Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

1. Der auf einen Kreiszilinder fallende Schlagschatten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

Streiflinien des Kegels mit dem Parallelkreise sind daher Punkte der Streiflinie der Umdrehungsfläche.

Die Ausführung dieser Konstruktion im perspektivischen Bilde selbst ist umständlich und ungenau; es empfiehlt sich daher in diesem Falle ausnahmsweise, die Streiflinie im Grund- und Aufrisse zu konstruieren und sie dann punktweise in das Bild zu übertragen. Die anzuwendende Konstruktion ist für den Fall der vertikalen Axe in Abb. 135 angegeben. P_1 und P_2 sind Punkte der Streiflinie.

§ 33. Schlagschatten eines Punkts auf Zilinder, Kegel, Kugel und den allgemeinen Umdrehungskörper.

Bei diesen Aufgaben handelt es sich um die Ermittelung der Schnittpunkte einer Geraden — nämlich des durch den Punkt gelegten Lichtstrahls mit der Zilinder-, Kegel- oder Kugelfläche. Zilinder- und Kegelflächen zweiter Ordnung — also Zilinder- und Kegelflächen im gewöhnlichen Sinne — und Kugelflächen werden von jeder Geraden — wenn überhaupt — in zwei Punkten geschnitten; welcher von diesen beiden Schnittpunkten die Bedeutung eines Schlagschattenpunkts hat, das hängt davon ab, ob der dem Lichte zugewandte oder der von ihm abgewandte Teil der Fläche als Oberfläche körperlich vorhanden ist.

1. Der auf einen Kreiszilinder fallende Schlagschatten.

Legen wir durch den Strahl, dessen Schnittpunkte mit der Zilinderfläche gesucht werden, irgend eine Ebene, so schneidet sie die Fläche im Allgemeinen in einer Ellipse, und die Schnittpunkte des Strahls mit dieser Ellipse sind die gesuchten Punkte. Zweckmäßig wird es aber sein, anstatt einer ganz beliebigen Ebene eine mit den Erzeugenden des Zilinders parallele Ebene zu wählen; eine solche Ebene schneidet die Zilinderfläche in zwei geraden Erzeugenden, die einen Grenzfall der Schnittellipse darstellen, und die Schnittpunkte des Strahls mit diesen beiden Erzeugenden sind die gesuchten Punkte.

Eine durch den Strahl gehende, den Erzeugenden parallele Ebene erhalten wir am einfachsten dadurch, daß wir durch einen beliebigen Punkt des Strahls — etwa durch den schattenwerfenden Punkt selbst — eine Parallele zu den Erzeugenden ziehen und durch diese Parallele und den Strahl eine Ebene legen.

Wir wollen diese Konstruktion für verschiedene Lagen des Zilinders ausführen. Steht ein normaler Zilinder vertikal (s. Abb. 136), ist P der schattenwerfende Punkt, P' seine Projektion auf die Grundebene, so ist PP' die durch P gezogene Parallele zu den Erzeugenden; die durch den Strahl parallel zu den Erzeugenden gehende Ebene schneidet die Grundebene in $P'S'$. Diese Gerade schneidet die den Grundkreis darstellende Ellipse in A' und B'; ziehen wir also durch diese Punkte vertikale Erzeugende, so schneiden sie den Strahl in den gesuchten Schnittpunkten A und B, von denen, wenn der volle Zilinder körperlich vorhanden ist, A die Bedeutung des Schlagschattens von P besitzt. In der Figur ist der Schlagschatten eines lotrechten Stabes gezeichnet worden, dessen Endpunkt P ist.

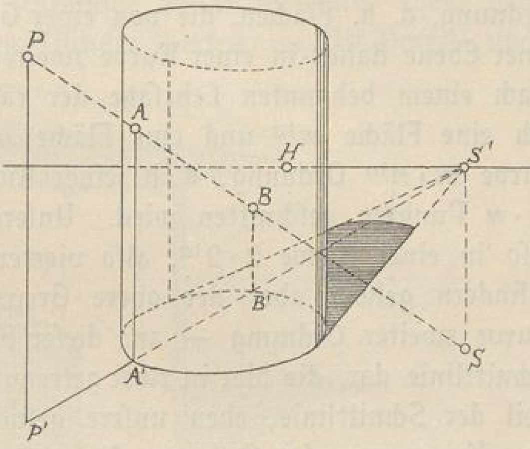

Abb. 136

Von ganz besonderem Interesse ist der Schlagschatten, den der obere Rand der Fläche auf ihre Innenseite wirft — vorausgesetzt natürlich, daß wir uns den Zilinder als eine oben offene Röhre vorstellen. Wir können dabei genau in der soeben geschilderten Weise verfahren — wir nehmen eine beliebige Anzahl von Punkten auf der die obere Grundfläche des Zilinders darstellenden Ellipse an und legen durch sie Lichtstrahlen, die im Bilde durch S gehen. Die Grundrisse der angenommenen Punkte liegen im Bilde auf der die untere Grundfläche darstellenden Ellipse, die Grundrisse der Strahlen gehen also von diesen Punkten aus nach S'. So erhalten wir die Schlagschattengrenze (s. Abb. 137), die die obere Ellipse in denselben Punkten schneiden muß, von denen die Streiflinien ausgehen, und diese Streiflinien erhalten wir, wie wir schon wissen, dadurch, daß wir von S' aus Tangenten an eine der

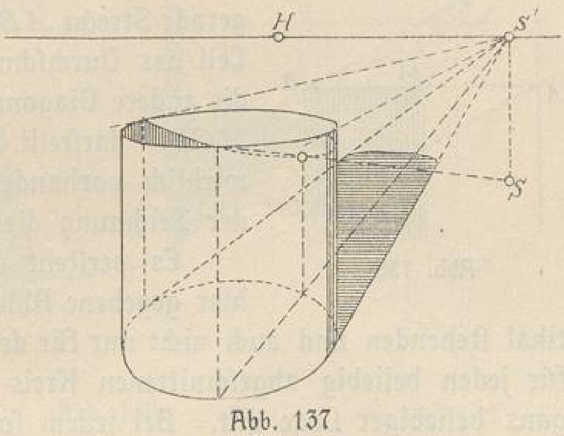

Abb. 137

beiden Ellipſen legen und durch die Berührungspunkte Erzeugende ziehen. Die gefundene Schlagſchattenkurve iſt ſelbſt ein Stück einer Ellipſe, und zwar das perſpektiviſche Bild einer halben Ellipſe. Das ergiebt ſich aus folgender Ueberlegung:

Die Schlagſchattengrenze iſt der Durchſchnitt des gegebenen Zilinders mit einem Strahlenzilinder, deſſen Leitlinie der obere Grundkreis des gegebenen Zilinders iſt. Beide Zilinder ſind Flächen zweiter Ordnung, d. h. Flächen, die von einer Geraden in zwei Punkten, von einer Ebene daher in einer Kurve zweiter Ordnung geſchnitten werden. Nach einem bekannten Lehrſatze der räumlichen Geometrie ſchneiden ſich eine Fläche m^{ter} und eine Fläche n^{ter} Ordnung in einer Raumkurve $m \cdot n^{ter}$ Ordnung, d. h. einer Kurve, die von einer Ebene in $m \cdot n$ Punkten geſchnitten wird. Unſere beiden Zilinder müſſen ſich alſo in einer Kurve $2 \cdot 2^{ter}$, alſo vierter Ordnung ſchneiden. Beiden Zilindern gehört aber der obere Grenzkreis des Zilinders — eine Kurve zweiter Ordnung — an; dieſer Kreis ſtellt alſo einen Teil der Schnittlinie dar, die hier in zwei getrennte Kurven zerfällt; der andere Teil der Schnittlinie, eben unſere geſuchte Schattenkurve, muß alſo eine Kurve von der Ordnung $4 - 2 = 2$, alſo eine Kurve zweiter Ordnung ſein. Eine Kurve zweiter Ordnung aber iſt ſtets eine ebene Kurve, da jede Raumkurve von einer Ebene in mindeſtens drei Punkten geſchnitten wird, alſo mindeſtens von der dritten Ordnung ſein muß. Jeder ebene Schnitt eines Zilinders — alſo auch unſere Schattenkurve — iſt aber eine Ellipſe.

Die Sache wird noch klarer, wenn wir uns — ganz abgeſehen von der perſpektiviſchen Darſtellung — den gegebenen Zilinder und den Strahlenzilinder auf eine den Strahlen parallele Vertikalebene projiziert denken. Die Endfläche des gegebenen Zilinders ſtellt ſich dann (ſ. Abb. 138) als die gerade Strecke AB dar, während die den zweiten Teil des Durchſchnitts bildende Ellipſe ſich als die andere Diagonale CD des Parallelogramms $ACBD$ darſtellt. Die als Schlagſchattengrenze wirklich vorhandene Hälfte der Ellipſe iſt in der Zeichnung die halbe Diagonale MD.

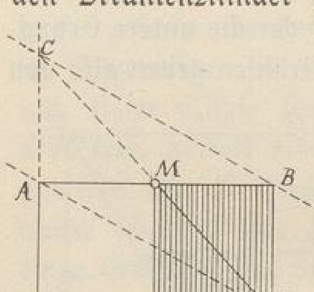

Abb. 138

Es verſteht ſich wohl von ſelbſt, daß die hier gegebene Ableitung nicht nur für den vertikal ſtehenden und auch nicht nur für den normalen Zilinder, ſondern für jeden beliebig abgeſchnittenen Kreis- oder elliptiſchen Zilinder in ganz beliebiger Lage gilt. Bei jedem ſolchen Zilinder iſt der Schlagschatten, den der Rand der Abschnittfläche auf die innere Wand wirft, eine halbe Ellipse.

Da wir nunmehr den Schatten eines beliebigen Punkts auf eine vertikale Zilinderfläche finden können, bietet die Ermittelung des von einem beliebigen Körper auf den Zilinder geworfenen Schlagschattens keine Schwierigkeiten mehr. So zeigen Abb. 139, 140, 141 die Schlagschatten, die eine quadratische und eine kreisrunde Deckplatte, ein senkrecht stehendes Prisma, eine Pyramide, ein in lotrechter Ebene liegender Kreis auf den vertikalen Zilinder werfen. — Mit Vorteil und in

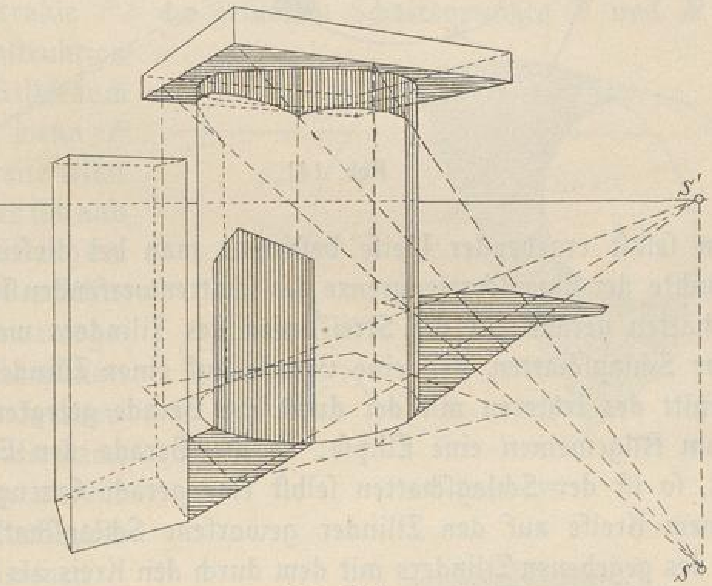

Abb. 139

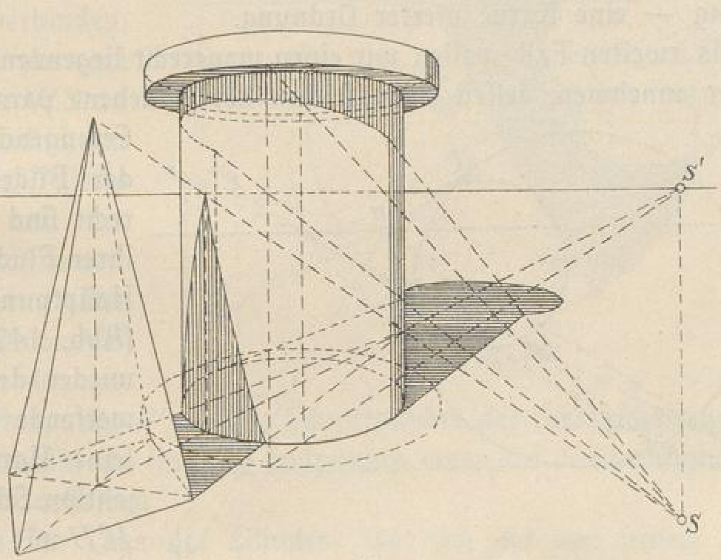

Abb. 140

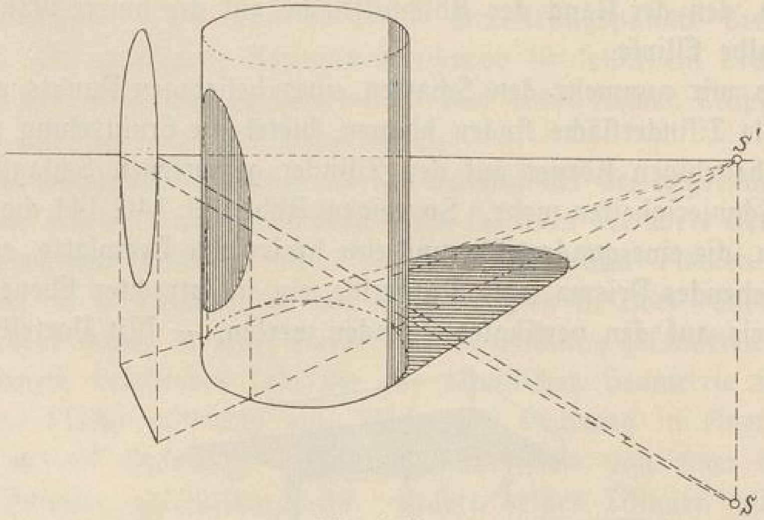

Abb. 141

sich von selbst ergebender Weise bestimmt man bei diesen Aufgaben die Punkte der Eigenschattengrenze des schattenwerfenden Körpers, die ihre Schatten gerade auf die Streiflinien des Zilinders werfen.

Der Schlagschatten, den eine Gerade auf einen Zilinder wirft, ist als Schnitt des letzteren mit der durch die Gerade gelegten Strahlenebene im Allgemeinen eine Ellipse; ist die Gerade den Erzeugenden parallel, so ist der Schlagschatten selbst eine gerade Erzeugende. Der von einem Kreise auf den Zilinder geworfene Schlagschatten ist der Schnitt des gegebenen Zilinders mit dem durch den Kreis als Erzeugende bestimmten Strahlenzilinder, also — als Schnitt zweier Zilinder zweiter Ordnung — eine Kurve vierter Ordnung.

Als zweiten Fall wollen wir einen wagerecht liegenden, normalen Zilinder annehmen, dessen Grundflächen der Bildebene parallel, dessen Erzeugende also auf der Bildebene senkrecht sind und daher ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkte haben (Abb. 142). P sei wieder der schattenwerfende Punkt, P' seine Horizontalprojektion. Schneiden wir $P'H$ mit der in der Grundebene liegenden

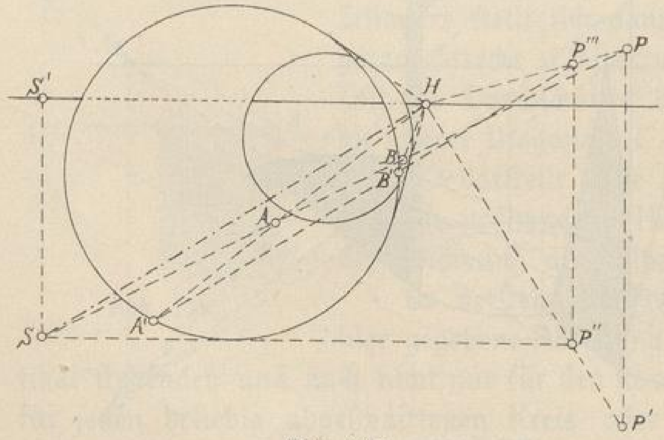

Abb. 142

Seite des dem Kreise umschriebenen Quadrats, ziehen von diesem Schnittpunkte P'' aus eine Vertikale und schneiden sie mit PH, so ist der Schnittpunkt P''' die Projektion von P auf die Grundfläche des Zilinders. Die Projektionen der Strahlen auf dieselbe Grundfläche sind, wie wir schon an der Abbildung 130 erkannten, der Linie HS parallel; ziehen wir also von P''' aus eine Parallele zu HS, so stellt diese die Projektion des durch P gehenden Strahls auf die Grundfläche dar. Sie schneidet den Grundkreis in A' und B'; verbinden wir also diese Punkte mit H, so sind die Schnittpunkte der Linien HA' und HB' mit dem Strahle PS die gesuchten Schattenpunkte A und B.

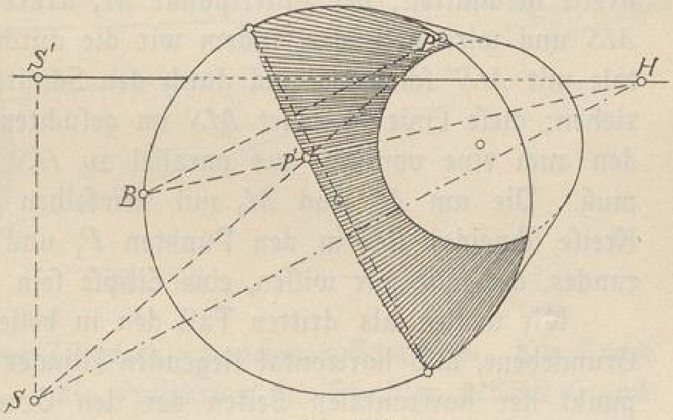

Abb. 143

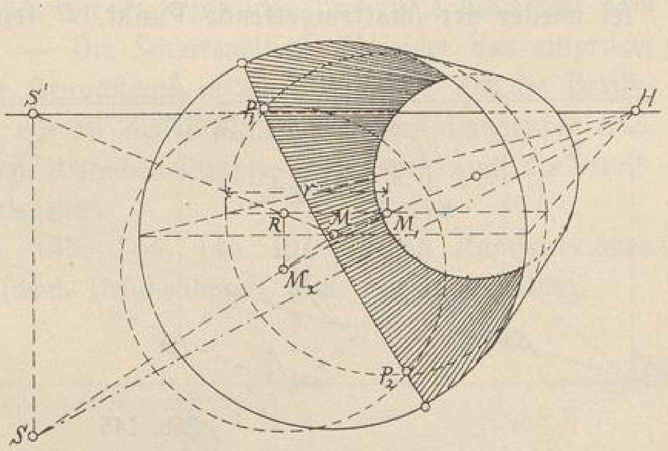

Abb. 144

Die Konstruktion läßt sich natürlich auch anwenden, wenn P auf dem Kreise selbst liegt, wenn es sich also um die Ermittlung des vom Rande des Zilinders in sein Inneres geworfenen Schlagschattens handelt. Jetzt vereinfacht sich die Sache noch insofern, als wir nur den auf dem Rande angenommenen Punkt P [s. Abb. 143] mit S zu verbinden, dann von P aus eine Parallele zu HS zu ziehen und endlich den Schnittpunkt B dieser Parallelen und des Kreises mit H zu verbinden haben. Der Schnittpunkt von HB und PS ist der gesuchte Schattenpunkt P'. — Die Schnittpunkte des Schlagschattenrandes mit dem Grundkreise sind die Endpunkte eines auf HS rechtwinkligen Durchmessers desselben.

Bei dieser Lage des Zilinders läßt sich der von seinem Rande in sein Inneres geworfene Schlagschatten noch auf eine andere Weise finden. Legen wir nämlich in beliebiger Entfernung eine der Bildebene parallele Ebene durch den Zilinder, so schneidet sie ihn in einem der Bildebene parallelen Kreise vom Radius des Grundkreises. Dieser Kreis bildet sich wieder als Kreis ab, dessen Mittelpunkt M_1 (Abb. 144) auf der Axe MH beliebig angenommen werden kann und dessen Radius r sich aus dem Horizontalschnitte direkt ergiebt. Die durch alle Punkte des Grundkreises gehenden Strahlen bilden einen schiefen Zilinder, dessen Axe der durch den Mittelpunkt M des Grundkreises gehende Strahl MS ist. Dieser Strahlenzilinder wird von der Hülfsebene ebenfalls in einem sich als Kreis vom Radius r abbildenden Kreise geschnitten; der Mittelpunkt M_2 dieses Bildkreises liegt auf MS und wird gefunden, indem wir die durch M_1 gehende Horizontale mit MS' schneiden und durch den Schnittpunkt R eine Lotrechte ziehen; diese Linie schneidet MS im gesuchten Mittelpunkt M_2, durch den auch eine von M_1 aus parallel zu HS gezogene Gerade gehen muß. Die um M_1 und M_2 mit demselben Radius r beschriebenen Kreise schneiden sich in den Punkten P_1 und P_2 des Schlagschattenrandes, der, wie wir wissen, eine Ellipse sein muß.

Wir wollen als dritten Fall den in beliebiger Richtung auf der Grundebene, also horizontal liegenden Zilinder betrachten. Der Fluchtpunkt der horizontalen Seiten der den Grundflächen umschriebenen Quadrate sei F_1 (Abb. 145), der Fluchtpunkt der Erzeugenden F_2; P sei wieder der schattenwerfende Punkt, P' seine Horizontalprojektion.

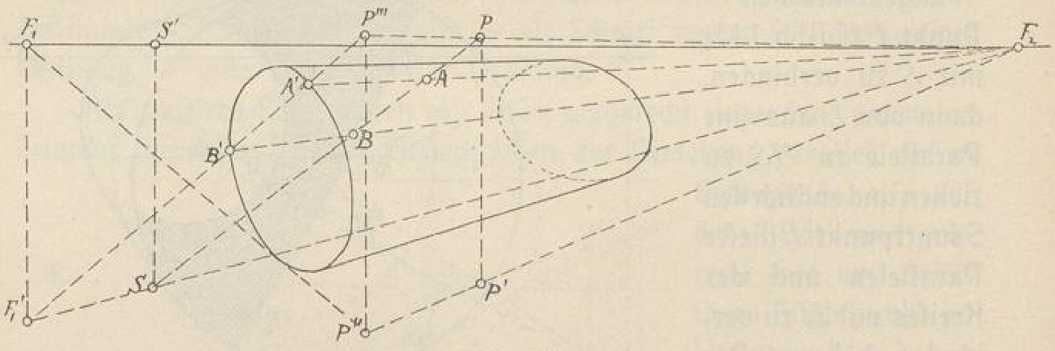

Abb. 145

Wir haben nun den Lichtstrahl SP auf die Grundfläche des Zilinders zu projizieren; die Projektion muß durch den uns bereits bekannten Fluchtpunkt F_1' der Projektionen der Strahlen auf die Grundfläche gehen, den wir bekanntlich finden, indem wir eine durch F_1 gezogene Vertikale mit $F_2 S$ schneiden. — Ziehen wir ferner $F_2 P'$, schneiden diese Linie mit der in der Grundebene liegenden Quadratseite, ziehen durch den Schnittpunkt P'' eine Vertikale und schneiden sie mit $F_2 P$, so ist der Schnittpunkt P''' die Projektion von P auf die Grundfläche des Zilinders, also $P'''F_1'$ die Projektion des Lichtstrahls auf dieselbe Ebene. Sie schneidet den Umriß der Grundfläche in A' und B'; verbinden wir diese Punkte mit F_2, so sind die Schnittpunkte A und B der Verbindungslinien mit dem Strahle SP dessen Schnittpunkte mit der Zilinderfläche, also die gesuchten Schattenpunkte.

Nehmen wir den Punkt P auf dem Umrisse der Grundfläche an, so ist sein Schatten P' (s. Abb. 146) ein Punkt des von diesem Um-

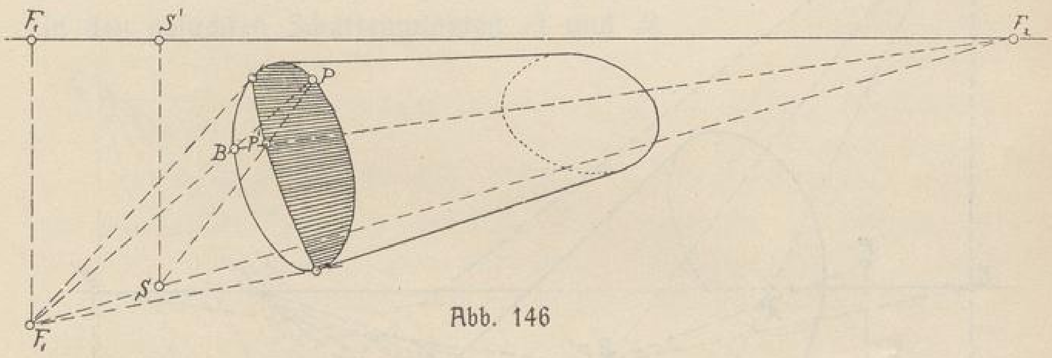

Abb. 146

risse in das Innere des Zilinders geworfenen Schattens. Wir finden ihn, indem wir PF_1' — die Projektion des Strahles auf die Grundfläche des Zilinders — ziehen, den zweiten Schnittpunkt B dieses Strahles und der Ellipse mit F_2 verbinden und diese Linie mit dem Strahle PS schneiden. — Die Schattenellipse schneidet das elliptische Bild des Umrisses der Grundfläche in zwei Punkten, die die Berührungspunkte der von F_1' an diesen Umriß gelegten Tangenten sind. Es sind, wie wir wissen, dieselben Punkte, von denen auch die Streiflinien des Zilinders ausgehen.

Die in den Abb. 143, 144, 146 angegebenen Konstruktionen kommen bei Fensternischen, Brückenbögen usw. zur Anwendung.

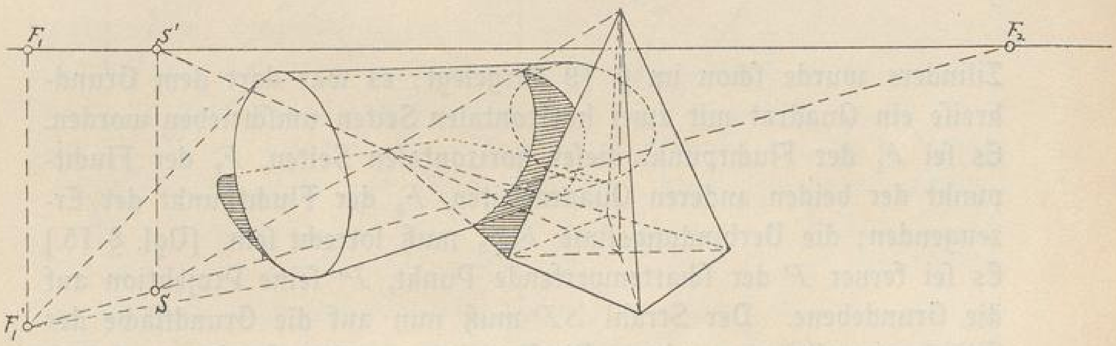

Abb. 147

Die Abb. 147 zeigt den von einer stehenden Pyramide auf einen liegenden Zilinder geworfenen Schlagschatten als Anwendung der in Abb. 145 angegebenen Konstruktion.

Schließlich möge noch der Schlagschatten eines Punktes auf einen in ganz beliebiger Lage befindlichen normalen Kreiszilinder ermittelt werden (s. Abb. 148). Die Aufzeichnung des Bildes eines solchen

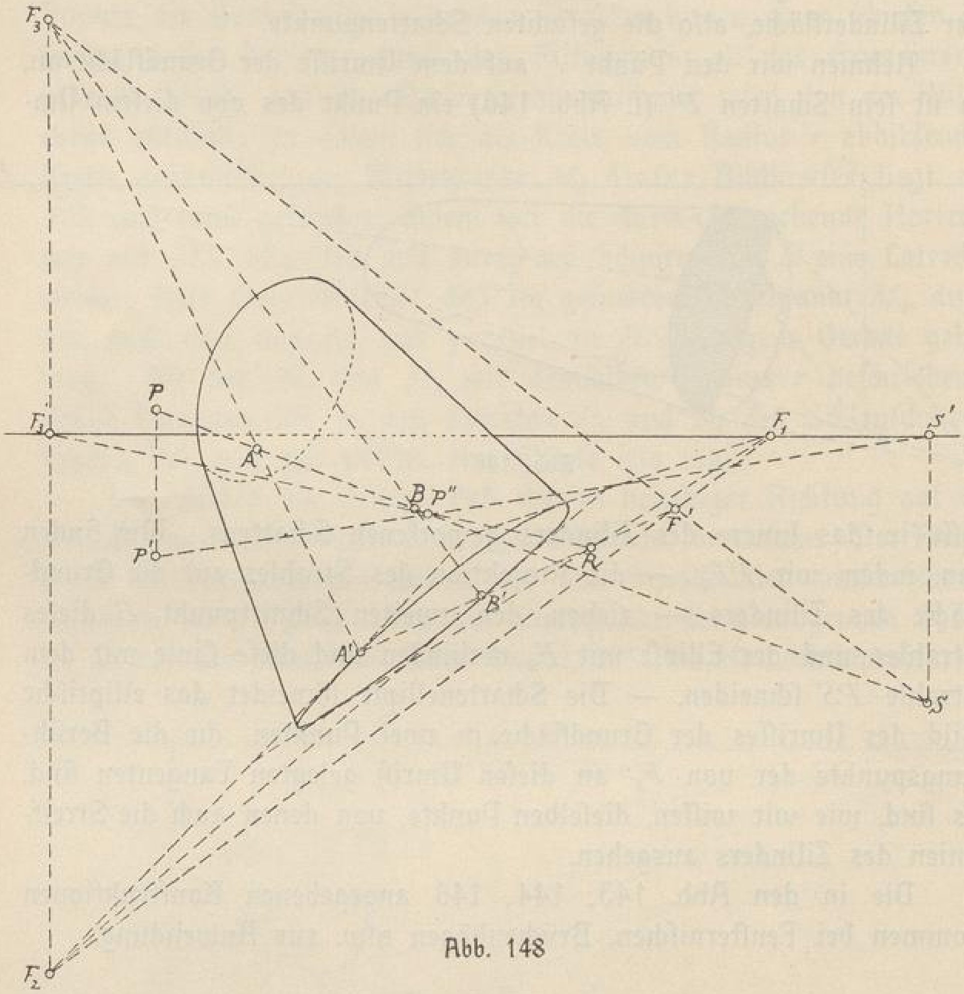

Abb. 148

Zilinders wurde schon im § 19 dargelegt; es war dort dem Grundkreise ein Quadrat mit zwei horizontalen Seiten umschrieben worden. Es sei F_1 der Fluchtpunkt dieser horizontalen Seiten, F_2 der Fluchtpunkt der beiden anderen Quadratseiten, F_3 der Fluchtpunkt der Erzeugenden; die Verbindungslinie F_2F_3 muß lotrecht sein. (Vgl. § 15.) Es sei ferner P der schattenwerfende Punkt, P' seine Projektion auf die Grundebene. Der Strahl SP muß nun auf die Grundfläche des Zilinders projiziert werden. Die Projektionen aller Strahlen auf diese

Grundfläche sind parallel, besitzen also einen Fluchtpunkt F', der der Schnittpunkt von F_1F_2 und F_3S sein muß, weil diese Projektionen in der Grundfläche, deren Fluchtlinie F_1F_2 ist, und weil sie ferner in den Erzeugenden parallelen Strahlenebenen, deren Fluchtlinie F_3S ist, liegen. Ist nun F_3' die Projektion von F_3 auf den Horizont, P'' der Schatten von P auf die Grundebene, so ist R, der Schnittpunkt der in die Grundebene fallenden Quadratseite mit $F_3'P''$ die Projektion von P'' auf diese Quadratseite, $F'R$ also die gesuchte Projektion des Strahls. Sie schneidet den Umriß der Grundfläche in A' und B'; die Verbindungslinien $A'F_3$ und $B'F_3$ schneiden nun den Strahl PS in den gesuchten Schattenpunkten A und B.

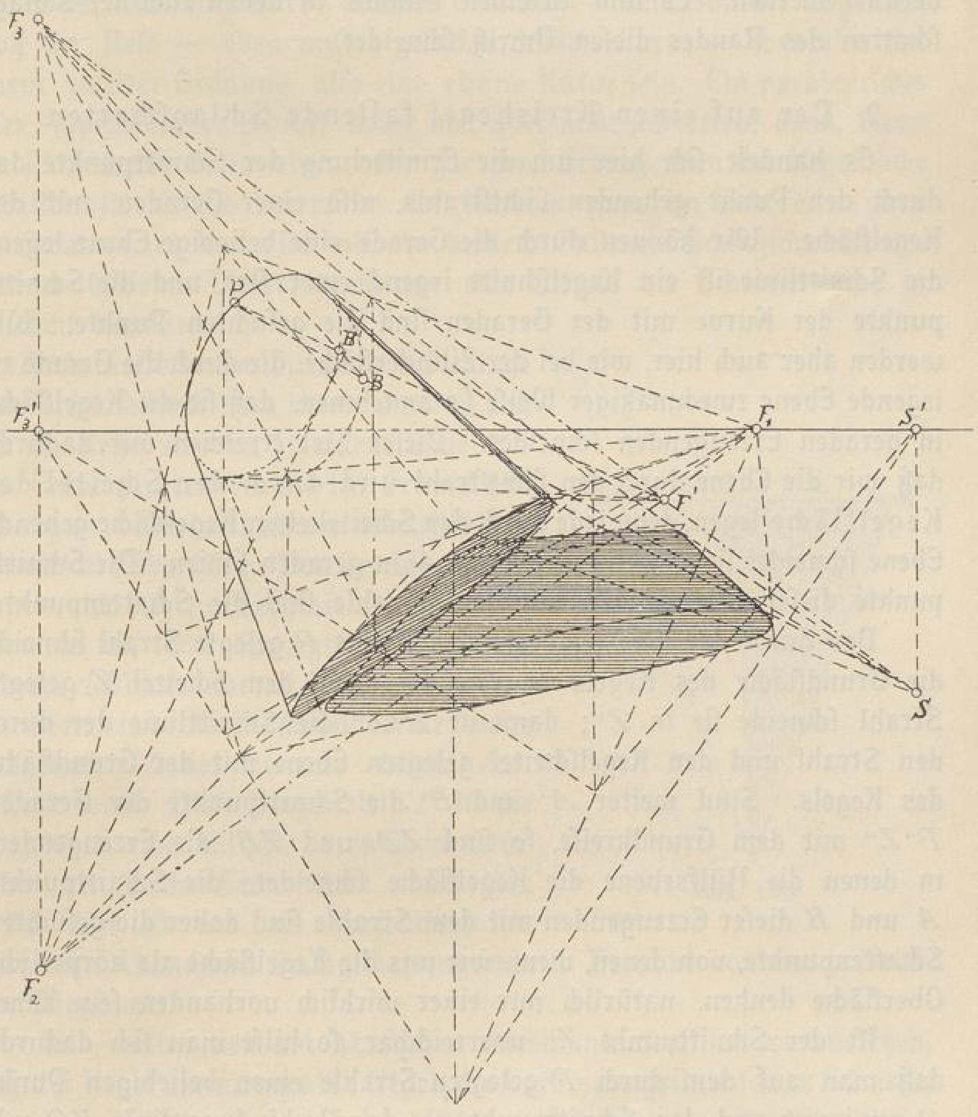

Abb. 149

In Abb. 149 ist der Fall des auf dem Rande selbst liegenden Punktes P behandelt. Um den von ihm in das Innere des Zilinders fallenden Schatten B zu finden, ziehen wir einfach die Linie PF', die den Rand zum zweiten Male in B' schneidet, ziehen weiter F_3B' und PS. Diese beiden Linien schneiden sich im gesuchten Schattenpunkte B. — Auf diese Weise wurde der in der Abbildung unsichtbare Schatten ermittelt, den der Rand in das Innere des Zilinders wirft. Dieselbe Figur zeigt auch den von dem Zilinder in dieser allgemeinsten Lage auf die Grundebene geworfenen Schlagschatten sowie die Streiflinien, die von den Punkten der Grundflächenumrisse ausgehen, in denen diese von den von F' aus an sie gezogenen Tangenten berührt werden. Es sind dieselben Punkte, in denen auch der Schlagschatten des Randes diesen Umriß schneidet.

2. Der auf einen Kreiskegel fallende Schlagschatten.

Es handelt sich hier um die Ermittelung der Schnittpunkte des durch den Punkt gehenden Lichtstrahls, also einer Geraden, mit der Kegelfläche. Wir können durch die Gerade eine beliebige Ebene legen; die Schnittlinie ist ein Kegelschnitt irgend einer Art, und die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden sind die gesuchten Punkte. Wir werden aber auch hier, wie bei der Zilinderfläche, die durch die Gerade zu legende Ebene zweckmäßiger Weise so annehmen, daß sie die Kegelfläche in geraden Erzeugenden schneidet. Dieses Ziel erreichen wir dadurch, daß wir die Ebene durch den Lichtstrahl und durch den Scheitel der Kegelfläche legen, denn jede durch den Scheitel einer Kegelfläche gehende Ebene schneidet sie — wenn überhaupt — in geraden Linien. Die Schnittpunkte dieser Erzeugenden mit dem Strahle sind die Schattenpunkte.

Der durch den schattenwerfenden Punkt P gelegte Strahl schneide die Grundfläche des Kegels in P'', der durch den Scheitel Z gelegte Strahl schneide sie in Z''; dann ist $P''Z''$ die Schnittlinie der durch den Strahl und den Kegelscheitel gelegten Ebene mit der Grundfläche des Kegels. Sind weiter A' und B' die Schnittpunkte der Geraden $P''Z''$ mit dem Grundkreise, so sind ZA' und ZB' die Erzeugenden, in denen die Hülfsebene die Kegelfläche schneidet; die Schnittpunkte A und B dieser Erzeugenden mit dem Strahle sind daher die gesuchten Schattenpunkte, von denen, wenn wir uns die Kegelfläche als körperliche Oberfläche denken, natürlich nur einer wirklich vorhanden sein kann.

Ist der Schnittpunkt Z'' unerreichbar, so hilft man sich dadurch, daß man auf dem durch P gelegten Strahle einen beliebigen Punkt Q annimmt und den Schnittpunkt Q'' der Verbindungslinie ZQ mit