Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 17. Die zeichnerische Darstellung des Bildes in den verschiedenen Lagen des Kreises.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

und $$y = h - a + \frac{2\,h \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

Daraus folgt:

$$I.\quad u = \frac{x+y}{2} = h - a - \frac{h \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi} + \frac{h \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$= h - a + \frac{2\,h \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = h\left(1 + \frac{2 \sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) - a = \frac{h}{\cos 2\varphi} - a$$

und

$$II.\quad r = \frac{y-x}{2} = \frac{h \sin\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} + \frac{h \sin\varphi}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

$$= h \sin\varphi \cdot \frac{2 \cos\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = h \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = h\,tg\,2\varphi$$

Damit sind u und r als Funktionen des beliebig angenommenen Winkels φ dargestellt. Nun folgt aus der Gleichung II $tg\,2\varphi = \frac{r}{h}$, also $\cos 2\varphi = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}$, mithin $u = \sqrt{h^2 + r^2} - a$

Hiermit ist der gesuchte Zusammenhang gefunden. Damit also ein in der Horizontalebene liegender Kreis vom Radius r sich als Kreis abbilde, muß sein Mittelpunkt von der Grundlinie den Abstand $\sqrt{h^2 + r^2} - a$ haben. Da $\sqrt{h^2 + r^2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten h und r ist, läßt sich dieser Abstand auch ohne Weiteres konstruieren; er ist $= KL$ (s. Abb. 44, rechts).

Auch der Radius r' des zugehörigen Kreisbildes ist rechnerisch leicht zu ermitteln. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AVW und $AW'V'$ folgt: $VW : W'V' = r : r' = h : a$,

$$\text{also } r' = \frac{ra}{h} = a\,tg\,2\varphi.$$

§ 17. Die zeichnerische Darstellung des Bildes in den verschiedenen Lagen des Kreises.

Für die Aufzeichnung einer Linie, die keine Gerade und kein Kreis ist, also weder mittels des Lineals noch mittels des Zirkels hergestellt werden kann, gibt es bekanntlich zwei verschiedene Methoden. Entweder trägt man auf Grund des Bildungsgesetzes der Linie eine Anzahl einzelner Punkte oder eine Anzahl einzelner Tangenten auf; im ersteren Falle hat man die Linie freihändig durch die gefundenen Punkte, im zweiten Falle hat man sie ebenso an die gefundenen Tangenten zu legen. Daraus, daß man in der Geometrie eine Linie als kontinuierliche Folge einer unendlich großen Zahl unendlich naher Punkte oder als einhüllende Kurve einer unendlich großen Zahl unendlich naher Tangenten auffaßt, entsteht oftmals der Irrtum, daß man die Kurve um so genauer erhalte, je mehr Punkte oder Tangenten bestimmt wurden. Da unsere gezeichneten Linien tatsächlich Streifen von meßbarer Breite, unsere Punkte — die ja stets durch den Schnitt von Linien entstehen — tatsächlich kleine Parallelogramme von meßbarer Ausdehnung sind, da ferner die Ausführung einer Konstruktion immer mit unvermeidlichen Ungenauigkeiten behaftet ist, macht eine zu dichte Folge der Punkte oder Tangenten die Zeichnung in Wahrheit unsicher und ungenau. Die einzelnen Punkte oder Tangenten weichen von dem ideellen Verlaufe der Kurve bald nach der einen, bald nach der andern Seite um eine Kleinigkeit ab, so daß man sich doch genötigt sieht, diese Differenzen auszugleichen und der eingebildete Vorteil sofort wieder verloren geht. Jeder geübte Zeichner sucht im Gegenteil mit möglichst wenigen Punkten oder Tangenten auszukommen, diese wenigen aber so genau wie irgend möglich zu erlangen. Daß man um so mehr Punkte oder Tangenten gebraucht, je schärfer die Kurve in der betreffenden Gegend gekrümmt ist, liegt auf der Hand.

Am besten sind diejenigen Konstruktionen, die Punkte mit den durch sie gehenden Tangenten gleichzeitig liefern; dadurch hat man in jedem Punkte die Richtung, in der man ihn beim Zeichnen der Kurve zu passieren hat, und kann eine auf anderem Wege nicht zu erlangende Genauigkeit erreichen. Eine Anzahl von Punkten mit den durch sie gehenden Tangenten gewährt eine größere Genauigkeit, als die doppelte Anzahl von Punkten ohne Tangenten oder von Tangenten ohne Punkte. Auch beim Aufzeichnen der hier in Betracht kommenden Kegelschnitte werden wir uns daher stets der Methoden bedienen, die Punkte mit den durch sie gehenden Tangenten oder — was dasselbe ist — Tangenten mit ihren Berührungspunkten liefern.

Handelt es sich um Zeichnungen kleineren Maßstabes, so denkt man sich am besten zwei dem Kreise umschriebene Quadrate, die um 45° gegen einander gedreht sind, so daß die Diagonalen des einen den Seiten des andern parallel sind (s. Abb. 45). Die acht Seiten der beiden Quadrate berühren den Kreis in acht Punkten, die ein regelmäßiges Achteck bilden. Uebertragt man diese Figur in die Perspektive, so hat man stets acht Punkte mit acht Tangenten, die in der Regel zur Aufzeichnung des Kegelschnitts — namentlich der am häufigsten vorkommenden Ellipse — vollständig hinreichen. Liegt,

4*

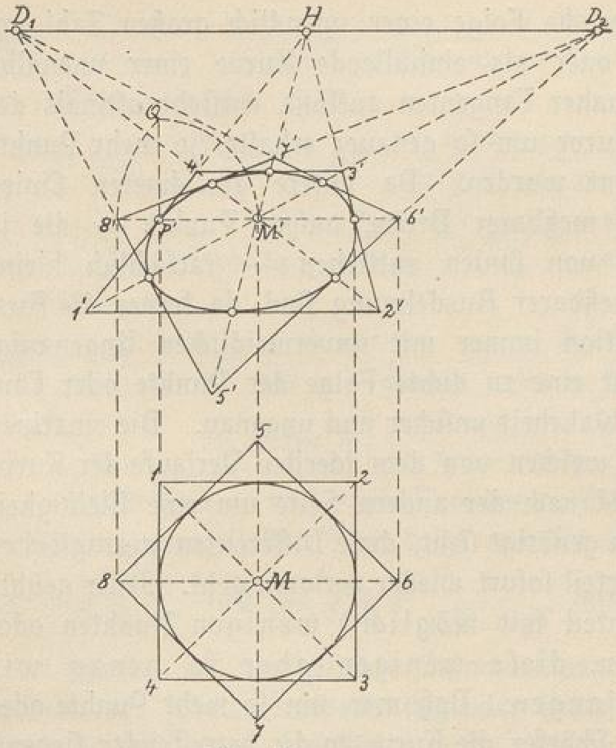

Abb. 45

wie in den meiſten Fällen, der Kreis horizontal, ſo legt man die Figur ſo, daß die Seiten 1 2 und 3 4, alſo auch die Diagonale 8 6 parallel der Bildebene ſind und überträgt auf bekannte Weiſe das Quadrat 1234 in das Bild. Die Seiten $1'2'$ und $4'3'$ ſind horizontal, $1'4'$ und $2'3'$ gehen nach H, die Diagonalen $1'3'$ und $2'4'$ nach D_2 und D_1. Der Schnittpunkt M' der Diagonalen iſt das Bild des Mittelpunkts M. Da $M'8'$ die Diagonale eines Quadrats von der Seite $M'P'$ iſt, zieht man einfach durch P' eine Vertikale, macht $P'Q = M'P'$ und $M'8' = M'Q$. Nun zieht man $8'5'$ nach D_1, $5'6'$ nach D_2, $6'7'$ nach D_1, $7'8'$ nach D_2, endlich $5'7'$ nach H. Damit ſind die acht Tangenten nebſt ihren Berührungspunkten gefunden.

Auch mittels des dem Kreiſe umſchriebenen regelmäßigen Achtecks, von dem zwei gegenüberliegende Seiten der Bildebene parallel ſind, läßt ſich daſſelbe erreichen. (Abb. 46.) Man geht wieder von dem Bilde $1'2'3'4'$ des Quadrats 1234 aus und ermittelt die halbe Diagonale $1'M$ eines Quadrats von der Seite $1'2'$. Trägt man dieſe Länge auf $1'2'$ von $1'$ und $2'$ ab, ſo erhält man die Achtecksecken $6'$ und $5'$, durch deren Verbindung mit H man auf $4'3'$ ſofort die Ecken $9'$ und $10'$ erhält. Legt man durch die Schnittpunkte dieſer Verbindungslinien mit den Diagonalen $1'3'$ und $2'4'$ Parallele zum Horizonte, ſo hat man die Ecken $7'$, $8'$, $11'$

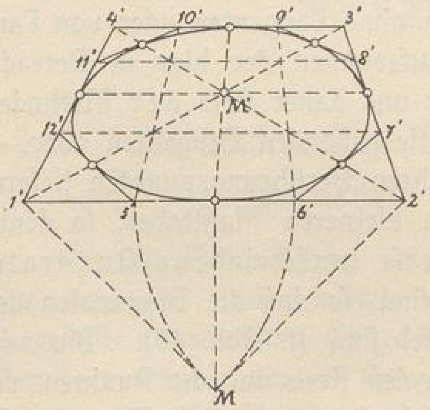

Abb. 46

und 12'. Die Achteckseiten 6'7', 11'10' müssen natürlich nach D_2, 8'9' und 5'12' nach D_1 gehen.

Es ist aber auch möglich, die Bildellipse mit Hülfe irgend einer der vielen bekannten Konstruktionen aus ihren Hauptaxen zu konstruieren. Namentlich dann ist das bequem ausführbar, wenn die durch das Auge und den Mittelpunkt des Kreises gehende Vertikalebene rechtwinklig zur Bildebene ist. Dann sind die Punkte P' und Q' (Abb. 47), die sich ohne Weiteres aus den Schnittpunkten P und Q

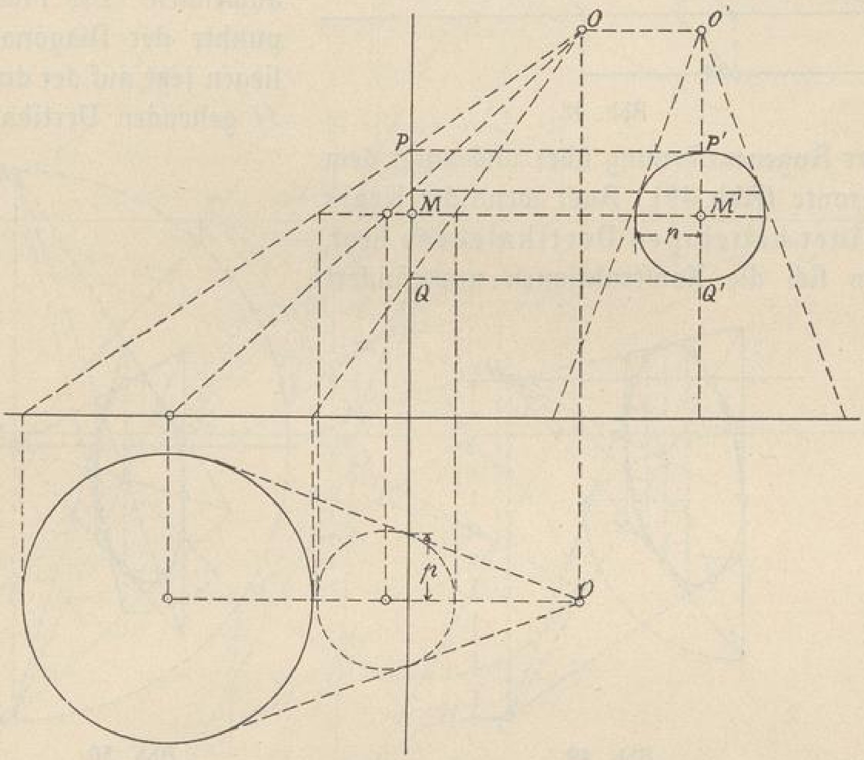

Abb. 47

ergeben, die Endpunkte der vertikalen Axe der Ellipse, die je nach der Höhe des Auges über der Ebene des Kreises die große oder kleine Axe sein kann. Nimmt man dann die Mitte M zwischen P und Q und legt durch sie einen Horizontalschnitt, so erhält man im Grundrisse sofort die wagerechte Halbaxe p, die wieder die kleine oder große Halbaxe sein kann.

Liegt der Kreis in einer zur Bildebene parallelen Vertikalebene, so bildet er sich selbstverständlich als Kreis ab. Man hat also nur, wie es in Abb. 48 gezeigt ist, die Lage des Mittelpunkts und die Länge des Radius in bekannter Weise zu ermitteln und den Kreis zu beschreiben.

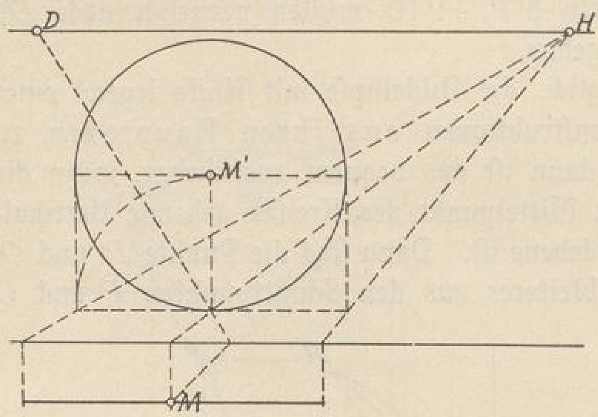

Abb. 48

Liegt der Kreis in einer zur Bildebene senkrechten Vertikalebene, so kann man die oben bei der Abbildung des horizontalen Kreises benutzten Konstruktionen genau in derselben Weise anwenden. Die Fluchtpunkte der Diagonalen liegen jetzt auf der durch H gehenden Vertikalen in der Augenentfernung über und unter dem Horizonte (Abb. 49). Auch wenn der Kreis in einer beliebigen Vertikalebene liegt, lassen sich die Konstruktionen unverändert

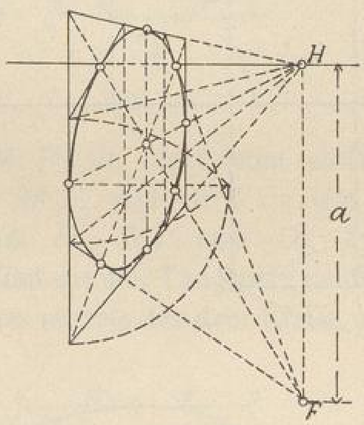

Abb. 49

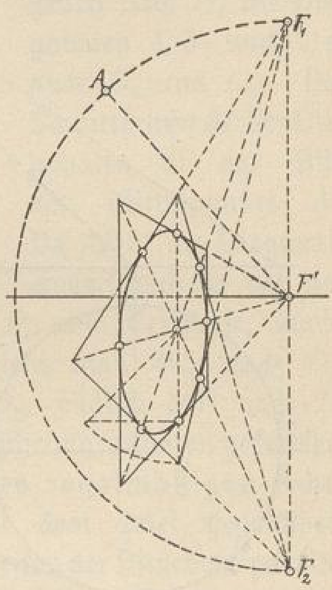

Abb. 50

anwenden (Abb. 50). Die Diagonalfluchtpunkte sind jetzt in der früher angegebenen Weise zu ermitteln (s. § 9, Abb. 22, S. 27).

Liegt der Kreis ganz beliebig im Raume, so können wir uns stets ein umschriebenes Quadrat denken, von dem zwei gegenüberliegende Seiten horizontal sind. Dieses Quadrat ergibt, auf die Grundebene projiziert, das Rechteck 1234 (Abb. 51), dessen Bild 1'2'3'4' wir auf die gewöhnliche Weise erhalten. In der Grundebene ermitteln wir nun, indem wir die Seite 34 mit einem um 1 als Mittelpunkt mit dem Radius 12 beschriebenen Kreise schneiden, die Höhe h der oberen Quadratseite über der Grundebene. Indem wir diese Höhe in das Bild tragen, erhalten wir die vollständige Abbildung des Quadrats. Die wagerechte Diagonale 68 des über Eck gestellten Quadrats ist im

Grundrisse sofort zu ermitteln, von hier in den perspektivischen Grundriß und aus diesem in das räumliche Bild zu übertragen. Die Seiten des perspektivischen Bildes dieses Quadrats finden wir nun sofort dadurch, daß ihre Fluchtpunkte in den Vertikalen liegen müssen, die durch die Fluchtpunkte F_4 und F_3 der Diagonalen 1′3′ und 2′4′ gehen.

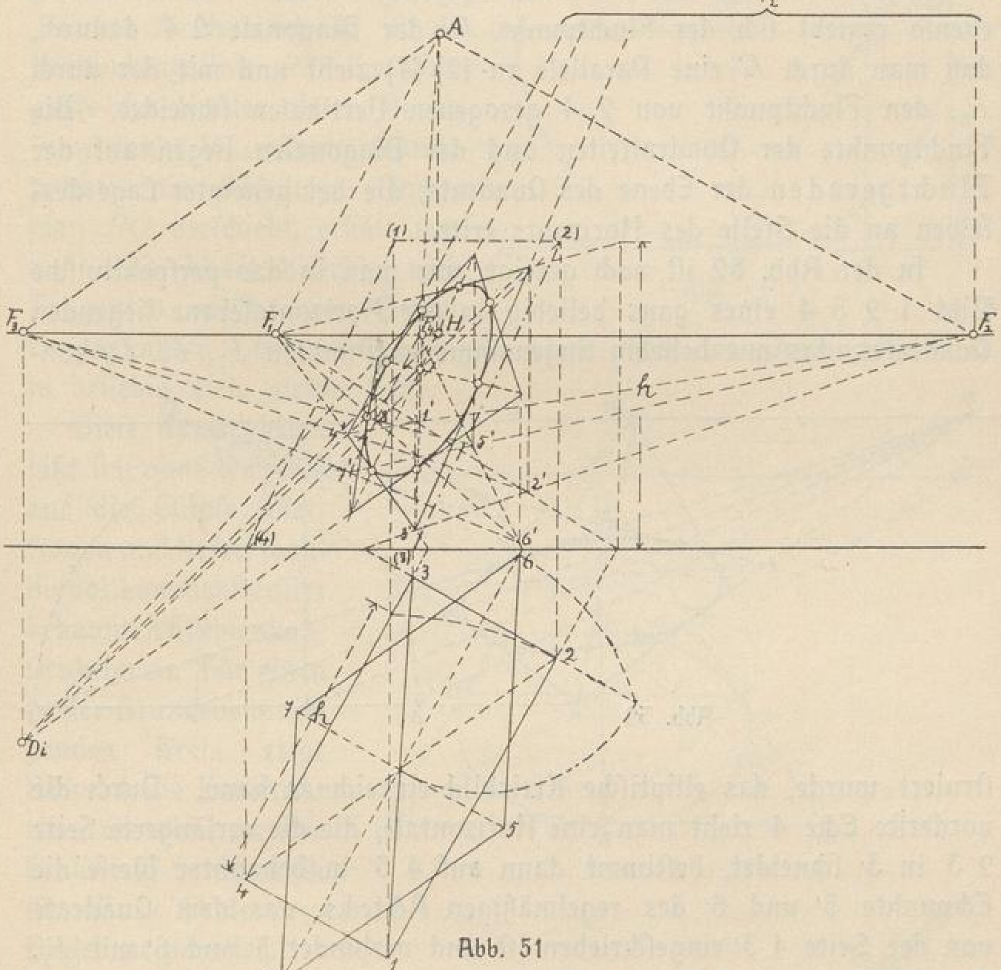

Abb. 51

Zieht man es vor, das regelmäßige Achteck zu benutzen, so bestimmt man die Achtecksecken im Grundrisse auf 1 2 und 3 4, überträgt sie in die Bilder 1′ 2′ und 3′ 4′ und mittels der Diagonalen des Bildquadrats auf die anderen Quadratseiten. Ist der Fluchtpunkt der aufsteigenden Quadratseiten zu haben, so braucht man die Achtecksecken nur auf 3′ 4′ zu bestimmen und erhält, indem man von diesen Punkten aus nach dem Fluchtpunkte zieht, die auf der gegenüberliegenden Seite liegenden Achteckspunkte, schließlich mit Hülfe der Diagonalen die auf den aufsteigenden Quadratseiten liegenden Punkte.

Auch die Fluchtpunkte der ansteigenden Quadratseiten und der Diagonalen kann man mit Vorteil benutzen. Zeichnet man den Aufriß (1) (2) (3) (4) des Quadrats, so findet man, da der Hauptpunkt H bekanntlich den Aufriß des Auges darstellt, den Fluchtpunkt F_2' der Seiten 2 3′ und 1 4′ einfach dadurch, daß man von H eine Parallele zu (2) (3) zieht und mit der durch F_2 gezogenen Vertikalen schneidet; ebenso ergiebt sich der Fluchtpunkt Di der Diagonale 2 4′ dadurch, daß man durch H eine Parallele zu (2) (4) zieht und mit der durch F_3, den Fluchtpunkt von 2 4 gezogenen Vertikalen schneidet. Die Fluchtpunkte der Quadratseiten und der Diagonalen liegen auf der Fluchtgeraden der Ebene des Quadrats, die bei geneigter Lage desselben an die Stelle des Horizonts tritt.

In der Abb. 52 ist noch gezeigt, wie man in das perspektivische Bild 1 2 3 4 eines ganz beliebig in der Horizontalebene liegenden Quadrates, das mit beliebig angenommenen Punkten F_1, F_2, Di kon-

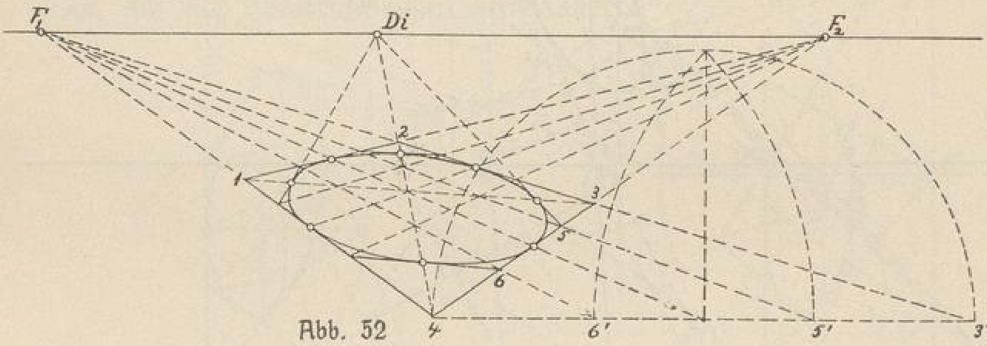

Abb. 52

struiert wurde, das elliptische Kreisbild einzeichnen kann. Durch die vorderste Ecke 4 zieht man eine Horizontale, die die verlängerte Seite 2 3 in 3′ schneidet, bestimmt dann auf 4 3′ in bekannter Weise die Eckpunkte 5′ und 6′ des regelmäßigen Achtecks, das dem Quadrate von der Seite 4 3′ eingeschrieben ist und verbindet 5′ und 6′ mit F_1. Das Uebrige ergiebt sich von selbst.

Die Konstruktion gilt ganz unverändert, wenn das Quadrat nicht in einer horizontalen Ebene liegt; dann ist die Verbindungslinie der Fluchtpunkte F_1 und F_2 — die Fluchtgerade — nicht mehr horizontal, sondern beliebig gerichtet; 4 3′ aber bleibt mit ihr parallel. Die Abb. 52 ist also nur beliebig zu neigen.

Handelt es sich um sehr große Ellipsen, so ist eine Konstruktion vorzuziehen, die eine beliebige Zahl von Punkten und Tangenten liefert. Zieht man in einem Kreise (Abb. 53) zwei auf einander rechtwinklige Durchmesser AB und CD und in ihren Eckpunkten die Tangenten,

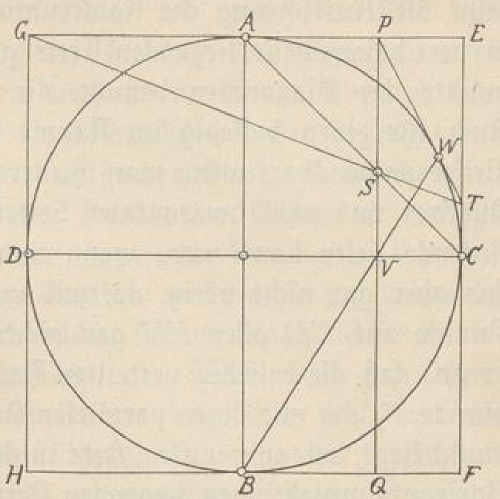

Abb. 53

ſo daß ein umſchriebenes Quadrat $EFGH$ entſteht, zieht man ferner AC und in beliebigem Abſtande von AB die Parallele PQ, die AC in S ſchneidet, zieht man weiter GS, die die Quadratſeite EF in T ſchneidet, ſo iſt die Verbindungslinie PT eine Tangente des Kreiſes, deren Berührungspunkt W in ihrem Schnittpunkte mit BV liegt. Indem man PQ verſchiebt, erhält man auf dieſe Weiſe beliebig viele Tangenten nebſt ihren Berührungspunkten. Am zweckmäßigſten teilt man den Durchmeſſer CD in beliebig viele gleiche Teile.

Dieſe Konſtruktion läßt ſich ohne Weiteres auf die Ellipſe übertragen und liefert wohl die vollkommenſte aller bekannten Ellipſenkonſtruktionen. Für einen in der Grundebene liegenden Kreis zeigt Abb. 54 die Konſtruktion, die ohne weitere Erklärung verſtändlich iſt. Da CD der Bildebene parallel iſt, bilden ſich die gleichen Teile wieder als gleiche Teile ab, und die von den Teilpunkten aus gezogenen Parallelen zu AB gehen im Bilde nach dem Hauptpunkte. — Die Abbildung

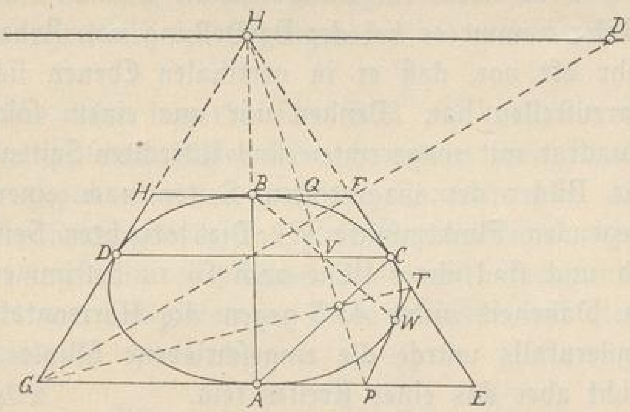

Abb. 54

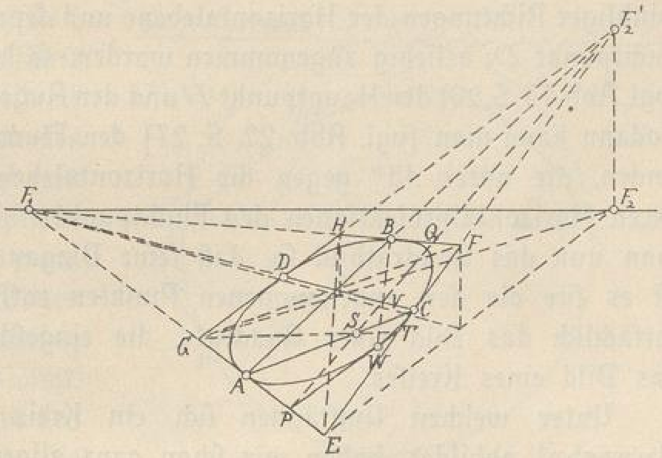

Abb. 55

zeigt die Ausführung der Konſtruktion für ein Viertel. — Für einen in vertikaler Ebene liegenden Kreis gilt, wenn man wieder die Fluchtpunkte der Diagonalen benutzt, die Konſtruktion ganz unverändert. Auch für einen beliebig im Raume liegenden Kreis (Abb. 55) iſt ſie direkt anwendbar, wenn man wieder wie in Abb. 51 ein umſchriebenes Quadrat mit zwei horizontalen Seiten benutzt. Die in der Grundebene liegende Seite kann man, wenn man will, perſpektiviſch teilen, hat das aber gar nicht nötig, da, wie wir wiſſen, auf die Verteilung der Punkte auf CD oder FH gar nichts ankommt. Nur darauf kommt es an, daß die beliebig verteilten Parallelen im Bilde nach dem Fluchtpunkte F_2' der mit ihnen parallelen Quadratſeiten gehen. Dieſer Fluchtpunkt liegt, wie wir wiſſen, ſtets in der durch den Fluchtpunkt F_2 ihrer Horizontalprojektionen liegenden Vertikalen. Die Abbildung zeigt die Ermittelung einer beliebigen Tangente mit ihrem Berührungspunkte.

Auch auf den in Abb. 52 dargeſtellten, ganz allgemeinen Fall iſt die Konſtruktion ohne Weiteres anwendbar.

Dem direkt im Bilde — ohne Grund- und Aufriß — arbeitenden Maler kommt es bei der Darſtellung von Arkaden, Gewölben u. ſ. w. ſehr oft vor, daß er in vertikalen Ebenen liegende Kreiſe verkürzt darzuſtellen hat. Denken wir uns einem ſolchen Kreiſe wieder ein Quadrat mit wagerechten und lotrechten Seiten umſchrieben, ſo gehen die Bilder der wagerechten Seiten nach einem auf dem Horizonte liegenden Fluchtpunkte F. Die lotrechten Seiten bilden ſich lotrecht ab und ſind ihrer Höhe nach ſo zu beſtimmen, daß die Diagonalen in Wahrheit unter 45° gegen die Horizontalebene geneigt ſind — andernfalls würde die eingeſchriebene Ellipſe das Bild einer Ellipſe, nicht aber das eines Kreiſes ſein.

Sind die Fluchtpunkte F_1 und F_2 zweier zu einander rechtwinkliger Richtungen der Horizontalebene und der zugehörige Diagonalfluchtpunkt Di beliebig angenommen worden, ſo kann man bekanntlich (vgl. Abb. 15, S. 20) den Hauptpunkt H und den Augenabſtand a ermitteln. Sodann kann man (vgl. Abb. 22, S. 27) den Fluchtpunkt F' der Linien finden, die unter 45° gegen die Horizontalebene geneigt ſind und deren Horizontalprojektionen den Fluchtpunkt F beſitzen. Konſtruiert man nun das Quadratbild ſo, daß ſeine Diagonale nach F' geht, ſo iſt es für die den angenommenen Punkten entſprechende Augenlage tatſächlich das Bild eines Quadrats, die eingeſchriebene Ellipſe alſo das Bild eines Kreiſes.

Unter welchen Umſtänden ſich ein Kreis als Parabel oder Hyperbel abbildet, haben wir ſchon ganz allgemein geſehen. Vom horizontalen Kreise im Besonderen sahen wir, daß sein Bild eine Parabel wird, wenn er die Gegengerade berührt, eine Hyperbel, wenn er sie durchschneidet. Denken wir uns die durch das Auge parallel zur Bildebene gehende Ebene, die die Grundebene in der Gegengeraden schneidet, so erkennen wir sofort, daß jeder Punkt dieser Parallelebene sich in einem unendlich fernen Punkte der Bildebene abbildet. Wenn also ein beliebig im Raume liegender Kreis diese Parallelebene berührt, so ist sein Bild eine Parabel, wenn er sie durchschneidet eine Hyperbel. Die Schnittpunkte bilden sich im Unendlichen ab, ergeben also, mit dem Auge verbunden, die Richtungen der Asymptoten. — Projizieren wir den im Raume liegenden Kreis auf die Grundebene, so erhalten wir eine Ellipse, die, falls der Kreis auf der Grundebene senkrecht steht, in eine gerade Strecke übergeht. Durchschneidet also die Ellipse oder die Strecke die Gegengerade, so erhalten wir als Bild des Kreises eine Hyperbel; berührt aber die Ellipse die Gegengerade oder fällt die Strecke mit einem Endpunkte in sie, so ergibt sich als Bild eine Parabel; liegt endlich die Ellipse oder die Strecke ganz außerhalb der Gegengeraden, so ist das Bild eine Ellipse.

Um das parabolische oder hyperbolische Bild zu konstruieren, kann man, wie beim elliptischen Bilde, sich der beiden dem Kreise umschriebenen, um 45° gegen einander gedrehten Quadrate oder des regelmäßigen Achtecks bedienen, jedoch sind diese Konstruktionen hier nicht so empfehlenswert wie beim elliptischen Bilde, weil immer nur ein Teil der acht Punkte und Tangenten im Bilde erscheint und diese wenigen Punkte und Tangenten den langgestreckten Bogen nicht mit der wünschenswerten Genauigkeit bestimmen. Am besten fährt man, wenn man zuerst ermittelt, welcher Bogen des Kreises auf der verfügbaren Zeichenfläche überhaupt zur Abbildung gelangt, wenn man dann auf diesem Bogen eine genügende Zahl beliebig gewählter Punkte annimmt, in ihnen Tangenten an den Kreis legt und dann die

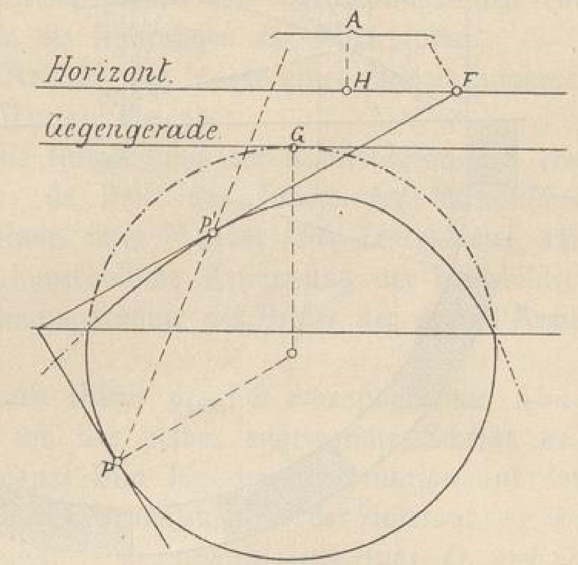

Abb. 56

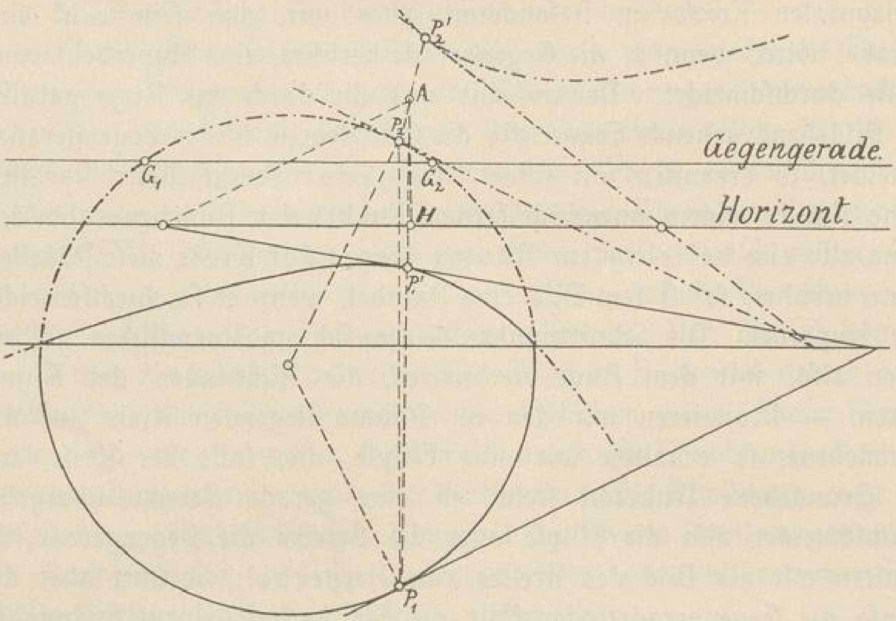

Abb. 57

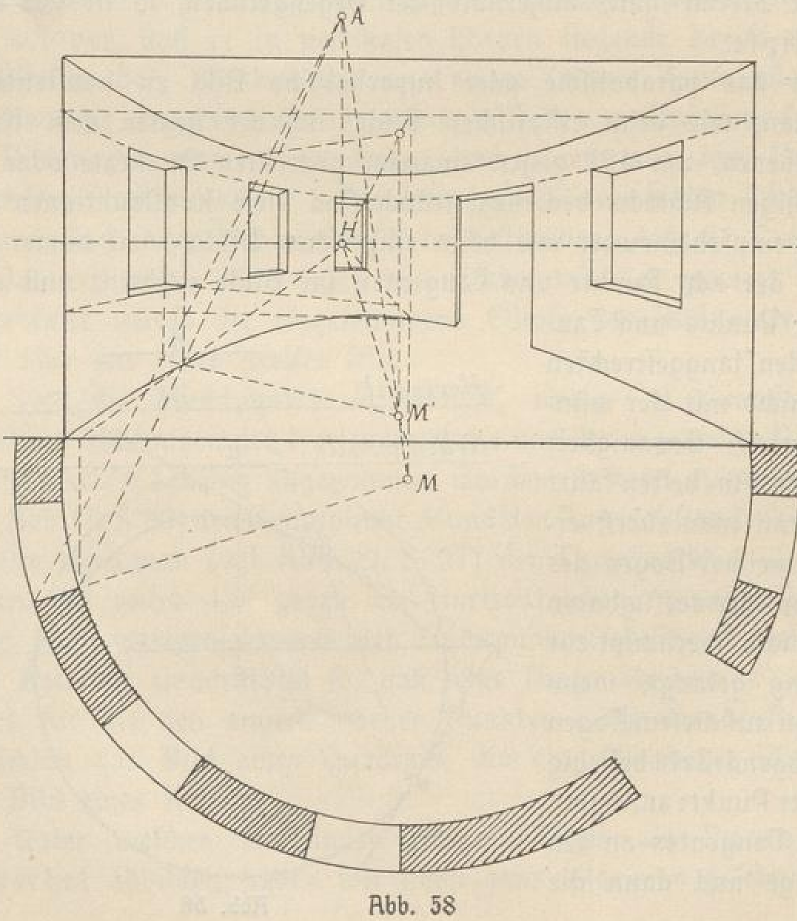

Abb. 58

Punkte nebst ihren Tangenten auf bekannte Weise (s. Abb. 11, S. 18) in das Bild überträgt.

Für den wichtigsten Fall des horizontalen Kreises zeigt die Abb. 56 das parabolische, die Abb. 57 das hyperbolische Bild des Kreises. In beiden Figuren ist das hinter der Bildebene liegende Stück des Kreises und sein Bild nachgezogen, das vor der Bildebene liegende Stück und sein Bild strichpunktiert worden. In Abb. 56 ist der Berührungspunkt G der sich im Unendlichen abbildende Punkt des Kreises; in Abb. 57

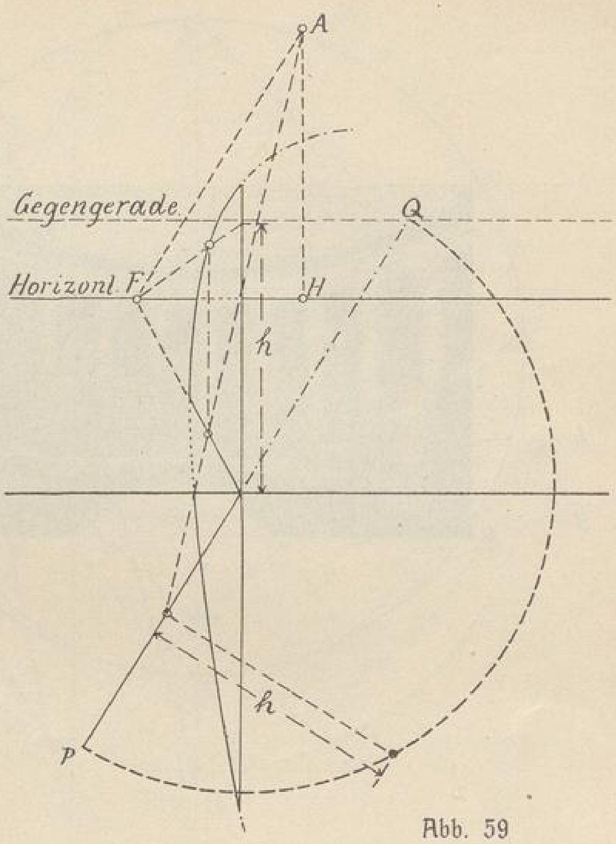

Abb. 59

sind die Schnittpunkte G_1 und G_2 des Kreises und der Gegengeraden die Punkte, deren Bilder in unendliche Ferne fallen. Der ganz strichpunktierte Hyperbelast ist das virtuelle Bild des hinter dem Rücken des Beschauers liegenden Kreisbogens. Die Verbindungslinien von A mit G_1 und G_2 ergeben die Richtungen der Asymptoten.

Als Anwendung zeigt Abb. 58 das Innere eines runden Zimmers; alle Kreise bilden sich als Hyperbeln ab.

Die Abb. 59a zeigt die Anwendung der Konstruktion auf eine photographische Aufnahme; sie stellt das Innere der katholischen St. Ludwigskirche in Darmstadt, eines Moller'schen Zentralbaus, dar. Man erkennt deutlich die hyperbolische Krümmung der Kreisbilder; im Punkte S_1' ist der Krümmungsradius des Bildes der oberen Architravkante ein Minimum.

Da hier die Kreise, deren Bilder deutlich erkennbar sind, über dem Horizonte liegen, ist, um das bisher angewandte Schema beibehalten zu können, das ganze Bild für die Konstruktion auf den Kopf gestellt worden; bb ist die Grundlinie, hh der Horizont, gg die Gegengerade, H der Hauptpunkt, A das umgeklappte Auge, D_1 und D_2

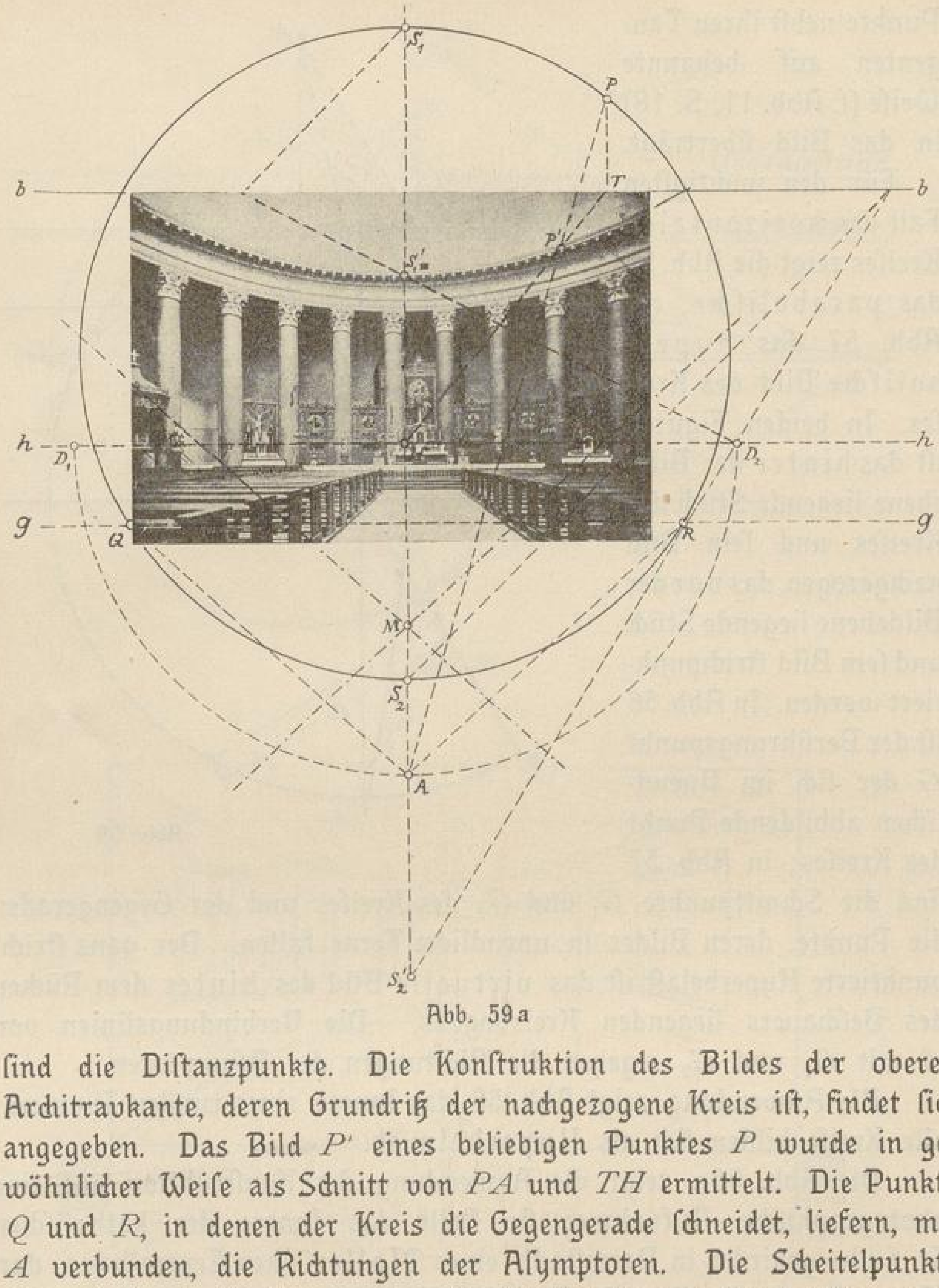

Abb. 59 a

ſind die Diſtanzpunkte. Die Konſtruktion des Bildes der oberen Architravkante, deren Grundriß der nachgezogene Kreis iſt, findet ſich angegeben. Das Bild P' eines beliebigen Punktes P wurde in gewöhnlicher Weiſe als Schnitt von PA und TH ermittelt. Die Punkte Q und R, in denen der Kreis die Gegengerade ſchneidet, liefern, mit A verbunden, die Richtungen der Aſymptoten. Die Scheitelpunkte S_1 und S_2 des Kreiſes ergeben die Scheitel S_1' und S_2' der Hyperbel; die durch ihre Mitte M gezogenen, ſtrichpunktierten Parallelen zu AQ und AR ſind die Aſymptoten ſelbſt.

Die Abb. 59 zeigt das parabolifche, die Abb. 60 das hyperboliſche Bild eines in vertikaler Ebene liegenden Kreiſes, deſſen Grundriß PQ iſt; im erſteren Falle berührt, wie wir ſchon wiſſen, der Kreis die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene, im zweiten Falle durchſchneidet er ſie; die Bilder der Schnittpunkte

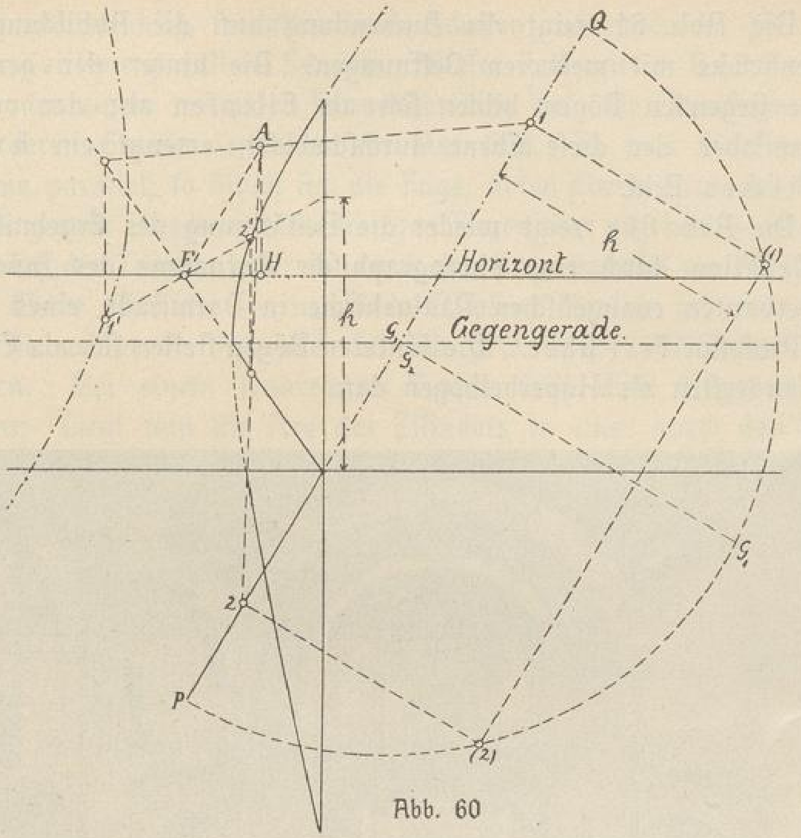

Abb. 60

G_1 und G_2 sind wieder die unendlich fernen Punkte der Hyperbel; $1'$ und $2'$ sind die Bilder der in gleicher Höhe h hinter und vor der Gegengeraden liegenden Punkte 1 und 2.

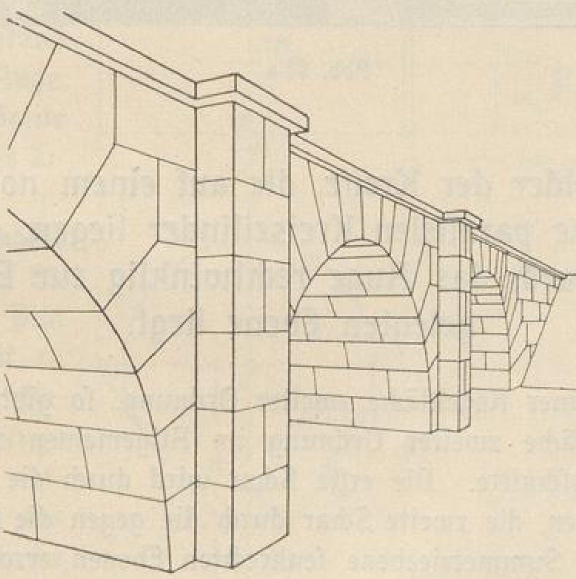

Abb. 61

Die Abb. 61 zeigt die Anwendung auf die Abbildung einer Bogenbrücke mit mehreren Oeffnungen. Die hinter der genannten Ebene liegenden Bögen bilden sich als Ellipsen ab; der vorderste Bogen aber, der diese Ebene durchschneidet, erzeugt ein hyperbolisches Bild.

Die Abb. 61a zeigt wieder die Bestätigung des Ergebnisses der Konstruktion durch eine photographische Aufnahme des Innern der neu erbauten evangelischen Pauluskirche in Darmstadt, eines Werkes von Professor Fr. Pützer. Die hinteren Bögen stellen sich als Ellipsen-, die vordersten als Hyperbelbögen dar.

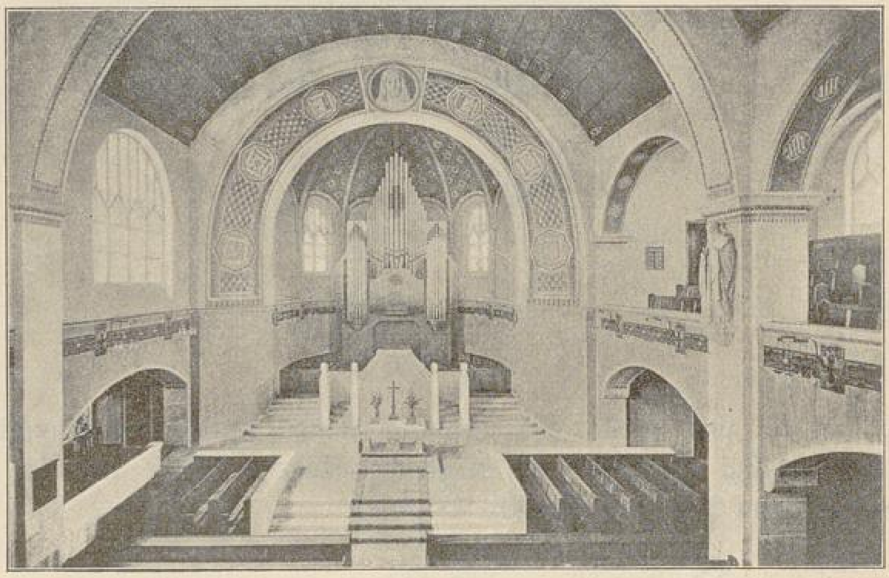

Abb. 61a

§ 18. Bilder der Kreise, die auf einem normalen, zur Bildebene parallelen Kreiszilinder liegen, dessen Axe in einer durch das Auge rechtwinklig zur Bildebene gelegten Ebene liegt.

Wie auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung, so gibt es auch auf einer Zilinderfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen zwei Scharen paralleler Kreisschnitte. Die erste Schar wird durch die zur Leitlinie parallelen Ebenen, die zweite Schar durch die gegen die Leitlinie antiparallelen, zur Symmetrieebene senkrechten Ebenen erzeugt. Ist der Zilinder ein normaler Zilinder, seine Axe also auf der Ebene der