Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 37. Der Schlagschatten des Kreises und der runden Körper.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

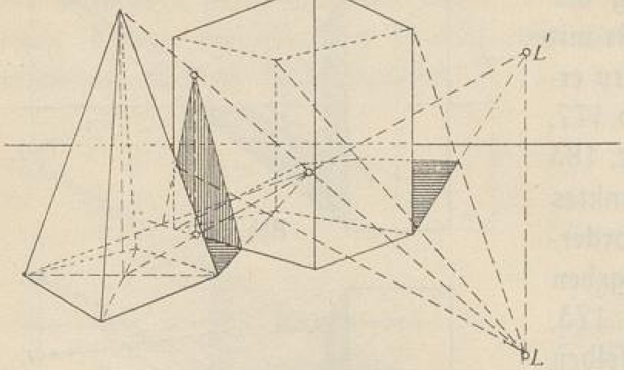

Abb. 184

Die Abb. 184 und 185 zeigen die Anwendungen dieser Konstruktion; eine auf der Grundebene stehende Pyramide wirft ihren Schatten auf ein auf derselben Ebene stehendes senkrechtes und auf ein auf ihr liegendes Prisma. Im ersteren Falle haben wir den Schlagschatten zu ermitteln, den die Spitze der Pyramide auf eine senkrecht stehende ebene Figur wirft, im zweiten Falle den Schlagschatten zu finden, der auf eine geneigte ebene Figur fällt. Dabei sind verschiedene Lagen von L und L' zur Anwendung gebracht worden.

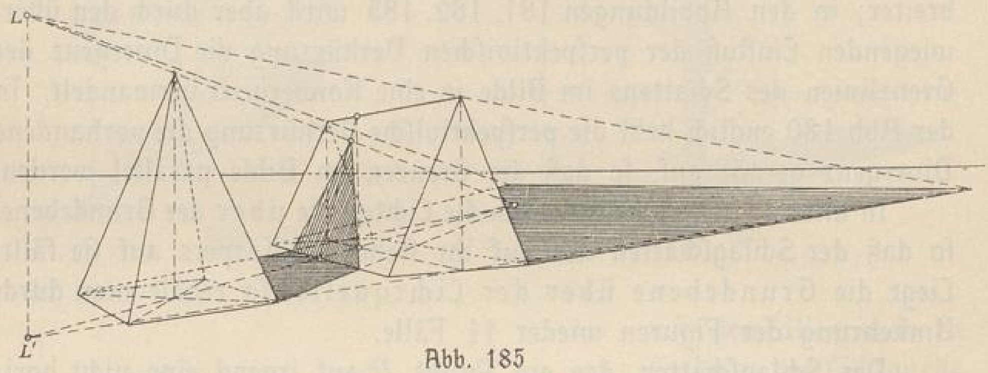

Abb. 185

§ 37. Der Schlagschatten des Kreises und der runden Körper.

Die Strahlen, die von dem leuchtenden Punkte aus durch die Punkte des Kreises gehen, bilden eine gewöhnliche Kegelfläche zweiter Ordnung; der Schlagschatten des Kreises auf eine Ebene ist also als Schnitt dieser Ebene mit der Kegelfläche eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem die Ebene nur eine Hälfte oder beide Hälften der Kegelfläche trifft. Im letzteren Falle hat natürlich nur der eine Hyperbelast die physikalische Bedeutung eines Schattenumrisses, da die zweite Hälfte der Kegelfläche, auf der der andere Ast liegt, tatsächlich gar nicht vorhanden ist. — Auch eine Parabel kann natürlich als Grenzfall auftreten, dann nämlich, wenn ein Strahl der beschatteten Ebene parallel ist.

Mit der Entscheidung über die wirkliche Gestalt des Schattenumrisses ist die Gestalt seines perspektivischen Bildes natürlich noch keineswegs entschieden. Handelt es sich um den auf die Grundebene fallenden Schlagschatten, so ist, wenn der Schattenumriß in Wahrheit eine Ellipse ist, sein Bild — wie aus § 8 sofort folgt — eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der elliptische Schattenumriß ganz außerhalb der Gegengeraden fällt, sie berührt oder sie durchschneidet. Ganz dasselbe gilt, wenn der Schattenumriß in Wahrheit eine Parabel ist; auch dann kann jede der drei Kurven als Bild auftreten, auch eine Ellipse. Der unendlich ferne Punkt der in der Grundebene liegenden Schattenparabel bildet sich dann im Horizonte ab, die Bildellipse muß also den Horizont berühren. — Und auch für einen hyperbolischen Schattenumriß gilt dasselbe; er bildet sich nur dann als Hyperbel ab, wenn er die Gegengerade in zwei reellen Punkten schneidet, denen dann auch zwei unendlich ferne Punkte des Bildes entsprechen müssen. Berührt die Hyperbel die Gegengerade, so kann das Bild nur einen unendlich fernen Punkt enthalten, muß also eine Parabel sein. Schneidet aber die Gegengerade die Hyperbel überhaupt nicht (sind die Schnittpunkte imaginär), geht sie also zwischen beiden Hyperbelästen hindurch, so kann das Bild keinen unendlich fernen Punkt enthalten, muß also eine Ellipse sein. Diese Ellipse schneidet den Horizont in zwei Punkten, die den beiden unendlich fernen Punkten der Hyperbel entsprechen; der unterhalb des Horizonts liegende Ellipsenbogen entspricht dem vom Beschauer wirklich übersehenen Hyperbelaste, während der oberhalb des Horizonts liegende Bogen das virtuelle Bild des hinter dem Rücken des Beschauers liegenden Hyperbelastes ist.

Die Abb. 186—194 erläutern in schematischer Weise die gegenseitige Lage des schattenwerfenden Kreises, des auf die Grundebene fallenden Schlagschattens und des perspektivischen Bildes des letzteren. Die Ebene des schattenwerfenden Kreises wurde der Einfachheit und

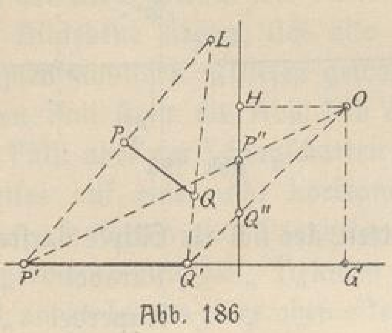

Abb. 186

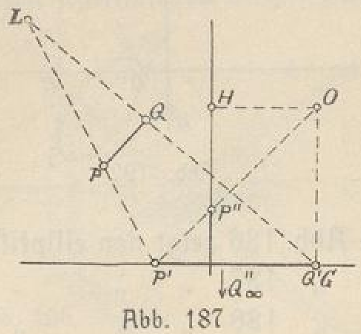

Abb. 187

Uebersichtlichkeit wegen der Grundlinie parallel angenommen; die Figuren stellen rechtwinklige Projektionen auf eine zur Grundlinie rechtwinklige Ebene dar, so daß die Bildebene, die Grundebene und der schattenwerfende Kreis sich als gerade Linien darstellen; der Schatten fällt mit der die Grundebene darstellenden Geraden zusammen.

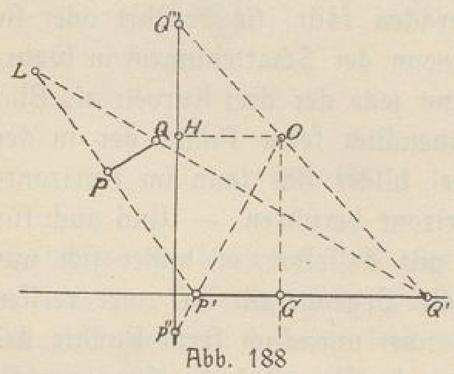

Abb. 188

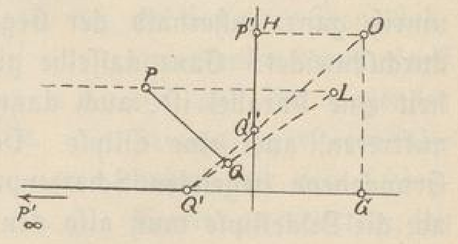

Abb. 189

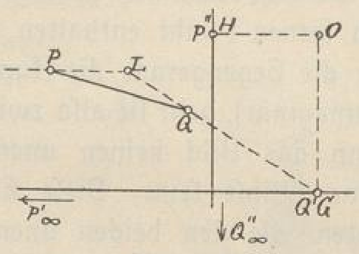

Abb. 190

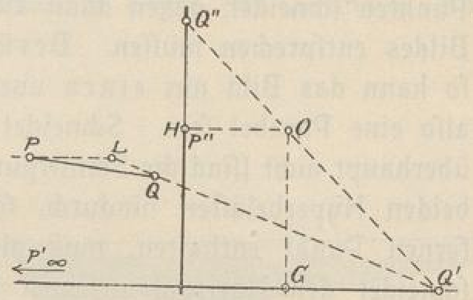

Abb. 191

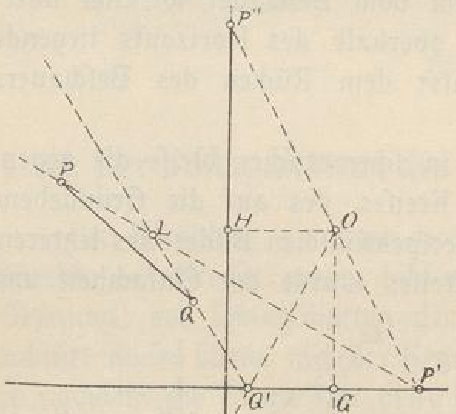

Abb. 192

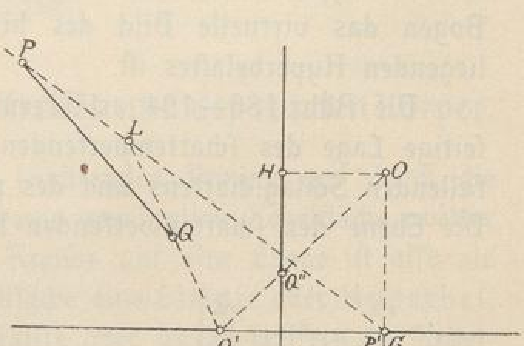

Abb. 193

Die Abb. 186 zeigt den elliptischen Schatten, der sich als Ellipse darstellt,
„ „ 187 „ „ „ „ „ „ „ „ Parabel „
„ „ 188 „ „ „ „ „ „ „ „ Hyperbel „

Die Abb. 189 zeigt den parabolischen Schatten, der sich als Ellipse darstellt,
„ „ 190 „ „ „ „ „ „ Parabel „
„ „ 191 „ „ „ „ „ „ Hyperbel „
„ „ 192 „ „ hyperbolischen „ „ „ „ Ellipse „
„ „ 193 „ „ „ „ „ „ Parabel „
„ „ 194 „ „ „ „ „ „ Hyperbel „

In jedem Falle ist L die Lichtquelle, PQ der schattenwerfende Kreis, $P'Q'$ sein Schlagschatten, $P''Q''$ das perspektivische Bild des Schlagschattens, ferner O das Auge, H der Hauptpunkt, G der Punkt, durch den die Gegengerade geht und L die Lichtquelle. Die stärker nachgezogenen Teile der die Grund- und Bildebene darstellenden Geraden deuten den wirklichen Schatten und sein Bild an.

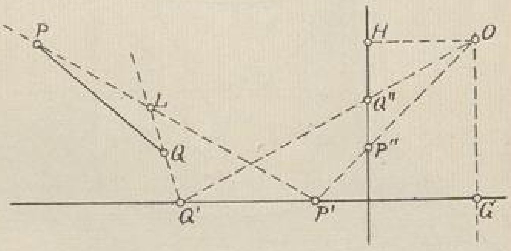

Abb. 194

Zu den elliptischen Schatten gehören auch die kreisförmigen. Der von einem Kreise auf eine Ebene geworfene Schlagschatten ist selbst ein Kreis, wenn die beschattete Ebene der Ebene des Kreises parallel ist oder wenn beide Ebenen Wechselschnitte des Kegels der Lichtstrahlen sind. Ueber die Beschaffenheit des Bildes dieses Schlagschattenkreises ist im § 16 schon das Erforderliche gesagt worden.

In einem besonderen Falle kann der auf eine Ebene fallende Schlagschatten eines Kreises auch eine gerade Linie sein, dann nämlich, wenn die Ebene des Kreises durch die Lichtquelle geht. Dasselbe gilt natürlicherweise auch für jede andere ebene Kurve. Der geradlinige Schatten eines Kreises ist als Grenzfall einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel aufzufassen, je nachdem der leuchtende Punkt außerhalb des Kreises, auf ihm selbst oder innerhalb des Kreises liegt.

Der weitaus am häufigsten vorkommende Fall ist der, daß der Kreis auf die Horizontalebene einen elliptischen Schatten wirft und daß der Kreis sowohl wie die seinen Schatten darstellende Ellipse hinter der Bildebene liegen, sich also als Ellipsen abbilden. Diesen gewöhnlichen Fall stellt die Abb. 195 dar.

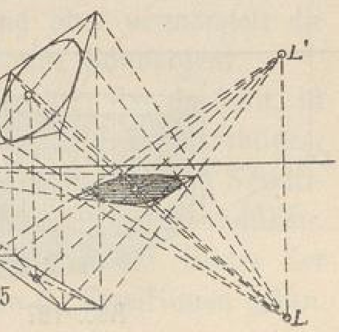

Abb. 195

Fällt aber der Schlagschatten des Kreises auf eine nicht horizontale Ebene, so treten auch Parabeln und Hyperbeln häufig auf. Nehmen wir z. B. an, im Innern eines oben offenen zilindriſchen Gefäßes brenne eine Flamme, die ihre Strahlen über den Rand des Gefäßes hinaus auf eine vertikale Wand wirft. Der Strahlenkegel wird durch die vertikale Ebene jetzt offenbar in einer Hyperbel geſchnitten. Dieſen hyperboliſchen Schatten zeigt die Abb. 196.

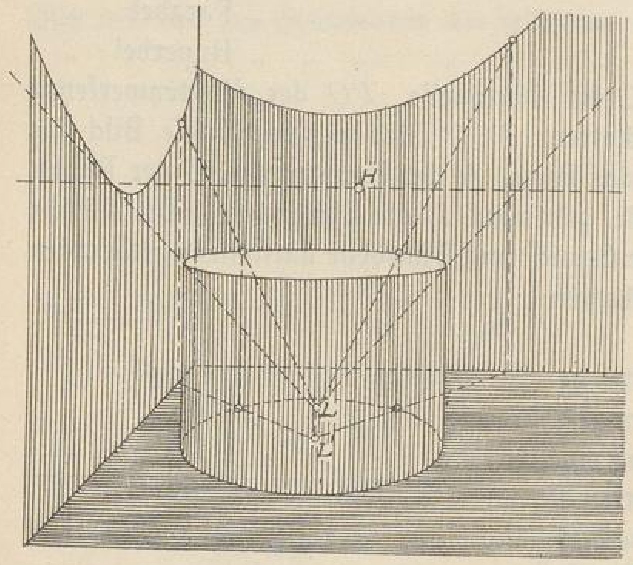

Abb. 196

Ueber die von Zilindern und Kegeln auf Ebenen geworfenen Schlagſchatten iſt nun kaum noch etwas zu ſagen nötig. Die Schlagſchatten der Grundkreiſe ſind Kegelſchnitte, im gewöhnlichen Falle Ellipſen, die ſich auch als Ellipſen darſtellen. Die Schatten der Streiflinien ſind, wenn es ſich um einen Zilinder handelt, zwei der gemeinſamen Tangenten, wenn es ſich um einen Kegel handelt die Tangenten, die vom Schatten der Spitze aus an den Schattenumriß der Grundfläche gezogen werden können. Aus den Berührungspunkten der Tangenten ergeben ſich dann ſofort die Punkte der Grundkreiſe, von denen die Streiflinien ausgehen.

Aber auch direkt, ohne Vermittlung des Schlagſchattens können wir die Streiflinien finden. Sind zunächſt die Streiflinien eines Zilinders aufzuſuchen, ſo brauchen wir nur durch die Lichtquelle L eine Parallele zu den Erzeugenden des Zilinders zu ziehen, ſie mit der Ebene einer ſeiner Grundflächen zu durchſchneiden und von dem Schnittpunkte aus Tangenten an den Umriß derſelben Grundfläche zu ziehen; von den Berührungspunkten müſſen die Streiflinien ausgehen. Die Abb. 197, 198 zeigen dieſe Konſtruktion für zwei beſonders wichtige Lagen des Zilinders, den ſtehenden und den liegenden Zilinder.

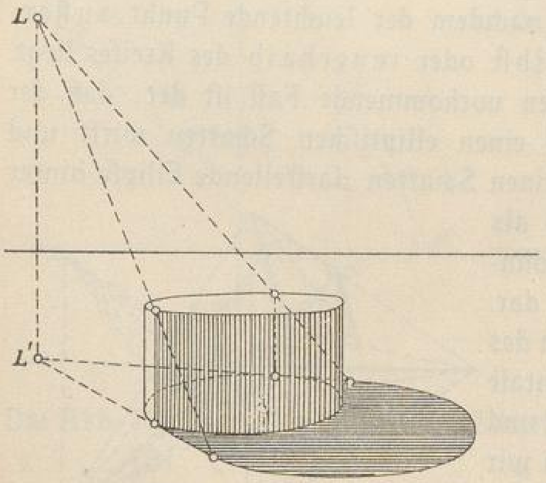

Abb. 197

In der Abb. 198 ist L''', der Schnittpunkt von $F_2 L'$ mit der Grundkante des hinteren Quadratbildes, die Projektion von L' auf die hintere Grundfläche des Zilinders. Eine durch L''' gezogene Vertikale schneidet $F_2 L$ in L'', der Projektion von L auf dieselbe Grundfläche. Die von L'' aus gezogenen Tangenten berühren den Umriß des Bildes dieser Grundfläche in den Punkten, von denen die Streiflinien ausgehen. — Die Linie $F_2 L$ ist jetzt die oben erwähnte Parallele zu den Erzeugenden des Zilinders.

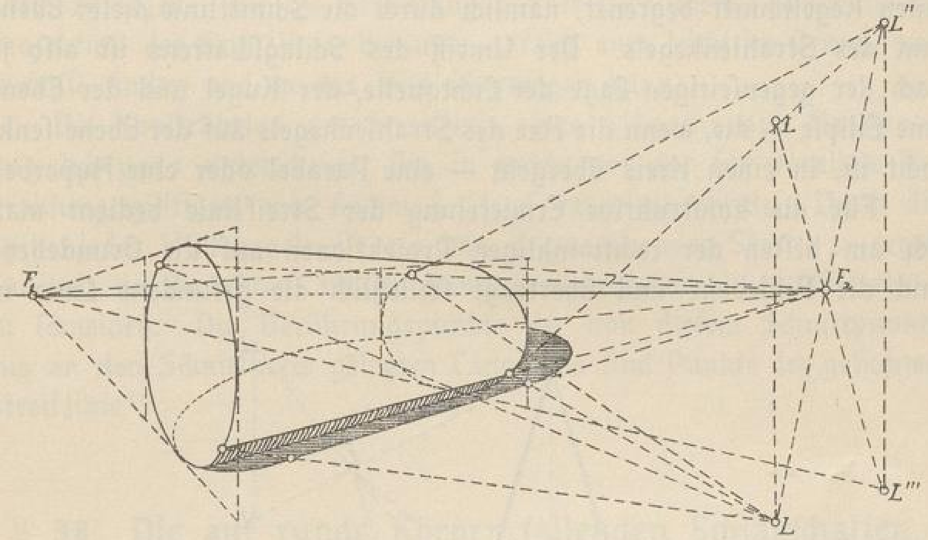

Abb. 198

Um die Streiflinien eines K e g e l s zu bestimmen, legen wir — genau wie bei paralleler Bestrahlung — einen Strahl durch seine Spitze, schneiden ihn mit der Ebene der Grundfläche und ziehen vom Schnittpunkte aus Tangenten an ihren Umriß; von den Berührungspunkten gehen die Streiflinien aus. Diese Konstruktion ist für verschiedene Lagen des Kegels in den Abb. 199 und 200 dargestellt. — Der in Abb. 199 auftretende Schlagschatten erstreckt sich in Folge der niedrigen Lage der Lichtquelle tatsächlich — immer breiter werdend — ins Unendliche. Die perspektivische Verkürzung aber verwandelt die Divergenz der Grenzen des Schlagschattens in eine Konvergenz.

In der Abb. 200, die einen Kegel mit wagerechter Axe darstellt, ist L''' der Schnittpunkt von $L'Z'$ mit der Grundseite des Quadratbildes; eine von L''' aus gezogene Vertikale schneidet LZ in L'', dem Schnittpunkt des durch die Spitze Z gezogenen Strahls mit der Grundfläche. Von L'' gehen die Tangenten aus, die den Umriß des Bildes der Grundfläche in den Punkten berühren, nach denen die Streiflinien gehen.

Die Streiflinie einer K u g e l ist stets ein Kreis, freilich nicht, wie bei paralleler Bestrahlung, ein Großkreis. Die die Kugeloberfläche berührenden Strahlen bilden eine normale Kegelfläche zweiter Ordnung, deren Axe durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt der Kugel geht. Die Berührungspunkte der Strahlen liegen auf einem Kreise — eben der Streiflinie — dessen Ebene zu der Axe des Kegels rechtwinklig und die Polarebene des leuchtenden Punkts ist. — Der Schlagschatten der Kugel auf eine beliebige Ebene wird stets durch einen Kegelschnitt begrenzt, nämlich durch die Schnittlinie dieser Ebene und des Strahlenkegels. Der Umriß des Schlagschattens ist also je nach der gegenseitigen Lage der Lichtquelle, der Kugel und der Ebene eine Ellipse — die, wenn die Axe des Strahlenkegels auf der Ebene senkrecht ist, in einen Kreis übergeht — eine Parabel oder eine Hyperbel.

Für die konstruktive Ermittelung der Streiflinie bedient man sich am besten der rechtwinkligen Projektionen auf die Grundebene und die Bildebene und überträgt schließlich die gefundene Linie in

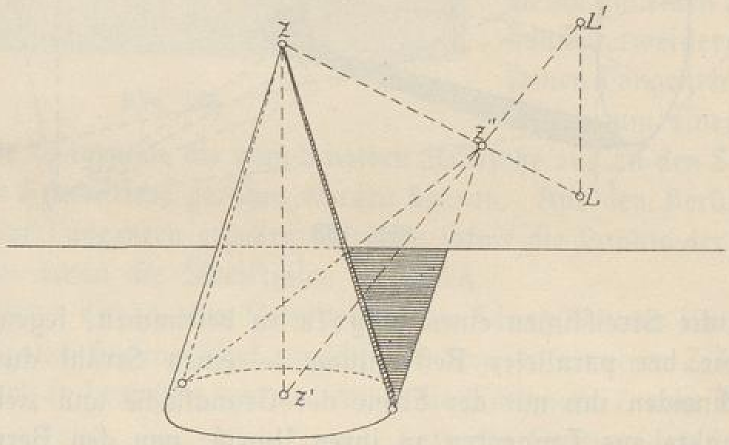

Abb. 199

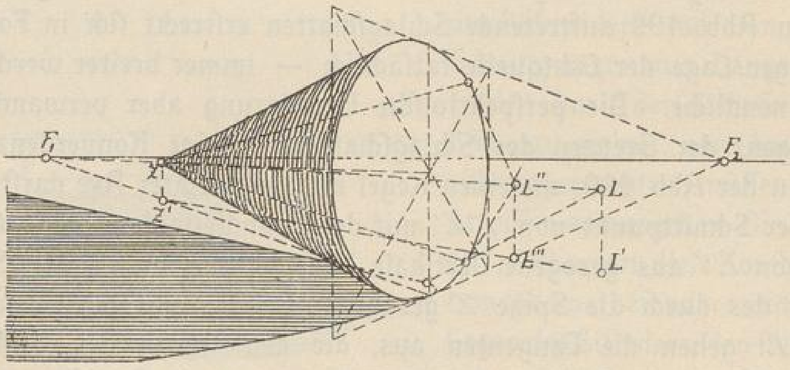

Abb. 200

das Bild. Als Hülfsebene benutzt man mit Vorteil eine durch den Kugelmittelpunkt und die Lichtquelle gehende Vertikalebene oder eine dieser Ebene parallele Ebene. Eine solche Ebene ist offenbar der Axe des Strahlenkegels parallel, daher zur Ebene der Streiflinie senkrecht; diese Linie projiziert sich demnach auf sie als gerade Linie. Wenn man also die Lichtquelle und die Kugel auf die genannte Hülfsebene projiziert und sie in die Grundebene umklappt, so hat man nur von der Projektion der Lichtquelle Tangenten an den die Kugel darstellenden Kreis zu legen. Die die Berührungspunkte verbindende Sehne ist die Projektion der Streiflinie, die man daraus auch leicht im Grund- und Aufrisse finden und in das Bild übertragen kann.

Die Konstruktion der Streiflinie eines allgemeinen Umdrehungskörpers unterscheidet sich in nichts von der für parallele Bestrahlung gültigen, wie sie im § 32, 4 dargelegt wurde. Durch die Spitze jedes Hülfskegels ist ein von L ausgehender Strahl zu legen und mit der benutzten, zur Umdrehungsaxe rechtwinkligen Hülfsebene zu schneiden. Die Berührungspunkte der von diesem Schnittpunkte aus an den Schnittkreis gelegten Tangenten sind Punkte der gesuchten Streiflinie.

§ 38. Die auf runde Körper fallenden Schlagschatten.

Die Konstruktion des Schlagschattens, den ein Punkt auf eine Zilinderfläche wirft, ist ganz dieselbe, die auch für parallele Bestrahlung gilt (s. § 33); nur sind selbstverständlich die Punkte S und S' durch die Punkte L und L' zu ersetzen. Der Schlagschatten, den der Rand einer zilindrischen Röhre auf ihre Innenfläche wirft, ist auch bei zentraler Beleuchtung eine Ellipse, denn der Schnitt der Zilinderfläche mit der Kegelfläche der Strahlen, deren Leitlinie der Rand der Oeffnung ist, ist auch hier wieder eine Kurve vierter Ordnung, der der Rand selbst als Kurve zweiter Ordnung angehört, so daß für den Schlagschattenumriß eine Kurve zweiter Ordnung, also ein ebener Schnitt des Zilinders — eine Ellipse — übrig bleibt.

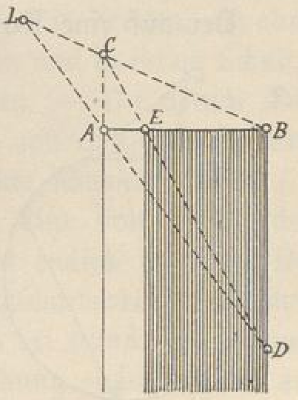

Abb. 201

Die Abb. 201 zeigt die Projektion auf eine durch die Lichtquelle und die Zilinderaxe gehende Ebene; der schattenwerfende Rand und der