Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 24. Die Darstellung der Umdrehungskörper.

Die Abb. 94 zeigt einen mittleren Ausſchnitt des Kartenbildes für die der Abb. 92 zu Grunde liegende Lage des Auges ($\delta = 30^0$). Die Bilder der Parallelkreiſe und Meridiane ſind für Abſtände von je 15° eingezeichnet worden. Der Parallelkreis von 75° nördlicher Breite bildet ſich als Ellipſe, der von 60° nördl. Breite als Parabel, die andern bilden ſich als Hyperbeln ab. Der letzte dargeſtellte Parallelkreis entſpricht einer ſüdlichen Breite von 45°; der Parallelkreis von 60° ſüdl. Breite bildet ſich im Unendlichen ab und das Bild des Parallelkreiſes von 75° ſüdl. Breite fällt theoretiſch mit dem des Parallelkreiſes von derſelben nördl. Breite zuſammen, iſt alſo praktiſch nicht darſtellbar.

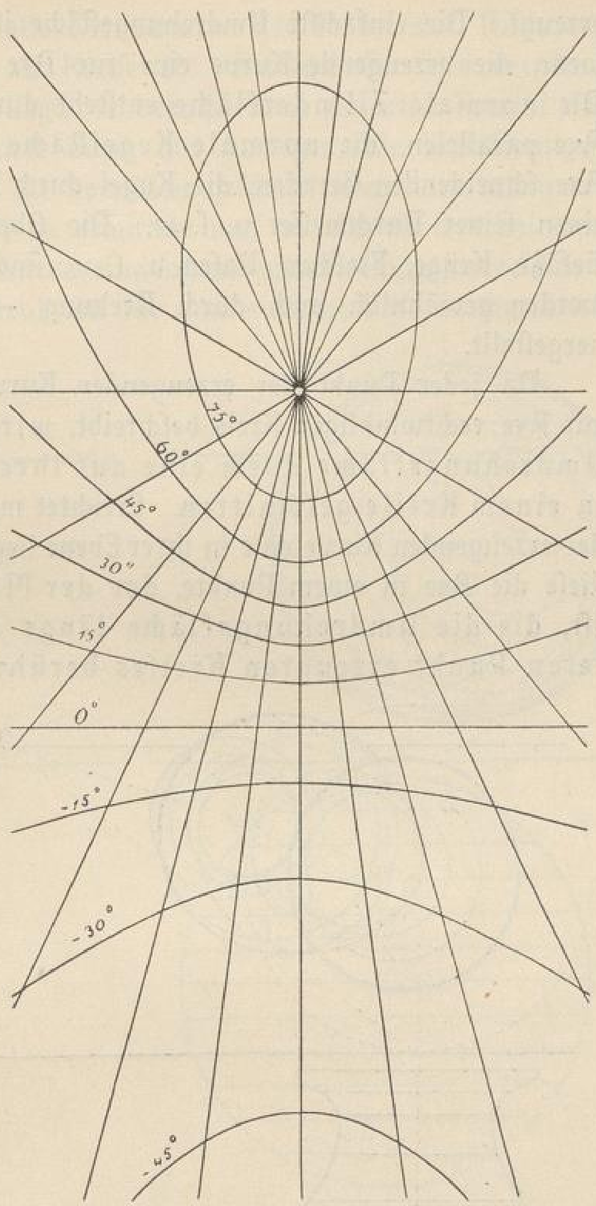

Abb. 94

Die gnomoniſche Projektion wird, da ſie weder die hervorragenden Eigenſchaften der ſtereographiſchen Projektion noch ſonſtige Vorzüge hat, nur ſelten angewandt.

§ 24. Die Darſtellung der Umdrehungskörper.

Ein Umdrehungskörper iſt ein Körper, der von einer Umdrehungsfläche begrenzt wird. Eine Umdrehungsfläche wird durch Drehung einer ebenen Kurve um eine in ihrer Ebene liegende Axe erzeugt. Die einfachste Umdrehungsfläche ist die Ebene; sie entsteht, wenn die erzeugende Kurve eine zur Axe rechtwinklige Gerade ist. Die normale Zilinderfläche entsteht durch Drehung einer mit der Axe parallelen, die normale Kegelfläche durch Drehung einer die Axe schneidenden Geraden, die Kugel durch Drehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser u. s. w. Die Oberflächen fast aller unserer Gefäße, Krüge, Flaschen, Vasen u. s. w. sind Umdrehungsflächen. Sie werden gewöhnlich auch durch Drehung — auf der Drehscheibe — hergestellt.

Da jeder Punkt der erzeugenden Kurve bei der Drehung einen zur Axe rechtwinkligen Kreis beschreibt, wird umgekehrt auch jede Umdrehungsfläche durch eine auf ihrer Axe senkrechte Ebene in einem Kreise geschnitten. Errichtet man ferner in einem Punkte der erzeugenden Kurve eine in ihrer Ebene liegende Normale, so schneidet diese die Axe in einem Punkte, der der Mittelpunkt einer Kugel ist, die die Umdrehungsfläche längs des durch den betrachteten Punkt erzeugten Kreises berührt. Legt man endlich eine Tangente an die erzeugende Kurve, so erzeugt diese bei der Drehung eine normale Kreiskegelfläche, deren Scheitel der Schnittpunkt der Tangente mit der Axe ist und die die Fläche längs des Kreises berührt, den der Berührungspunkt der Tangente bei der Drehung beschreibt. Diese Eigenschaften der Umdrehungsflächen liegen allen ihren zeichnerischen Darstellungen zu Grunde.

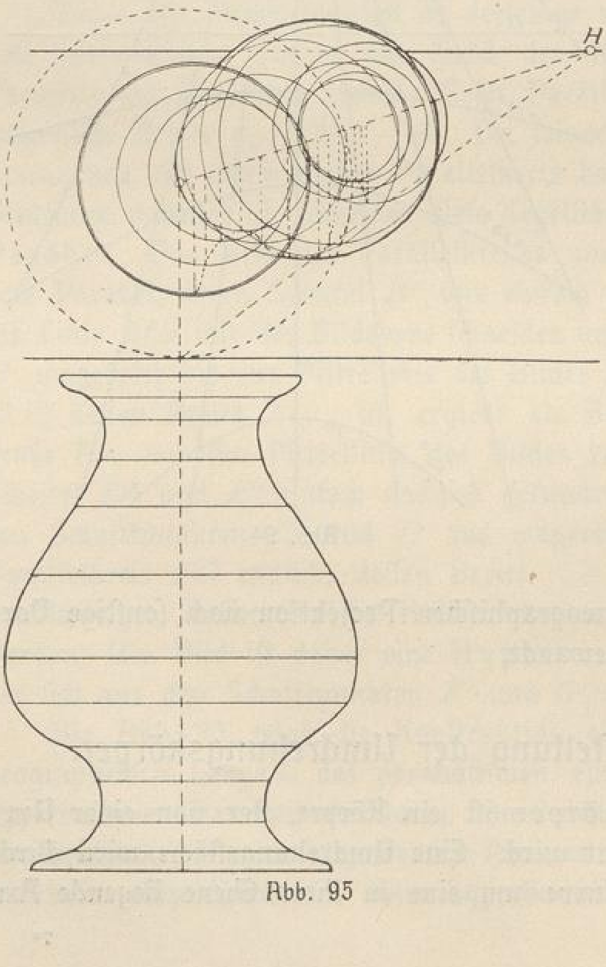

Abb. 95

Die perspektivische Abbildung ist am einfachsten zu konstruieren, wenn die Umdrehungsaxe auf der Bildebene ſenkrecht iſt; dann ſind alle Kreisſchnitte der Fläche der Bildebene parallel, bilden ſich alſo als Kreiſe ab. Befindet ſich alſo der Umdrehungskörper in dieſer Lage, ſo braucht man nur eine Anzahl der Bildebene paralleler Schnitte durch ihn zu legen, die kreisförmigen Bilder der Kreiſe, in denen die Oberfläche geſchnitten wird, in bekannter Weiſe (vgl. Abb. 48, S. 54) zu ermitteln und an alle die ſo erhaltenen Kreiſe eine ſie berührende Kurve, eine ſogenannte Enveloppe, zu zeichnen. In Abb. 95 iſt dieſe Konſtruktion für eine einfache Vaſe durchgeführt.

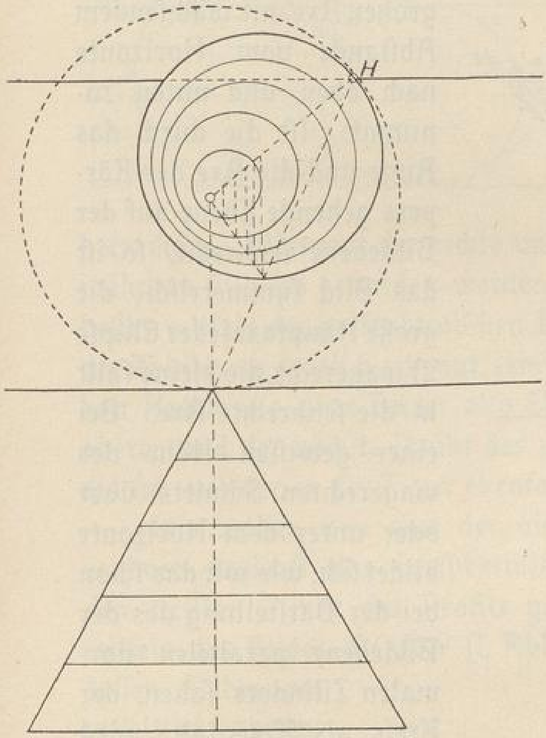

Abb. 96

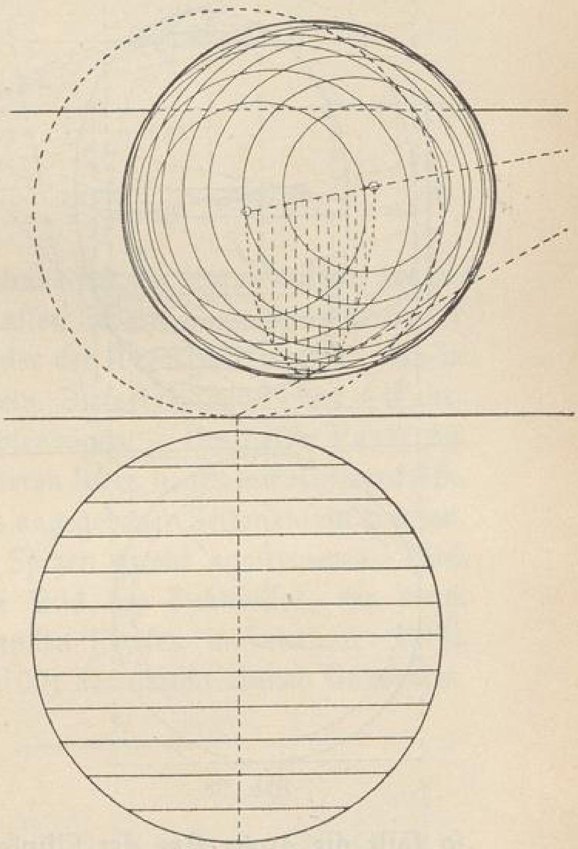
Abb. 97

Schneiden ſich die Kreiſe nicht, ſondern liegt jeder Kreis ganz innerhalb des nächſt größeren, ſo bildet ſich keine Enveloppe; der größte der Kreiſe iſt dann ſelbſt der Umriß des Körpers. Dieſer Fall kann beiſpielsweiſe bei einem Kegel vorkommen (ſ. Abb. 96).

Auch das Bild der Kugel kann man auf dieſe Weiſe, wie Abb. 97 zeigt, finden; jedoch iſt die im § 20 gegebene Konſtruktion mittels der Hauptaxen der Ellipſe vorzuziehen.

In jedem andern Falle bilden ſich — vorausgeſetzt, daß ſich, wie in Wirklichkeit meiſtens, der Körper vollſtändig vor dem Beſchauer befindet — alle Schnittkreise als Ellipsen ab, und der gesuchte Umriß des perspektivischen Bildes ist die einhüllende Kurve aller dieser Ellipsen. Ueber die Herstellung der Ellipsen selbst ist an dieser Stelle nichts Neues mehr zu sagen.

Der am häufigsten vorkommende Fall ist der, daß die Axe des Körpers senkrecht steht. Der in Augenhöhe liegende Schnittkreis fällt dann mit dem Horizonte zusammen; alle anderen Kreise stellen sich als Ellipsen dar, für die das Verhältnis der kleinen zur großen Axe mit wachsendem Abstande vom Horizonte nach oben und unten zunimmt. Ist die durch das Auge und die Axe des Körpers gehende Ebene auf der Bildebene senkrecht, so ist das Bild symmetrisch; die große Hauptaxe jeder Ellipse ist wagerecht, die kleine fällt in die senkrechte Axe. Bei einer gewissen Höhe des wagerechten Schnitts über oder unter dem Horizonte bildet sich, wie wir das schon bei der Darstellung des der Bildebene parallelen normalen Zilinders sahen, der Kreis als Kreis ab; wird diese Grenze überschritten, so fällt die große Axe der Ellipse in die Mittellinie des Bildes, während die kleine sich wagerecht legt.

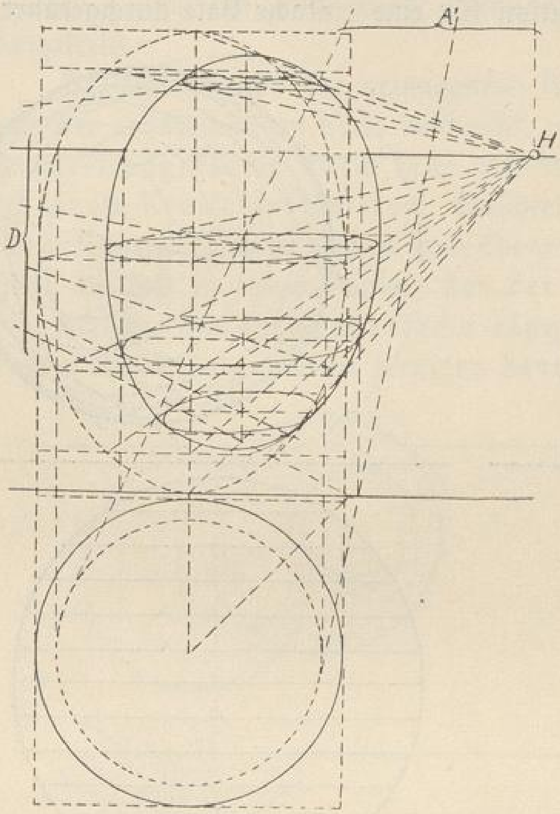

Abb. 98

Abb. 98 zeigt die Darstellung eines Umdrehungsellipsoids mit senkrechter Axe. Das Bild ist eine Ellipse. Die Breite des Bildes im Horizonte wurde mittels des uns schon bekannten Punktes A' (s. § 20) gefunden.

Von ganz besonderem Interesse und hoher Wichtigkeit ist die Darstellung einer Umdrehungsfläche, die durch eine gegen die Axe konkave Kurve erzeugt wird, einer sogenannten **Hohlkehle**. Hohlkehlen kommen an Gefäßen, Säulenbasen u. s. w. sehr häufig vor. Wir wollen uns die Axe vertikal und eine sehr große Zahl von Ellipsen, die die Bilder der wagerechten Schnittkreise sind, konstruiert denken. Die

Enveloppe dieser Ellipsen hat vier Spitzen, die wir in der Abb. 99 deutlich erkennen. Die hier dargestellte Hohlkehle ist durch Umdrehung eines Halbkreises entstanden und als die innere Hälfte einer Ringfläche zu

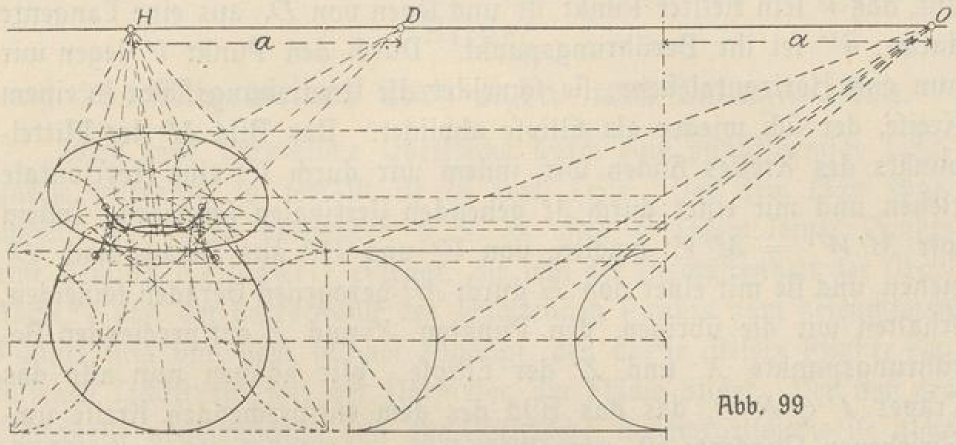

Abb. 99

betrachten. Während der rechte und linke Ast der Kurve mittels der erwähnten Ellipsen gefunden werden, lassen sich der obere und untere Ast besser mittels der perspektivischen Bilder der Axenschnitte, die man in der Abbildung deutlich erkennt, ermitteln. Diese Axenschnitte sind in Wahrheit Halbkreise, ihre Bilder also Ellipsenbögen. — Der tiefste Punkt des oberen und der höchste Punkt des unteren Astes liegen auf Horizontalen, die sich aus der in der Figur ebenfalls angegebenen Seitenansicht ergeben.

Wir wollen nun eine der vier Spitzen direkt konstruieren. Man zeichnet zunächst das perspektivische Bild des Fußkreises, des durch den tiefsten Punkt des Profils gehenden Kreises, in bekannter Weise mittels des Bildes $PQRS$ (s. Abb. 100) des umschriebenen Quadrates, dessen Seiten parallel und senkrecht zur Bildebene sind. PS und QR gehen nach dem Hauptpunkte H, PR nach dem Distanzpunkte D_1; der Schnittpunkt M der Diagonalen ist das Bild des Mittelpunkts; V, W, X, Z sind die Punkte, in denen die Ellipse

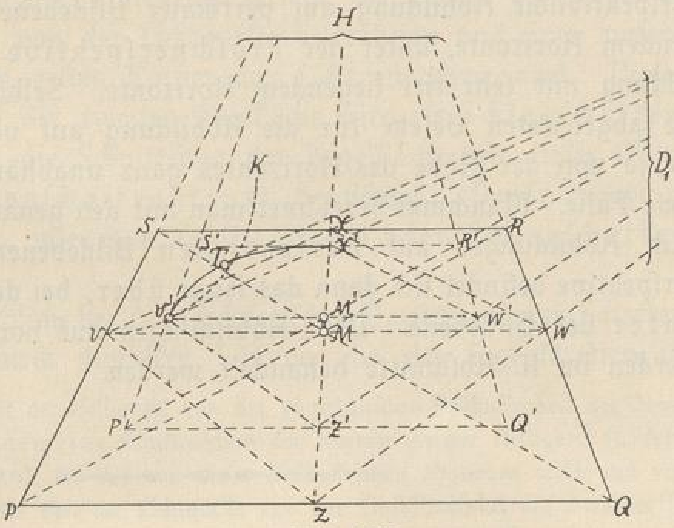

Abb. 100

die Seiten des Trapezes berührt. XZ geht nach H, VX und ZW gehen nach D_1. In dem durch VW gehenden Mittelschnitt zeichnen wir nun das wahre Profil VK in der der Länge von VW entsprechenden Größe so auf, daß V sein tiefster Punkt ist und legen von D_1 aus eine Tangente daran; V' sei ihr Berührungspunkt. Durch den Punkt V' legen wir nun eine Horizontalebene; sie schneidet die Umdrehungsfläche in einem Kreise, der sich wieder als Ellipse abbildet. Das Bild M' des Mittelpunkts des Kreises finden wir, indem wir durch V' eine Horizontale ziehen und mit einer durch M gehenden Vertikalen schneiden. Indem wir $M'W' = M'V'$ machen, von V' und W' aus Gerade nach D_1 ziehen und sie mit einer von H durch M' gezogenen Geraden schneiden, erhalten wir die übrigen, den Punkten X und Z entsprechenden Berührungspunkte X' und Z' der Ellipse. Wir können nun also das Trapez $P'Q'R'S'$, das das Bild des dem entsprechenden Kreise umschriebenen Quadrats ist, vervollständigen und ihm in bekannter Weise die Ellipse einzeichnen. Legen wir endlich von D_1 aus eine Tangente an die Ellipse, die sie in T berührt, so ist dieser Punkt die gesuchte Spitze der einhüllenden Kurve, also der untere **Endpunkt** des sichtbaren Seitenumrisses. Für die linke untere und die rechte obere Spitze kommt der rechtseitige Distanzpunkt D_1, für die linke obere und die rechte untere Spitze der linkseitige Distanzpunkt D_2 in Betracht.

§ 25. Die Vogel- und die Froschperspektive.

In der Regel versteht man unter der **Vogelperspektive** eine perspektivische Abbildung auf vertikaler Bildebene mit sehr hoch liegendem Horizonte, unter der **Froschperspektive** eine ebensolche Abbildung mit sehr tief liegendem Horizonte. Selbstverständlich gelten die abgeleiteten Gesetze für die Abbildung auf vertikaler Bildebene, die ja von der Höhe des Horizontes ganz unabhängig sind, auch für diese Fälle. Manchmal bezeichnet man mit den genannten Benennungen auch Abbildungen auf **horizontalen** Bildebenen; bei der Vogelperspektive befindet sich dann das Auge **über**, bei der Froschperspektive **unter** der Bildebene. Diese Abbildungen auf horizontaler Bildebene werden im II. Abschnitte behandelt werden.