Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 16. Die Abbildung des Kreises.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

Sollen zwei von den drei Kantenrichtungen horizontal sein, so geht der Horizont durch die Fluchtpunkte F_1 und F_3 dieser beiden Richtungen; der dritte Fluchtpunkt F_2 liegt dann in unendlicher Ferne, da seine Verbindungslinie mit dem Auge vertikal, also der Bildebene parallel ist.

§ 16. Die Abbildung des Kreises.

Schon im § 3 wurde kurz darauf hingewiesen, daß das perspektivische Bild eines Kreises unter Voraussetzung einer ebenen Bildfläche stets ein Kegelschnitt, also eine Ellipse — in besonderen Fällen ein Kreis oder eine gerade Strecke —, eine Parabel oder eine Hyperbel sein muß. Wir müssen nun genauer untersuchen, unter welchen Umständen diese verschiedenen Gestalten des Bildes auftreten. Diese Untersuchung läuft auf die Frage hinaus, unter welchen Umständen die genannten Kurven als ebene Schnitte einer Kegelfläche zweiter Ordnung vorkommen.

Eine Kegelfläche zweiter Ordnung können wir uns stets durch eine bewegliche Gerade erzeugt denken, die bei ihrer Bewegung durch einen festen Punkt und nach einander durch alle Punkte eines festen Kreises geht. Der feste Punkt wird als Scheitel, der feste Kreis als Leitlinie oder Directrix, jede Lage der beweglichen Geraden als Erzeugende oder Genetrix des Kegels bezeichnet. Da die erzeugende Gerade sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstreckt, erkennt man zunächst, daß auch die Kegelfläche nach zwei Seiten ins Unendliche geht und nicht etwa im Scheitel endigt.

In Abb. 39 sei O der Scheitel der Kegelfläche, VW die Leitlinie, deren Ebene wir uns auf der des Papiers senkrecht denken wollen, so daß der Kreis sich als gerade Strecke darstellt. Durch einen beliebigen Punkt P der Zeichenfläche denken wir uns eine zu ihr senkrechte Gerade gelegt, die sich in der Zeichnung eben als der Punkt P darstellt. Wir denken uns nun durch diese Gerade eine Ebene gelegt und um sie als Axe gedreht, bis sie in ihre Anfangslage zurückkehrt. Dabei

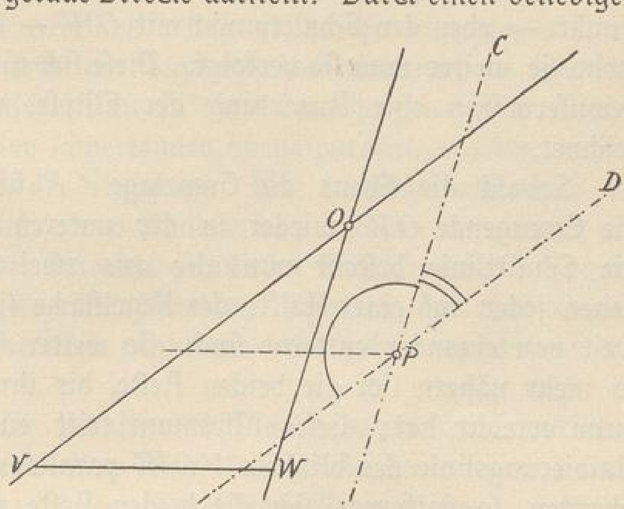

Abb. 39

durchläuft ſie alle möglichen Lagen der Ebene gegen die Kegelfläche und muß alſo auch alle Geſtalten der Schnittlinie ergeben. Eine Veränderung der Lage des Punkts P aber kann keine neuen Geſtalten ergeben, da zwei durch verſchiedene Punkte gelegte parallele Ebenen ganz allgemein ähnliche Schnittlinien erzeugen.

Wir wollen als Anfangslage des durch P gehenden Schnittes eine zum Kreiſe VW parallele Ebene annehmen; ſie muß eine dem Grundkreiſe ähnliche Figur, alſo wieder einen Kreis als Schnittlinie ergeben. Drehen wir nun die Ebene im Sinne des Uhrzeigers, ſo erhalten wir immer noch eine geſchloſſene Kurve; alle Erzeugenden werden an derſelben Seite von O geſchnitten. Da der einzige geſchloſſene Kegelſchnitt die Ellipſe iſt, erkennen wir ohne Weiteres, daß die Schnittlinie eine Ellipſe ſein muß, die mit fortſchreitender Drehung kleiner und kleiner wird, bis ſie, wenn die Ebene durch O geht, zum Punkte wird. Zu dieſen elliptiſchen Schnitten gehört natürlich auch der in der zu VW parallelen Anfangslage auftretende Kreis, denn ein Kreis iſt nichts weiter als eine Ellipſe mit gleichen Hauptaxen.

Ihre Bewegung fortſetzend ſchneidet nun die Ebene die andere, in der Zeichnung obere Hälfte der Kegelfläche; die Schnittlinie iſt, da alle Erzeugenden an derſelben Seite des Scheitels getroffen werden und daher eine geſchloſſene Kurve entſtehen muß, eine Ellipſe. Die Ellipſe wird größer und größer und reckt ſich dabei mehr und mehr in die Länge, bis die ſchneidende Ebene in die Lage CP gelangt, in der ſie der Erzeugenden OW parallel iſt. Nun kann ſich die Schnittlinie nicht mehr ſchließen, denn die Erzeugende OW wird nicht mehr, oder — wie man ſich in der Mathematik auszudrücken pflegt — erſt im Unendlichen getroffen. Die Schnittlinie hat einen unendlich fernen Punkt — eben den Schnittpunkt mit OW — und erweitert ſich immer mehr, je weiter man ſie verfolgt. Dieſe ſich niemals ſchließende Kurve, gewiſſermaßen eine Ausartung der Ellipſe, wird als Parabel bezeichnet.

Sobald die Ebene die Grenzlage CP überſchreitet, ſchneidet ſie die Erzeugende OW wieder in der unteren Hälfte der Kegelfläche; die Schnittlinie beſteht nun alſo aus zwei getrennten Aeſten, von denen jeder auf einer Hälfte der Kegelfläche liegt und die zuerſt ſehr weit von einander entfernt ſind. Je weiter ſich die Ebene dreht, um ſo mehr nähern ſich die beiden Aeſte, bis ihre Entfernung ein Minimum erreicht hat; dieſes Minimum tritt ein, wenn die Ebene der Halbierungslinie des Winkels VOW parallel iſt. Iſt dieſe Lage überſchritten, ſo entfernen ſich die beiden Aeſte wieder. Dieſe aus zwei

Aeſten beſtehende Kurve wird als Hyperbel bezeichnet; ſie hat, wie die Ellipſe, zwei zu einander rechtwinklige Symmetrieaxen, beide Aeſte ſind von gleicher Geſtalt. Die in der Lage CP auftretende Parabel kann auch als der eine Aſt einer Hyperbel betrachtet werden, deren anderer Aſt in unendlicher Ferne liegt; die Parabel ſtellt eben den Uebergang von der Ellipſe zur Hyperbel dar. Während es unendlich viele verſchiedene Geſtalten der Ellipſe und der Hyperbel — bedingt durch das Axenverhältnis — gibt, exiſtiert nur eine Parabelgeſtalt, ebenſo, wie es auch nur eine Kreisgeſtalt gibt. Ebenſo wie alle Kreiſe ſind auch alle Parabeln einander ähnlich.

Erreicht die Ebene die Lage DP, in welcher ſie der Erzeugenden OV parallel iſt, ſo haben wir als Schnittlinie offenbar wieder eine Parabel, die aber jetzt auf der unteren Kegelhälfte liegt. Bei weiterer Fortſetzung der Drehung treten nun wieder Ellipſen auf, die kleiner und kleiner, kürzer und kürzer werden, bis die Ebene in ihre zu VW parallele Anfangslage zurückgekehrt und die Schnittlinie wieder zum Kreiſe geworden iſt.

Innerhalb des durch den einfachen Bogen bezeichneten Winkelraums liegen alſo die elliptiſchen, innerhalb des mit doppeltem Bogen bezeichneten Winkelraums die hyperboliſchen Schnitte.

Wir wollen nun durch den Scheitel eine Ebene legen, die der durch P gehenden Ebene ſtets parallel bleiben, ſich alſo um den Punkt O drehen ſoll. So lange ſich die ſchneidende Ebene innerhalb des Winkelraums der elliptiſchen Schnitte bewegt, ſchneidet die parallele Ebene die Kegelfläche offenbar nur in dem einen Punkte O; iſt die ſchneidende Ebene einer der Erzeugenden OV oder OW parallel, ſchneidet ſie die Kegelfläche alſo in einer Parabel, ſo berührt die parallele Ebene die Kegelfläche längs OV oder OW; liegt endlich die ſchneidende Ebene innerhalb des Winkelraums der hyperboliſchen Schnitte, ſo ſchneidet die parallele Ebene die Kegelfläche in zwei Erzeugenden. Dieſe beiden Erzeugenden ſind alſo der ſchneidenden Ebene parallel, ergeben folglich unendlich ferne Punkte der Hyperbel. Wir erkennen alſo, daß die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte hat. Ziehen wir durch den Mittelpunkt der Hyperbel Parallele zu dieſen Erzeugenden, ſo können auch ſie die Hyperbel niemals ſchneiden, kommen ihr aber unausgeſetzt näher. Dieſe Parallelen nennt man die „Aſymptoten“ der Hyperbel.

Wir wiſſen, daß der Schnitt VW, daher auch jeder mit ihm parallele Schnitt ein Kreis iſt. Aber dieſe Kreisſchnitte ſind keineswegs die einzigen, die auf der Kegelfläche liegen. Das zeigt uns ſofort die Abb. 40, in der wieder VW die kreisförmige Leitlinie, O den Scheitel darſtellt. M ſei der Mittelpunkt des Kreiſes VW, alſo OM die Axe der Kegelfläche, und die Ebene der Zeichnung ſei dieſer Axe parallel, die Ebene des Kreiſes VW auf der der Zeichnung ſenkrecht. Wir ziehen VV' und WW' ſenkrecht zur Halbierungslinie des Winkels VOW, ſo daß alſo $OV' = OV$, $OW' = OW$ wird und legen durch die Linie $V'W'$ ebenfalls einen Schnitt ſenkrecht zur Zeichenfläche durch die Kegelfläche. Eine durch die Winkelhalbierende ſenkrecht zur Zeichenfläche gelegte Ebene iſt eine Symmetrieebene des ganzen Gebildes, der Kegelfläche mit den beiden ſymmetriſch liegenden Schnitten;

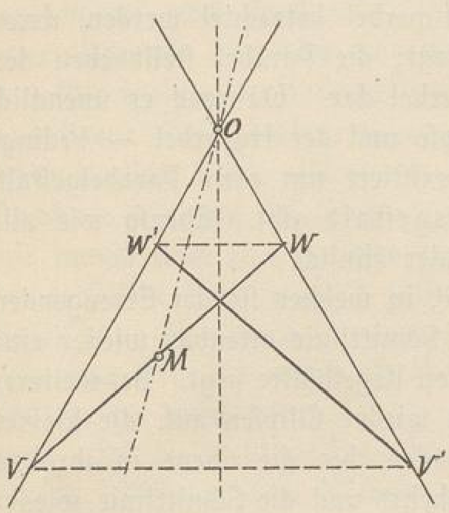

Abb. 40

dieſe Schnitte ſind alſo offenbar kongruent, und da VW ein Kreis iſt, muß auch $V'W'$ ein Kreis ſein. Daß dann auch die zu $V'W'$ parallelen Schnitte Kreiſe ſind, verſteht ſich von ſelbſt.

Auf jeder Kegelfläche zweiter Ordnung gibt es alſo zwei Scharen paralleler Kreisſchnitte; ſie bilden mit der Symmetrieebene der Fläche nach entgegengeſetzten Seiten gleiche Winkel, ſind alſo, wie man ſagt, antiparallele Schnitte oder Wechſelſchnitte.

Iſt im beſonderen Falle die Kegelfläche eine normale Kegelfläche, die Axe alſo auf der Ebene der Directrix ſenkrecht, ſo fällt V' mit W, W' mit V zuſammen; dann ſind alſo beide Richtungen identiſch und es giebt nur **eine** Schar von Kreisſchnitten, die nun natürlich ſenkrecht zur Axe iſt.

Unter den durch P gehenden Schnittebenen (Abb. 39) giebt es alſo im Allgemeinen zwei, die die Kegelfläche in Kreiſen ſchneiden; dieſe Schnitte gehören zu den elliptiſchen Schnitten.

Nachdem wir nun alſo die Natur des Kegelſchnitts in jedem möglichen Falle klar erkannt haben, können wir ohne Weiteres entſcheiden, wie in einem gegebenen Falle die Geſtalt des Kreisbildes beſchaffen ſein muß. Schneidet die Bildebene alle Erzeugenden der durch die Sehſtrahlen gebildeten Kegelfläche an einer Seite des Auges, iſt ſie alſo keinem Sehſtrahl parallel, ſo erhalten wir eine Ellipſe, im beſonderen Falle einen Kreis, wenn ſie der Ebene des Kreiſes parallel oder antiparallel iſt; iſt die Bildebene einem Sehſtrahle parallel, ſo ergiebt ſich eine Parabel; ſchneidet die Bildebene die Sehſtrahlen an verſchiedenen Seiten des Auges, iſt ſie alſo zweien von ihnen parallel, ſo iſt das Bild eine Hyperbel. Wenn endlich die Ebene des Kreiſes durch das Auge geht, erhalten wir als Bild eine Gerade, und zwar eine begrenzte Strecke, wenn der Kreis außerhalb des Auges liegt, eine unbegrenzte Gerade, wenn er das Auge einſchließt. Die Strecke iſt als Grenzfall einer Ellipſe, die unbegrenzte Gerade als Grenzfall einer Hyperbel aufzufaſſen. Demnach hängt die Entſcheidung von der Lage der Geraden ab, in der eine durch das Auge O parallel zur Bildebene gelegte Ebene die Ebene der Leitlinie ſchneidet. Liegt dieſe Gerade ganz außerhalb der kreisförmigen Leitlinie, ſo erhalten wir eine Ellipſe; berührt ſie den Leitkreis, ſo ergiebt ſich eine Parabel; ſchneidet endlich die Gerade den Leitkreis, ſo iſt das Bild eine Hyperbel.

Die Abb. 41 zeigt in *a*, *b*, *c* dieſe 3 Fälle; die Ebene des Papiers iſt ſenkrecht auf der der Leitlinie und auf der Bildebene; AB ſtellt die Bildebene, VW den Leitkreis, OO' die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene dar. In *a* haben wir den Fall der ellip-

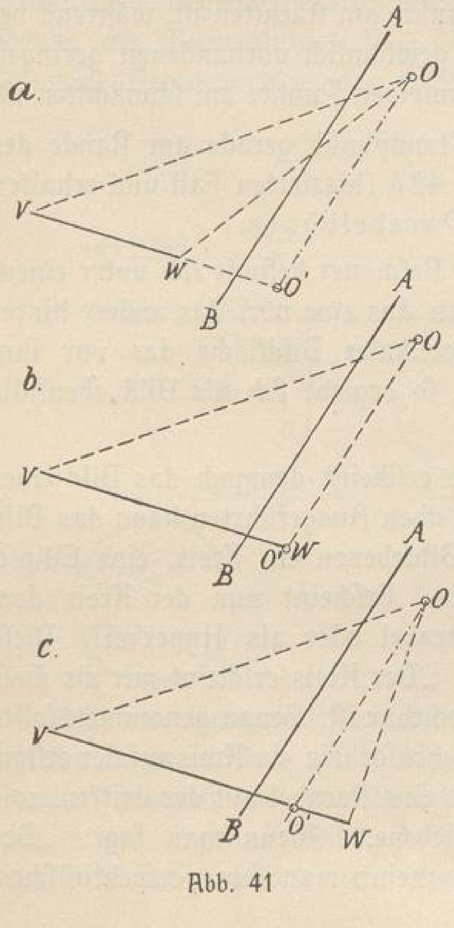

Abb. 41

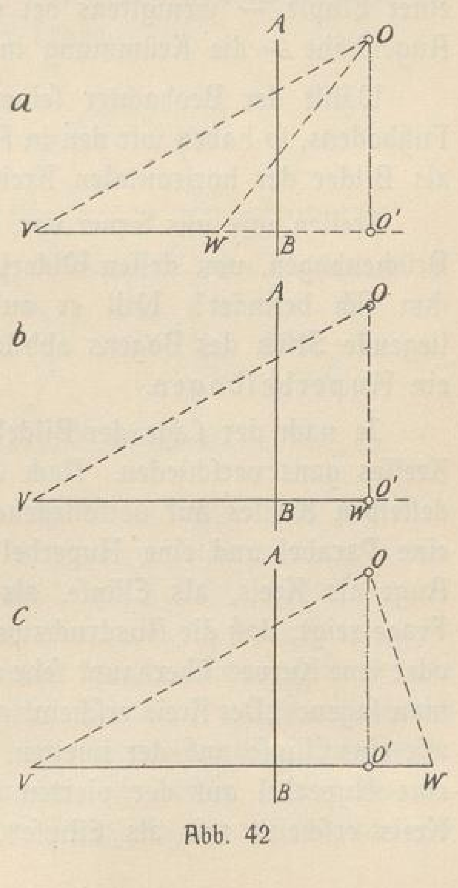

Abb. 42

tischen, in b den der parabolischen, in c den der hyperbolischen Abbildung; im ersten Falle liegt O' außerhalb VW, im zweiten Falle fällt O' mit W zusammen, im dritten Falle liegt O' innerhalb VW.

In den Abbildungen 42 a, b, c sind die drei Lagen noch einmal für den gewöhnlichsten Fall der vertikalen Bildebene und des horizontalen Kreises zusammengestellt.

Man möge nicht glauben, daß das parabolische und hyperbolische Bild des Kreises gewissermaßen nur theoretische Bedeutung haben und in Wirklichkeit nicht vorkommen. Sie kommen oft genug vor. Steht der Beschauer etwa im Innern eines Gebäudes von kreisrundem Grundriß, eines Zirkus oder dergl., und will auf vertikaler Bildebene die untere und obere Kante der zilindrischen Wand, die Kanten eines vielleicht vorhandenen Architravs usw. abbilden, so liegt offenbar der in Abb. 42 c schematisch dargestellte Fall vor; die Bilder der genannten wagerechten Kreise sind also Hyperbelbögen. Auf photographischen Abbildungen derartiger Innenräume erkennt der aufmerksame Beobachter die hyperbolische Krümmung der Bögen schon daran, daß sie in dem dem Beschauer gegenüberliegenden Punkte am stärksten ist, während bei einer Ellipse — wenigstens bei der gewöhnlich vorhandenen geringen Augenhöhe — die Krümmung in demselben Punkte am schwächsten ist.

Wählt der Beobachter seinen Standpunkt gerade am Rande des Fußbodens, so haben wir den in Abb. 42 b skizzierten Fall und erhalten als Bilder der horizontalen Kreise Parabelbögen.

Stellen wir uns ferner vor, der Beschauer befinde sich unter einem Brückenbogen, von dessen Widerlagern das eine vor, das andere hinter ihm sich befindet! Will er auf vertikaler Bildfläche das vor ihm liegende Stück des Bogens abbilden, so ergiebt sich als Bild ebenfalls ein Hyperbelbogen.

Je nach der Lage der Bildebene erscheint demnach das Bild eines Kreises ganz verschieden. Nach dem oben Ausgeführten kann das Bild desselben Kreises auf verschiedenen Bildebenen ein Kreis, eine Ellipse, eine Parabel und eine Hyperbel sein. Erscheint nun der Kreis dem Auge als Kreis, als Ellipse, als Parabel oder als Hyperbel? Diese Frage zeigt, daß die Ausdrucksweise: „Der Kreis erscheint mir als diese oder jene Kurve“ überhaupt sehr anfechtbar ist. Genau genommen sollte man sagen: „Der Kreis erscheint mir ebenso, wie ein Kreis auf der ersten, wie eine Ellipse auf der zweiten, wie eine Parabel auf der dritten, wie eine Hyperbel auf der vierten Bildebene.“ Wenn man sagt: „Der Kreis erscheint mir als Ellipse“, so meint man sein perspektivisches, auf einer Bildebene erzeugtes Bild, die rechtwinklig zur Verbindungslinie des Auges mit dem Mittelpunkte des Kreises ist.

Betrachtet man die ganze Sache etwas allgemeiner, so erkennt man, daß von zwei auf derselben Kegelfläche, deren Scheitel das Auge ist, liegenden Kurven jede das perspektivische Bild der andern ist. Denke ich durch eine der beiden Kurven irgend eine Bildfläche gelegt, so ist sie das Bild der andern Kurve auf dieser Bildfläche. Ist beispielsweise das Bild eines horizontalen Kreises auf einer vertikalen Bildebene eine Hyperbel, so ist für dieselbe Lage des Auges umgekehrt das Bild der vertikalen Hyperbel auf wagerechter Bildebene ein Kreis.

Es tritt nun die Frage auf, wie wir, wenn es sich um die Konstruktion des Bildes eines horizontalen Kreises auf vertikaler Bildebene handelt, aus der Lage des gegebenen Kreises in der Grundebene direkt erkennen können, ob das Bild eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Schon im § 8 haben wir die Gegengerade als diejenige Gerade der Grundebene kennen gelernt, die sich im Unendlichen abbildet. Schon damals wurde erwähnt, daß das Bild des Schnittpunkts einer in der Grundebene liegenden Kurve mit der Gegengeraden ein unendlich ferner Punkt des Kurvenbildes sei. Diese Erkenntnis ermöglicht uns die sofortige Beantwortung der gestellten Frage.

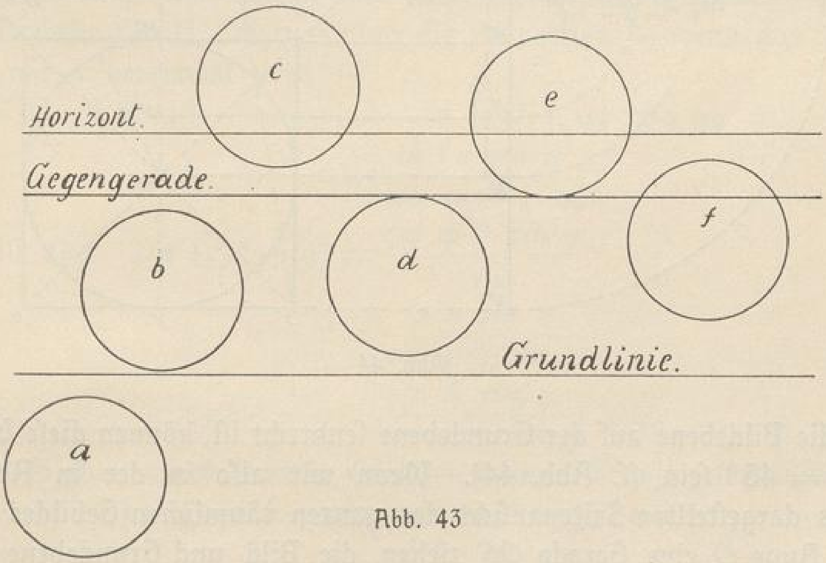

Abb. 43

Hat der Kreis mit der Gegengeraden keinen Punkt gemein, wie in den Lagen *a*, *b*, *c* (Abb. 43), so hat das Bild keinen unendlich fernen Punkt, ist also eine Ellipse; berührt der Kreis die Gegengerade, wie in den Lagen *d* und *e*, so hat er mit ihr einen Punkt gemein, das Bild besitzt also einen unendlich fernen Punkt, ist folglich eine

Parabel; schneidet endlich der Kreis die Gegengerade in zwei Punkten, (Lage *f*), so hat das Bild zwei unendlich ferne Punkte, ist daher eine Hyperbel.

Auch die Frage, wann sich der in der wagerechten Grundebene liegende Kreis auf der vertikalen Bildebene wieder als Kreis abbildet, ist leicht zu beantworten. Dazu ist offenbar erforderlich, daß die Grund- und die Bildebene Wechselschnitte des Sehstrahlenkegels seien, die die Symmetrie-Ebene desselben unter gleichen Winkeln schneiden.

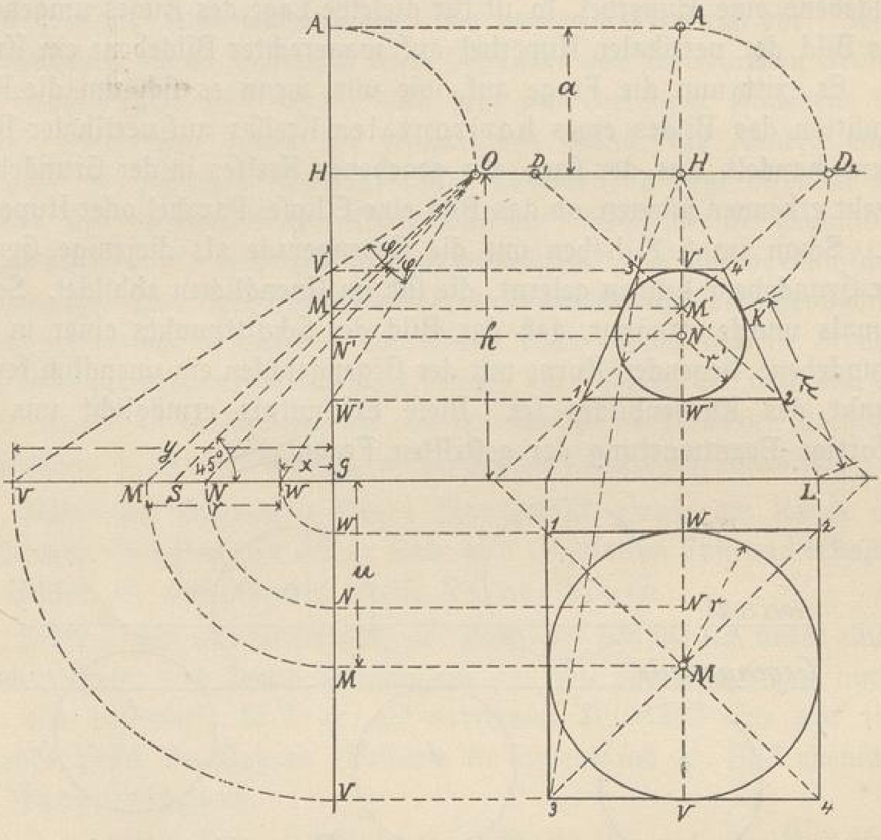

Abb. 44

Da die Bildebene auf der Grundebene senkrecht ist, können diese Winkel nur $= 45^0$ sein (s. Abb. 44). Wenn wir also in der in Abb. 44 links dargestellten Seitenansicht des ganzen räumlichen Gebildes durch das Auge O eine Gerade OS ziehen, die Bild- und Grundebene unter Winkeln von 45^0 schneidet, so ist diese Gerade die Seitenansicht der Symmetrie-Ebene des Sehstrahlenkegels. Tragen wir also an beide Seiten dieser Geraden beliebige, aber gleich große Winkel φ an, so erhalten wir die Seitenansicht des Kegels, der aus der Grundebene die kreisförmige Directrix VW, aus der Bildebene ihr kreisförmiges

Bild $V'W'$ herausschneidet. Die Abb. 44 zeigt rechts den in der umgeklappten Grundebene liegenden Kreis VW, das umschriebene Quadrat 1 2 3 4, das auf gewöhnliche Weise mittels der Punkte H, A, D_1, D_2 konstruierte trapezförmige Bild 1′ 2′ 3′ 4′ des Quadrats und schließlich den diesem eingeschriebenen Bildkreis $V'W'$.

Voraussetzung der kreisförmigen Abbildung des Kreises ist natürlich, daß der Mittelpunkt M des Kreises VW in der durch das Auge rechtwinklig zur Bildebene gelegten Ebene liegt. Man sieht sofort, daß der Mittelpunkt N' des Bildkreises $V'W'$ nicht etwa mit dem Bilde M' des Mittelpunkts M des Kreises VW zusammenfällt. Das Bild M' von M liegt in der Zeichnung über N'; umgekehrt ist N' das Bild eines innerhalb des Kreises VW liegenden Punktes N, der näher an der Grundlinie liegt als M.

Hebt sich der abgebildete Kreis, so daß sein Mittelpunkt in derselben Vertikalen bleibt, so geht der Bildkreis in eine Ellipse mit wagerechter großer Axe über; senkt er sich, so verwandelt sich der Bildkreis in eine Ellipse mit vertikaler großer Axe.

Den Zusammenhang des Radius r des in der Horizontalebene liegenden Kreises mit dem Abstande u seines Mittelpunkts von der Grundlinie unter der Voraussetzung kreisförmiger Abbildung in der vertikalen Bildebene können wir leicht rechnerisch ermitteln. — Aus dem Dreiecke OSW folgt nämlich die Proportion — wenn das Stück GW mit x bezeichnet wird —

$$h\sqrt{2} : (h - a - x) = \sin(45^0 + \varphi) : \sin\varphi,$$

also
$$h - a - x = \frac{h\sqrt{2}\,\sin\varphi}{\sin(45^0 + \varphi)}$$

Nun ist aber $\sin(45^0 + \varphi) = \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sqrt{2}}$,

also
$$h - a - x = \frac{2\,h\,\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

und
$$x = h - a - \frac{2\,h\,\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

Ebenso folgt aus dem Dreiecke OSV — wenn $GV = y$ gesetzt wird —

$$h\sqrt{2} : (y - h + a) = \sin(45^0 - \varphi) : \sin\varphi,$$

also
$$y - h + a = \frac{h\sqrt{2}\,\sin\varphi}{\sin(45^0 - \varphi)}$$

Nun ist aber $\sin(45^0 - \varphi) = \frac{\cos\varphi - \sin\varphi}{\sqrt{2}}$,

also
$$y - h + a = \frac{2\,h\,\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

und $$y = h - a + \frac{2\,h\,\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

Daraus folgt:

$$I.\quad u = \frac{x+y}{2} = h - a - \frac{h\,\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} + \frac{h\,\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$= h - a + \frac{2\,h\,\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = h\left(1 + \frac{2\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) - a = \frac{h}{\cos 2\varphi} - a$$

und

$$II.\quad r = \frac{y-x}{2} = \frac{h\,\sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} + \frac{h\,\sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

$$= h\,\sin\varphi \cdot \frac{2\cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = h \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = h\,tg\,2\varphi$$

Damit ſind u und r als Funktionen des beliebig angenommenen Winkels φ dargeſtellt. Nun folgt aus der Gleichung II

$tg\,2\varphi = \frac{r}{h}$, alſo $\cos 2\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, mithin $u = \sqrt{h^2 + r^2} - a$

Hiermit iſt der geſuchte Zuſammenhang gefunden. Damit alſo ein in der Horizontalebene liegender Kreis vom Radius r ſich als Kreis abbilde, muß ſein Mittelpunkt von der Grundlinie den Abſtand $\sqrt{h^2 + r^2} - a$ haben. Da $\sqrt{h^2 + r^2}$ die Hypotenuſe eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten h und r iſt, läßt ſich dieſer Abſtand auch ohne Weiteres konſtruieren; er iſt $= KL$ (ſ. Abb. 44, rechts).

Auch der Radius r' des zugehörigen Kreisbildes iſt rechneriſch leicht zu ermitteln. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AVW und $AW'V'$ folgt: $VW : W'V' = r : r' = h : a$,

$$\text{alſo}\quad r' = \frac{ra}{h} = a\,tg\,2\varphi.$$

§ 17. Die zeichneriſche Darſtellung des Bildes in den verſchiedenen Lagen des Kreiſes.

Für die Aufzeichnung einer Linie, die keine Gerade und kein Kreis iſt, alſo weder mittels des Lineals noch mittels des Zirkels hergeſtellt werden kann, gibt es bekanntlich zwei verſchiedene Methoden. Entweder trägt man auf Grund des Bildungsgeſetzes der Linie eine Anzahl einzelner Punkte oder eine Anzahl einzelner Tangenten auf; im erſteren Falle hat man die Linie freihändig durch die gefundenen Punkte, im zweiten Falle hat man ſie ebenſo an die gefundenen Tangenten zu legen. Daraus, daß man in der Geometrie