge liegt also im Schnittpunkte dieser drei Halbkugeln.

Je zwei von diesen drei Halbkugeln schneiden sich in einem Halbkreise, der auf der Zeichenfläche senkrecht ist. Er erscheint daher in der rechtwinkligen Projektion auf sie als gerade Strecke, und zwar als die Verbindungsstrecke der beiden Punkte, in denen sich die die Halbkugel darstellenden Kreise schneiden. Diese drei Kreise schneiden sich außer in den drei Fluchtpunkten noch in den drei Punkten S_1, S_2, S_3. Die Kreise, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 sind, schneiden sich in F_3 und S_3, die Kreise, deren Mittelpunkte M_2 und M_3 sind, in F_1 und S_1, die Kreise, deren Mittelpunkte M_3 und M_1 sind, in F_2 und S_2. Die Verbindungsstrecken $F_1 S_1$, $F_2 S_2$, $F_3 S_3$ sind daher die rechtwinkligen Projektionen der Halbkreise, in denen sich je zwei der drei Halbkugeln schneiden.

Betrachten wir nun irgend zwei der drei Kreise, etwa die, deren Mittelpunkte M_1 und M_2 sind, so sind die Winkel $F_1 S_3 F_3$ und $F_2 S_3 F_3$ als Peripheriewinkel in Halbkreisen rechte Winkel, ihre Summe ist also ein gestreckter Winkel, der Punkt S_3 liegt also auf der Dreiecksseite $F_1 F_2$, und $F_3 S_3$ ist einfach die von F_3 auf die gegenüberliegende Seite $F_1 F_2$ gefällte Senkrechte, S_3 ihr Fußpunkt. Dasselbe gilt natürlicherweise von $F_1 S_1$ in Bezug auf $F_2 F_3$, von $F_2 S_2$ in Bezug auf $F_3 F_1$; die drei Strecken $F_1 S_1$, $F_2 S_2$, $F_3 S_3$ sind also ganz einfach die Höhen des Dreiecks, die, wie die Planimetrie lehrt, durch einen Punkt gehen. Ihr Schnittpunkt H ist also offenbar der Hauptpunkt, die rechtwinklige Projektion des Auges auf die Zeichenfläche. Das Auge O liegt im Raume im Schnitte der durch H gehenden Normalen zur Zeichenfläche etwa mit der Halbkugel, deren Mittelpunkt M_3 ist. Klappen wir nun das im Raume liegende rechtwinklige Dreieck $F_1 O F_2$ um die Seite $F_1 F_2$ in die Zeichenfläche um, so fällt O in A_3, den Schnittpunkt des durch F_1 und F_2 gehenden Kreises mit der verlängerten Höhe $F_3 S_3$, denn der Winkel $F_1 A_3 F_2$ ist als Peripheriewinkel im Halbkreise ein rechter Winkel. — Halbieren wir nun diesen rechten Winkel, so ergiebt die Halbierungslinie in ihrem Schnitte mit $F_1 F_2$ den Fluchtpunkt Di_3 der Diagonale des Quadrats, dessen Kanten ihre Fluchtpunkte in F_1 und F_2 haben.

Wir nehmen nun einen Eckpunkt I des Würfels ganz beliebig an und verbinden diesen Punkt mit F_1, F_2 und Di_3. Da über die Größe des Würfels nichts angenommen ist, können wir auch die Ecke II des Würfels auf $I\,Di_3$ ganz beliebig annehmen. Indem wir durch diesen Punkt Linien nach F_1 und F_2 ziehen, erhalten wir die Eckpunkte III und IV.

In derselben Weise können wir auch das Auge umklappen, indem wir das Dreieck $F_2 O F_3$ um die Seite $F_2 F_3$ drehen; dann fällt O

nach A_1, dem Schnittpunkte des durch F_2 und F_3 gehenden Kreises mit der verlängerten Höhe $F_1 S_1$; die Halbierungslinie des Winkels $F_2 A_1 F_3$ schneidet die Dreiecksseite $F_2 F_3$ im Diagonalfluchtpunkte Di_1. Ziehen wir nun von I eine Linie nach Di_1, von IV eine Linie nach F_3, so erhalten wir den Eckpunkt V, und indem wir $V F_1$ und $II F_3$ zum Schnitte bringen, den Eckpunkt VI. Endlich ist VII der Schnittpunkt von $I F_3$ und $V F_2$, $VIII$ der Schnittpunkt von $III F_3$ und $VII F_1$. Das um $F_1 F_3$ umgeklappte Auge A_2 und der zugehörige Diagonalfluchtpunkt Di_2 sind für die Konstruktion nicht erforderlich; letzterer Punkt kann zur Kontrole dienen.

Den Abstand a des Auges von der Bildebene finden wir einfach dadurch, daß wir durch H eine zur Bildebene senkrechte Ebene legen, sie mit einer der drei Halbkugeln schneiden und den sich ergebenden Halbkreis umklappen. Ein in H auf der Spur der angenommenen Schnittebene (in der Figur ist es die Linie $F_1 S_1$) errichtetes Perpendikel ergiebt durch seinen Schnitt mit dem Halbkreise die gesuchte Länge.

Handelt es sich um Darstellung eines senkrechten, quadratischen Prismas in allgemeiner Lage, so können wir wieder die Fluchtpunkte F_1, F_2, F_3 beliebig annehmen und das Bild $I\ III\ II\ IV$ der quadratischen Grundfläche genau wie beim Würfel konstruieren; den Eckpunkt VII können wir nun aber auf $I F_3$ ganz beliebig annehmen und das Bild vollenden, indem wir VII mit F_1 und F_2 verbinden. So finden wir auf $III F_3$ und $IV F_3$ die Punkte $VIII$ und V, deren Verbindungslinien mit F_2 und F_1 sich schließlich im Punkte VI schneiden. Hier kommt also nur ein Diagonalfluchtpunkt in Betracht.

Ist ein rechtwinkliges Parallelepiped von beliebigen Kantenverhältnissen in allgemeiner Lage darzustellen, so kann man, nachdem man die drei Fluchtpunkte und den Eckpunkt I beliebig angenommen hat, auch die Punkte III und IV auf $I F_1$ und $I F_2$ beliebig annehmen und, indem man $IV F_1$ und $III F_2$ zieht, das Viereck $I\ III\ II\ IV$ vervollständigen. Auf $I F_3$ kann man dann noch VII beliebig annehmen und wie oben die Figur ergänzen. Die Diagonalfluchtpunkte spielen jetzt, da Quadrate nicht mehr vorkommen, keine Rolle mehr.

Die hier vorgeführten Konstruktionen gelten selbstverständlich für eine ganz beliebige, nicht nur für eine vertikale Bildebene. Nimmt man die Bildebene als vertikal und eine der drei Kantenrichtungen als horizontal an, so geht der Horizont durch den Fluchtpunkt F_1 dieser Richtung. Er muß ferner zur Verbindungslinie der beiden andern Fluchtpunkte F_2 und F_3 rechtwinklig sein, da die diesen Fluchtpunkten entsprechenden Richtungen jetzt derselben Vertikalebene parallel sind.

Sollen zwei von den drei Kantenrichtungen horizontal ſein, ſo geht der Horizont durch die Fluchtpunkte F_1 und F_3 dieſer beiden Richtungen; der dritte Fluchtpunkt F_2 liegt dann in unendlicher Ferne, da ſeine Verbindungslinie mit dem Auge vertikal, alſo der Bildebene parallel iſt.

§ 16. Die Abbildung des Kreiſes.

Schon im § 3 wurde kurz darauf hingewieſen, daß das perſpektiviſche Bild eines Kreiſes unter Vorausſetzung einer ebenen Bildfläche ſtets ein Kegelſchnitt, alſo eine Ellipſe — in beſonderen Fällen ein Kreis oder eine gerade Strecke —, eine Parabel oder eine Hyperbel ſein muß. Wir müſſen nun genauer unterſuchen, unter welchen Umſtänden dieſe verſchiedenen Geſtalten des Bildes auftreten. Dieſe Unterſuchung läuft auf die Frage hinaus, unter welchen Umſtänden die genannten Kurven als ebene Schnitte einer Kegelfläche zweiter Ordnung vorkommen.

Eine Kegelfläche zweiter Ordnung können wir uns ſtets durch eine bewegliche Gerade erzeugt denken, die bei ihrer Bewegung durch einen feſten Punkt und nach einander durch alle Punkte eines feſten Kreiſes geht. Der feſte Punkt wird als Scheitel, der feſte Kreis als Leitlinie oder Directrix, jede Lage der beweglichen Geraden als Erzeugende oder Genetrix des Kegels bezeichnet. Da die erzeugende Gerade ſich nach beiden Seiten ins Unendliche erſtreckt, erkennt man zunächſt, daß auch die Kegelfläche nach zwei Seiten ins Unendliche geht und nicht etwa im Scheitel endigt.

In Abb. 39 ſei O der Scheitel der Kegelfläche, VW die Leitlinie, deren Ebene wir uns auf der des Papiers ſenkrecht denken wollen, ſo daß der Kreis ſich als gerade Strecke darſtellt. Durch einen beliebigen Punkt P der Zeichenfläche denken wir uns eine zu ihr ſenkrechte Gerade gelegt, die ſich in der Zeichnung eben als der Punkt P darſtellt. Wir denken uns nun durch dieſe Gerade eine Ebene gelegt und um ſie als Axe gedreht, bis ſie in ihre Anfangslage zurückkehrt. Dabei

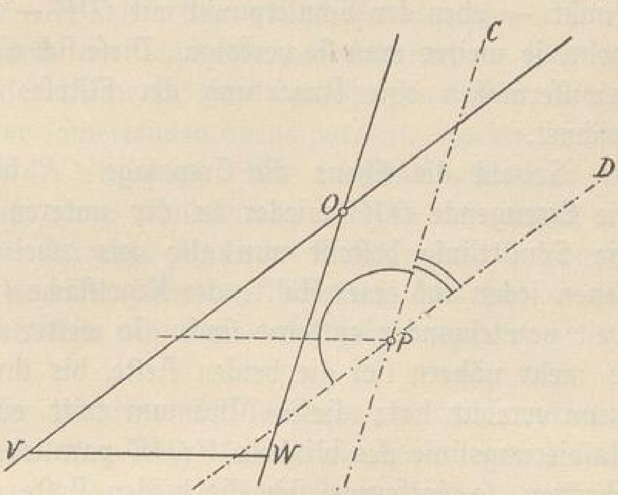

Abb. 39