



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Lehrbuch der Perspektive**

**Meisel, Ferdinand**

**Leipzig, 1908**

I. Schatten bei unendlich ferner Lichtquelle.

---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-82190](https://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:hbz:466:1-82190)

Strahlen nachzuweisen. Anders aber liegt die Sache, wenn wir umgekehrt die Strahlen betrachten, die von verschiedenen Punkten der Sonnenoberfläche aus durch einen Punkt eines irdischen Körpers gehen; sie sind nicht parallel, sondern bilden Winkel mit einander, die bis zu der sehr wahrnehmbaren Größe eines halben Grades wachsen können. Ziehen wir nämlich von zwei gegenüberliegenden Punkten des Sonnenrandes aus Strahlen durch einen irdischen Punkt, so bilden diese einen Winkel miteinander, den man als scheinbare Größe der Sonne bezeichnet, und der im Jahresmittel etwa gleich einem halben Grade [31] ist.

Diese scheinbare Größe der Sonne ist die Ursache der verschwommenen Ränder der durch die Sonne erzeugten Schlagschatten, der sogenannten Halbschatten; wie man aus der Abb. 101 sofort erkennt, nimmt die Breite  $AB$  dieses verschwommenen Randes mit der Entfernung des Schattenwerfenden Körpers von der Schattenempfangenden Oberfläche zu. Dieser Rand würde verschwinden, wenn die von verschiedenen Punkten der Sonne aus durch einen irdischen Punkt gehenden Strahlen parallel wären, wenn also die scheinbare Größe der Sonne — wie die eines Fixsterns — gleich Null wäre. Wäre ein Fixstern hell genug, um deutliche Schlagschatten zu erzeugen, so würden diese vollständig scharf begrenzt sein.

Wir wollen uns nun zunächst mit den durch die Sonne erzeugten Schatten befassen und dabei die Sonnenstrahlen als parallel annehmen, also den verschwommenen Rand vorläufig außer Acht lassen.

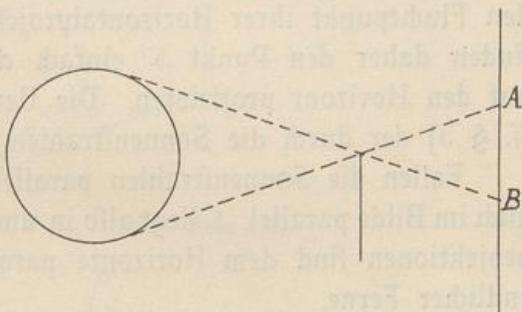


Abb. 101

## I. Schatten bei unendlich ferner Lichtquelle.

### § 27. Die Annahme des Sonnenpunktes.

Die Sonnenstrahlen besitzen, wie alle Parallelen, einen Fluchtpunkt, den wir einfach dadurch finden, das wir durch das Auge einen Sonnenstrahl legen und ihn mit der Bildebene schneiden. Diesen Fluchtpunkt der Sonnenstrahlen wollen wir kurz „Sonnenpunkt“ nennen und mit  $S$  bezeichnen; er ist offenbar nichts anderes, als das perspektivische Bild des Sonnenmittelpunktes. Wenn die Strahlenrichtung nicht

durch irgend eine Annahme festgelegt ist, können wir diesen Punkt ganz beliebig annehmen. Denken wir uns die Sonne im Rücken des Beschauers, so liegt der Punkt  $S$ , wie aus seiner Konstruktion unmittelbar folgt, unter dem Horizonte; steht aber die Sonne vor dem Beschauer, so daß sie selbst ein wirkliches perspektivisches Bild ergiebt, so liegt  $S$  über dem Horizonte.

Die Horizontalprojektionen der parallelen Sonnenstrahlen sind natürlich ebenfalls parallel; sie besitzen also ebenfalls einen Fluchtpunkt, der mit  $S'$  bezeichnet werden mag. Wie wir schon im § 9 sahen, liegt der Fluchtpunkt einer beliebig geneigten Geraden in der durch den Fluchtpunkt ihrer Horizontalprojektion gehenden Vertikalen; wir finden daher den Punkt  $S'$  einfach dadurch, daß wir den Punkt  $S$  auf den Horizont projizieren. Die Vertikale  $SS'$  ist die Fluchtgerade (§ 3) der durch die Sonnenstrahlen gehenden Vertikalebenen.

Fallen die Sonnenstrahlen parallel der Bildebene ein, so sind sie auch im Bilde parallel,  $S$  liegt also in unendlicher Ferne; ihre Horizontalprojektionen sind dem Horizonte parallel,  $S'$  liegt ebenfalls in unendlicher Ferne.

Sind die durch die Sonnenstrahlen gehenden Vertikalebenen rechtwinklig zur Bildebene, so fällt  $S'$  mit dem Hauptpunkte  $H$  zusammen und  $S$  liegt in der durch  $H$  gehenden Vertikalen über oder unter dem Horizonte.

Steht die Sonne gerade am Horizonte, so fällt  $S$  mit  $S'$  zusammen; die Schatten auf der Horizontalebene stehender Körper auf diese Ebene werden jetzt unendlich lang.

Auch die Fluchtpunkte der Projektionen der Sonnenstrahlen auf nicht horizontale Ebenen können von Wichtigkeit sein. Wie der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen der Strahlen auf der Fluchtgeraden der Horizontalebenen, dem Horizonte, liegt, so liegt der Fluchtpunkt der Projektionen der Strahlen auf irgend eine andere Ebene auf der Fluchtgeraden dieser Ebene. So wird beispielsweise der Fluchtpunkt der Projektionen der Strahlen auf eine zur Bildebene rechtwinklige Vertikalebene gefunden, indem man durch den Hauptpunkt eine vertikale Gerade zieht und den Punkt  $S$  auf sie projiziert.

Die Projektionen der Sonnenstrahlen auf die Bildebene selbst oder eine mit ihr parallele Ebene sind auch im Bilde parallel; ihr Fluchtpunkt liegt also in unendlicher Ferne und zwar in der Richtung, die sich durch Verbindung der Punkte  $S$  und  $H$  ergiebt. Diese Verbindungsgerade  $HS$  ist nämlich offenbar die Fluchtgerade der Ebenen, die auf der Bildebene rechtwinklig stehen und durch die Sonne gehen. Mit dieser Richtung sind daher die Projektionen der Strahlen auch im Bilde parallel.

### § 28. Der Schatten eines Punkts auf die Grundebene.

$P$  sei ein beliebiger Punkt des Raumes,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene. Ziehen wir die gerade Linie  $PS$ , so stellt diese den durch  $P$  gehenden Sonnenstrahl dar. Denken wir uns durch diesen Strahl eine vertikale Ebene gelegt, so schneidet sie die Grundebene in  $P'S'$ ; der Schnittpunkt  $P''$  von  $PS$  und  $P'S'$  ist also der Schnittpunkt des Strahls mit der Grundebene, d. h. der Schatten des Punkts  $P$  auf diese Ebene. — Denken wir uns etwa  $PP'$  als einen dünnen, vertikal stehenden Stab, so ist  $P''P'$  sein Schlagschatten auf die Grundebene. Die Abbildungen 102 und 103 zeigen diese Konstruktion für einen über und für einen unter dem Horizonte liegenden Sonnenpunkt. — Liegt  $S$  über dem Horizonte und ist im Bilde  $SS' = PP'$ , so ist  $SP \parallel S'P'$ ,  $P''$  fällt also in unendliche Ferne (s. Abb. 104). Tatsächlich aber wirft ein noch so langer vertikaler Stab, wenn die Sonne auch noch so tief steht, stets einen endlichen Schatten auf die Grundebene. Wie erklärt sich dieser scheinbare Widerspruch? In diesem Falle erstreckt sich der Schatten des vertikalen Stabes bis an die Gegen-

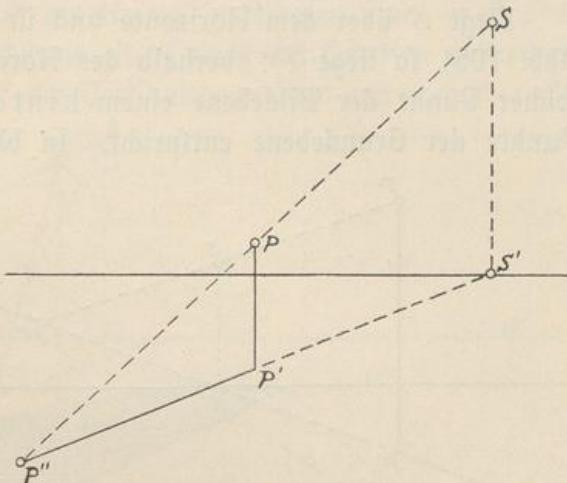


Abb. 102

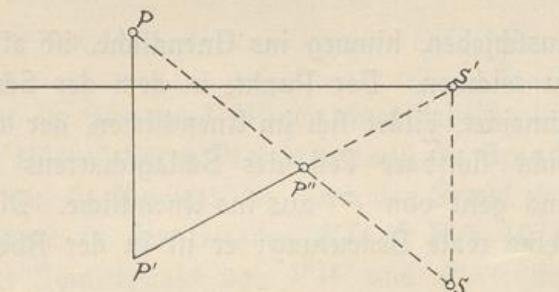


Abb. 103

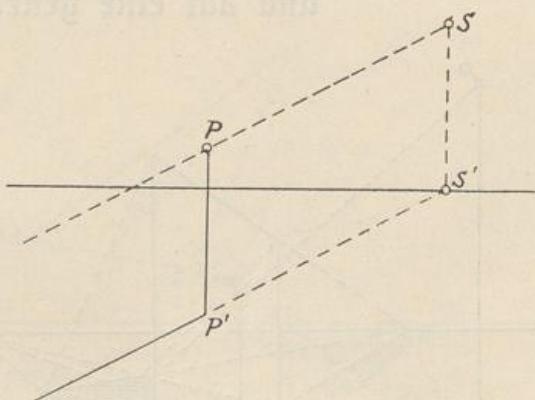


Abb. 104

gerade, die durch die Projektion des Auges auf die Grundebene gehende Parallele zur Grundlinie. Wir wissen bereits, daß sich jeder Punkt der Gegengeraden in unendlicher Ferne abbildet.

Liegt  $S$  über dem Horizonte und ist im Bilde  $SS' < PP'$  (siehe Abb. 105), so liegt  $P''$  oberhalb des Horizonts. Wir wissen, daß ein solcher Punkt der Bildebene einem hinter dem Betrachter liegenden Punkte der Grundebene entspricht. In Wahrheit liegt jetzt also der

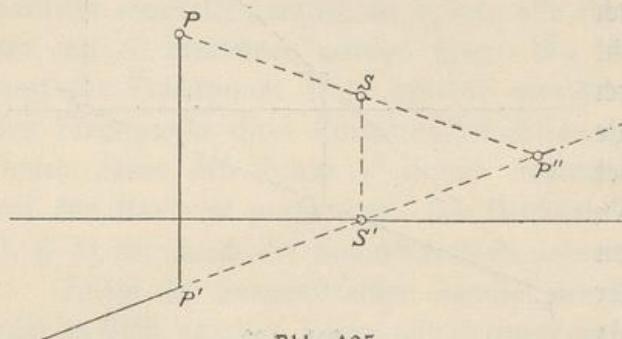


Abb. 105

Endpunkt des Schlagschattens des Stabes im Rücken des Betrachters,  $P''$  ist sein virtuelles Bild; das Bild des Schlagschattens geht über den unteren Rand des Bildes, wenn wir ihn auch noch so weit hinausschieben, hinweg ins Unendliche, ist also stets bis an diesen Rand zu zeichnen.

Der Punkt, in dem der Schlagschatten die Gegengerade schneidet, bildet sich im Unendlichen, der hinter dem Betrachter liegende nicht sichtbare Teil des Schlagschattens oberhalb des Horizonts ab und geht von  $P''$  aus ins Unendliche. Dieser Teil hat natürlicherweise keine reale Bedeutung; er ist in der Abbildung strichpunktiert.

### § 29. Der Schatten eines Punkts auf eine vertikale und auf eine geneigte Ebene.

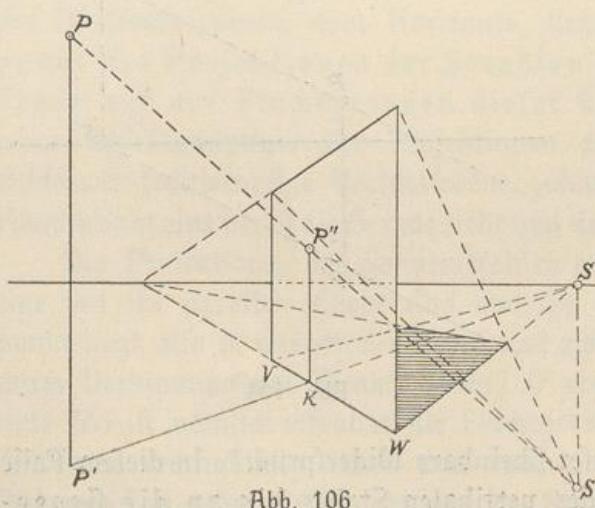


Abb. 106

Wieder sei (s. Abb. 106)  $P$  ein Punkt des Raumes,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene,  $VW$  die Schnittlinie der Grundebene mit einer beliebig begrenzten, vertikalen Ebene.  $P'S'$  ist wieder die Horizontalprojektion des Lichtstrahls  $PS$ ; sie schneidet  $VW$  im Punkte  $K$ . Die durch den Strahl gehende

Vertikalebene schneidet die durch  $VW$  gehende Vertikalebene in einer von  $K$  ausgehenden Vertikalen; der Schnittpunkt  $P''$  dieser Vertikalen mit dem Strahle  $PS$  ist der gesuchte Schatten von  $P$  auf die Vertikalebene. Denken wir uns  $PP'$  als dünnen, vertikalen Stab, so ist  $P'K$  sein Schatten auf die Grundebene; in  $K$  wird der Schatten gebrochen, geht als vertikale Linie auf die Vertikalebene über und endigt in  $P''$ .

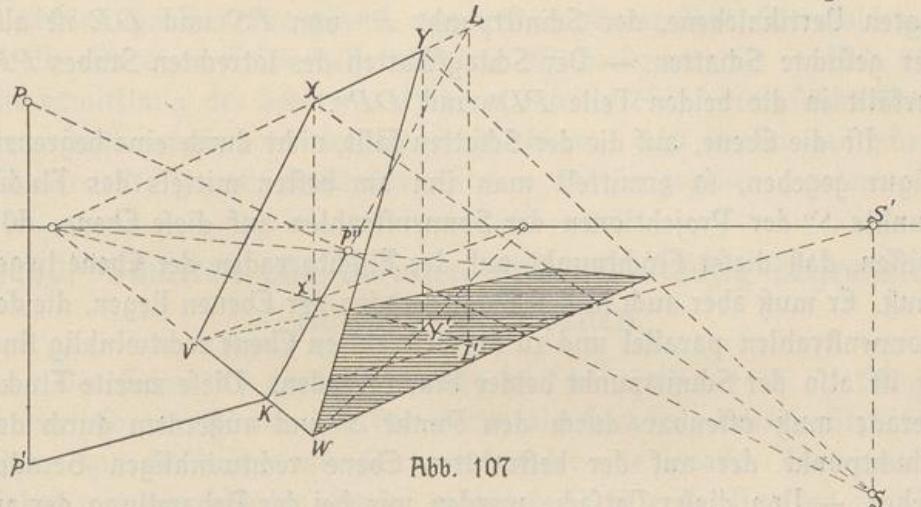


Abb. 107

Wird die Grundebene in der Geraden  $VW$  von einer beliebig begrenzten, geneigten Ebene  $VWXY$ , deren Projektion auf die Grundebene  $VWX'Y'$  ist, geschnitten, so schneidet die durch den Strahl  $PS$  gelegte Vertikalebene die Ebene in der Geraden  $KL$  (s. Abb. 107);  $K$  ist, wie in Abb. 106 der Schnittpunkt von  $VW$  und  $P'S'$ ; der Punkt  $L$  wird einfach dadurch erhalten, daß man durch den Punkt  $L'$ , in dem  $X'Y'$  und  $P'S'$  sich schneiden, eine Vertikale zieht und mit  $XY$  schneidet. Der

Schnittpunkt  $P''$  von  $PS$  und  $KL$  ist der Schatten des Punktes  $P$ . — Denken wir uns wieder  $PP'$  als materiellen Stab, so ist  $P'KP''$  sein Schatten.

Ist die Schnittlinie der geneigten Ebene und der Grundebene nicht in der Zeichnung vorhanden, so braucht man sie nicht erst auf-

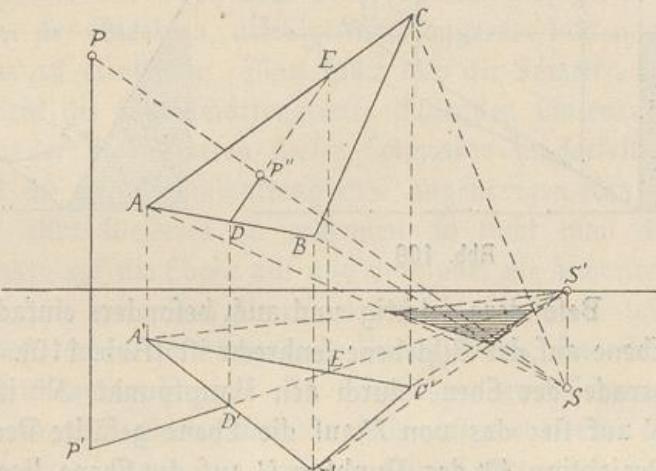


Abb. 108

zusuchen, sondern kann auch direkt den Schatten des Punktes  $P$  auf eine beliebig begrenzte Ebene  $ABC$  (s. Abb. 108), deren Projektion auf die Grundebene  $A'B'C'$  ist, ermitteln. Die Gerade  $P'S'$  schneidet  $A'B'C'$  in  $D'$  und  $E'$ ; zieht man durch diese Punkte Vertikale, die den Umriss  $ABC$  in  $D$  und  $E$  schneiden, so ist offenbar  $DE$  die Schnittlinie der Ebene  $ABC$  mit der durch den Strahl gelegten Vertikalebene, der Schnittpunkt  $P''$  von  $PS$  und  $DE$  ist also der gesuchte Schatten. — Der Schlagschatten des lotrechten Stabes  $PP'$  zerfällt in die beiden Teile  $PD'$  und  $DP''$ .

Ist die Ebene, auf die der Schatten fällt, nicht durch eine begrenzte Figur gegeben, so ermittelt man ihn am besten mittels des Flucht-  
punkts  $S''$  der Projektionen der Sonnenstrahlen auf diese Ebene. Wir wissen, daß dieser Fluchtpunkt auf der Fluchtgeraden der Ebene liegen muß. Er muß aber auch in der Fluchtgeraden der Ebenen liegen, die den Sonnenstrahlen parallel und zu der bestrahlten Ebene rechtwinklig sind, er ist also der Schnittpunkt beider Fluchtgeraden. Diese zweite Fluchtgerade muß offenbar durch den Punkt  $S$  und außerdem durch den Fluchtpunkt der auf der bestrahlten Ebene rechtwinkligen Geraden gehen. — Von dieser Tatsache werden wir bei der Behandlung der am normalen Zylinder auftretenden Schatten Gebrauch machen.

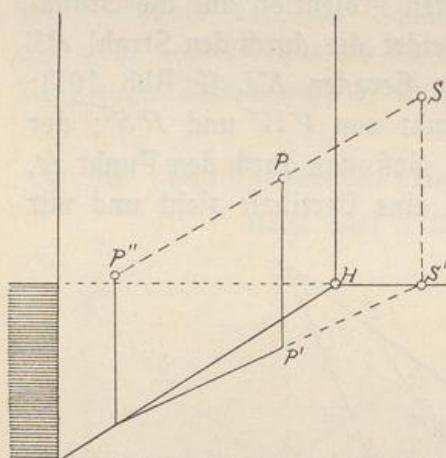


Abb. 109

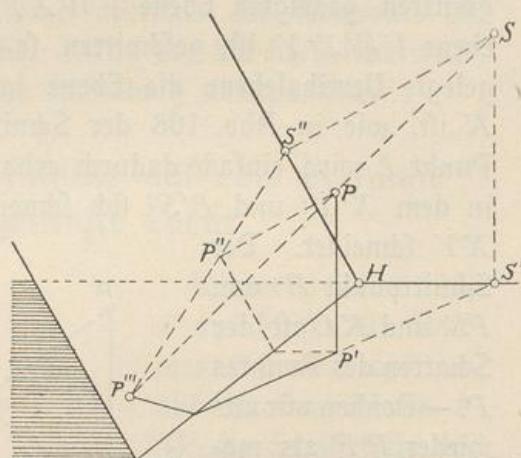


Abb. 110

Besonders wichtig und auch besonders einfach ist der Fall, daß die Ebene auf der Bildebene senkrecht ist (Abb. 110). Jetzt geht die Fluchtgerade der Ebene durch den Hauptpunkt,  $S''$  ist die Projektion von  $S$  auf sie; das von  $P$  auf die Ebene gefällte Perpendikel, in dem die Projektion  $P''$  des Punktes  $P$  auf die Ebene liegen muß, ist ebenfalls senkrecht auf der Fluchtgeraden. Dieser Punkt  $P''$  wird gefunden,

indem man vom Grundriß  $P'$  des Punktes  $P$  eine Parallele zum Horizonte und von deren Schnittpunkt mit der Horizontalspur der Ebene eine Parallele zur Vertikalspur zieht. Die Parallele schneidet die von  $P$  aus senkrecht zur Vertikalspur gezogene Linie in  $P''$ . Der gesuchte Schatten  $P'''$  ist nun einfach der Schnittpunkt von  $SP$  und  $S''P''$ .

Daß diese Konstruktion ohne Weiteres auch auf eine zur Bildebene rechtwinklige Vertikalebene anwendbar ist, versteht sich wohl von selbst. Da aber dieser Fall besonders oft vorkommt, ist in Abb. 109 die Ermittlung des Schattens  $P''$  eines Punkts  $P$  auf eine solche Ebene dargestellt worden. — In den Abb. 109 und 110 ist der gebrochene Schatten des ganzen senkrechten Stabes  $PP'$  angegeben worden.

### § 30. Schatten von Geraden und ebenflächig begrenzten Körpern auf Ebenen.

Der Schatten einer Geraden auf eine Ebene ist als Schnitt zweier Ebenen — nämlich der durch die Gerade gehenden Strahlenebene und der beschiatteten Ebene — wieder eine Gerade. Man braucht daher nur die Schatten zweier beliebiger Punkte der Geraden auf die Ebene aufzusuchen und durch die beiden Schattenpunkte eine Gerade zu ziehen. Der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene ist stets sein eigener Schatten; ist dieser Punkt also im Bilde vorhanden oder leicht zu ermitteln, so braucht man nur noch den Schatten eines andern Punkts der Geraden aufzusuchen und durch ihn und den Schnittpunkt eine Gerade zu legen.

Handelt es sich um den Schatten eines ebenflächig begrenzten Körpers, so hat man, wie schon aus dem im § 26 Gesagten hervorgeht, nur die Schatten der einzelnen, die Eigenschattengrenze bildenden Kanten auf die Ebene zu ermitteln. Man sucht also die Schatten der Eckenpunkte auf, die dem die Eigenschattengrenze bildenden Linienzuge angehören und verbindet die Schatten dieser Eckenpunkte in derselben Reihenfolge. — Sind die der Eigenschattengrenze angehörigen Kanten und Eckenpunkte nicht ohne Weiteres zu erkennen, so sucht man die Schatten aller Eckenpunkte auf die Ebene auf und verbindet die äußersten dieser Punkte. So erhält man den Umriss des Schlagschattens, und die Kanten des Körpers, deren Schatten diesen Umriss bilden, sind eben die die Schattengrenze bildenden Kanten. Die Eckenpunkte, deren Schatten in das Innere des gefundenen Schlagschattens fallen, sind entweder im Lichte oder im Schatten, gehören also dem ganz im Lichte oder dem ganz im Schatten befindlichen Teile der körperlichen Oberfläche an.

Die Ermittlung des Schlagschattenumrisses durch Verbindung der äußersten Schattenpunkte setzt allerdings voraus, daß der Körper keine einspringenden Flächenwinkel besitzt; ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so muß man den Körper in mehrere Teile, die keine einspringenden Flächenwinkel enthalten, zerlegen und den Schatten jedes dieser Teile für sich ermitteln.

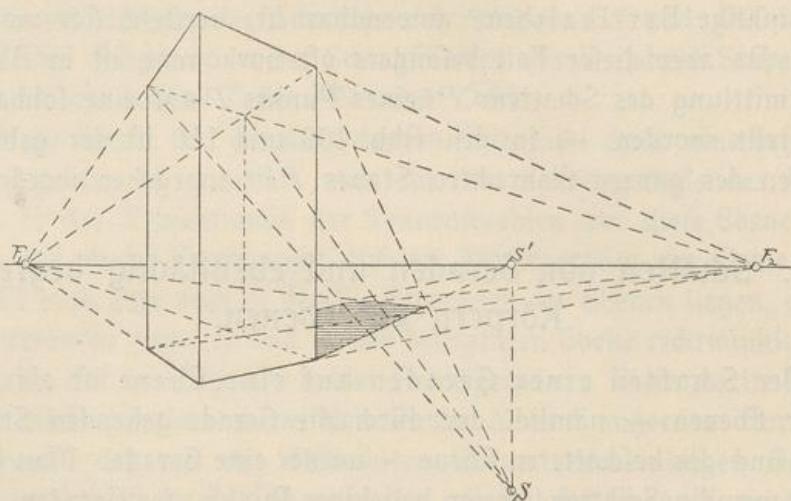


Abb. 111

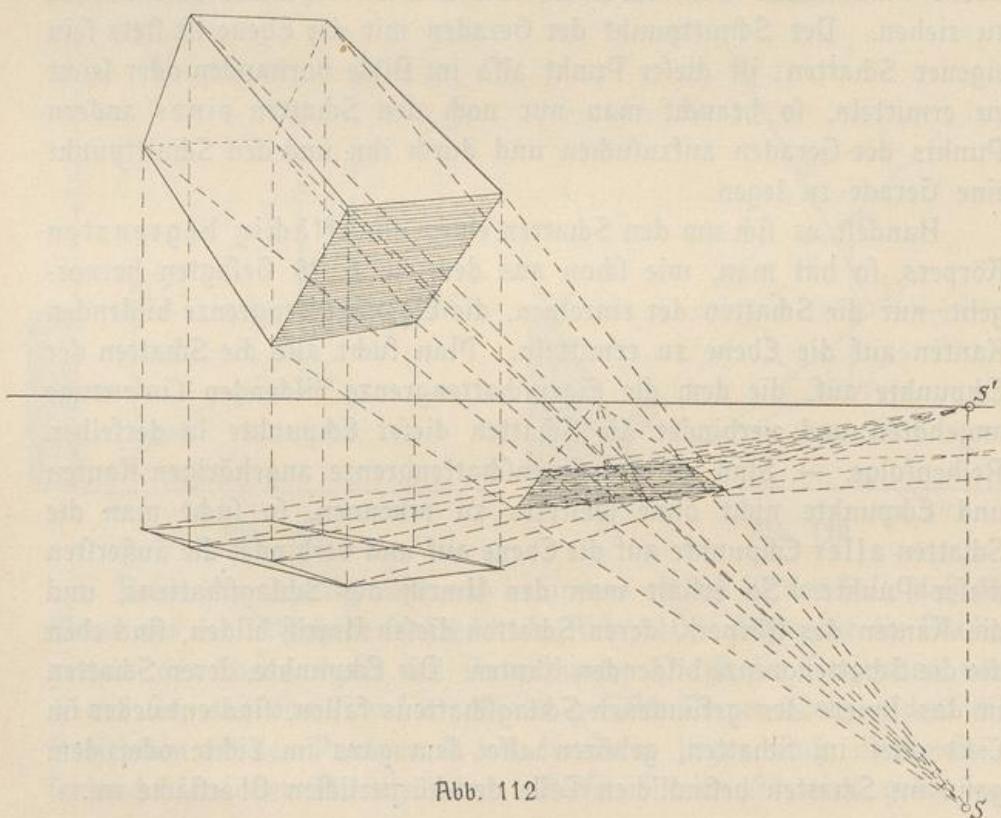


Abb. 112

Die Abb. 111 zeigt den Schlagschatten, den ein auf der Grundebene stehendes, rechtwinkliges Parallelepiped auf diese Ebene wirft. Da der Körper auf der Grundebene steht, kommen nur zwei vertikale Kanten und zwei Seiten der oberen Grundfläche als schattenwerfend in Betracht. Die Schatten der vertikalen Kanten gehen nach  $S'$ ; die Schatten der Seiten der oberen Grundfläche sind einzeln diesen Kanten parallel, und jeder Schatten geht daher nach dem Fluchtpunkte der betreffenden Kante.

Die Abb. 112 zeigt den Schlagschatten, den ein in ganz beliebiger Lage über der Grundebene schwebendes Parallelepiped auf diese Ebene wirft. Ein solches Prisma besitzt drei Gruppen von je vier gleich langen und parallelen Kanten; die Eigenschattengrenze besteht aus je zwei gegenüberliegenden Kanten aus jeder dieser Gruppen. Da die Schatten, die gleich lange, parallele Strecken auf eine Ebene bei paralleler Bestrahlung werfen, gleich lang und parallel sind, ist der Umriss des Schlagschattens in jeder Lage des Körpers ein Sechseck, dessen gegenüberliegende Kanten paarweise gleich und parallel sind. Je zwei gegenüberliegende Seiten des Schlagschattens gehen daher im Bilden nach einem im Horizonte liegenden Fluchtpunkte.

In der Abb. 113 ist der Schatten dargestellt, den eine auf der Grundebene stehende regelmäßige, in

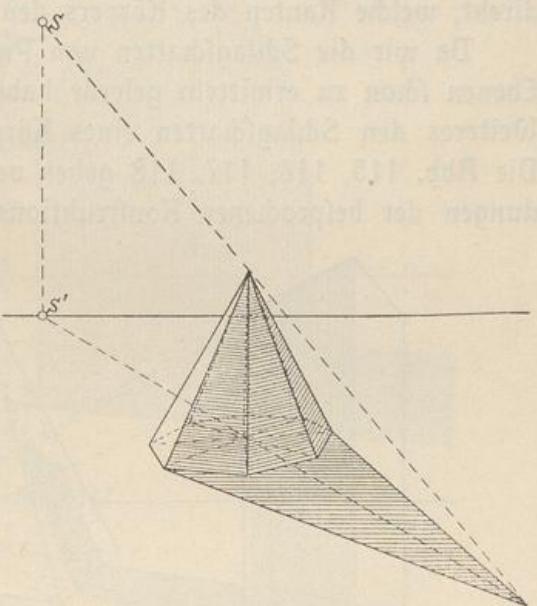


Abb. 113

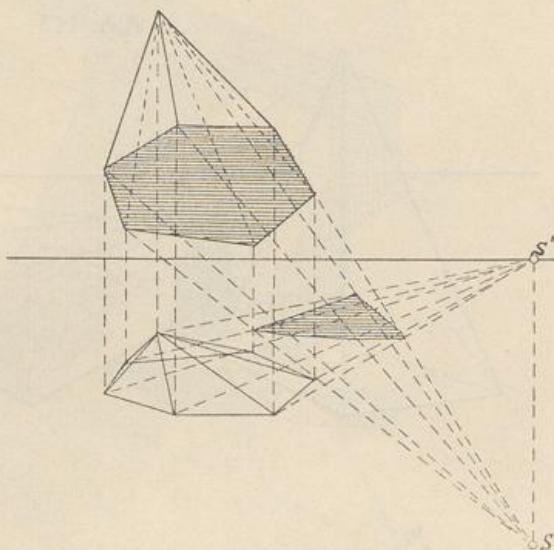


Abb. 114

Abb. 114 der Schatten, den eine in ganz allgemeiner Lage befindliche, beliebig gestaltete Pyramide auf die Grundebene wirft. Man findet diesen Schatten, indem man den Schatten der Grundfläche und den der Spitze aufsucht und den Schatten der Spitze mit den beiden Eckpunkten des Schattens der Grundfläche verbindet, die von ihm aus gesehen die äußersten sind. Da die den Umriß des Schlagschattens bildenden Linien stets die Schlagschatten der die Eigenschattengrenze bildenden Kanten sind, erkennt man aus dem Schlagschatten auch direkt, welche Kanten des Körpers den Eigenschatten begrenzen.

Da wir die Schlagschatten von Punkten auf verschieden liegende Ebenen schon zu ermitteln gelernt haben, können wir nun auch ohne Weiteres den Schlagschatten eines Körpers auf einen andern finden. Die Abb. 115, 116, 117, 118 geben verschiedene Beispiele als Anwendungen der besprochenen Konstruktionsmethoden. Bei der Abb. 117

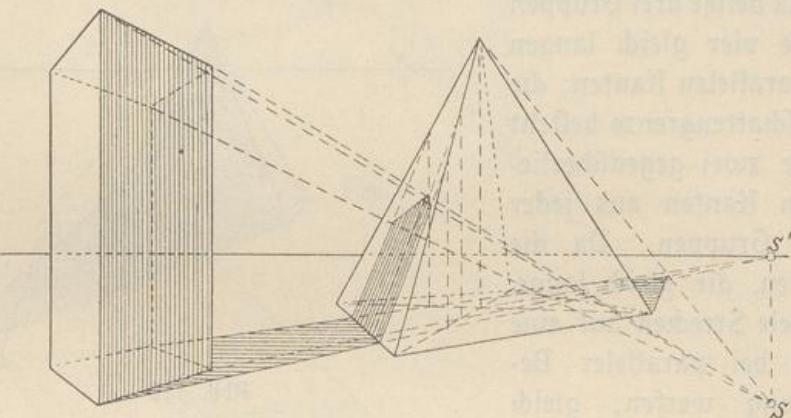


Abb. 115

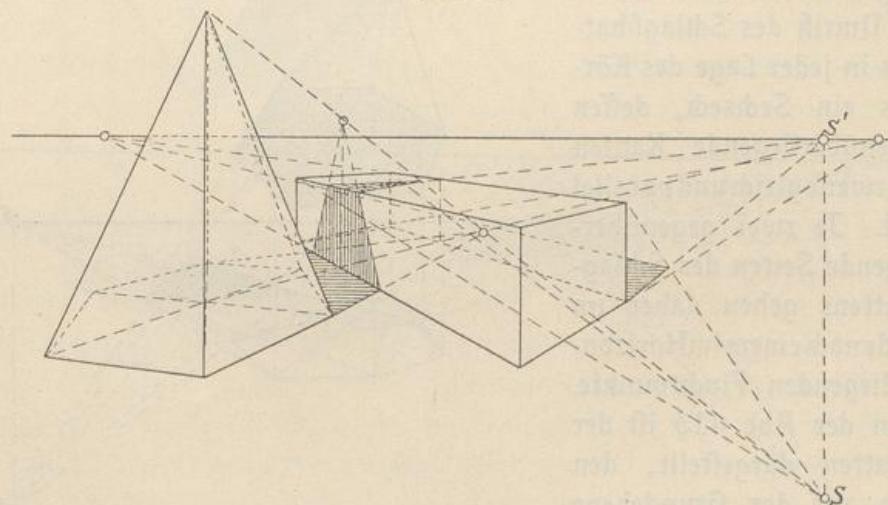


Abb. 116

ist auch angegeben, wie die Schnittlinien der Dächer direkt im Bilde konstruiert werden können. Die Abb. 118 zeigt eine Reihe von Konsolen, von denen jedes seinen Schatten auf das folgende wirft.

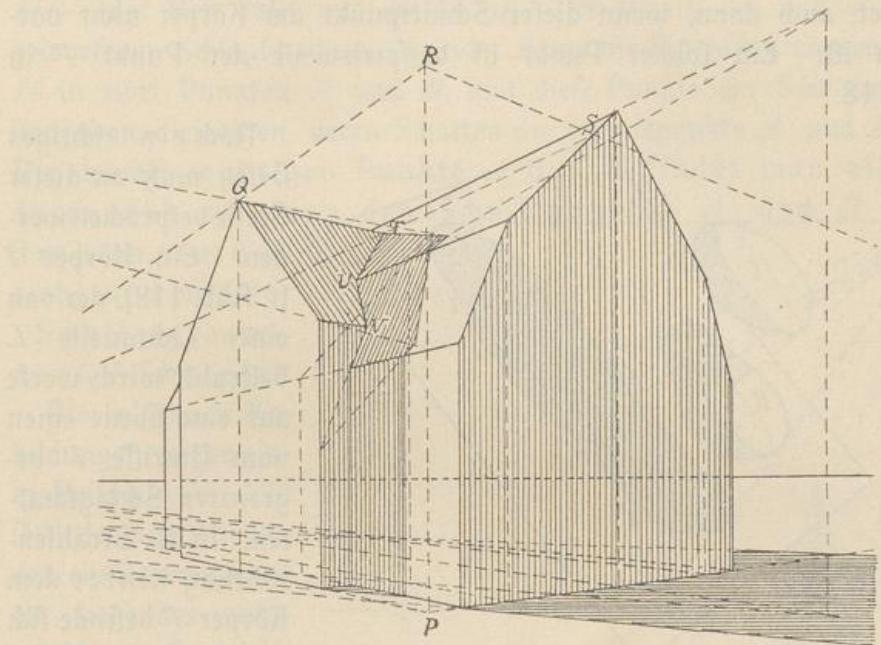


Abb. 117

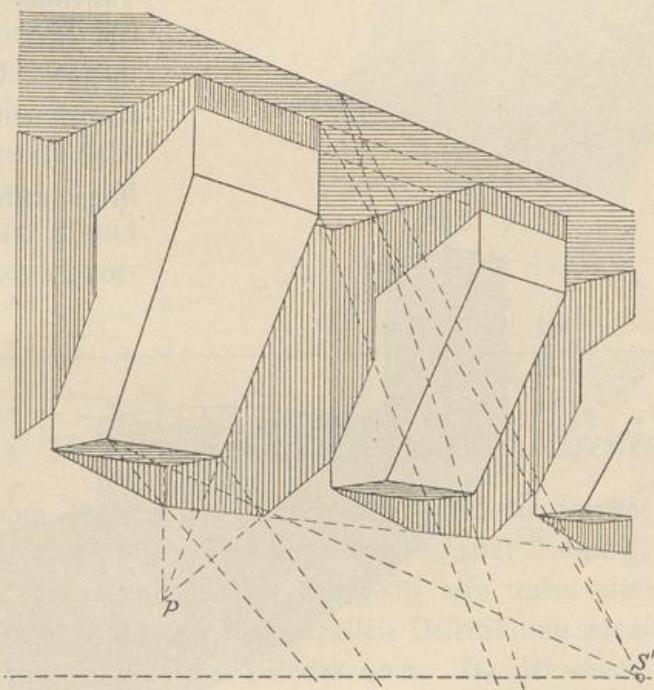


Abb. 118

Bei diesen Konstruktionen läßt sich mit Vorteil die schon erwähnte Tatsache benutzen, daß der Schatten, den eine Gerade auf eine Ebene wirft, stets durch den Punkt gehen muß, in dem die Gerade die Ebene schneidet, auch dann, wenn dieser Schnittpunkt am Körper nicht vorhanden ist. Ein solcher Punkt ist beispielsweise der Punkt  $P$  in Abb. 118.

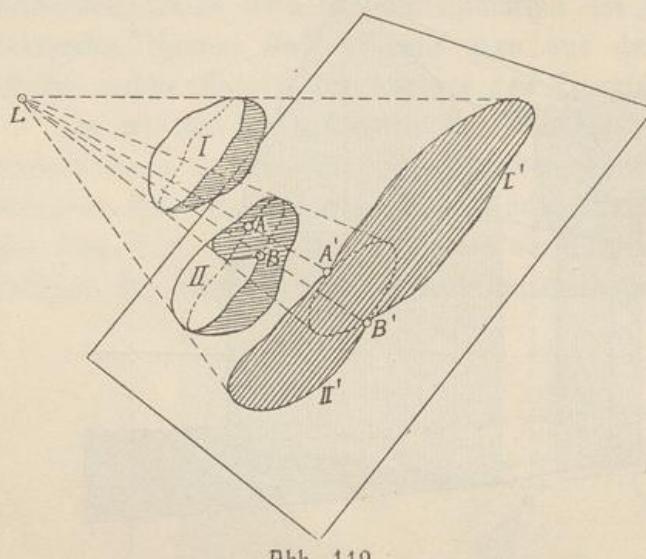


Abb. 119

Noch ein wichtiges Gesetz muß an dieser Stelle besprochen werden. Ein Körper  $I$  (s. Abb. 119), der von einer Lichtquelle  $L$  bestrahlt wird, werfe auf eine Ebene einen vom Umriß  $I'$  begrenzten Schlagschatten. In der Strahlrichtung hinter dem Körper  $I$  befindet sich ein Körper  $II$ , dessen auf dieselbe Ebene fallender Schlagschatten den Umriß  $II'$  besitzt. Wir wollen annehmen, daß die Umrisse  $I'$  und  $II'$  sich durchschneiden;

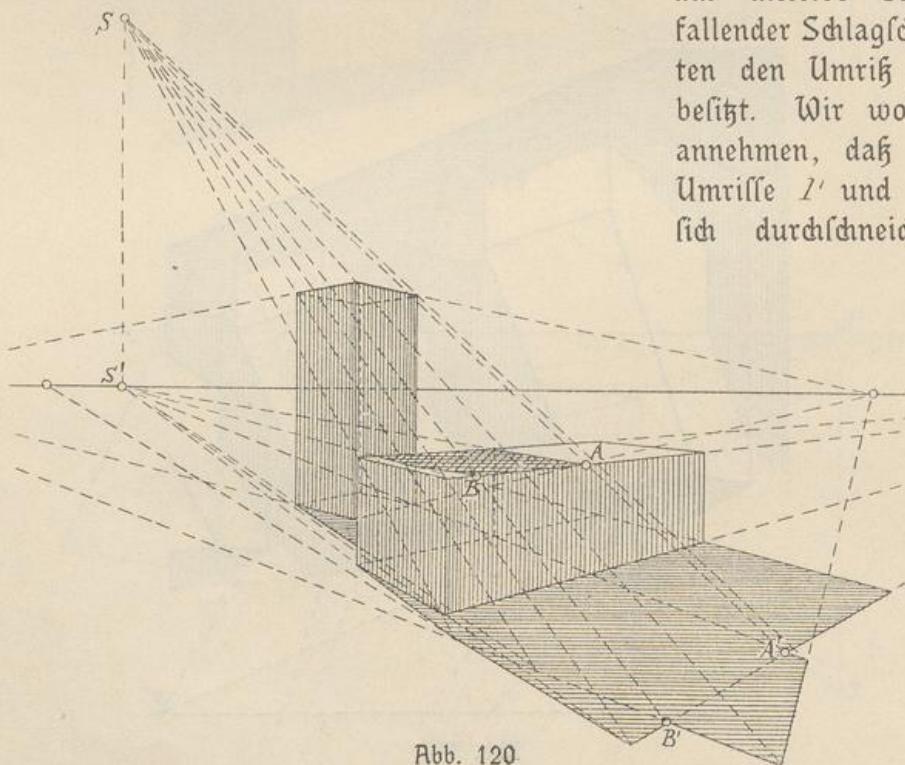


Abb. 120

ihre Schnittpunkte seien  $A'$  und  $B'$ . — Der Körper  $I$  wirft nun auch einen Schatten auf den Körper  $II$ ; wenn  $I$  und  $II$  sich durchschneiden, fällt aber der Schatten von  $I$  nicht ganz, sondern nur teilweise auf  $II$  — der Rest fällt auf die Ebene. Der Umriß des von  $I$  auf  $II$  geworfenen Schlagschattens schneidet dann die Eigenschattengrenze von  $II$  in zwei Punkten  $A$  und  $B$ , und diese Punkte der Schattengrenze sind eben diejenigen, deren Schatten die Schnittpunkte  $A'$  und  $B'$  sind. Die höchst wichtigen Punkte  $A$  und  $B$  findet man also dadurch, daß man von den Schnittpunkten  $A'$  und  $B'$  Lichtstrahlen zurückzieht und mit der Schattengrenze von  $II$  schneidet.

Die folgenden Abbildungen zeigen einige Beispiele. Abb. 120 stellt den Schatten dar, den ein stehendes auf ein liegendes rechtwinkliges Parallelepiped wirft. In Abb. 121 wirft eine stehende Pyramide ihren Schatten auf ein liegendes Prisma. In beiden Fällen sind die Punkte  $A$  und  $B$  und ihre Schatten  $A'$  und  $B'$  besonders hervorgehoben.

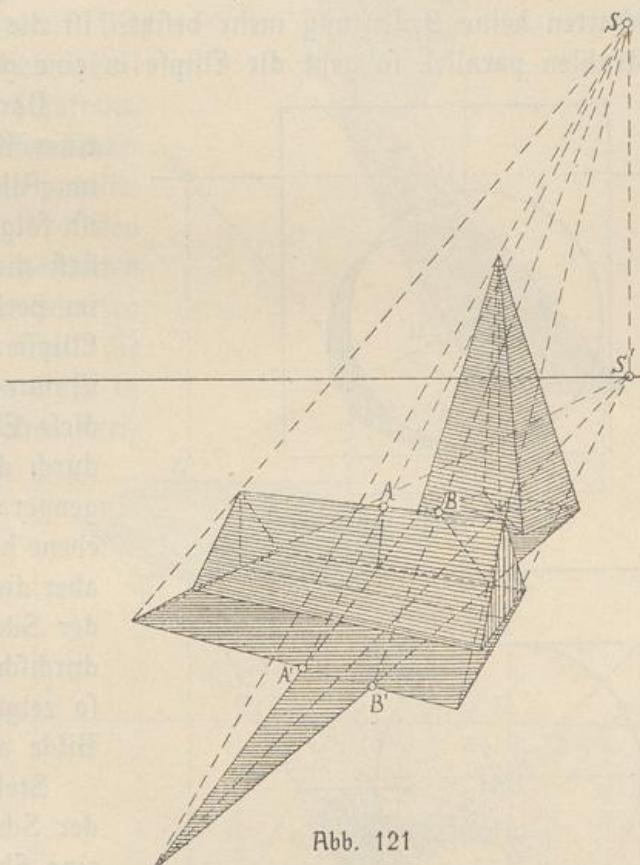


Abb. 121

### § 31. Der Schlagschatten eines Kreises.

Die vom leuchtenden Punkte aus durch die Punkte des Kreises gehenden Strahlen bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung, der Schatten des Kreises auf eine beliebige Ebene ist also unter allen Umständen ein Kegelschnitt. Da wir hier parallele Bestrahlung voraussetzen, geht der Strahlenkegel in einen Zylinder über. Da der ebene Schnitt eines Kreiszylinders oder eines Zylinders zweiter Ordnung im Allgemeinen

eine Ellipse ist, muß bei paralleler Bestrahlung der Schatten eines Kreises auf eine Ebene eine Ellipse sein. — In besonderen Fällen geht die Ellipse in einen Kreis von dem Radius des schattenwerfenden Kreises oder in zwei parallele Gerade über. Ersterer Fall tritt ein, wenn der Kreis der bestrahlten Ebene parallel ist, oder wenn die Ebene des Kreises und die bestrahlte Ebene Wechselseitige des Strahlzylinders sind, letzterer Fall ergibt sich, wenn die bestrahlte Ebene den Kreis durchschneidet und den Strahlen parallel ist. Dann hat allerdings die ganze bestrahlte Ebene die Helligkeit Null, so daß der Schatten keine Bedeutung mehr besitzt. Ist die Ebene des Kreises den Strahlen parallel, so geht die Ellipse in eine gerade Strecke über.

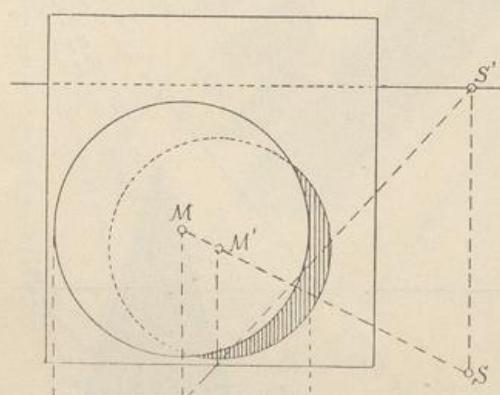


Abb. 122

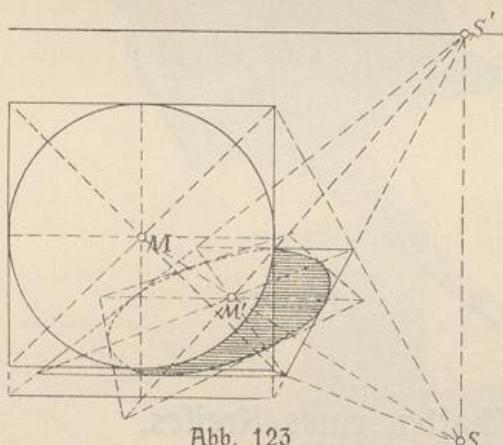


Abb. 123

einander gedrehte Quadrate umschreiben und die Schatten dieser Quadrate und ihrer Diagonalen auf die Ebene aufsuchen; so erhalten wir stets 8 Tangenten mit ihren Berührungs punkten.

Wirft der Kreis auf eine Ebene einen kreisförmigen Schatten, so ist damit selbstverständlich nicht gesagt, daß der Schattenkreis sich auch im Bilde als Kreis darstelle. Das ist, wie wir wissen, nur dann der

Daraus, daß der Schatten eines Kreises auf eine Ebene im Allgemeinen eine Ellipse ist, folgt natürlich keineswegs, daß dieser Schatten sich auch im perspektivischen Bilde als Ellipse darstellen müsse. Das ist nur dann der Fall, wenn diese Ellipse nicht bis an die durch das Auge und die Gegengerade gehende Vertikalebene heranreicht. Berührt sie aber diese Ebene, so bildet sich der Schatten als Parabel ab, durchschneidet sie diese Ebene, so zeigt sich der Schatten im Bilde als Hyperbel.

Stellt sich, wie gewöhnlich, der Schatten des Kreises auf eine Ebene als Ellipse dar, so finden wir diese stets am bequemsten dadurch, daß wir dem Kreise zwei um  $45^{\circ}$  gegen

Fall, wenn der Schattenkreis der Bildebene parallel ist oder aber dann, wenn die bestrahlte Ebene und die Bildebene Wechselseitige Schnitte des Sehstrahlzylinders sind.

Ist die Ebene des schattenwerfenden Kreises der bestrahlten Ebene und der Bildebene parallel, so ist der Schatten in Wahrheit und im Bilde ein Kreis. Die Abb. 122 zeigt für diesen Fall die Konstruktion des Schattens.

Die Abb. 123 stellt den Schatten eines der Bildebene parallelen Kreises, die Abb. 124 den eines andern vertikal gestellten Kreises, die Abb. 125 den Schatten eines wagerechten Kreises, die Abb. 126 den Schatten eines in beliebiger Lage befindlichen Kreises auf die Grundebene dar. Endlich zeigt Abb. 127 den Schatten eines beliebigen Kreises auf eine in beliebiger Lage befindliche ebene Figur. Ueber die angewandten Konstruktionen ist nichts Neues zu sagen; in allen Fällen wurden in bekannter Weise die Schatten zweier um  $45^{\circ}$  gegen einander gedrehter, dem Kreise umschriebener Quadrate mit ihren Diagonalen oder der Schatten des regelmäßigen Achtecks aufgesucht und die Ellipsen eingezeichnet.

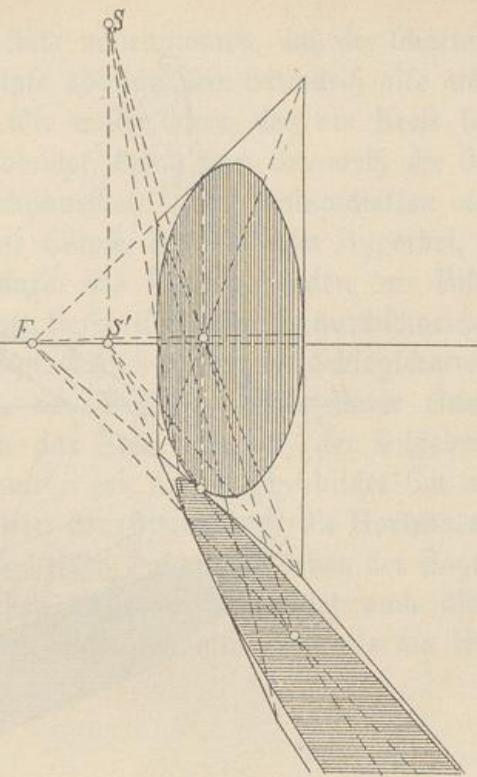


Abb. 124

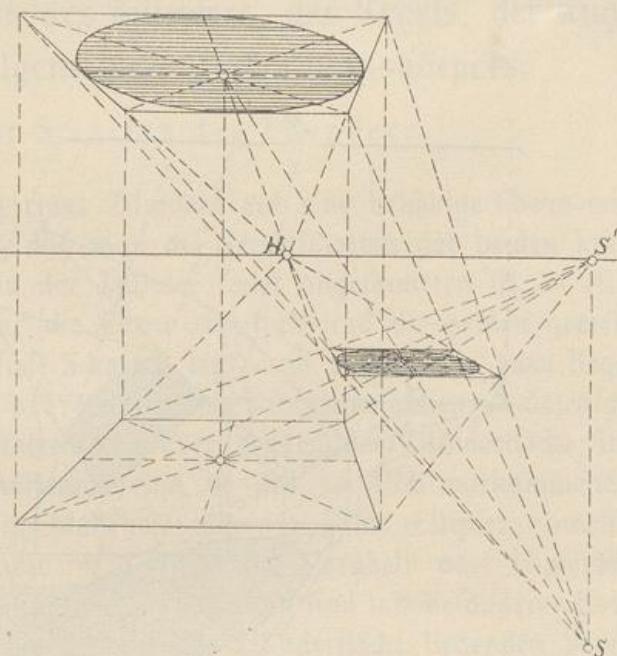


Abb. 125

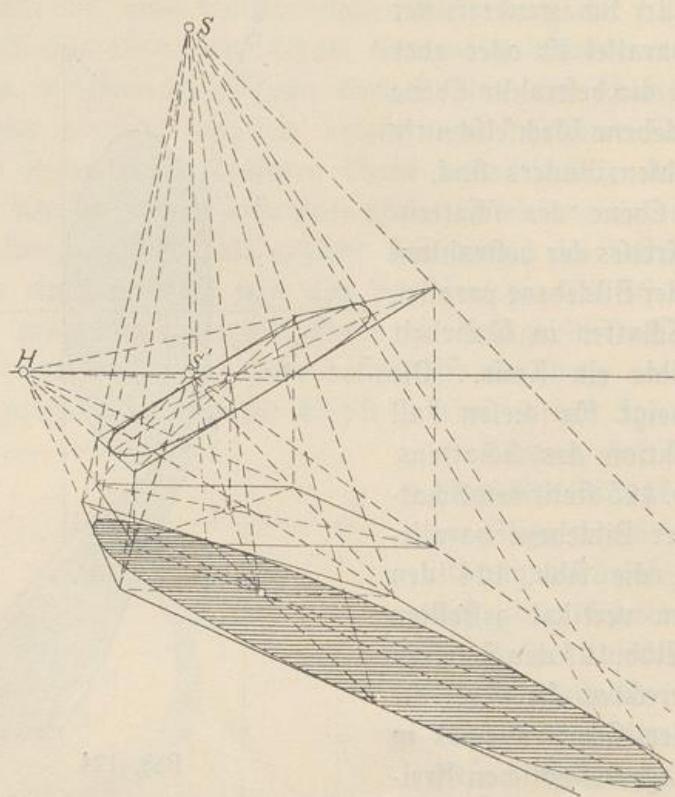


Abb. 126

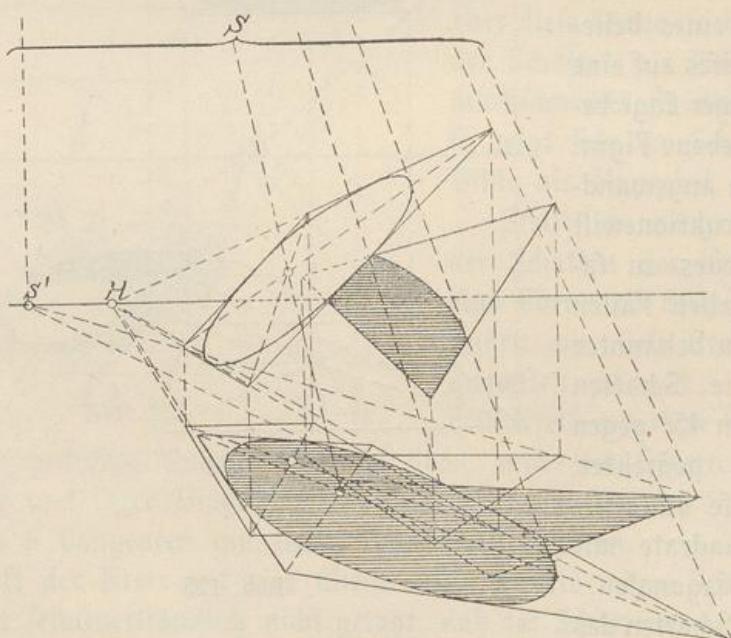


Abb. 127

Bei diesen Beispielen wurde stets angenommen, daß der Schattenwerfende Kreis selbst sich als Ellipse abilde, sein Grundriß also nicht bis an die Gegengerade reiche. Wir wissen aber, daß ein Kreis sich als Parabel oder als Hyperbel abbildet, wenn sein Grundriß die Gegengerade berührt oder sie durchschneidet. Der Schlagschatten des Kreises ist auch jetzt im Bilde eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem er ganz außerhalb der durch das Auge gehenden, zur Bildebene parallelen Vertikalebene liegt, sie berührt oder sie durchschneidet. So zeigt Abb. 124 einen im Bilde hyperbolisch begrenzten Schlagschatten.

Stellen wir uns z. B. vor, der Betrachter stehe unter einem Brückenbogen, der also die durch das Auge gehende, der Bildebene parallele Vertikalebene durchschneidet; der Kreisbogen bildet sich als Hyperbelbogen ab. Da der Schatten des Bogens auf die Horizontalebene eine Ellipse ist, die durch die beiden Punkte, in denen der Bogen die Horizontalebene schneidet, gehen muß, durchschneidet auch diese Ellipse die genannte Vertikalebene, bildet sich also ebenfalls als Hyperbelbogen ab.

### §. 32. Die Schatten des Zylinders, des Kegels, der Kugel und des allgemeinen Umdrehungskörpers.

#### 1. Der Schatten des Zylinders.

Der Schlagschatten eines Zylinders auf eine beliebige Ebene wird stets dadurch gefunden, daß man die Schlagschatten der beiden kreisförmigen oder — wenn der Zylinder schief abgeschnitten ist — elliptischen Grundflächen auf die Ebene ermittelt und die beiden gemeinsamen Tangenten an diese Schatten legt, und zwar — da zwei Kegelschnitte im Allgemeinen vier gemeinsame Tangenten haben — diejenigen von ihnen, die die Schatten von Erzeugenden der Zylinderfläche sind. Die Schatten der Grundflächen sind in den wirklich vorkommenden Fällen in der Regel in Wahrheit und im Bilde Ellipsen, indessen können sie auch, wie wir im § 31 sahen, Parabeln oder Hyperbeln sein. Die Berührungsstücke der Tangenten sind mit besonderer Sorgfalt zu bestimmen, da sie die auf der Zylinderfläche liegenden Streiflinien ergeben. Ziehen wir nämlich von den Berührungsstücken der Tangenten Strahlen zurück, so schneiden diese Strahlen nach dem im § 26 allgemein Ausgeführten die Umrisse der zugehörigen Grundflächen

in den Punkten, durch die die Streiflinien gehen. Die Streiflinien selbst sind natürlicherweise Erzeugende, müssen also im Bilde nach dem Fluchtpunkte der Erzeugenden gehen.

Die den Schlagschatten begrenzenden gemeinsamen Tangenten der Schattenumrisse der beiden Grundflächen sind als Schatten paralleler Gerader — nämlich zweier Erzeugender der Zylinderfläche — auf eine Ebene parallel, gehen also im Bilde nach einem Fluchtpunkte, der in der Fluchtgeraden der beschatteten Ebene liegen muß. Die Aufsuchung dieser Fluchtgeraden haben wir im § 5 bereits kennen gelernt. Da die beiden Tangenten als Schatten paralleler Erzeugender aber auch in der Fluchtgeraden der durch die Erzeugenden gehenden Strahlebenen liegen müssen, ist der gesuchte Fluchtpunkt der Schnittpunkt der beiden Fluchtgeraden.

Die den Schlagschatten begrenzenden Tangenten finden wir nun nach der im § 19 angegebenen Konstruktion. Die Berührungsstücke können, wie schon erwähnt, zur Aufsuchung der Streiflinien dienen.

Die Punkte, in denen die Streiflinien das Bild eines Grundkreises schneiden, sind in Wahrheit Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises. Im Bilde muß also ihre Verbindungsline durch das Bild des Mittelpunktes des Kreises gehen.

Wir können aber auch direkt, ohne Vermittlung des Schlagschattens, die Streiflinien finden. Wir projizieren nämlich einen beliebigen Strahl auf eine der beiden Endflächen des Zylinders, indem wir durch einen beliebigen Punkt  $P$  des Umrisses der Endfläche einen Strahl legen, auf ihm einen beliebigen Punkt  $Q$  annehmen, durch ihn eine Parallelle zu den Erzeugenden ziehen, sie mit der verlängerten Endfläche schneiden und den Schnittpunkt  $Q'$  mit  $P$  verbinden. Die mit  $PQ'$  parallelen Tangenten berühren offenbar den Umriss der Endfläche in den Punkten, von denen aus die Streiflinien gehen, da die den Zylinder berührenden Strahlebenen die Endflächen in eben diesen parallelen Tangenten schneiden. Im Bilde gehen die parallelen Tangenten natürlich nach einem Fluchtpunkte, der in der Fluchtgeraden der Endflächen liegen muß. — Die hier im Allgemeinen angedeutete Konstruktion werden wir in den jetzt zu behandelnden besonderen Fällen durchführen.

Wir denken uns zuerst einen auf der Grundebene stehenden, rechtwinkligen Kreiszylinder. Sein Bild haben wir bereits im § 19 kennen gelernt. Den Schatten des oberen Grundkreises als eines der Grundebene parallelen Kreises können wir ohne Weiteres finden. Die den Schlagschatten begrenzenden Tangenten gehen in diesem einfachsten Falle als Schatten vertikaler Erzeugender durch  $S'$ ; wir finden sie

also, indem wir von  $S'$  aus Tangenten an den Umriß der Grundfläche legen [s. Abb. 128].

Wir benutzen dabei die in Abb. 65 (S. 71) angegebene Konstruktion; von den so gefundenen Berührungs punkten aus gehen die vertikalen Streiflinien. Die von  $S'$  aus gezogenen Tangenten müssen auch den Schattenumriß der oberen Grundfläche berühren.

Wenn die durch das Auge und die Zylinderaxe gehende Vertikalebene auf der Bild ebene rechtwinklig, das perspektivische Bild des Zylinders also symmetrisch ist, kann man die Berührungs punkte der von  $S'$  an den Umriß der Grund fläche gelegten Tangenten auch auf eine andere Weise finden. Da nämlich die in der Abb. 65 benutzten Schnittpunkte von

Geraden mit der Ellipse naturgemäß immer etwas ungenau ausfallen, empfiehlt es sich, die Ellipse durch einen Kreis zu ersetzen. Bei der gemachten Annahme liegen die Hauptachsen der Ellipse stets wagerecht und senkrecht, und es gibt unter den rechtwinkligen Schnitten des unbegrenzt zu denkenden Zylinders stets zwei, die sich als Kreise abbilden. Diese kreisförmigen Bilder haben wir im § 18 bereits kennen gelernt; sie treten, wie wir wissen, auf, wenn die Ebene des Kreises und die Bild ebene Wechselschnitte des Sehstrahlenkegels sind. — Ermitteln wir nun einen dieser beiden Kreise, so brauchen wir nur von  $S'$  aus die Tangenten an ihn zu legen; durch ihre Berührungs punkte gehen die gesuchten Streiflinien.

In Abb. 129 ist ein auf der Grund ebene, also horizontal liegender rechtwinklig abgeschnittener Kreiszylinder dargestellt. Die den auf die Grund ebene fallenden Schlagschatten begrenzenden Tangenten sind jetzt den Erzeugenden parallel, gehen also nach dem im Horizonte liegenden Flucht punkte  $F_2$  der letzteren. Die direkte Konstruktion der Streiflinien fällt hier sehr einfach aus. — Ein durch den ganz beliebigen

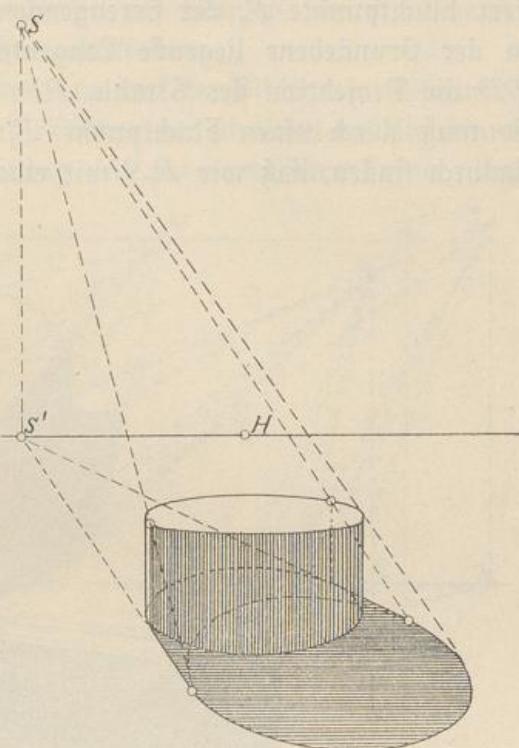


Abb. 128

Punkt  $P$  des Umrißbildes der einen Endfläche gelegter Strahl schneidet die Grundebene im Schatten  $P''$  dieses Punktes; eine von  $P''$  nach dem Fluchtpunkte  $F_2$  der Erzeugenden gezogene Gerade schneidet die in der Grundebene liegende Tangente  $BC$  im Punkte  $D$ . Jetzt ist  $PD$  die Projektion des Strahls  $PP''$  auf die Endfläche des Zylinders; sie muß durch einen Flucht punkt  $F_1'$  gehen, den wir ganz einfach dadurch finden, daß wir  $F_2S$  mit einer durch  $F_1$  gehenden Vertikalen

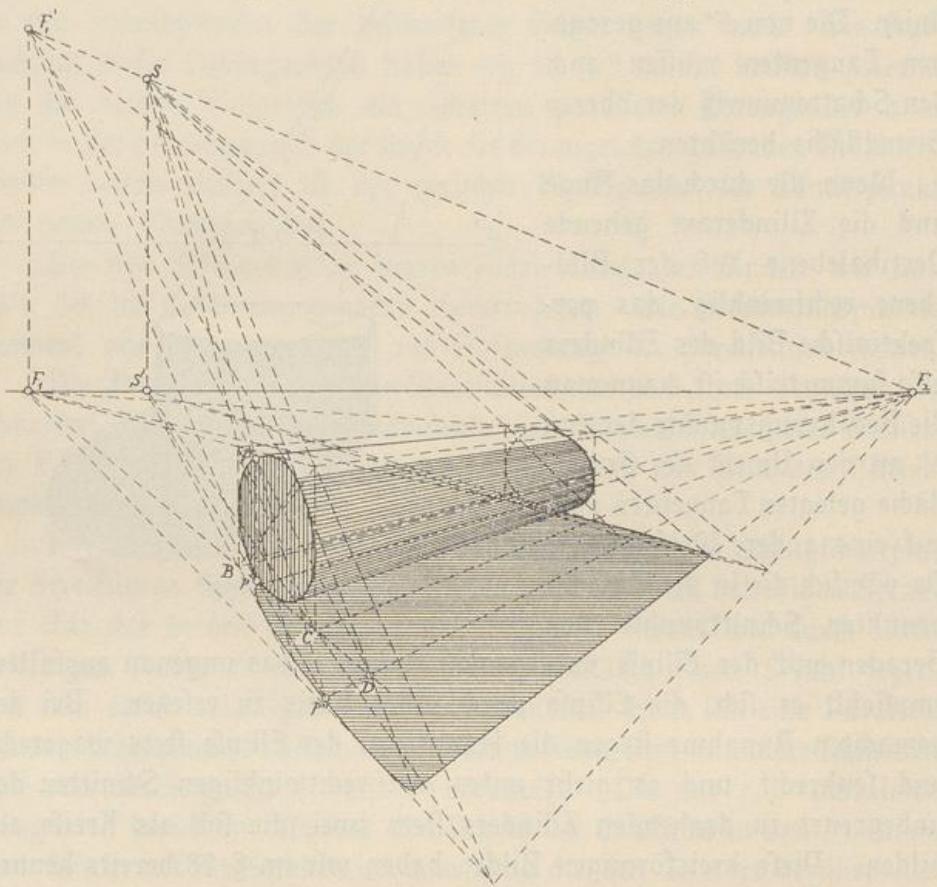


Abb. 129

schneiden;  $F_2S$  ist nämlich offenbar die Fluchtlinie der den Erzeugenden des Zylinders und den Sonnenstrahlen parallelen Ebenen, die durch  $F_1$  gezogene Vertikale die Fluchtlinie der den Grundflächen des Zylinders parallelen Ebenen. Die Projektion des Strahls auf die Grundfläche des Zylinders ist aber die Schnittlinie einer Ebene der ersten mit einer der zweiten Art, muß also einen Flucht punkt besitzen, der der Schnitt punkt beider Fluchtlinien ist (vgl. § 3 und § 27). — Von diesem Flucht punkte  $F_1'$  aus, den wir also ohne Vermittelung des Punkts  $P$  direkt finden können, ziehen wir die Tangenten an die die Endflächen

darstellenden Ellipsen. Durch die Berührungs punkte gehen die Bilder der Streiflinien und durch die Schatten der Berührungs punkte die den Schlagschatten begrenzenden Tangenten der Ellipsen, die die Schatten der Endflächen auf die Grundebene darstellen.

In dem Falle, daß die Zylinderaxe auf der Bildebene rechtwinklig ist, liegt der Fluchtpunkt der Projektionen der Strahlen auf die Grundfläche des Zylinders in der Richtung  $HS$  in unendlicher Ferne. Jetzt

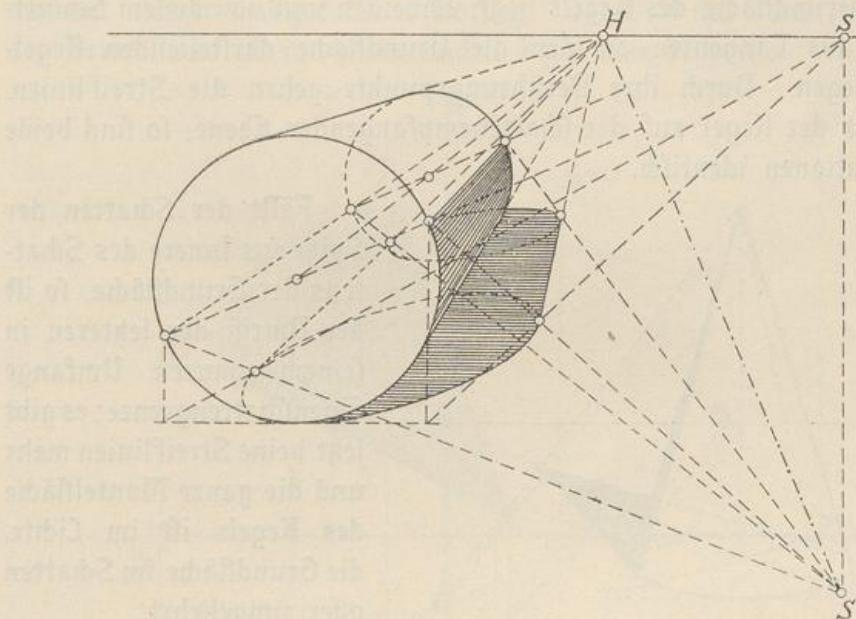


Abb. 130

haben wir, um die Streiflinien zu finden, also nur an den Grundkreis Tangenten zu legen, die mit  $HS$  parallel sind, also den Kreis mit dem auf  $HS$  rechtwinkligen Durchmesser zu schneiden und von den Schnittpunkten aus nach  $H$  zu ziehen (s. Abb. 130).

Die allgemeinste Lage des Zylinders wird im § 33 (Abb. 141) behandelt werden.

## 2. Der Schatten des Kegels.

Den Schlagschatten eines Kegels auf eine beliebige Ebene finden wir, indem wir zuerst den Schatten seiner Grundfläche auf diese Ebene bestimmen. Er stellt sich im Bilde, wie wir wissen als Kegelschnitt, gewöhnlich als Ellipse dar. Wir suchen weiter den Schatten der Spitze auf dieselbe Ebene auf und ziehen von diesem Schattenpunkte aus Tangenten an den den Umriss des Schlagschattens der Grundfläche darstellenden Kegelschnitt. Diese beiden Tangenten und der zwischen

ihren Berührungs punkten liegende, gegen die Spitze des Schattens konkave Bogen des Kegelschnitts bilden den Umriß des Schlagschattens. Ziehen wir von den Berührungs punkten der Tangenten Strahlen zurück und schneiden sie mit dem Umriß der Grundfläche, so erhalten wir auf ihm die beiden Punkte, von denen die Streiflinien ausgehen.

Die Streiflinien können wir auch direkt dadurch finden, daß wir einen durch die Spitze des Kegels gelegten Strahl mit der Ebene, in der die Grundfläche des Kegels liegt, schneiden und von diesem Schnittpunkte aus Tangenten an den die Grundfläche darstellenden Kegelschnitt legen. Durch ihre Berührungs punkte gehen die Streiflinien. — Steht der Kegel auf der schattenempfangenden Ebene, so sind beide Konstruktionen identisch.

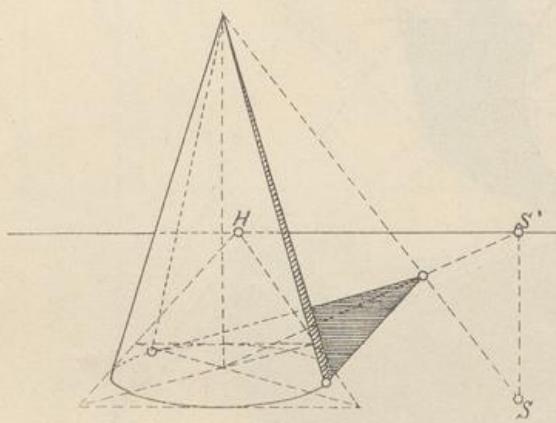


Abb. 131

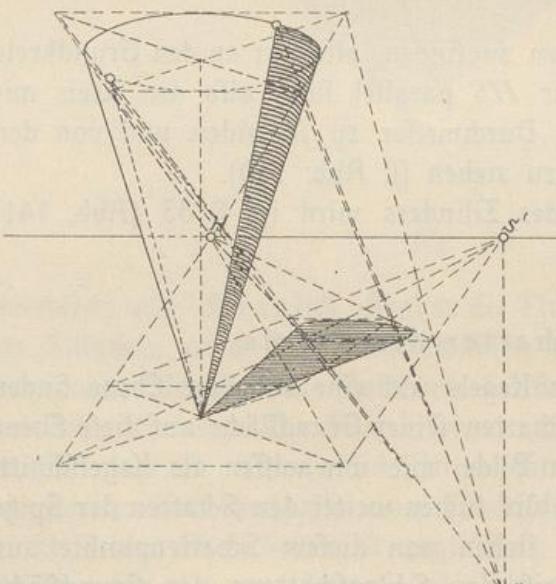


Abb. 132

Fällt der Schatten der Spitze ins Innere des Schattens der Grundfläche, so ist der Umriß der letzteren in seinem ganzen Umfange Eigenschattengrenze; es gibt jetzt keine Streiflinien mehr und die ganze Mantelfläche des Kegels ist im Lichte, die Grundfläche im Schatten oder umgekehrt.

Die Abb. 131, 132, 133 zeigen die Schatten eines mit der Grundfläche auf der Horizontalebene stehenden, eines mit der Spitze auf derselben Ebene stehenden und eines in geneigter Lage schwebenden Kegels. Die Abb. 133 zeigt die Benutzung des Punktes  $P$ , in dem der durch die Kegelspitze gelegte Strahl die verlängerte Grundfläche schneidet. Er muß auf der Linie  $VW$  liegen, in der eine durch die Sonne und die Kegelspitze gelegte Ver-

tikalebene die verlängerte Grundfläche schneidet und die sich aus den Punkten  $V'$  und  $W'$  sofort ergiebt, in denen die Horizontalspur dieser Ebene zwei Seiten des in der Grundebene liegenden Parallelogramms schneidet, das die Horizontalprojektion des der Grundfläche des Kegels umschriebenen Quadrates ist. Die von  $P$  an den Umriß des Grundflächenbildes gelegten Tangenten ergeben in ihren Berührungs punkten die Ausgangspunkte der Streiflinien. — Von dem Schlagschatten ist nur ein kleiner Teil gezeichnet worden. Das Bild des Schattenumrisses der Grundfläche ist im vorliegenden Falle eine Hyperbel.

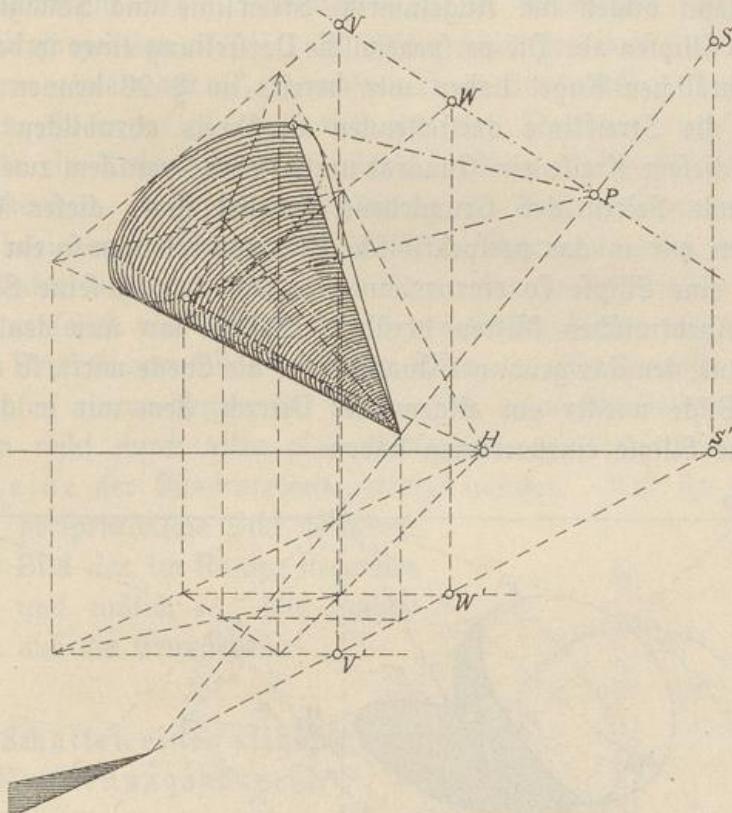


Abb. 133

### 3. Der Schatten der Kugel.

Die Schattengrenze einer parallel bestrahlten Kugel ist stets ein Großkreis, dessen Ebene auf der Strahlenrichtung senkrecht steht und den wir daher dadurch finden, daß wir durch den Mittelpunkt der Kugel eine zur Strahlenrichtung senkrechte Ebene legen und mit ihrer Oberfläche schneiden. Der diese Oberfläche in der Streiflinie berührende Strahlzylinder schneidet eine beliebige Ebene in einer Ellipse, die den Umriß des auf diese Ebene fallenden Schlagschattens darstellt. Streif-

linie und Schlagschattenumriss bilden sich im perspektivischen Bilde gewöhnlich als Ellipsen ab; es kann aber auch jede dieser Kurven ein parabolisches oder hyperbolisches Bild ergeben, wenn sie die durch das Auge parallel zur Bildebene gelegte Ebene berührt oder durchschneidet.

Es soll nun die Streiflinie einer in beliebiger Lage befindlichen Kugel nebst ihrem Schlagschatten auf eine ebenfalls in beliebiger Lage befindliche Ebene ermittelt werden. Wir setzen den gewöhnlichen Fall voraus, daß weder die Kugel noch ihr Schlagschattenumriss mit der durch das Auge parallel zur Bildebene gelegten Ebene Punkte gemein haben; dann bilden sich Kugelumriss, Streiflinie und Schlagschattenumriss als Ellipsen ab. Die perspektivische Darstellung einer in beliebiger Lage befindlichen Kugel haben wir bereits im § 20 kennen gelernt. Um den die Streiflinie darstellenden Großkreis abzubilden, denken wir uns diesem Kreise ein Quadrat umschrieben, von dem zwei gegenüberliegende Seiten der Grundebene parallel sind; dieses Quadrat übertragen wir in das perspektivische Bild und erhalten so ein Viereck, dem wir eine Ellipse so einzuziehen haben, daß sie seine Seiten in ihren perspektivischen Mitten berührt. Suchen wir nun den Schlagschatten auf, den das genannte Quadrat auf die Ebene wirft, so erhalten wir im Bilde wieder ein allgemeines Viereck, dem wir in derselben Weise eine Ellipse einzuziehen haben.

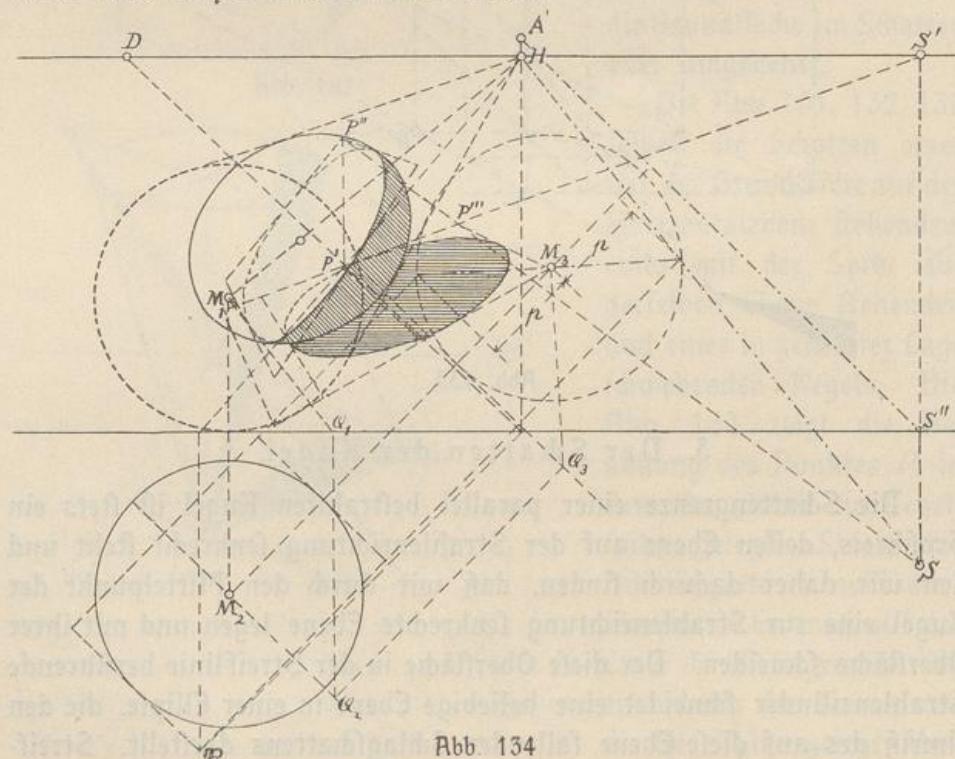


Abb. 134

Zunächst also handelt es sich um die Darstellung der Streiflinie (s. Abb. 134). Wir legen der Konstruktion die Abb. 75 zu Grunde. Ist  $S''$  die Projektion des Sonnenpunkts auf die Grundlinie, so ist offenbar  $A'S''$  der Grundriß,  $AS$  der Aufriß eines durch das Auge gelegten Strahls. Nach den Regeln der gewöhnlichen Schattenkonstruktionslehre finden wir nun die Streiflinie, indem wir die Kugel auf eine der Strahlenrichtung parallele Vertikalebene projizieren und diese Ebene in die Horizontalebene umklappen;  $M_3$  sei der Mittelpunkt der umgeklappten Hülfsprojektion. Der durch den Kugelmittelpunkt gelegte Lichtstrahl ist im Aufrisse  $M_1 Q_1$ , im Grundriß  $M_2 Q_2$  und in der Hülfsprojektion  $M_3 Q_3$ . In dieser Hülfsprojektion erscheint die Streiflinie als ein auf  $M_3 Q_3$  rechtwinkliger Durchmesser. Nun erhalten wir ohne Weiteres als Grundriß des der Streiflinie umschriebenen Quadrats ein Rechteck, das wir direkt in das perspektivische Bild übertragen können. Unter Berücksichtigung des Maßes  $\rho$ , um weldies die beiden horizontalen Seiten des Quadrats über und unter dem Kugelmittelpunkte liegen, erhalten wir ferner das perspektivische Bild des Quadrates selbst und endlich auch seinen Schlagschatten auf die Grundebene. Dem Quadratbilde und dem Bilde des Schattens des Quadrats die Ellipsen einzulegen, hat bekanntlich keine Schwierigkeiten.

Um nicht durch allzu viele Hülfslinien die Figur zu verwirren, ist nur eine der Quadratseiten verfolgt worden.  $P$  ist ihr Grundriß,  $P'$  das perspektivische Bild desselben,  $P''$  das Bild des im Raum liegenden Punkts und endlich  $P'''$  sein Schlagschatten auf die Grundebene.

#### 4. Der Schatten eines allgemeinen Umdrehungskörpers.

Wenn die Streiflinie eines Umdrehungskörpers bestimmt werden soll, geht man am besten von der Vorstellung einer normalen Kreiskegelfläche aus, die die Axe des Umdrehungskörpers zur Axe hat und ihn in einem Parallelkreise berührt. Diese Kegelfläche hat mit der Umdrehungsfläche einen unendlich schmalen, ringförmigen Flächenstreifen gemein; die Schnittpunkte der

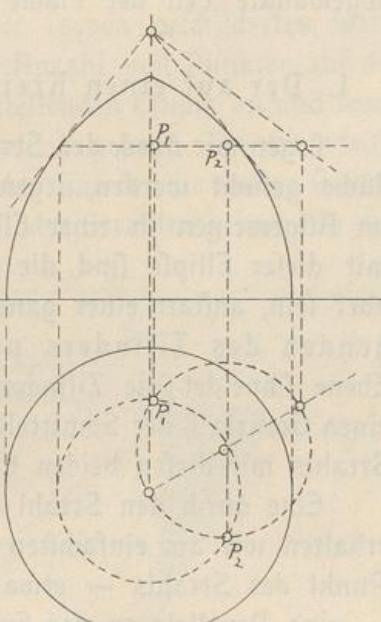


Abb. 135

Streiflinien des Kegels mit dem Parallelkreise sind daher Punkte der Streiflinie der Umdrehungsfläche.

Die Ausführung dieser Konstruktion im perspektivischen Bilde selbst ist umständlich und ungenau; es empfiehlt sich daher in diesem Falle ausnahmsweise, die Streiflinie im Grund- und Aufrisse zu konstruieren und sie dann punktweise in das Bild zu übertragen. Die anzuwendende Konstruktion ist für den Fall der vertikalen Axe in Abb. 135 angegeben.  $P_1$  und  $P_2$  sind Punkte der Streiflinie.

### § 33. Schlagschatten eines Punkts auf Zylinder, Kegel, Kugel und den allgemeinen Umdrehungskörper.

Bei diesen Aufgaben handelt es sich um die Ermittelung der Schnittpunkte einer Geraden — nämlich des durch den Punkt gelegten Lichtstrahls mit der Zylinder-, Kegel- oder Kugelfläche. Zylinder- und Kegelflächen zweiter Ordnung — also Zylinder- und Kegelflächen im gewöhnlichen Sinne — und Kugelflächen werden von jeder Geraden — wenn überhaupt — in zwei Punkten geschnitten; welcher von diesen beiden Schnittpunkten die Bedeutung eines Schlagschattenpunkts hat, das hängt davon ab, ob der dem Lichte zugewandte oder der von ihm abgewandte Teil der Fläche als Oberfläche körperlich vorhanden ist.

#### 1. Der auf einen Kreiszylinder fallende Schlagschatten.

Legen wir durch den Strahl, dessen Schnittpunkte mit der Zylinderfläche gesucht werden, irgend eine Ebene, so schneidet sie die Fläche im Allgemeinen in einer Ellipse, und die Schnittpunkte des Strahls mit dieser Ellipse sind die gesuchten Punkte. Zweckmäßig wird es aber sein, anstatt einer ganz beliebigen Ebene eine mit den Erzeugenden des Zylinders parallele Ebene zu wählen; eine solche Ebene schneidet die Zylinderfläche in zwei geraden Erzeugenden, die einen Grenzfall der Schnittellipse darstellen, und die Schnittpunkte des Strahls mit diesen beiden Erzeugenden sind die gesuchten Punkte.

Eine durch den Strahl gehende, den Erzeugenden parallele Ebene erhalten wir am einfachsten dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt des Strahls — etwa durch den Schattenwerfenden Punkt selbst — eine Parallelle zu den Erzeugenden ziehen und durch diese Parallelen und den Strahl eine Ebene legen.

Wir wollen diese Konstruktion für verschiedene Lagen des Zylinders ausführen. Steht ein normaler Zylinder vertikal (s. Abb. 136), ist  $P$  der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene, so ist  $PP'$  die durch  $P$  gezogene Parallele zu den Erzeugenden; die durch den Strahl parallel zu den Erzeugenden gehende Ebene schneidet die Grundebene in  $P'S'$ . Diese Gerade schneidet die den Grundkreis darstellende Ellipse in  $A'$  und  $B'$ ; ziehen wir also durch diese Punkte vertikale Erzeugende, so schneiden sie den Strahl in den gesuchten Schnittpunkten  $A$  und  $B$ , von denen, wenn der volle Zylinder körperlich vorhanden ist,  $A$  die Bedeutung des Schlagschattens von  $P$  besitzt. In der Figur ist der Schlagschatten eines lotrechten Stabes gezeichnet worden, dessen Endpunkt  $P$  ist.

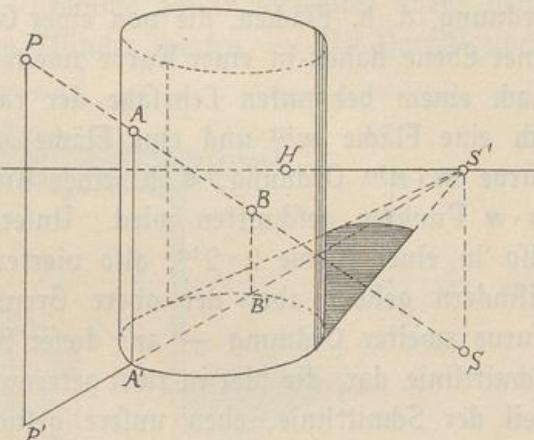


Abb. 136

Von ganz besonderem Interesse ist der Schlagschatten, den der obere Rand der Fläche auf ihre Innenseite wirft — vorausgesetzt natürlich, daß wir uns den Zylinder als eine oben offene Röhre vorstellen. Wir können dabei genau in der soeben geschilderten Weise verfahren — wir nehmen eine beliebige Anzahl von Punkten auf der die obere Grundfläche des Zylinders darstellenden Ellipse an und legen durch sie Lichtstrahlen, die im Bilde durch  $S$  gehen. Die Grundrisse der angenommenen Punkte liegen im Bilde auf der die untere Grundfläche darstellenden Ellipse, die Grundrisse der Strahlen gehen also von diesen Punkten aus nach  $S'$ .

So erhalten wir die Schlagschattengrenze (s. Abb. 137), die die obere Ellipse in denselben Punkten schneiden muß, von denen die Streiflinien ausgehen, und diese Streiflinien erhalten wir, wie wir schon wissen, dadurch, daß wir von  $S'$  aus Tangenten an eine der

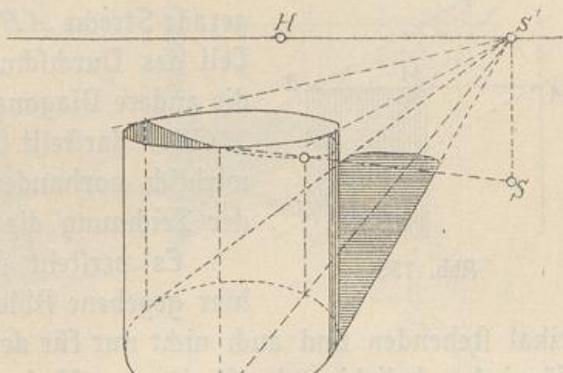


Abb. 137

beiden Ellipsen legen und durch die Berührungs punkte Erzeugende ziehen. Die gefundene Schlagschattenkurve ist selbst ein Stück einer Ellipse, und zwar das perspektivische Bild einer halben Ellipse. Das ergiebt sich aus folgender Ueberlegung:

Die Schlagschattengrenze ist der Durchschnitt des gegebenen Zylinders mit einem Strahlenzylinder, dessen Leitlinie der obere Grundkreis des gegebenen Zylinders ist. Beide Zylinder sind Flächen zweiter Ordnung, d. h. Flächen, die von einer Geraden in zwei Punkten, von einer Ebene daher in einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten werden. Nach einem bekannten Lehrsatz der räumlichen Geometrie schneiden sich eine Fläche  $m^{\text{ter}}$  und eine Fläche  $n^{\text{ter}}$  Ordnung in einer Raumkurve  $m \cdot n^{\text{ter}}$  Ordnung, d. h. einer Kurve, die von einer Ebene in  $m \cdot n$  Punkten geschnitten wird. Unsere beiden Zylinder müssen sich also in einer Kurve  $2 \cdot 2^{\text{ter}}$ , also vierter Ordnung schneiden. Beiden Zylindern gehört aber der obere Grenzkreis des Zylinders — eine Kurve zweiter Ordnung — an; dieser Kreis stellt also einen Teil der Schnittlinie dar, die hier in zwei getrennte Kurven zerfällt; der andere Teil der Schnittlinie, eben unsere gesuchte Schattenkurve, muß also eine Kurve von der Ordnung  $4 - 2 = 2$ , also eine Kurve zweiter Ordnung sein. Eine Kurve zweiter Ordnung aber ist stets eine ebene Kurve, da jede Raumkurve von einer Ebene in mindestens drei Punkten geschnitten wird, also mindestens von der dritten Ordnung sein muß. Jeder ebene Schnitt eines Zylinders — also auch unsere Schattenkurve — ist aber eine Ellipse.

Die Sache wird noch klarer, wenn wir uns — ganz abgesehen von der perspektivischen Darstellung — den gegebenen Zylinder und den Strahlenzylinder auf eine den Strahlen parallele Vertikalebene projiziert denken. Die Endfläche des gegebenen Zylinders stellt sich dann (s. Abb. 138) als die gerade Strecke  $AB$  dar, während die den zweiten Teil des Durchschnitts bildende Ellipse sich als die andere Diagonale  $CD$  des Parallelogramms  $ACBD$  darstellt. Die als Schlagschattengrenze wirklich vorhandene Hälfte der Ellipse ist in der Zeichnung die halbe Diagonale  $MD$ .

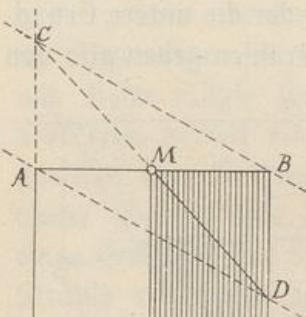


Abb. 138

Es versteht sich wohl von selbst, daß die hier gegebene Ableitung nicht nur für den vertikal stehenden und auch nicht nur für den normalen Zylinder, sondern für jeden beliebig abgeschnittenen Kreis- oder elliptischen Zylinder in ganz beliebiger Lage gilt. Bei jedem solchen Zylinder ist der Schlag-

schatten, den der Rand der Abschnittsfläche auf die innere Wand wirft, eine halbe Ellipse.

Da wir nunmehr den Schatten eines beliebigen Punkts auf eine vertikale Zylinderfläche finden können, bietet die Ermittlung des von einem beliebigen Körper auf den Zylinder geworfenen Schlagschattens keine Schwierigkeiten mehr. So zeigen Abb. 139, 140, 141 die Schlagschatten, die eine quadratische und eine kreisrunde Deckplatte, ein senkrecht stehendes Prisma, eine Pyramide, ein in lotrechter Ebene liegender Kreis auf den vertikalen Zylinder werfen. — Mit Vorteil und in

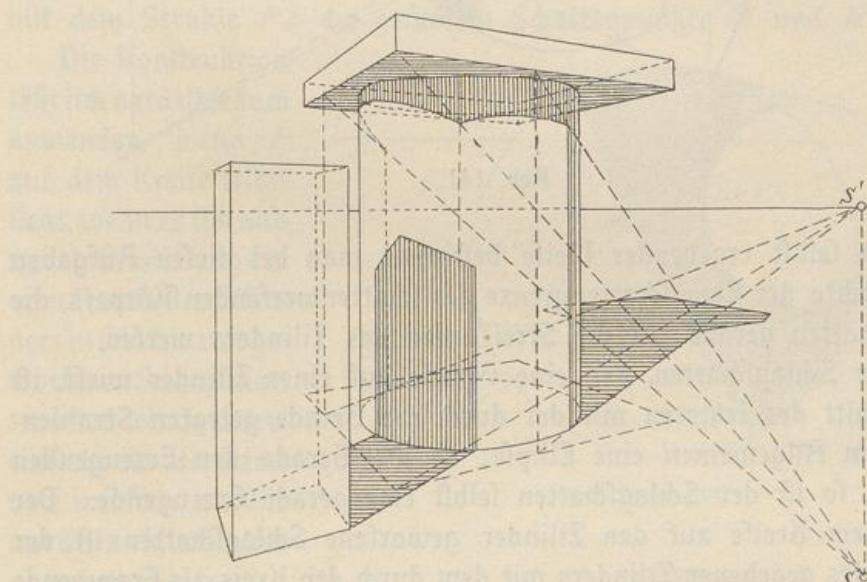


Abb. 139

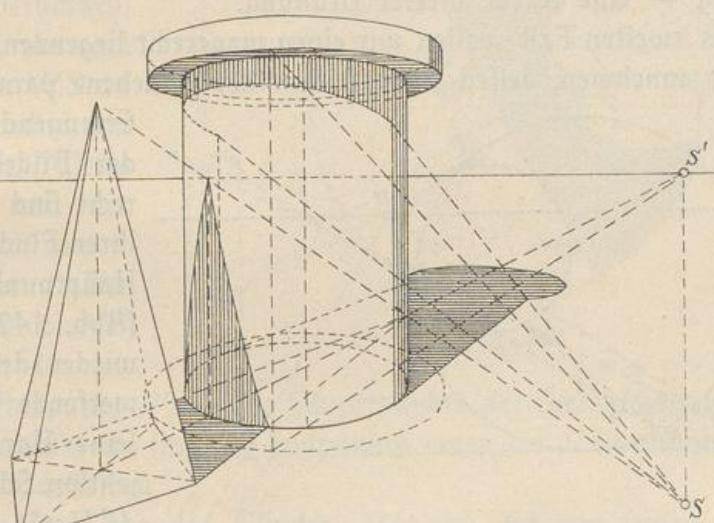


Abb. 140

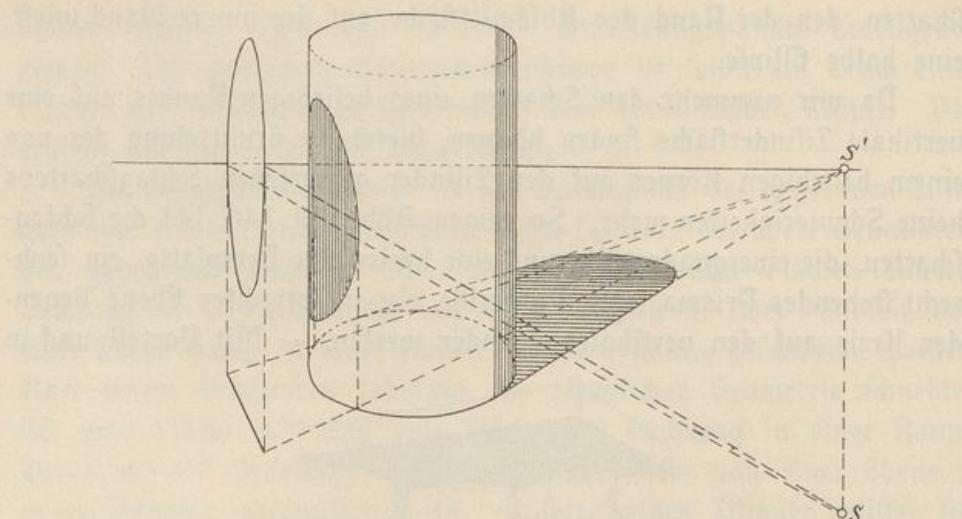


Abb. 141

sich von selbst ergebender Weise bestimmt man bei diesen Aufgaben die Punkte der Eigenschaftsgrenze des schattenwerfenden Körpers, die ihre Schatten gerade auf die Streiflinien des Zylinders werfen.

Der Schlagschatten, den eine Gerade auf einen Zylinder wirft, ist als Schnitt des letzteren mit der durch die Gerade gelegten Strahlenebene im Allgemeinen eine Ellipse; ist die Gerade den Erzeugenden parallel, so ist der Schlagschatten selbst eine gerade Erzeugende. Der von einem Kreise auf den Zylinder geworfene Schlagschatten ist der Schnitt des gegebenen Zylinders mit dem durch den Kreis als Erzeugende bestimmten Strahlenzylinder, also — als Schnitt zweier Zylinder zweiter Ordnung — eine Kurve vierter Ordnung.

Als zweiten Fall wollen wir einen wagerecht liegenden, normalen Zylinder annehmen, dessen Grundflächen der Bildebene parallel, dessen

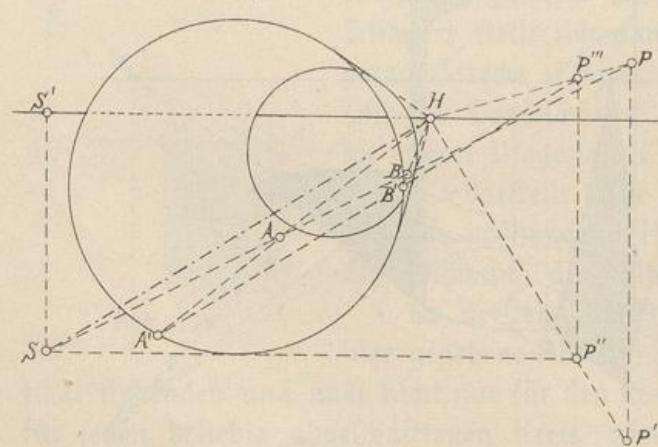


Abb. 142

Erzeugende also auf der Bildebene senkrecht sind und daher ihren Flucht punkt im Hauptpunkte haben (Abb. 142).  $P$  sei wieder der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Horizontalprojektion. Schneiden wir  $P'H$  mit der in der Grundebene liegenden

Seite des dem Kreise umschriebenen Quadrats, ziehen von diesem Schnittpunkte  $P''$  aus eine Vertikale und schneiden sie mit  $PH$ , so ist der Schnittpunkt  $P'''$  die Projektion von  $P$  auf die Grundfläche des Zylinders. Die Projektionen der Strahlen auf dieselbe Grundfläche sind, wie wir schon an der Abbildung 130 erkannten, der Linie  $HS$  parallel; ziehen wir also von  $P'''$  aus eine Parallele zu  $HS$ , so stellt diese die Projektion des durch  $P$  gehenden Strahls auf die Grundfläche dar. Sie schneidet den Grundkreis in  $A'$  und  $B'$ ; verbinden wir also diese Punkte mit  $H$ , so sind die Schnittpunkte der Linien  $HA'$  und  $HB'$  mit dem Strahle  $PS$  die gesuchten Schattenpunkte  $A$  und  $B$ .

Die Konstruktion lässt sich natürlich auch anwenden, wenn  $P$  auf dem Kreise selbst liegt, wenn es sich also um die Ermittlung des vom Rande des Zylinders in sein Inneres geworfenen Schlagschattens handelt. Jetzt vereinfacht sich die Sache noch insofern, als wir nur den auf dem Rande angenommenen

Punkt  $P$  (s. Abb. 143) mit  $S$  zu verbinden, dann von  $P$  aus eine Parallele zu  $HS$  zu ziehen und endlich den Schnittpunkt  $B$  dieser Parallelen und des Kreises mit  $H$  zu verbinden haben. Der Schnittpunkt von  $HB$  und  $PS$  ist der gesuchte Schattenpunkt  $P'$ .

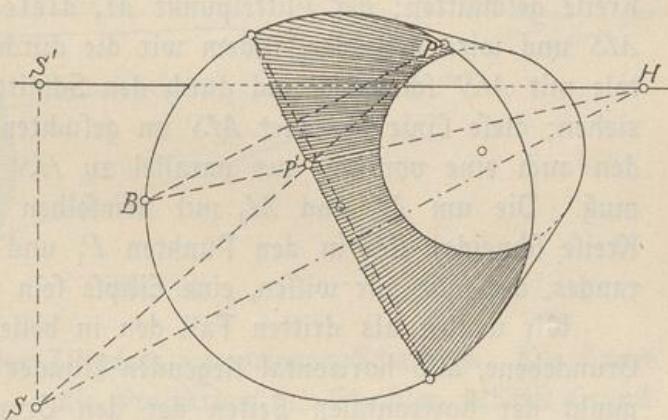


Abb. 143

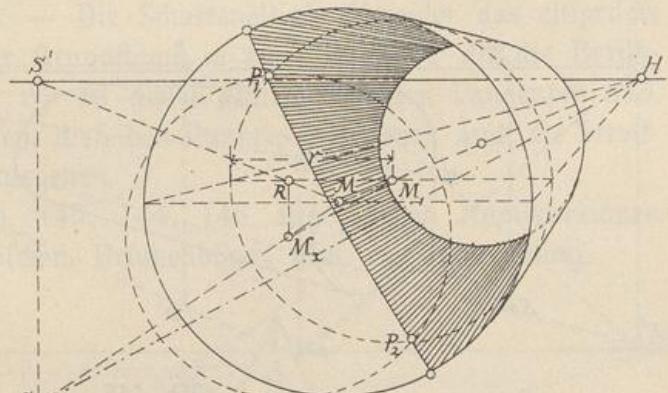


Abb. 144

— Die Schnittpunkte des Schlagschattenrandes mit dem Grundkreise sind die Endpunkte eines auf  $HS$  rechtwinkligen Durchmessers desselben.

Bei dieser Lage des Zylinders lässt sich der von seinem Rande in sein Inneres geworfene Schlagschatten noch auf eine andere Weise

finden. Legen wir nämlich in beliebiger Entfernung eine der Bildebene parallele Ebene durch den Zylinder, so schneidet sie ihn in einem der Bildebene parallelen Kreise vom Radius des Grundkreises. Dieser Kreis bildet sich wieder als Kreis ab, dessen Mittelpunkt  $M_1$  (Abb. 144) auf der Axe  $MH$  beliebig angenommen werden kann und dessen Radius  $r$  sich aus dem Horizontalschnitte direkt ergibt. Die durch alle Punkte des Grundkreises gehenden Strahlen bilden einen schiefen Zylinder, dessen Axe der durch den Mittelpunkt  $M$  des Grundkreises gehende Strahl  $MS$  ist. Dieser Strahlzylinder wird von der Hülfs-ebene ebenfalls in einem sich als Kreis vom Radius  $r$  abbildenden Kreise geschnitten; der Mittelpunkt  $M_2$  dieses Bildkreises liegt auf  $MS$  und wird gefunden, indem wir die durch  $M_1$  gehende Horizontale mit  $MS'$  schneiden und durch den Schnittpunkt  $R$  eine Lotrechte ziehen; diese Linie schneidet  $MS$  im gesuchten Mittelpunkt  $M_2$ , durch den auch eine von  $M_1$  aus parallel zu  $HS$  gezogene Gerade gehen muß. Die um  $M_1$  und  $M_2$  mit demselben Radius  $r$  beschriebenen Kreise schneiden sich in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  des Schlagschattenrandes, der, wie wir wissen, eine Ellipse sein muß.

Wir wollen als dritten Fall den in beliebiger Richtung auf der Grundebene, also horizontal liegenden Zylinder betrachten. Der Flucht-punkt der horizontalen Seiten der den Grundflächen umschriebenen Quadrate sei  $F_1$  (Abb. 145), der Fluchtpunkt der Erzeugenden  $F_2$ ;  $P$  sei wieder der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Horizontalprojektion.

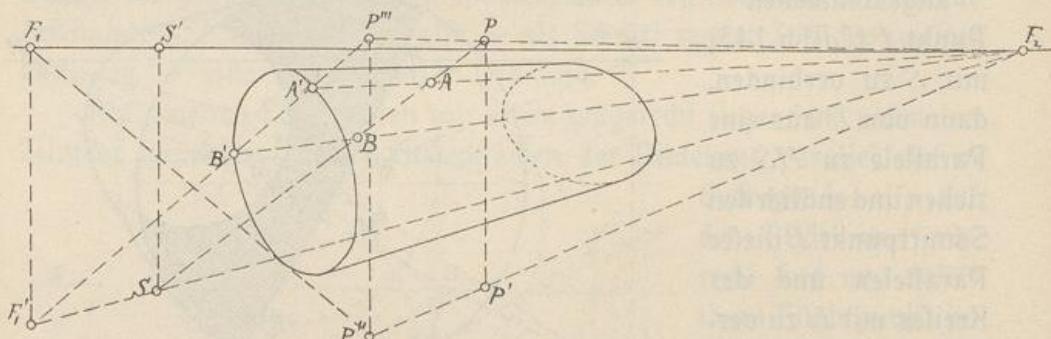


Abb. 145

Wir haben nun den Lichtstrahl  $SP$  auf die Grundfläche des Zylinders zu projizieren; die Projektion muß durch den uns bereits bekannten Fluchtpunkt  $F_1'$  der Projektionen der Strahlen auf die Grundfläche gehen, den wir bekanntlich finden, indem wir eine durch  $F_1$  gezogene Vertikale mit  $F_2 S$  schneiden. — Ziehen wir ferner  $F_2 P'$ , schneiden diese Linie mit der in der Grundebene liegenden Quadratseite, ziehen

durch den Schnittpunkt  $P''$  eine Vertikale und schneiden sie mit  $F_2P$ , so ist der Schnittpunkt  $P'''$  die Projektion von  $P$  auf die Grundfläche des Zylinders, also  $P'''F_1'$  die Projektion des Lichtstrahls auf dieselbe Ebene. Sie schneidet den Umriß der Grundfläche in  $A'$  und  $B'$ ; verbinden wir diese Punkte mit  $F_2$ , so sind die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  der Verbindungslinien mit dem Strahle  $SP$  dessen Schnittpunkte mit der Zylinderfläche, also die gesuchten Schattenpunkte.

Nehmen wir den Punkt  $P$  auf dem Umriß der Grundfläche an, so ist sein Schatten  $P'$  (s. Abb. 146) ein Punkt des von diesem Um-

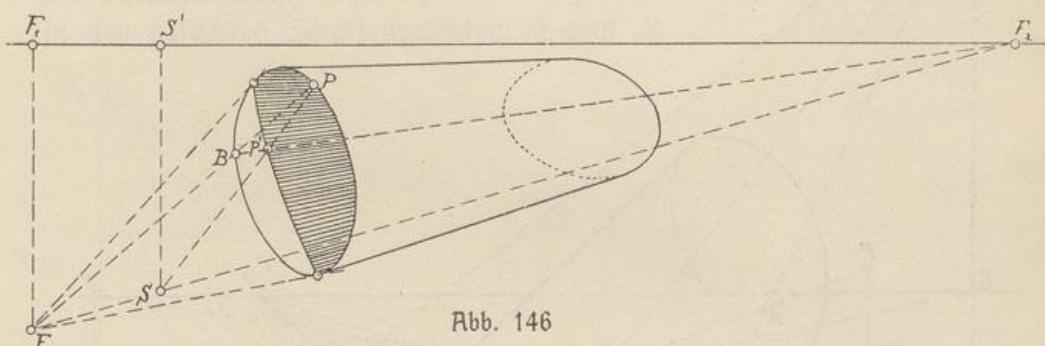


Abb. 146

risse in das Innere des Zylinders geworfenen Schattens. Wir finden ihn, indem wir  $PF_1'$  — die Projektion des Strahles auf die Grundfläche des Zylinders — ziehen, den zweiten Schnittpunkt  $B$  dieses Strahles und der Ellipse mit  $F_2$  verbinden und diese Linie mit dem Strahle  $PS$  schneiden. — Die Schattenellipse schneidet das elliptische Bild des Umrißes der Grundfläche in zwei Punkten, die die Berührungsstrecken der von  $F_1'$  an diesen Umriß gelegten Tangenten sind. Es sind, wie wir wissen, dieselben Punkte, von denen auch die Streiflinien des Zylinders ausgehen.

Die in den Abb. 143, 144, 146 angegebenen Konstruktionen kommen bei Fensternischen, Brückenbögen usw. zur Anwendung.

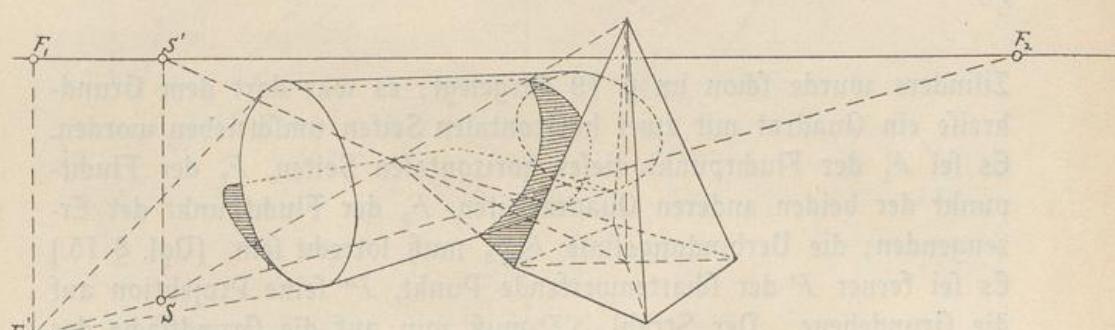
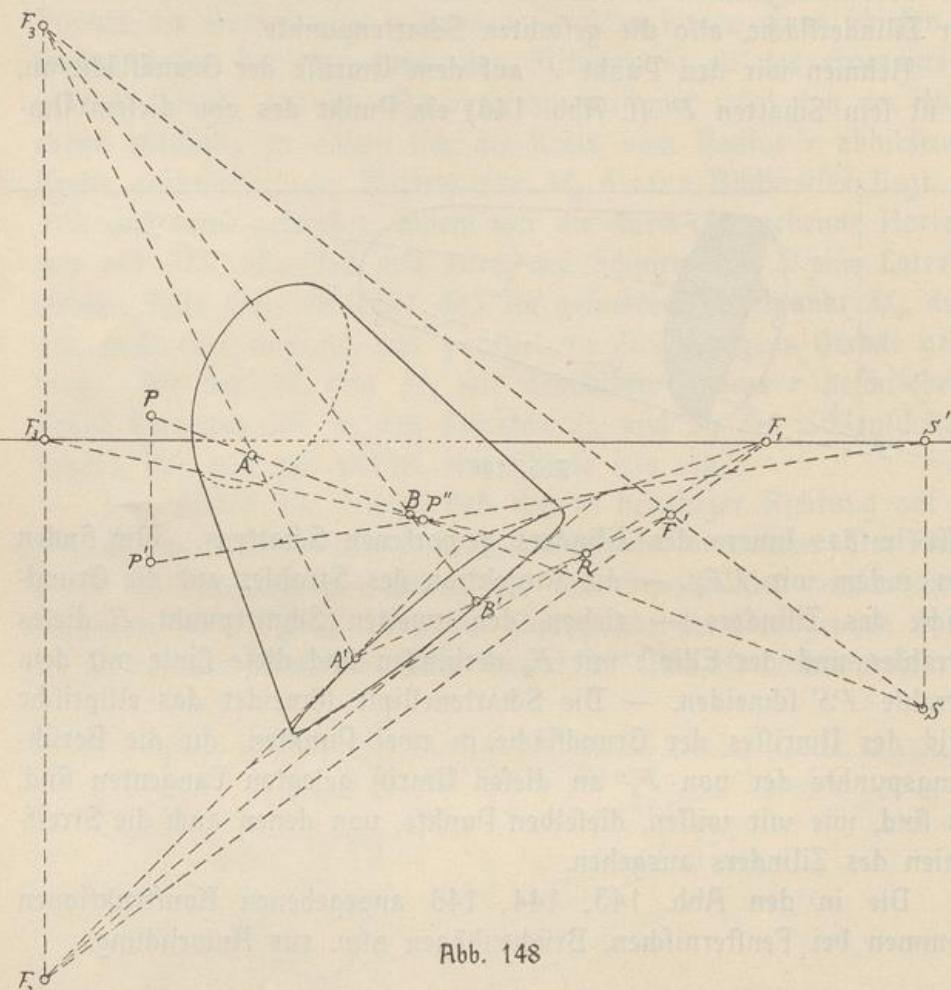


Abb. 147

Die Abb. 147 zeigt den von einer stehenden Pyramide auf einen liegenden Zylinder geworfenen Schlagschatten als Anwendung der in Abb. 145 angegebenen Konstruktion.

Schließlich möge noch der Schlagschatten eines Punktes auf einen in ganz beliebiger Lage befindlichen normalen Kreiszylinder ermittelt werden (s. Abb. 148). Die Aufzeichnung des Bildes eines solchen



Bhh. 148

Zylinders wurde schon im § 19 dargelegt; es war dort dem Grundkreise ein Quadrat mit zwei horizontalen Seiten umschrieben worden. Es sei  $F_1$  der Fluchtpunkt dieser horizontalen Seiten,  $F_2$  der Fluchtpunkt der beiden anderen Quadratseiten,  $F_3$  der Fluchtpunkt der Erzeugenden; die Verbindungslinie  $F_2F_3$  muß lotrecht sein. (Vgl. § 15.) Es sei ferner  $P$  der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Projektion auf die Grundebene. Der Strahl  $SP$  muß nun auf die Grundfläche des Zylinders projiziert werden. Die Projektionen aller Strahlen auf diese

Grundfläche sind parallel, besitzen also einen Fluchtpunkt  $F'$ , der der Schnittpunkt von  $F_1F_2$  und  $F_3S$  sein muß, weil diese Projektionen in der Grundfläche, deren Fluchtlinie  $F_1F_2$  ist, und weil sie ferner in den Erzeugenden parallelen Strahlenebenen, deren Fluchtlinie  $F_3S$  ist, liegen. Ist nun  $F_3'$  die Projektion von  $F_3$  auf den Horizont,  $P''$  der Schatten von  $P$  auf die Grundebene, so ist  $R$ , der Schnittpunkt der in die Grundebene fallenden Quadratseite mit  $F_3'P''$  die Projektion von  $P''$  auf diese Quadratseite,  $F'R$  also die gesuchte Projektion des Strahls. Sie schneidet den Umriß der Grundfläche in  $A'$  und  $B'$ ; die Verbindungsgeraden  $A'F_3$  und  $B'F_3$  schneiden nun den Strahl  $PS$  in den gesuchten Schattenpunkten  $A$  und  $B$ .

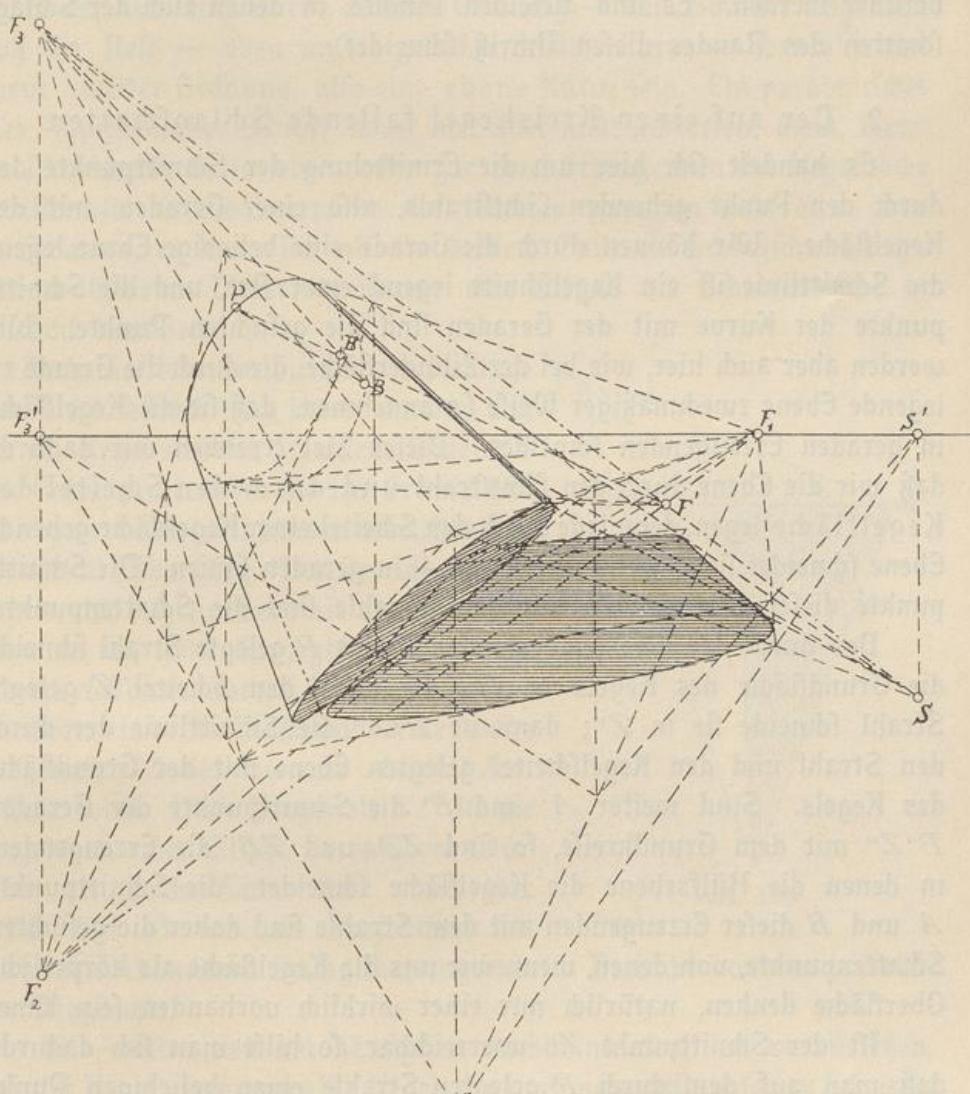


Abb. 149

In Abb. 149 ist der Fall des auf dem Rande selbst liegenden Punktes  $P$  behandelt. Um den von ihm in das Innere des Zylinders fallenden Schatten  $B$  zu finden, ziehen wir einfach die Linie  $PF'$ , die den Rand zum zweiten Male in  $B'$  schneidet, ziehen weiter  $F_3B'$  und  $PS$ . Diese beiden Linien schneiden sich im gesuchten Schattenpunkte  $B$ . — Auf diese Weise wurde der in der Abbildung unsichtbare Schatten ermittelt, den der Rand in das Innere des Zylinders wirft. Dieselbe Figur zeigt auch den von dem Zylinder in dieser allgemeinsten Lage auf die Grundebene geworfenen Schlagschatten sowie die Streiflinien, die von den Punkten der Grundflächenumrisse ausgehen, in denen diese von den von  $F'$  aus an sie gezogenen Tangenten berührt werden. Es sind dieselben Punkte, in denen auch der Schlagschatten des Randes diesen Umriß schneidet.

## 2. Der auf einen Kreiskegel fallende Schlagschatten.

Es handelt sich hier um die Ermittlung der Schnittpunkte des durch den Punkt gehenden Lichtstrahls, also einer Geraden, mit der Kegelfläche. Wir können durch die Gerade eine beliebige Ebene legen; die Schnittlinie ist ein Kegelschnitt irgend einer Art, und die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden sind die gesuchten Punkte. Wir werden aber auch hier, wie bei der Zylinderfläche, die durch die Gerade zu legende Ebene zweckmäßiger Weise so annehmen, daß sie die Kegelfläche in geraden Erzeugenden schneidet. Dieses Ziel erreichen wir dadurch, daß wir die Ebene durch den Lichtstrahl und durch den Scheitel der Kegelfläche legen, denn jede durch den Scheitel einer Kegelfläche gehende Ebene schneidet sie — wenn überhaupt — in geraden Linien. Die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Strahle sind die Schattenpunkte.

Der durch den schattenwerfenden Punkt  $P$  gelegte Strahl schneide die Grundfläche des Kegels in  $P''$ , der durch den Scheitel  $Z$  gelegte Strahl schneide sie in  $Z''$ ; dann ist  $P''Z''$  die Schnittlinie der durch den Strahl und den Kegelscheitel gelegten Ebene mit der Grundfläche des Kegels. Sind weiter  $A'$  und  $B'$  die Schnittpunkte der Geraden  $P''Z''$  mit dem Grundkreise, so sind  $ZA'$  und  $ZB'$  die Erzeugenden, in denen die Hülfsfläche die Kegelfläche schneidet; die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  dieser Erzeugenden mit dem Strahle sind daher die gesuchten Schattenpunkte, von denen, wenn wir uns die Kegelfläche als körperliche Oberfläche denken, natürlich nur einer wirklich vorhanden sein kann.

Ist der Schnittpunkt  $Z''$  unerreichbar, so hilft man sich dadurch, daß man auf dem durch  $P$  gelegten Strahle einen beliebigen Punkt  $Q$  annimmt und den Schnittpunkt  $Q''$  der Verbindungsgeraden  $ZQ$  mit

der Grundfläche des Kegels aufsucht. Da diese Verbindungsline eben-falls in der durch den Scheitel des Kegels und den Punkt  $P$  gehenden Lichtstrahlenebene liegen muß, ist jetzt  $P''Q''$  die Schnittlinie dieser Ebene mit der Grundfläche des Kegels und schneidet deren Umriß in den Punkten  $A'$  und  $B'$ .

Der Schlagschatten des Randes in das Innere der Kegelfläche ist, wie beim Zylinder, stets eine Ellipse. Diese Schattenkurve ist nämlich der Schnitt der Kegelfläche mit der durch den Rand der Grundfläche gehenden, durch Lichtstrahlen gebildeten Zylinderfläche; diese Schnittlinie muß aber, als Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, eine Kurve vierter Ordnung sein. Da nun der Umriß der Grundfläche — ein Kreis, also eine Kurve zweiter Ordnung — dem Schnitte angehört, muß der Rest — eben unsere gesuchte Schattenkurve — ebenfalls eine Kurve zweiter Ordnung, also eine ebene Kurve sein. Ein parabolischer oder hyperbolischer Schnitt kann hier aber nicht auftreten, denn, wenn die schneidende Ebene einer oder gar zwei Erzeugenden der Kegelfläche parallel ist, ist die Innenseite der letzteren ganz im Licht oder ganz im Schatten, es kann sich also in keinem Falle ein Schlagschatten des Randes bilden. Daher kann nur eine Ellipse als Schattenkurve in Betracht kommen.

Auch hier können wir uns die Sachlage sehr leicht dadurch noch klarer machen, daß wir den Kegel und den Strahlzylinder auf eine Ebene projizieren, die zur Grundfläche des Kegels rechtwinklig und den Lichtstrahlen parallel ist (Abb. 150). Der Grundkreis des Kegels, der zugleich Leitlinie des Strahlzylinders ist, stellt sich jetzt als die gerade Strecke  $AB$  dar, während der zweite Teil des Durchschnitts beider Flächen durch die zweite Diagonale  $CD$  des Vierecks  $ACBD$  dargestellt wird. Diese Diagonale  $CD$  ist die Projektion einer Ellipse, deren Ebene senkrecht zur Zeichenfläche steht, und das Stück  $ED$  ist das als Projektion der wirklich vorhandenen Schlagschattengrenze in Betracht kommende Stück der Diagonale.

Wir wollen den am häufigsten vorkommenden Fall voraussetzen, daß der Kegel ein normaler Kegel, die Verbindungsline seines Scheitels mit dem Mittelpunkte der Grundfläche also auf letzterer senkrecht sei.

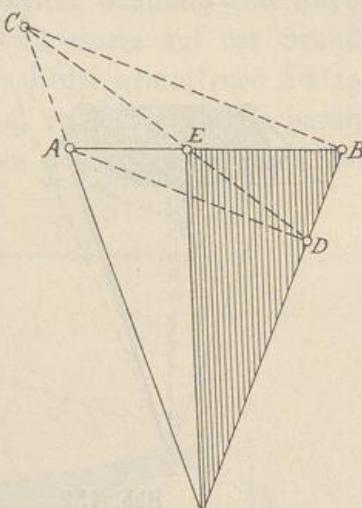


Abb. 150

Steht der Kegel mit seiner Grundfläche auf der Grundebene, so ist die Sache überaus einfach.  $P$  sei wieder der schattenwerfende Punkt,  $P'$  seine Horizontalprojektion; der durch  $P$  gelegte Strahl schneidet die Grundebene in  $P''$ , dem Schnittpunkte von  $SP$  und  $S'P'$ . Ebenso schneidet der durch den Scheitel  $Z$  gelegte Strahl die Grundebene in  $Z''$ , dem Schnittpunkte von  $SZ$  und  $S'Z'$  [s. Abb. 151].

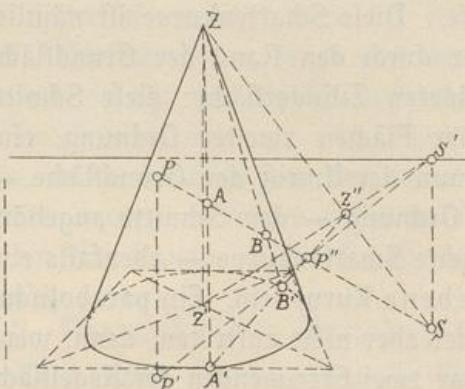


Abb. 151

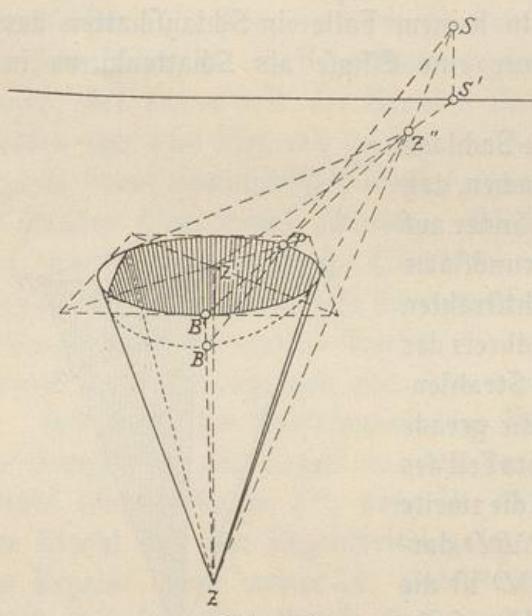


Abb. 152

offenbar in den beiden Punkten schneiden, von denen die Streiflinien ausgehen.

Der Schatten einer beliebigen Geraden auf die Kegelfläche ist selbstverständlich ein Kegelschnitt — der Schnitt der Kegelfläche mit der durch die Gerade gehenden Strahlenebene. Die Art der Schnittlinie hängt offenbar von der Lage der Geraden ab; beispielsweise ist

Die Verbindungs linie  $P''Z''$  ergibt mit dem Umriss der Grundfläche die Schnittpunkte  $A'$  und  $B'$ , deren Verbindungs linien mit  $Z$  den Strahl in  $A$  und  $B$ , den gesuchten Schatten punkten, schneiden.

Die Abb. 152 zeigt die entsprechende Konstruktion für den auf der Spitze stehenden Kegel und einen im Umriss der Grundfläche liegenden Punkt  $P$ , der jetzt zugleich der Punkt  $A'$  und der Punkt  $A$  ist. Wir haben also nur den durch den Scheitel gehenden Strahl mit der Ebene der Grundfläche zu schneiden und den Schnittpunkt  $Z''$  mit  $P$  zu verbinden; die Verbindungs linie schneidet den Grundriss zum zweiten Male in  $B'$ , und der Schnittpunkt von  $ZB'$  mit dem Strahle ist der gesuchte Schattenpunkt. Auf diese Weise finden wir beliebig viele Punkte der gesuchten Ellipse; sie muß den Umriss der Grundfläche

der Schatten einer vertikalen Geraden als Schnitt der Kegelfläche mit einer der Axe parallelen Ebene stets ein Hyperbelast. Die Abb. 153 zeigt den Schlagschatten, den ein auf der Grundebene stehendes, normales Prisma auf den Kegel wirft; der Schatten, den die rechte, vordere Prismenkante auf den Kegel wirft, ist eine Hyperbel.

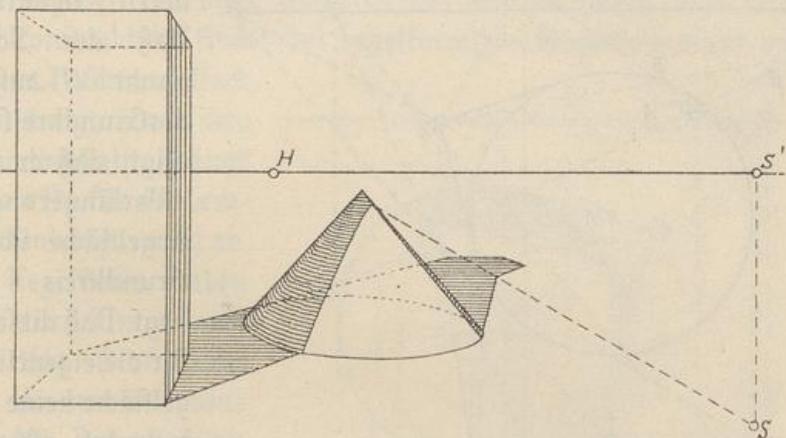


Abb. 153

Der Schatten eines Kreises auf eine Kegelfläche ist als Schnitt einer Zylinderfläche mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung eine Kurve vierter Ordnung; so zeigt Abb. 154 den von einem auf der Grundebene stehenden, normalen Zylinder auf den Kegel geworfenen Schlagschatten. Außer der Kurve vierter Ordnung tritt hier ein sie berührender Hyperbelbogen auf, der der Schatten der vorderen Streiflinie des Zylinders ist.

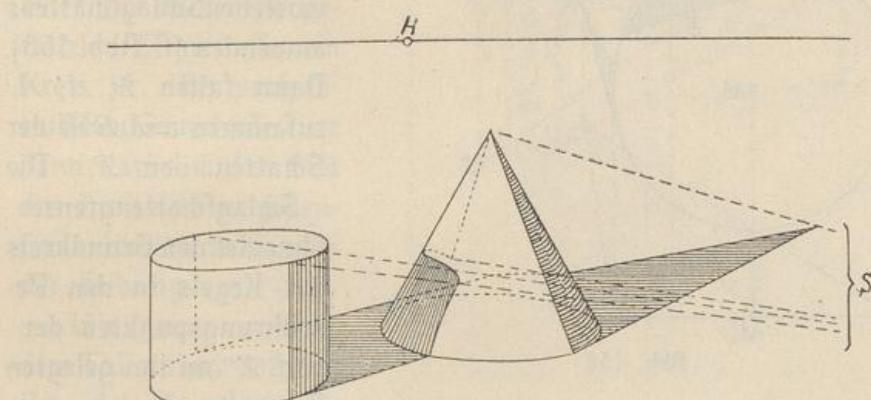


Abb. 154

Als zweiten wollen wir den Fall betrachten, daß die Grundfläche des Kegels der Bildebene parallel, seine Axe also auf ihr senkrecht ist. Projektieren wir den Grundkreis des Kegels auf die

Grundebene, so erhalten wir eine zur Grundlinie parallele gerade Strecke, deren Länge gleich dem Durchmesser des die Grundfläche darstellenden Kreises ist. Die in Abb. 155 dargestellte Konstruktion entspricht genau der vorhin gegebenen allgemeinen Erläuterung und bedarf

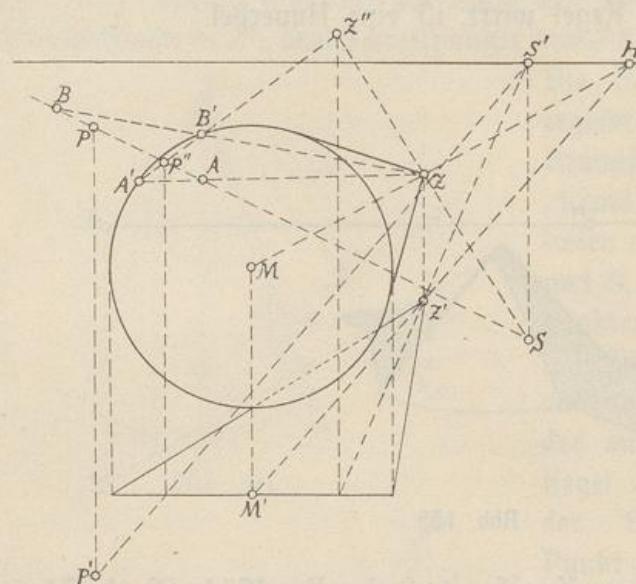


Abb. 155

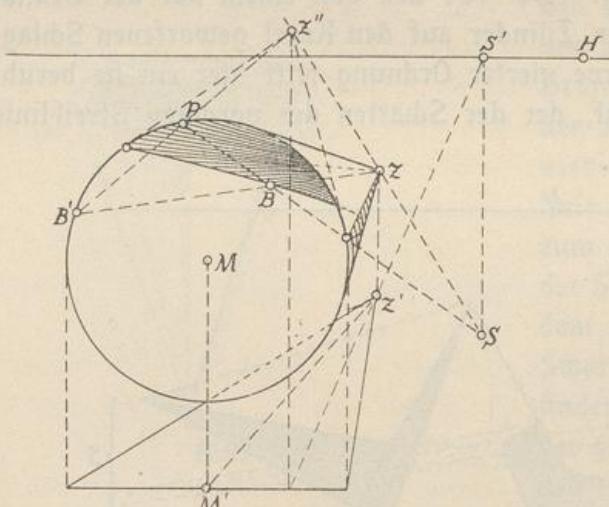


Abb. 156

daher keiner besonderen Beschreibung. Daß der Schattenpunkt  $B$  außerhalb des Grundkreises fällt, zeigt, daß er auf der Verlängerung der Kegelfläche über den Grundkreis hinaus liegt. Daß dieser Kreis für die eigentliche Kegelfläche keine Grenze bedeutet, ist uns ja hinlänglich bekannt.

Dieselbe Konstruktion lässt sich natürlich für auf dem Grundkreise liegende Punkte, also zur Ermittelung des von diesem Kreise in das Innere der Kegelfläche geworfenen Schlagschattens anwenden (s. Abb. 156). Dann fallen  $P, A, A'$  zusammen und  $B$  ist der Schatten von  $P$ . Die Schlagschattengrenze schneidet den Grundkreis des Kegels in den Berührungs punkten der von  $Z'$  an ihn gelegten Tangenten.

Wir können aber in diesem Falle auch wieder, wie bei dem in derselben Lage befindlichen Zylinder, der Bildebene parallele Hülfs-ebenen anwenden. Eine solche Ebene schneidet die Kegelfläche in einem sich als Kreis abbildenden Kreise und auch die Zylinderfläche der durch

die Punkte des Grundkreises gehenden Strahlen wird in einem sich als Kreis abbildenden Kreise geschnitten. Die Schnittpunkte der in derselben Ebene liegenden Kreise sind Punkte der gesuchten Schattenkurve. — Die Abb. 157 zeigt die Konstruktion deutlich; die Radien der beiden zur Bestimmung eines Punkts der Kurve erforderlichen Kreise ergeben sich ohne Weiteres aus dem perspektivischen Grundriss. Diese Konstruktion findet bei kegelförmigen Bogenleibungen an Türen, Fenstern, Nischen vielfach Anwendung, und ihre Anwendbarkeit hängt von dem Profil der Leibung offenbar garnicht ab. Eine Kegelfläche haben wir natürlich nur dann, wenn das Profil eine gegen die zur Bildebene senkrechte Axe geneigte gerade Linie ist. Aber auch bei jedem andern Profil läßt sich, wie man sofort erkennt, dieselbe Konstruktion anwenden, wenn nur die Leibungsfläche eine Umdrehungsfläche, ihr Schnitt mit einer zur Bildebene parallelen Ebene also ein Kreis ist. Im perspektivischen Grundriss tritt dann natürlich das Bild des durch die Axe gehenden Horizontalschnitts der Leibung auf.

Wir gehen nun zu dem Falle über, daß die Axe des Kegels horizontal, aber nicht rechtwinklig zur Bildebene liegt. Jetzt ist die Grundfläche des Kegels

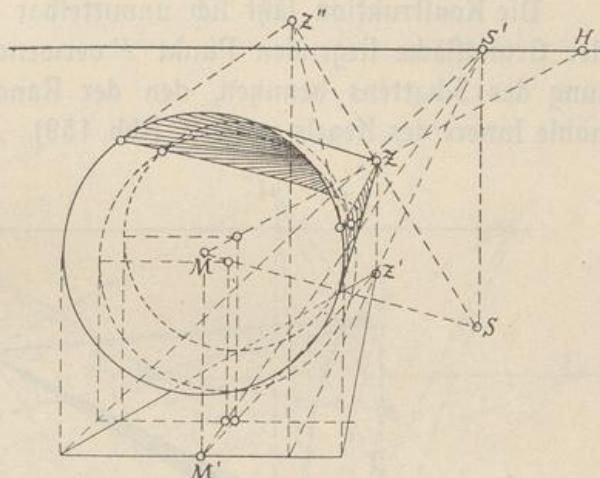


Abb. 157

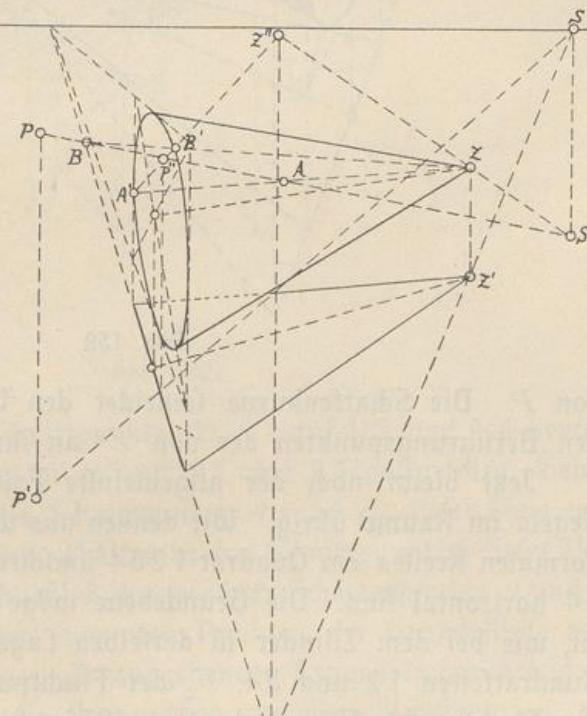


Abb. 158

vertikal, ihre Horizontalprojektion ist also wie im vorigen Falle eine gerade Strecke, die aber hier nicht dem Horizonte parallel ist. Die Horizontalprojektion des ganzen Kegels ist ein Dreieck. — Die Konstruktion ist genau nach dem allgemein gültigen Schema auszuführen (s. Abb. 158) und bietet durchaus keine Schwierigkeiten. Sie ist aus der Abbildung vollständig erkennbar. Der Schnittpunkt  $B$  liegt auf der Verlängerung der Kegelfläche.

Die Konstruktion lässt sich unmittelbar auch für einen im Umrisse der Grundfläche liegenden Punkt  $P$  verwenden und also zur Ermittlung des Schattens benutzen, den der Rand der Grundfläche in das hohle Innere des Kegels wirft (s. Abb. 159).  $B$  ist der gesuchte Schatten

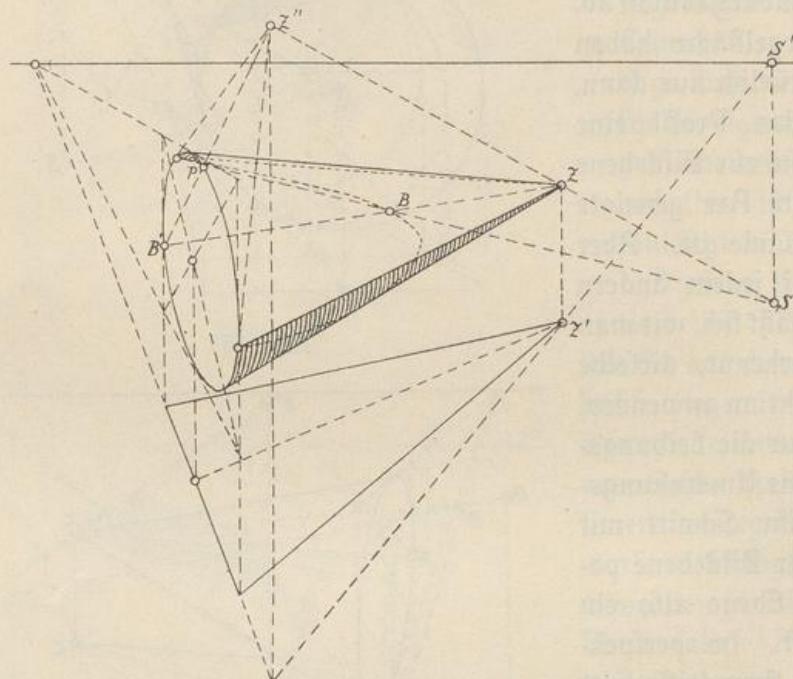


Abb. 159

von  $P$ . Die Schattenkurve schneidet den Umriß der Grundfläche in den Berührungs punkten der von  $Z'$  an ihn gezogenen Tangenten.

Jetzt bleibt noch der allgemeinste Fall der beliebigen Lage des Kegels im Raume übrig. Wir denken uns wieder dem Grundkreise des normalen Kreises ein Quadrat 1 2 3 4 umschrieben, dessen Seiten 1 2 und 3 4 horizontal sind. Die Grundebene möge durch 3 4 gelegt sein. Es sei, wie bei dem Zylinder in derselben Lage,  $F_1$  der Fliehpunkt der Quadratseiten 1 2 und 3 4,  $F_2$  der Fliehpunkt von 1 3 und 2 4,  $F_3$  der Fliehpunkt der auf der Grundfläche senkrechten Höhe des Kegels [s. Abb. 160]. Dann ist die Verbindungsline  $F_2 F_3$  lotrecht und ihr

Schnittpunkt  $F_3'$  mit dem Horizonte der Fluchtpunkt der Horizontalprojektionen von 13, 24 und der Höhe. Die Horizontalprojektion  $S'P'$  des durch  $P$  gehenden Strahls schneidet 1'3 und 34 in  $V'$  und  $W$ ; erstem Punkt entspricht im Raume der Punkt  $V$ ; der Schnittpunkt  $P''$  der Linie  $VW$  mit dem Strahle  $SP$  ist also dessen Schnitt mit der Grundfläche. In ganz derselben Weise ermitteln wir den Schnittpunkt  $Z''$  des durch die Kegelspitze gelegten Strahls mit der

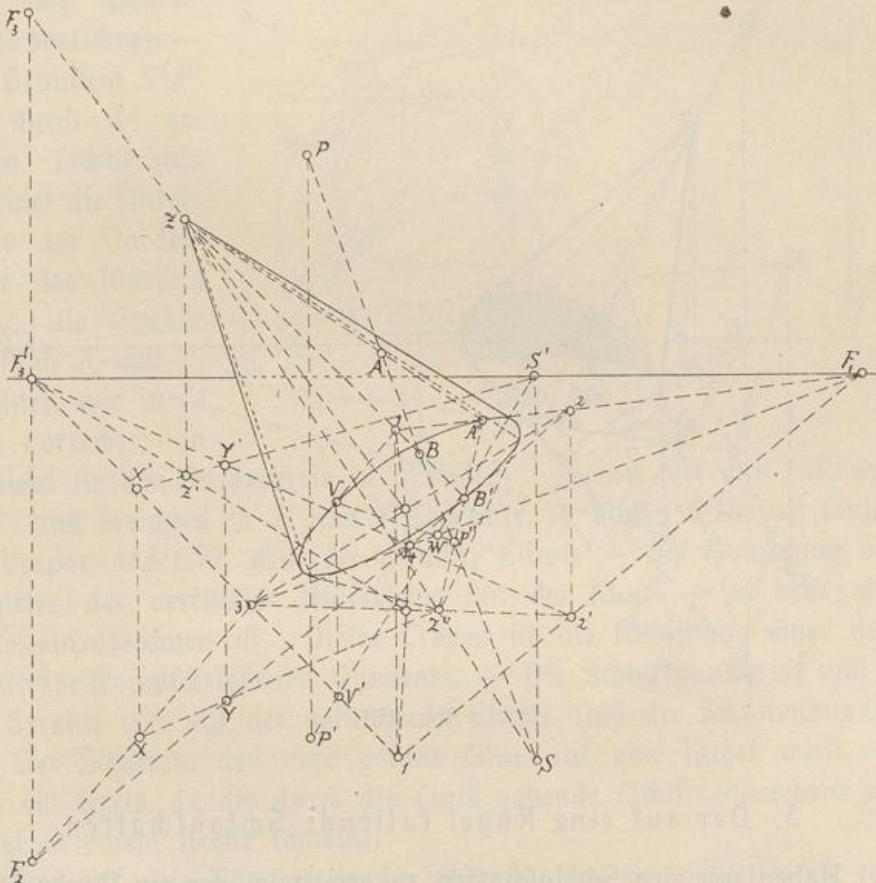


Abb. 160

Grundfläche, wobei die Schnittpunkte  $X'$ ,  $Y'$  auf 1'3 und 2'4 benutzt werden, denen die Punkte  $X$ ,  $Y$  auf 13 und 24 entsprechen, ziehen dann  $P''Z''$ , verbinden die Schnittpunkte  $A'$  und  $B'$  dieser Linie und der Grundellipse mit  $Z$  und erhalten in den Schnittpunkten dieser Verbindungslinien mit  $PS$  schließlich die gesuchten Schattenpunkte  $A$  und  $B$ .

Die Streiflinien gehen von den Punkten der Grundellipse aus, in denen diese von den von  $Z''$  ausgehenden Tangenten berührt wird.

Die Abb. 161 zeigt die Anwendung derselben Konstruktion auf einen Punkt des Umrisses der Grundfläche und damit die Ermittlung

des Schlagschattens, den dieser Umriß in das Innere der hohlen Kegelfläche wirft.

Um in diesem Falle und den früher behandelten ähnlichen Fällen den Berührungs punkt der Schlagschattenkurve mit der Wendelinie des Kegels zu finden, braucht man nur den Punkt  $P$  so zu bestimmen, daß der zugehörige Punkt  $B'$  in die Wendelinie fällt, also ihr Berührungs punkt mit der Grundellipse ist.

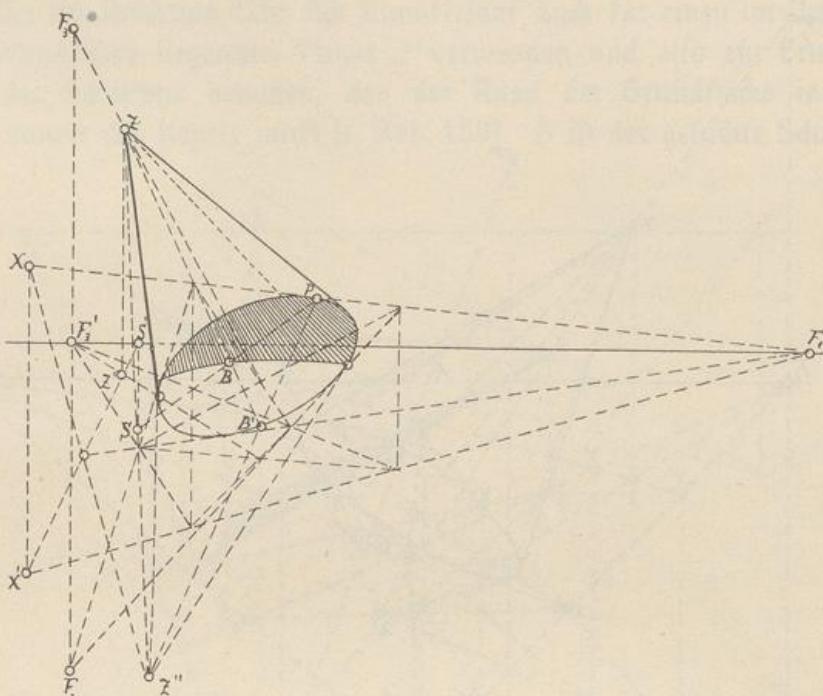


Abb. 161

### 3. Der auf eine Kugel fallende Schlagschatten.

Haben wir den Schlagschatten zu ermitteln, den ein Punkt  $P$  auf eine Kugel wirft, so legen wir durch ihn einen Lichtstrahl und durch diesen eine ganz beliebige Ebene, die die Kugel schneidet. Der Schnitt einer Kugel mit einer Ebene ist unter allen Umständen ein Kreis, der sich als Kegelschnitt, in den gewöhnlichen Fällen als Ellipse abbildet. Die Schnittpunkte dieses Kegelschnittes mit dem Strahle  $SP$  sind dessen Schnittpunkte mit der Kugel, von denen einer die physikalische Bedeutung des Schattens hat.

Am bequemsten ist es, wenn wir die durch den Strahl zu legende Ebene vertikal annehmen. Wir können uns nun der Kugel einen Würfel umschrieben denken, der mit einer Seitenfläche in der Grund-

ebene liegt, während zwei andere Seitenflächen der Bildebene parallel sind. Die Projektion der Kugel auf die Vorderfläche des Würfels stellt sich als Kreis, die Projektion auf die Grundebene im Allgemeinen als Kegelschnitt, gewöhnlich als Ellipse dar (Abb. 162), die dem Bilde der in die Grundebene fallenden Seitenfläche eingeschrieben ist. Wir wollen den Kreis kurz als Vorderkreis, die Ellipse als Grundellipse bezeichnen.— Der Grundriß  $S'P'$  des durch  $P$  gelegten Lichtstrahls schneidet die Unterkante der Vorderfläche des Würfels in  $U$ , die Grund-

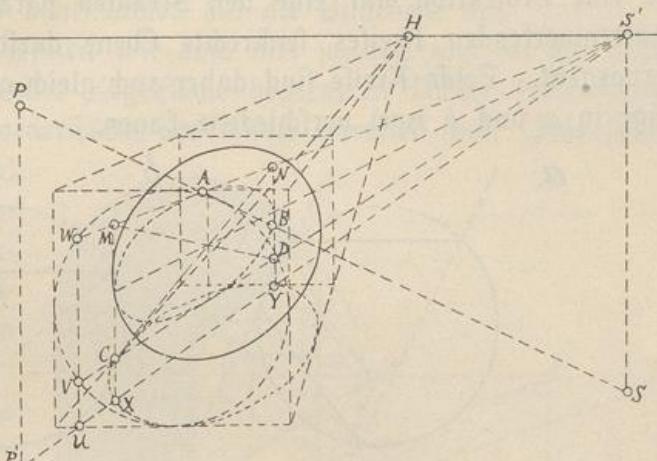
Errichten wir in  $U$  eine Lotrechte. so

schneidet sie den Vorderkreis in  $V$  und  $W$ . Ziehen wir nun  $VS'$  und  $WS'$  und errichten in  $X$  und  $Y$  Lotredite, so bilden diese vier Linien ein Trapez  $MNCD$ , dem die gesuchte Ellipse — die Abbildung des Schnittes der vertikalen Hülfs ebene mit der Kugel — in bekannter Weise einzuzeichnen ist. Dieses Trapez ist die Abbildung eines dem Schnittkreise umschriebenen Quadrats. — Die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  des Strahls  $SP$  mit der gefundenen Ellipse sind die Schattenpunkte.

Der Schatten, den eine gerade Linie auf eine Kugel wirft, ist stets ein Kreis, da die durch die Linie gehende Lichtstrahlenebene die Kugel in einem Kreise schneidet.

Der auf eine Kugel fallende Schlagschatten eines Kreises ist eine Kurve vierter Ordnung — der Schnitt der Kugel mit dem durch den Kreis bestimmten Strahlenzylinder. Diese Kurve vierter Ordnung geht in einen Kreis über, wenn die Ebene des schattenwerfenden Kreises den Lichtstrahlen parallel ist.

Liegt der Kreis auf der Kugelfläche selbst, wirft also der Rand eines durch eine Ebene abgeschnittenen Segments seinen Schlagschatten in das Innere der hohlen Kugel, so hat diese mit dem Strahlenzylinder schon den Schnittkreis gemein; von der Kurve vierter Ordnung, die der vollständige Schnitt darstellen muß, bleibt also nur eine Kurve zweiter Ordnung, also eine ebene Kurve übrig. Da aber der ebene



Bbb. 162

Schnitt einer Kugel stets ein Kreis ist, muß der Schatten, den ein auf der Kugel liegender Kreis in ihr Inneres wirft, stets wieder ein Kreis sein.

Der schattenwerfende Kreis und sein Schlagschatten sind ganz einfach Wechselseiten des Strahlzylinders, was aus der Abb. 163, die eine Projektion auf eine den Strahlen parallele, zur Ebene des schattenwerfenden Kreises senkrechte Ebene darstellt, ohne Weiteres hervorgeht. Beide Kreise sind daher auch gleich groß. Die Abbildung zeigt in *a* und *b* zwei verschiedene Lagen.

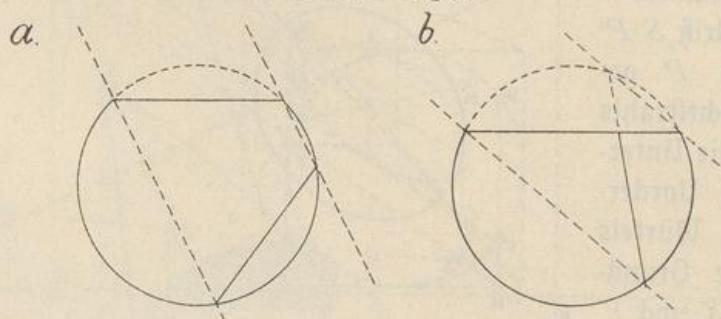


Abb. 163

Als besonders interessantes und oft vorkommendes Beispiel mag der an einer Nische, die oben durch eine Viertelkugel geschlossen ist, auftretende Schlagschatten ermittelt werden. Zunächst soll die Vorderfläche der Nische der Bildebene parallel angenommen werden. Jetzt können wir den Schlagschatten auf zwei verschiedene Arten finden. Erstens können wir die für einen beliebigen schattenwerfenden Punkt gültige Konstruktion auch auf die Punkte des schattenwerfenden Kreises anwenden (s. Abb. 164). In der Abbildung ist erstens der noch auf die Zylinderfläche fallende Schatten  $B_1$  eines Punktes  $P_1$  in sich von selbst ergebender Weise ermittelt worden; auf den Punkt  $P_2$  aber, der seinen Schatten  $B_2$  auf die Kugelfläche wirft, wurde die soeben erläuterte, allgemein gültige Konstruktion angewandt. Selbstverständlich kommt hier nur der Bogen der Ellipse

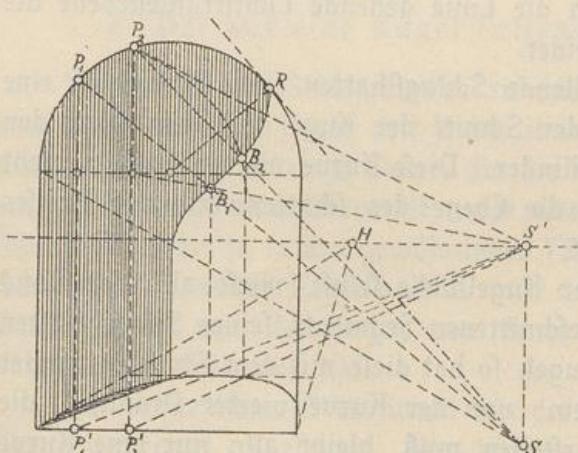


Abb. 164

soeben erläuterte, allgemein gültige Konstruktion angewandt. Selbstverständlich kommt hier nur der Bogen der Ellipse

in Betracht, der von  $P_2$  bis an das Bild des Kreises, in dem sich Kugel und Zylinder berühren, reicht. Der Punkt  $R$ , in dem die Schlagschattengrenze den Grenzkreis der Nische schneidet, ist der Punkt, in dem dieser Kreis von einer zu  $HS$  parallelen Tangente berührt wird, denn diese Verbindungsgeraden gibt, wie wir schon wissen, die Richtung der Projektionen der Lichtstrahlen auf die Bildebene an.

Zweitens aber können wir auch hier wieder, wie bei der durch eine halbe Zylinder- oder Kegelfläche begrenzten Nische, Hülfsbenen benutzen, die der Vorderfläche der Nische parallel sind. Jede solche Ebene schneidet sowohl die Kugel als auch den durch den Schattenwerfenden Kreis bestimmten Strahlenzylinder in einem Kreise, beide Kreise bilden sich als Kreise ab, und einer der Schnittpunkte dieser Kreise ist offenbar ein Punkt der gesuchten Schattenkurve. Den Radius des Schnittkreises der Ebene und der Kugel finden wir aber augenscheinlich aus dem Grundriss mit weit größerer Genauigkeit, als aus dem perspektivischen Bilde, und daher empfiehlt sich hier ausnahmsweise die Benutzung des Grundrisses für die Konstruktion des Schattens. Die Konstruktion selbst geht aus der Abb. 165 mit voller Klarheit hervor.

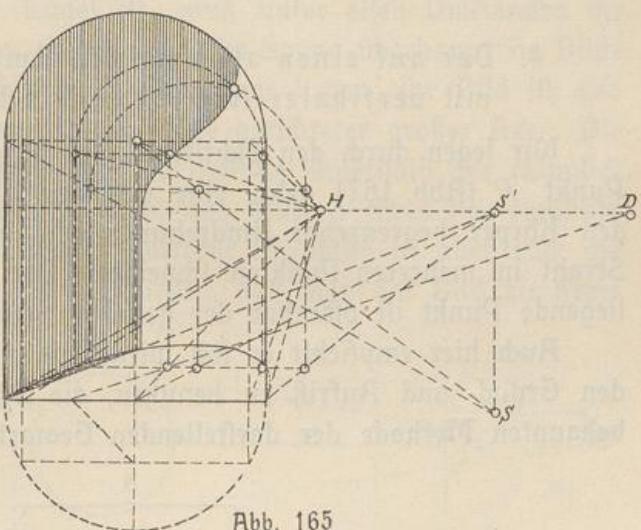


Abb. 165

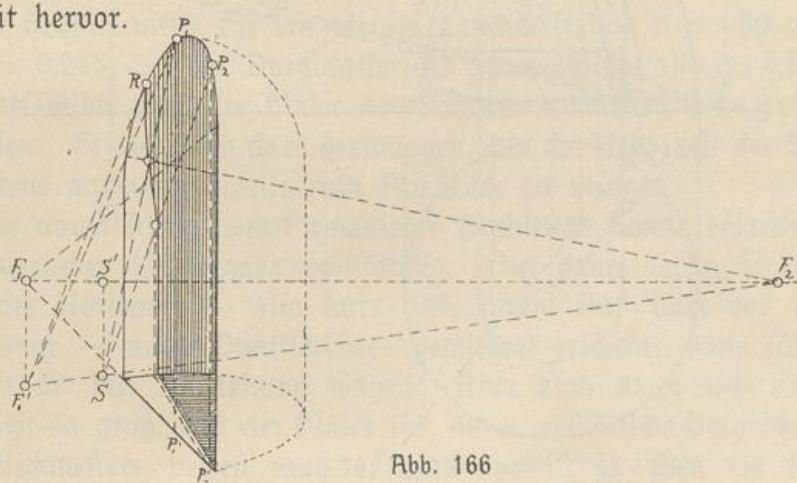


Abb. 166

Ist die Vorderfläche der Nische der Bildebene nicht parallel, so ist natürlicherweise nur noch die erstere Konstruktion anwendbar (Abb. 166). Der Punkt  $R$ , in dem der Schlagschattenumriß den Umriß der Nische schneidet, ist der Berührungsrand der von  $F_1'$  an letzteren Umriß gelegten Tangente. Dieser Punkt  $F_1'$  ist der Fluchtpunkt der auf die Vorderfläche der Nische projizierten Sonnenstrahlen und wird bekanntlich gefunden, indem man eine durch den Fluchtpunkt  $F_1$  gezogene Lotrechte mit der Verbindungsgeraden  $F_2S$  schneidet.  $F_1$  und  $F_2$  sind die Fluchtpunkte zweier zu einander rechtwinkliger horizontaler Richtungen.

#### 4. Der auf einen allgemeinen Umdrehungskörper mit vertikaler Axe fallende Schlagschatten.

Wir legen durch den Lichtstrahl, der durch den schattenwerfenden Punkt  $P$  (Abb. 167) geht, eine vertikale Ebene. Sie schneidet die den Körper begrenzende Umdrehungsfläche in einer Kurve, die den Strahl in mehreren Punkten schneidet. Der dem Punkte  $P$  zunächst liegende Punkt ist offenbar der gesuchte Schattenpunkt.

Auch hier empfiehlt es sich wieder im Interesse der Genauigkeit, den Grund- und Aufriss zu benutzen, die Schnittkurve also nach der bekannten Methode der darstellenden Geometrie zu konstruieren und

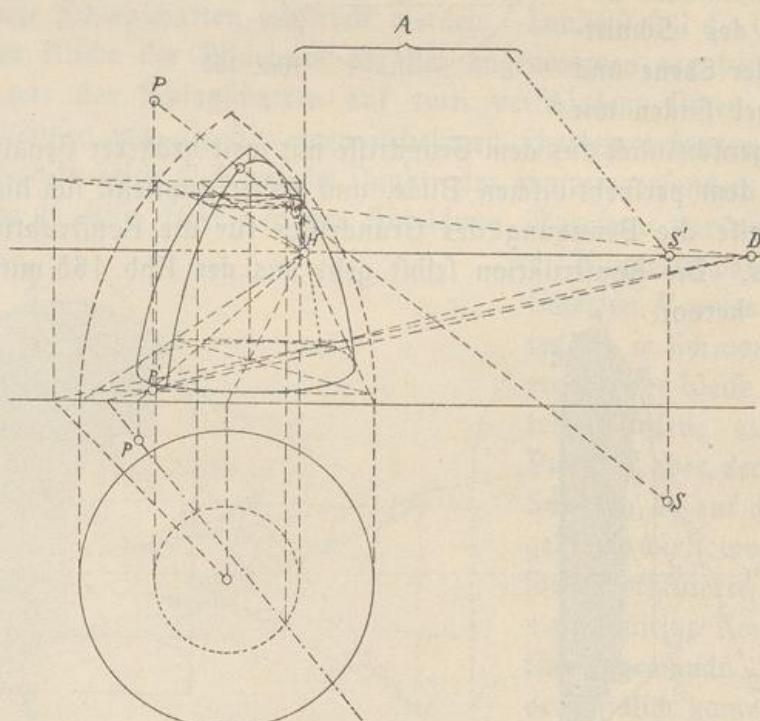


Abb. 167

die gewonnenen Punkte einzeln in das Bild zu übertragen. Die Abb. 167 zeigt deutlich die Ausführung der Konstruktion für einen allgemeinen Punkt. Der dabei benützte Grundriß des Strahls ist, wie wir wissen, der Verbindungslinie des umgeklappten Auges mit  $S'$  parallel.

### § 34. Die Größe des Sonnenbildes und die Konstruktion des Halbschattens.

Da die Sonne eine Kugel ist, muß unter allen Umständen ihr Bild ein Kegelschnitt sein. Wenn aber die Sonne überhaupt im Bilde erscheinen soll, muß sie hinter der Bildebene liegen; ihr Bild ist also eine Ellipse mit nach dem Hauptpunkte gerichteter großer Axe. Die Sonne kann aber nur dann zur Darstellung innerhalb des räumlich beschränkten Bildes gelangen, wenn das Bild  $S$  ihres Mittelpunkts nur wenig vom Hauptpunkte  $H$  entfernt ist; dann ist aber auch die Ellipse so wenig vom Kreise verschieden, daß man das Bild als Kreis annehmen kann.

Die scheinbare Größe der Sonne schwankt etwas im Laufe des Jahres, ist aber im Durchschnitt etwa  $= 31'$ . Der Radius  $\varrho$  des Sonnenbildes ist daher, wie man aus Abb. 168, in der der Winkel viel zu groß gezeichnet ist, sofort erkennt  $= a \cdot \operatorname{tg} 15,5'$ , wenn  $a$  wieder der Abstand des Auges von der Bildebene ist. Wir haben also

$$\varrho = 0,0045 \cdot a.$$

Ist beispielsweise für ein kleines Landschaftsbild  $a = 50$  cm, so ist  $\varrho = 0,225$  cm, der Durchmesser des Sonnenbildes also  $= 4,5$  mm.

Tatsächlich wird der Maler den Sonnendurchmesser stets größer darstellen. Er sieht sich dazu gezwungen, um die Helligkeit der Sonne wenigstens andeutungsweise zum Ausdruck zu bringen.

Die unverschleierte am Firmamente strahlende Sonne entzieht sich der malerischen Wiedergabe vollständig. Nur dann, wenn sie in der Nähe des Horizonts — also kurz nach ihrem Auf- oder vor ihrem Untergange — durch Dunstschichten gemildert erscheint, kann sich der Künstler an ihre Darstellung wagen. Aber auch dann noch ist ihre Helligkeit so groß, daß der Maler sich durch absichtliche Vergrößerung des Durchmessers helfen muß. Die Sonne ist ja eben ein selbst-

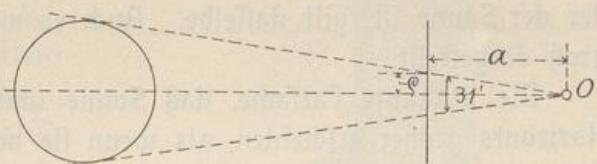


Abb. 168

leuchtender, selbst Licht erzeugender Körper, während die Farben des Gemäldes nur im reflektierten Lichte leuchten. Jede Farbe des Bildes erscheint um so dunkler, je tiefer ihr Ton ist. Bei der Sonne aber hängt die Helligkeit, in der sie erscheint, nicht nur von der Tiefe ihrer Farbe, sondern in erster Linie von ihrer eigenen Leuchtkraft ab. So kann die Sonne, wenn sie durch dichte Dunstschichten strahlt, dunkelrot erscheinen; dennoch ist sie stets der hellste Fleck im Bilde. Wenn nun der Maler nur den Farbenton, nicht aber die Helligkeit berücksichtigt und sich daher verleiten lässt, die Sonne dunkelrot am hellblauen Himmel zu malen, so verkehrt er das Wesentliche der Erscheinung — das Verhältnis der Helligkeiten — in sein Gegenteil.

Der Künstler kann die beabsichtigte Wirkung nur dadurch annähernd erreichen, daß er die Sonnenscheibe absichtlich zu groß darstellt, ihre Farbe zu hell und ihre Umgebung zu dunkel macht. Nur auf diesem Wege ist es möglich, den durch die eigene Intensität der Sonne erzeugten Gegensatz wenigstens einigermaßen zur Anschauung zu bringen.

Für den Mond, dessen scheinbare Größe durchschnittlich gleich der der Sonne ist, gilt dasselbe. Auch er wird mit Recht stets viel zu groß dargestellt.

Die bekannte Tatsache, daß Sonne und Mond in der Nähe des Horizonts größer erscheinen, als wenn sie hoch am Himmel stehen, ist noch nicht genügend erklärt. Es handelt sich aber hier um eine optische Täuschung rein subjektiver Art. Die gemessene scheinbare Größe, der Winkel also, den man erhält, wenn man das Fernrohr auf zwei gegenüber liegende Punkte des Umrisses der Sonne oder des Mondes richtet, ist von der Stellung des Gestirns am Firmament unabhängig. Sie schwankt nur etwas mit den Jahreszeiten, erreicht bei der Sonne ihr Maximum am 1. Januar, ihr Minimum am 1. Juli. Die hier in Betracht kommenden Unterschiede sind aber viel zu klein, um für den Maler darstellbar zu sein.

Die schwach elliptische Gestalt der Sonnenscheibe, wenn sie direkt über dem Horizonte steht, wird durch die gegen die Erdoberfläche konkave Krümmung der Strahlen in der Luft bewirkt, die eine Folge der Brechung in der Atmosphäre, deren Dicke nach oben abnimmt, ist. In Folge der Krümmung der Strahlen wird nämlich jeder Punkt der Scheibe optisch gehoben; er erscheint in der Richtung der im Auge an den gekrümmten Strahl gelegten Tangente. Diese Hebung nimmt mit zunehmender Höhe ab; der höchste Punkt der Scheibe wird daher um etwas weniger gehoben, als der tiefste, so daß der vertikale Durch-

messer der Scheibe um die Differenz dieser Hebungen — fast 6' — kürzer erscheint, als der unveränderte horizontale Durchmesser. Das Axenverhältnis der Ellipse ist daher etwa = 25 : 31 oder rund = 5 : 6.

Indem wir zwei diametral gegenüber liegende Punkte des Umrisses des Sonnenbildes als Sonnenpunkte annehmen, können wir den verschwommenen Rand des Schlagschattens, den Halbschatten, dessen Ursache schon im § 26 dargelegt wurde, ohne Weiteres konstruieren. In der Abb. 169 ist der auf die Grundebene fallende Schlagschatten eines auf ihr stehenden rechtwinkligen Prismas mit seinem verschwommenen Rande konstruiert worden. Für die beiden Schlagschattenränder einer vertikalen Kante kommen die Endpunkte  $S_1$  und  $S_2$  eines horizontalen Durchmessers des

Sonnenbildes in Betracht; ihnen entsprechen die Horizontalprojektionen  $S_1'$  und  $S_2'$ . Für die beiden Schlagschattenränder einer horizontalen Kante sind die Endpunkte  $S_3$  und  $S_4$  eines vertikalen Durchmessers des Sonnenbildes, deren Projektionen  $S_3'$  und  $S_4'$  zusammenfallen, zu benutzen. — In der Abbildung ist im Interesse der Deutlichkeit das Sonnenbild viel zu groß angenommen worden.

Ist die schattenwerfende Kante der beschatteten Ebene parallel, so sind, da für jeden Punkt der Kante das Sonnenbild denselben Durchmesser hat, die Ränder des Halbschattens parallel; ist die Kante aber gegen die Ebene geneigt, so nimmt der Radius des Sonnenbildes proportional der Entfernung des Punkts vom Schnittpunkte der Kante mit der Ebene zu; dann divergieren also die Ränder des Halbschattens von diesem Schnittpunkte aus. Beide Fälle treten an den wagerechten und lotrechten Kanten des Prismas in Abb. 169 auf.

Die durch die Sonne oder den Mond erzeugten Halbschatten eckiger Körper sind stets abgerundet. — Denken wir uns zunächst einen

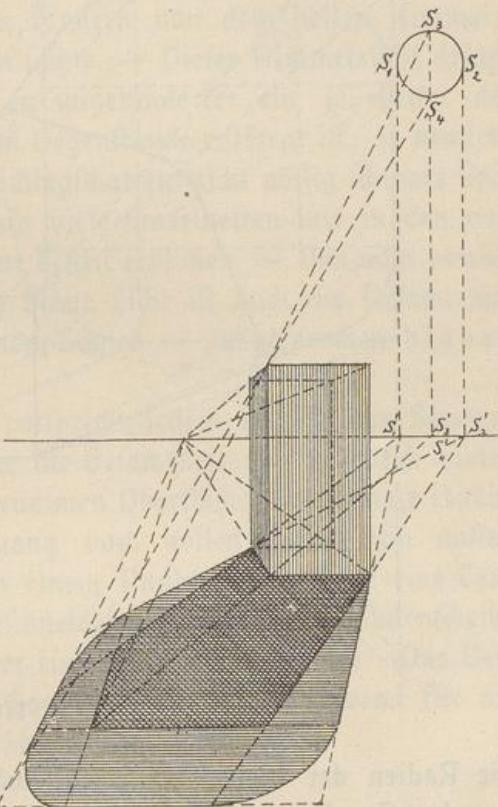


Abb. 169

materiellen Punkt, so erzeugt dieser einen Halbschattenkegel, dessen Öffnung etwa  $= 31'$  ist. Stellen wir uns nun etwa ein Quadrat vor, so erzeugt die Gesamtheit der durch seinen Umriss gehenden Strahlen den in Abb. 170 parallelperspektivisch dargestellten Strahlenkörper, der von vier Ebenen und vier sie berührenden Viertelskegeln begrenzt wird und dessen Querschnitt daher mit wachsender Entfernung von dem schattenwerfenden Quadrate zunimmt. Dabei nehmen aber nur

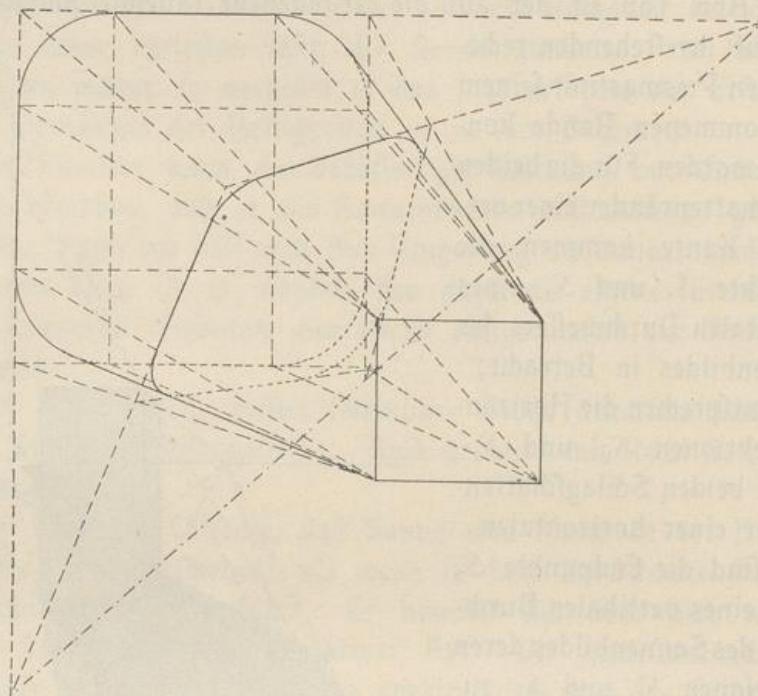


Abb. 170

die Radien der Viertelskreise zu, während die dazwischen liegenden geraden Strecken unveränderlich gleich der Seitenlänge des Quadrats bleiben. Durchschneiden wir nun diesen Strahlenkörper mit einer ganz beliebigen Ebene, so ist die Schnittfigur der Umriss des auf diese Ebene fallenden Halbschattens; er ist offenbar durch Kurven abgerundet, die je nach der Lage der schneidenden Ebene Kreise, Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln sind. — Daselbe gilt augenscheinlich für jeden eckigen Körper.

Die Abb. 171 zeigt den von einem Quadrate auf eine seiner Ebene parallele Ebene geworfenen Kern- und Halbschatten, also einen der Ebene des Quadrates parallelen Schnitt des

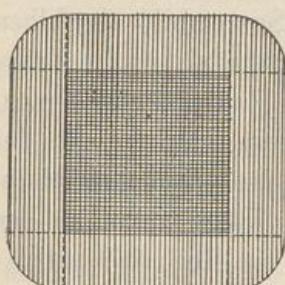


Abb. 171

in Abb. 170 dargestellten Strahlenkörpers. Selbstverständlich sind in Wirklichkeit die Grenzen nicht scharf, sondern die Helligkeit nimmt von der Grenze des Kernschattens bis zu der des Halbschattens allmählich zu.

Demnach sollte der Kernschatten für alle Entfernungen des Schirmes gleich groß und gleich dunkel sein. Wenn er aber in Wirklichkeit mit zunehmender Entfernung des Schirmes blasser und verschwommener wird und schließlich ganz verschwindet, so liegt das an dem Eindringen des nicht direkt von der Sonne, sondern von dem hellen Himmelsgewölbe ausgehenden, zerstreuten Lichts. — Dieses Himmelslicht dringt offenbar von allen Seiten um so ungehinderter ein, je weiter der Schirm von dem schattenwerfenden Gegenstande entfernt ist; es bewirkt überhaupt, daß die Eigen- und Schlagschatten nicht völlig schwarz sind, daß wir vielmehr in ihnen ebenso viele Einzelheiten wie in den von direktem Sonnenlichte beleuchteten Teilen erblicken. — Das vom blauen Himmel allseitig herabströmende blaue Licht ist auch die Ursache der — namentlich auf frisch gefallenen Schnee — ausgesprochen blauen Färbung der Schatten.

Auf einem runden Körper entspricht jedem Punkte der Sonnenscheibe eine besondere Streiflinie; die Gesamtheit der unendlich vielen Streiflinien bestimmt auf der krummen Oberfläche eine schmale Halbschattenzone, die den Übergang vom vollen Lichte zum vollen Schatten bildet. — Legt man in einem Punkte dieser Zone eine Tangentenebene an die Fläche, so zertheilt diese Ebene die Sonnenscheibe in zwei Teile, von denen nur der eine den Punkt bestrahlt. Das Verhältnis dieses Teils zur vollen Sonnenscheibe ist maßgebend für die in dem bestrahlten Punkte herrschende Helligkeit.

## II. Schatten bei endlich entfernter Lichtquelle. (Zentralbeleuchtung.)

### § 35. Die Annahme des leuchtenden Punkts im Bilde.

Da der leuchtende Punkt — irgend eine künstliche Lichtquelle — ganz beliebig im Raum liegen kann, ist auch sein Bild  $Z$  ganz beliebig annehmbar. Ebenso wie der Sonnenpunkt  $S$  liegt er über oder unter dem Horizonte, je nachdem die Lichtquelle — vorausgesetzt, daß sie höher als das Auge liegt — sich vor oder hinter dem Betrachter befindet. Im ersten Falle kann der leuchtende Gegenstand — wenn