UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 44. Die durch Strahlenbrechung an einer Wasseroberfläche erzeugten Bilder.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

Visual Library

In dieser Weise können wir das Bild jedes Punktes, also auch das perspektivische Bild des Spiegelbildes jedes beliebigen Körpers ermitteln. Die Konstruktion vereinfacht sich aber außerordentlich, wenn wir bedenken, daß die perspektivischen Bilder der von beliebigen Punkten auf den Spiegel gefällten Perpendikel durch einen Punkt gehen müssen. Dieser Fluchtpunkt F' liegt offenbar in der durch F, den Fluchtpunkt von $V'Y'$ und $W'X'$, gezogenen Lotrechten und ist daher der Schnittpunkt dieser Lotrechten mit $P''P^{VII}$. Selbstverständlich können wir F' auch in der gewöhnlichen Weise dadurch finden, daß wir durch das Auge eine Normale des Spiegels legen und mit der Bildebene schneiden.

Weiter kann man sich die Konstruktion des Spiegelbildes dadurch erleichtern, daß man stets berücksichtigt, daß eine Linie und ihr Spiegelbild sich in der Ebene des Spiegels schneiden und daß die Spiegelbilder paralleler Kanten im perspektivischen Bilde nach einem Fluchtpunkte gehen müssen.

§ 44. Die durch Strahlenbrechung an einer Wasseroberfläche erzeugten Bilder.

Die durch das Wasser hervorgerufenen Täuschungen sind allgemein bekannt. Blickt man von oben in das Wasser hinein, so erscheint seine Tiefe kleiner, als sie in Wahrheit ist; ein schräg in das Wasser gesteckter Stab erscheint in seinem Schnittpunkte mit der Wasseroberfläche geknickt. Mit dem Zustandekommen dieser durch Strahlenbrechung erzeugten Bilder und ihrer konstruktiven Ermittelung wollen wir uns jetzt ganz kurz befassen.

Eine eingehende Behandlung der Strahlenbrechung an der Ebene gehört völlig in das Gebiet der Optik; Leser, die sich mit dem Gegenstande gründlicher befassen wollen, seien auf des Verfassers „Geometrische Optik“ (Halle a. S. 1886), „Lehrbuch der Optik“ (Weimar 1889) und „Elemente der geometrischen Optik“ (Hannover 1908) verwiesen. Hier kann von der Sache nur soviel gebracht werden, wie unumgänglich nötig ist, um die Entstehung dieser Bilder grundsätzlich zu verstehen.

Die Bilder, von denen hier die Rede ist, werden oft als optische Täuschungen bezeichnet. Um Täuschungen im eigentlichen Sinne des Wortes handelt es sich hier nicht; wenn beispielsweise ein Stab im Wasser geknickt erscheint, so liegt sein wirkliches, konstruierbares Bild da, wo wir es sehen. Um eine wirkliche optische Täuschung handelt

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

es sich aber beispielsweise, wenn uns eine ungeteilte gerade Strecke länger erscheint, als eine in derselben Lage gegen das Auge befindliche, mehrfach geteile Strecke von gleicher Länge.

Die durch Strahlenbrechung im Wasser erzeugten Bilder pflegen in der Malerei kaum beachtet zu werden. Stellt der Künstler beispielsweise eine Diana im Bade dar, so zeichnet er den ganzen Umriß der Göttin ohne Rücksicht auf die sehr wesentliche Veränderung, die die Umrisse der unter Wasser befindlichen Teile durch die Strahlenbrechung erleiden, und unterscheidet bei der malerischen Behandlung diese Teile von den außerhalb des Wassers befindlichen nur dadurch, daß er den bläulichgrünen Farbton des Wassers über sie legt. Eine solche Behandlung — und mag sie noch so allgemein und von noch so großen Künstlern geübt werden — entspricht nicht der Wahrheit. Zuzugeben ist, daß der durch die Strahlenbrechung erzeugte Umriß nicht eben schön aussieht; wenn aber das der Fall ist, sollte man lieber auf die Darstellung teilweise im Wasser befindlicher Körper verzichten, als sie unrichtig darstellen.

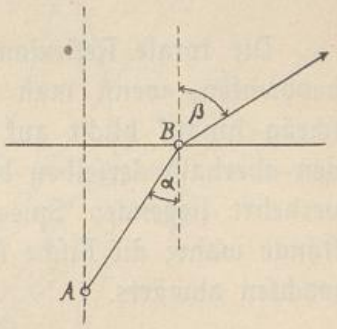

Abb. 214

Geht von einem unter Wasser befindlichen Punkte A (Abb. 214) ein Lichtstrahl aus, der die Wasseroberfläche in B trifft, so wird er beim Uebergang in die Luft von seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Bildet der Strahl AB im Wasser mit dem im Punkte B errichteten Einfallslote den Einfallswinkel α, so bildet er nach seinem Austritte aus dem Wasser mit demselben Lote einen größeren Winkel β, den sogenannten Brechungswinkel. Der Winkel β ist durch den Winkel α bestimmt; beide hängen durch das sogenannte Snellius'sche Brechungsgesetz zusammen, das aussagt, daß das Verhältnis des Sinus des Brechungswinkels zum Sinus des Einfallswinkels für alle Strahlen dasselbe ist. Der für den Uebergang der Strahlen aus einem bestimmten Stoffe in einen anderen bestimmten Stoff unveränderliche Wert dieses Verhältnisses wird „Brechungsquotient" genannt und gewöhnlich mit n bezeichnet. Es ist daher

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \qquad \text{also} \qquad \sin \beta = n \cdot \sin \alpha$$

Mit Hülfe dieser einfachen Gleichung können wir aus dem Einfallswinkel eines Strahls seinen Brechungswinkel berechnen. Der Sinus eines Winkels kann bekanntlich den Wert 1 nicht überschreiten; also

kann höchstens $\sin \beta = 1$ sein. Daraus folgt dann für diesen Maximalwert von $\sin \beta$, dem der Wert $\beta = 90^0$ entspricht, ein Einfallswinkel α', der durch die Gleichung

$$\sin \alpha' = \frac{1}{n}$$

bestimmt ist. Dieser Wert α' ist der höchste Wert des Winkels α, bei dem noch eine Brechung möglich ist; ihm entspricht ein mit der Wasseroberfläche zusammenfallender gebrochener Strahl. Ueberschreitet der Winkel α diesen Grenzwert, so kann der Strahl nicht mehr in die Luft austreten; er wird an der Wasseroberfläche vollständig zurückgeworfen, es tritt „totale Reflexion" ein.

Für den Uebergang aus Wasser in Luft ist etwa $n = \frac{4}{3}$, also $\sin \alpha' = \frac{3}{4}$. Daraus ergiebt sich für den Winkel α', den „Grenzwinkel der totalen Reflexion" der Wert

$$\alpha' = 48^0\ 35'.$$

Die totale Reflexion an einer Wasseroberfläche läßt sich trefflich beobachten, wenn man durch die gläserne Wand eines Aquariums schräg hinauf blickt auf die Oberfläche. Man sieht dann nichts von den oberhalb derselben befindlichen Gegenständen, nimmt hingegen die verkehrt liegenden Spiegelbilder der im Wasser befindlichen Gegenstände wahr; die Fische schwimmen auf dem Rücken und die Pflanzen wachsen abwärts.

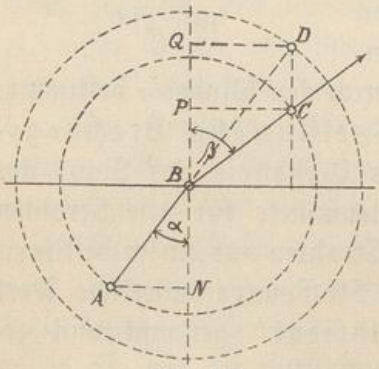

Abb. 215

Der zu irgend einem einfallenden Strahle gehörige gebrochene Strahl läßt sich auch sehr einfach konstruieren. Um den Einfallspunkt B (Abb. 215) des in der Zeichenfläche liegenden Strahls AB beschreiben wir zwei Kreise, deren Radien sich $= 1 : n$ verhalten, verlängern den einfallenden Strahl, bis er den größeren Kreis in D schneidet und ziehen von D aus eine Parallele zum Einfallslote, die den kleineren Kreis in C schneidet; BC ist der gebrochene Strahl. Ziehen wir nämlich AN und CP senkrecht zum Einfallslot, so ist

$$\sin \alpha = \frac{AN}{AB},\ \sin \beta = \frac{CP}{BC},\ \text{also}\quad \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{CP}{BC} : \frac{AN}{AB} = \frac{CP}{AN} \cdot \frac{AB}{BC}$$

Nun ist aber $AB = BC$, also $\frac{AB}{BC} = 1$, ferner $\frac{CP}{AN} = \frac{DQ}{AN} = \frac{BD}{AB}$

$$= \frac{n}{1} = n, \quad \text{also } \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = n.$$

Aus der Konstruktion ergiebt sich auch der Grenzwinkel der totalen Reflexion; diese tritt ein, wenn CD den kleineren Kreis berührt. Dann ist offenbar $\beta = 90^0$, $\sin\beta = 1$, $\sin\alpha = \frac{1}{n}$.

Wir wollen nun (s. Abb. 216) alle Strahlen verfolgen, die von dem Punkte A ausgehen; A' sei die Projektion von A auf die Wasseroberfläche. Da der Strahlenverlauf in allen durch das Lot AA' gehenden Schnitten derselbe ist, genügt es vollständig, wenn wir in der Ebene des Papiers einen solchen Schnitt darstellen. Wenn wir eine größere Anzahl von Strahlen auswählen und nach der angegebenen Konstruktion die zugehörigen gebrochenen Strahlen ermitteln, so finden wir, daß diese gebrochenen Strahlen nicht mehr durch einen Punkt gehen; sie berühren eine Kurve, die sich vollständig ergeben würde, wenn wir alle Strahlen verfolgen könnten. Sie ist die einhüllende Kurve oder Enveloppe der gebrochenen Strahlen und wird hier, wo sie durch Strahlenbrechung entsteht, als Diakaustik bezeichnet. Sie ist, wie für den mathematisch geschulten Leser hinzugefügt werden mag, die Hälfte der Evolute einer Ellipse, deren Mittelpunkt A' ist. Bezeichnen wir die Tiefe des Punktes A unter der Oberfläche mit t, so ist die in der Richtung AA' fallende halbe große Axe der Ellipse $a = n \cdot t$, die in die Wasseroberfläche fallende halbe kleine Axe $b = \sqrt{n^2 - 1} \cdot t$ und daher die Exzentrizität $e = t$. Daraus folgt, daß der Punkt A einer der Brennpunkte der Ellipse ist. Die Diakaustik besitzt eine im Lote AA' liegende Spitze S, die von A'

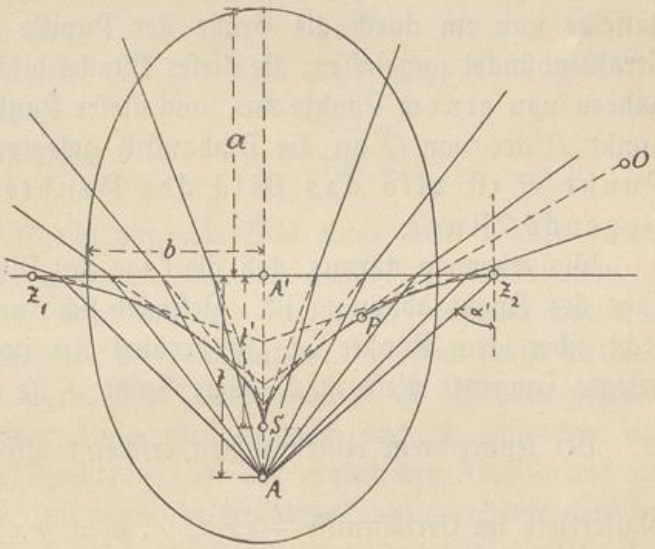

Abb. 216

den Abstand $t' = \frac{t}{n}$ hat; sie berührt die die Wasseroberfläche darstellende Horizontale in den Punkten Z_1 und Z_2, in denen die totale Reflexion beginnt und deren Abstand von A

$$t \cdot tg\, \alpha' = \frac{t \cdot sin\, \alpha'}{\sqrt{1 - sin^2 \alpha'}} = \frac{\frac{t}{n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{t}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

ist. Für $n = \frac{4}{3}$ ist $t' = \frac{3}{4}\, t$, $a = \frac{4}{3}\, t$, $b = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} \cdot t = \frac{t}{3} \cdot \sqrt{7}$
$= 0{,}8819 \cdot t$.

Die Kenntnis der Diakaustik ist die unerläßliche Vorbedingung für das Verständnis und die Konstruktion der durch Brechung erzeugten Bilder. Denken wir uns nämlich im Punkte O ein Auge, so wird in dasselbe nur ein durch die Größe der Pupille bedingtes, sehr enges Strahlenbündel eingelassen; die dieses Bündel bildenden Strahlen gehen nahezu von einem Punkte aus, und dieser Punkt ist der Berührungspunkt P der von O an die Diakaustik gelegten Tangente. Dieser Punkt P ist also das Bild des Punktes A für ein in O liegendes Auge.

Wir erkennen daraus, daß die Lage des Bildes durchaus von der Lage des Auges abhängig ist. Befindet sich zunächst das Auge senkrecht über dem Punkte A, so berührt die von ihm an die Kurve gelegte Tangente diese in S; diese Spitze S ist also jetzt das Bild von A. Bei senkrechtem Hineinblicken erscheint also, da $t' = \frac{t}{n}$ ist, die Wassertiefe im Verhältnisse $\frac{1}{n} : 1 = 1 : n = 1 : \frac{4}{3} = 3 : 4$ verkleinert. Bewegt sich nun das Auge nach der Seite, so gleitet der Punkt P an der Kurve hinauf, das Bild nähert sich also fortgesetzt der Wasseroberfläche und dem Auge. Je flacher wir also in ein Gewässer blicken, um so geringer erscheint seine Tiefe.

Der gesuchte Berührungspunkt P des Strahl mit der Diakaustik ist der Krümmungsmittelpunkt der erwähnten Ellipse in ihrem Schnittpunkte mit dem Strahle. Diese Tatsache setzt uns in den Stand, die gewöhnliche, aus der Theorie der Kegelschnitte bekannte Konstruktion des Krümmungsmittelpunkts hier anzuwenden und dadurch den gesuchten Berührungspunkt P, das Bild des Punktes A für das Auge A, bedeutend schärfer zu bestimmen. — Der die Diakaustik berührende

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Strahl schneide die Ellipse in N (Abb. 217), ihre große Axe in K. Für den Schnittpunkt N ist NO die Normale, der Punkt P Krümmungsmittelpunkt. Um ihn genau zu finden, ziehen wir NA durch den bereits als Brennpunkt der Ellipse erkannten Punkt A, errichten in K ein Perpendikel auf NO, das NA in L schneidet und errichten schließlich in L wieder ein Perpendikel auf NL, das NK im gesuchten Berührungspunkte P schneidet. — Die Konstruktion beruht darauf, daß der Krümmungsmittelpunkt P für einen beliebigen Punkt N eines Kegelschnittes erhalten wird, wenn man den Abschnitt NK der Normalen durch das Quadrat des Cosinus des Winkels KNA dividiert.

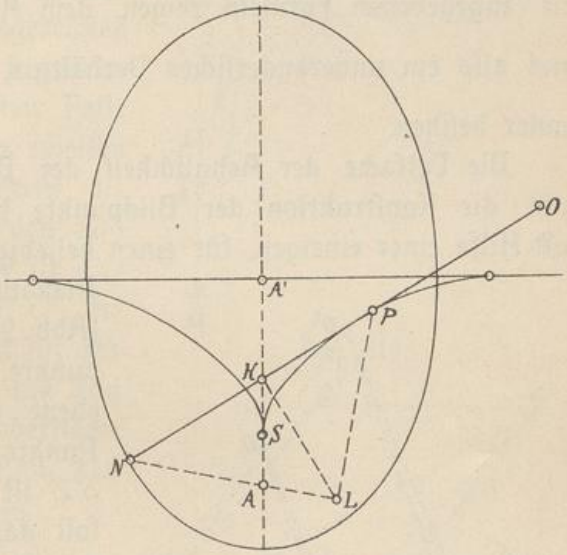

Abb. 217

Liegt nun die Aufgabe vor, das Bild eines unter Wasser befindlichen Punkts für eine gegebene Lage des Auges zu konstruieren, so haben wir durch den Punkt und das Auge eine vertikale Ebene zu legen, in ihr die Diakaustik zu konstruieren und vom Auge aus eine Tangente an sie zu legen. Der Berührungspunkt ist das gesuchte Bild. — Das Bild einer Linie wird demnach dadurch gefunden, daß man mit jedem ihrer Punkte — bei der praktischen Ausführung der Konstruktion natürlich mit einer beschränkten Zahl — ebenso verfährt und die gefundenen Bildpunkte durch eine Kurve verbindet. Das Bild einer Geraden ergiebt sich auf diese Weise als eine krumme Linie, die erst bei unendlicher Entfernung des Auges in eine Gerade übergeht. In diesem Falle sind nämlich die vom Auge an die den einzelnen Punkten der Geraden entsprechenden Diakaustiken gelegten Tangenten parallel, und die Berührungspunkte paralleler Tangenten, die an ähnliche und perspektivisch liegende Kurven gezogen werden, liegen auf einer durch den Aehnlichkeitspunkt gehenden Geraden.

Die Ausführung der angegebenen Konstruktion ist natürlich recht umständlich. Sie vereinfacht sich aber dadurch ganz wesentlich, daß die hier auftretende Diakaustik nur einer einzigen Gestalt fähig ist, daß also die den verschiedensten Lagen des Punktes A ent-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

sprechenden Diakaustiken geometrisch ähnliche Kurven sein müssen. Das ergiebt sich sofort daraus, daß die Diakaustik nur von einer Konstanten, nämlich dem Abstande t abhängt; es folgt ferner daraus, daß sie die Evolute einer Ellipse ist, deren Hauptaxen, wie die angegebenen Formeln zeigen, dem Abstande t proportional sind und also ein unveränderliches Verhältnis, nämlich $\frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$, zu einander besitzen.

Die Tatsache der Aehnlichkeit der Diakaustiken ermöglicht uns nun, die Konstruktion der Bildpunkte beliebig vieler Objektpunkte mit Hilfe einer einzigen, für einen beliebigen Objektpunkt gezeichneten Diakaustik auszuführen. Es seien (Abb. 218) A und B zwei Objektpunkte, O das in ihrer Vertikalebene liegende Auge. Die dem Punkte A entsprechende Diakaustik SZ ist konstruiert worden. Man soll das Bild des Punktes B für das Auge O bestimmen.

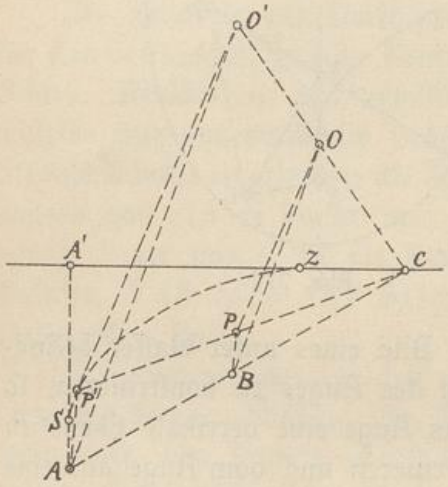

Abb. 218

Es kommt nun darauf an, einen Punkt O' zu finden, der in Bezug auf die Diakaustik des Punktes A ebenso liegt, wie der Punkt O in Bezug auf die nicht gezeichnete Diakaustik des Punktes B. Zu diesem Zwecke ziehen wir die Gerade AB und schneiden sie mit der Wasseroberfläche; der Schnittpunkt C ist der Aehnlichkeitspunkt der beiden Diakaustiken. Ziehen wir also CO und schneiden diese Gerade mit einer von A aus parallel zu BO gezogenen Geraden, so haben wir den gesuchten Punkt O'. Eine von O' an die Diakaustik des Punktes A gelegte Tangente ergiebt in ihrem Berührungspunkte das Bild P' des Punktes A für ein in O' liegendes Auge; ziehen wir schließlich $P'C$ und von B aus eine Parallele zu AP' oder auch von O aus eine Parallele zu $O'P'$, so haben wir sofort das gesuchte Bild P. Die Dreiecke $AP'O'$ und BPO sind ähnlich.

Dadurch, daß man nur eine Diakaustik zu zeichnen braucht, wird nicht nur die Konstruktion sehr vereinfacht, sondern auch die Genauigkeit ganz bedeutend erhöht. Diese eine Kurve muß natürlich mit möglichster Sorgfalt und Genauigkeit gezeichnet werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Abb. 219, 220 und 221 zeigen die auf diese Weise ermittelten Bilder einer vertikalen, einer in der durch das Auge und den leuchtenden Punkt gehenden Vertikalebene liegenden wagerechten und einer in derselben Ebene liegenden geneigten Geraden. Im ersten Falle fällt C mit A' zusammen; im zweiten Falle liegt C in unendlicher Ferne, die Geraden AC und $P'G$ werden also horizontal. — In jeder Figur ist PQ die abzubildende Gerade, $P'Q'$ ihr durch Brechung erzeugtes Bild für das in O liegende Auge; Objekt und Bild müssen sich in der Wasseroberfläche schneiden, es fallen also in Abb. 219 und 221 P und P' zusammen.

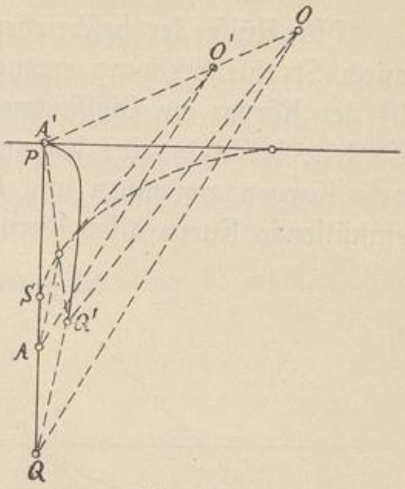

Abb. 219

Soll das Bild einer nicht in einer durch das Auge gehenden vertikalen Ebene liegenden Linie ermittelt werden, so muß man auf ihr einzelne Punkte annehmen, durch jeden Punkt und das Auge eine vertikale Ebene legen, diese um eine durch das Auge gezogene vertikale Gerade in eine zur Zeichenfläche parallele Lage drehen, dann die oben geschilderte Bildkonstruktion vornehmen und schließlich die Ebene wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückdrehen. — Die Abb. 222 zeigt die Anwendung dieser Konstruktion auf eine ganz beliebig im Raume liegende Gerade PQ; die Gerade selbst und ihr Bild PQ' sind im Grund- und Aufrisse dargestellt.

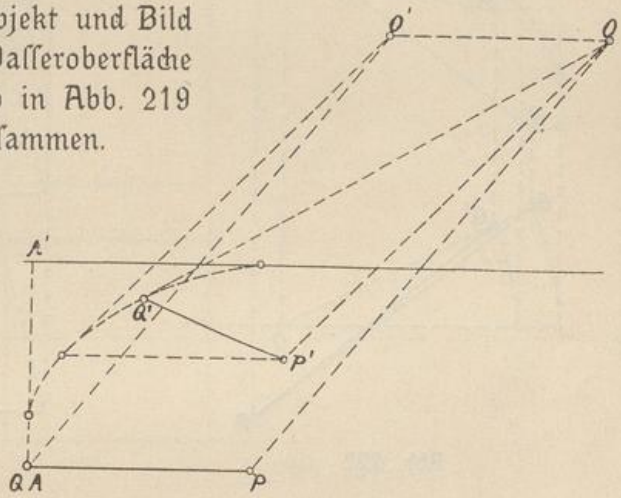

Abb. 220

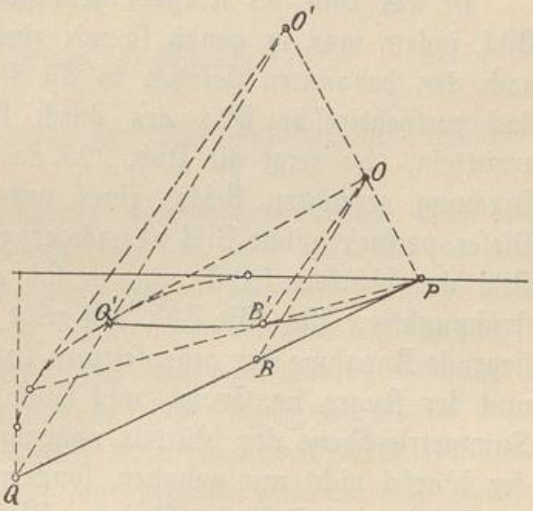

Abb. 221

Mit Hülfe der beschriebenen Konstruktionen kann man nun das durch Strahlenbrechung erzeugte Bild jedes beliebigen Körpers finden. Ist der Körper ein Vielflächner, so ermittelt man die Bilder sämtlicher Kanten; besitzt er eine krumme Oberfläche, so muß man auf ihr geeignete Kurven annehmen und deren Bilder punktweise aufsuchen. Die einhüllende Kurve aller Kurvenbilder ist der Umriß des Bildes.

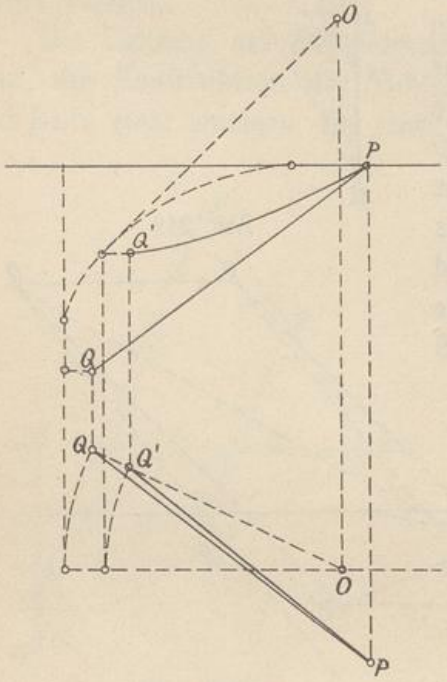

Abb. 222

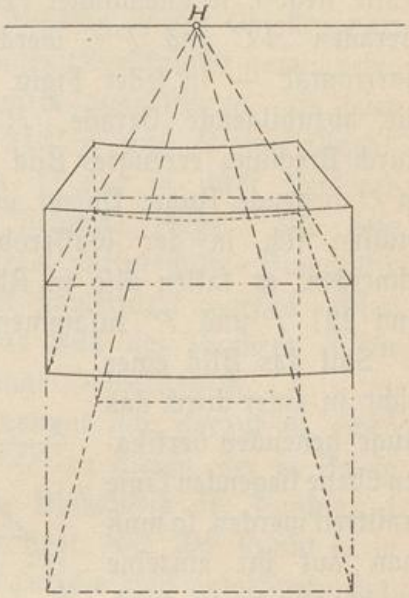

Abb. 223

Ist das Bild des Körpers gefunden, so hat man schließlich dieses Bild, indem man es genau so wie einen wirklichen Körper behandelt, nach den bekannten Gesetzen in die Perspektive zu übertragen, also das perspektivische Bild des durch Brechung erzeugten Bildes zu ermitteln. So zeigt die Abb. 223 das perspektivische Bild des durch Brechung erzeugten Bildes eines unter Wasser befindlichen Würfels. Dieses perspektivische Bild ist nachgezogen, während das perspektivische Bild des Würfels selbst, wie es sich ohne das Wasser zeigen würde, strichpunktiert ist. Die Abb. 224 zeigt die der Konstruktion zu Grunde liegende Annahme der gegenseitigen Lage der Wasserfläche, des Würfels und des Auges im Grund- und Aufrisse. Das Auge wurde in einer Symmetrie-Ebene des Würfels angenommen. Die Abb. 223 zeigt, daß der Würfel nicht nur gehoben, sondern daß auch seine Höhe auf etwa die Hälfte vermindert erscheint. Die wagerechten Kanten erscheinen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schwach gekrümmt, während die Bilder der vertikalen Kanten gerade bleiben und gegen die Bilder der direkt, ohne bedeckendes Wasser, gesehenen Kanten keine Verschiebung erleiden. Das hat seinen Grund einfach darin, daß das, wie wir wissen, tatsächlich gekrümmte Bild einer Vertikalen in der durch sie und das Auge gelegten Vertikalebene liegt, so daß die Krümmung im perspektivischen Bilde nicht in die Erscheinung treten kann.

Je flacher wir in das Wasser hineinblicken, um so mehr erscheint der Körper gehoben und dem Auge — auch in wagerechtem Sinne — genähert, um so geringer erscheint gleichzeitig seine Höhe.

Von dem durch die Brechung an einer Ebene erzeugten Astigmatismus der räumlichen Elementarbündel, der auf das wirklich wahrgenommene Bild keinen merkbaren Einfluß hat, ist bei dieser Betrachtung abgesehen worden.

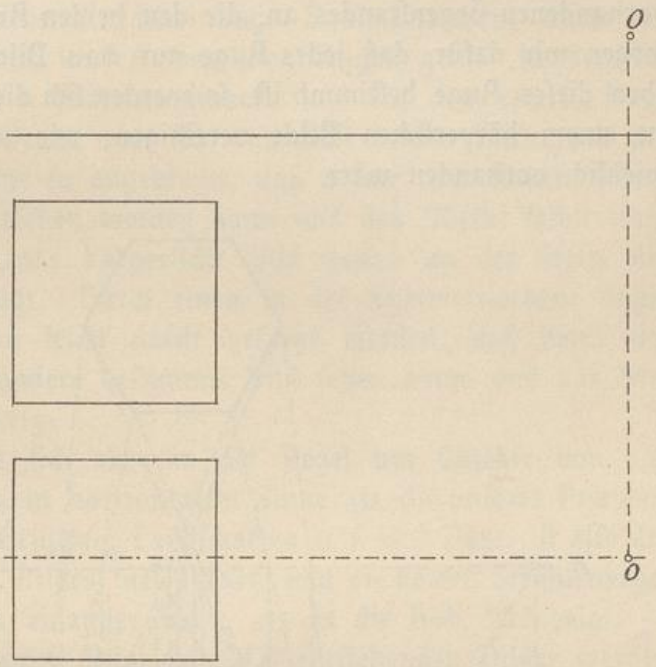

Abb. 224

Anhang zum I. Abschnitte.

§ 45. Die Konstruktion der stereoskopischen Bilder.

Daß wir die uns umgebenden körperlichen Gebilde nicht flächenhaft, sondern körperhaft sehen, daß wir also die Dicke der Gegenstände und ihre Entfernungen vom Auge — innerhalb gewisser Grenzen wenigstens — schätzen können, beruht auf der Zweiheit unseres Sehorgans. So lange die Entfernung des betrachteten Körpers nicht sehr groß ist im Vergleiche mit der Entfernung der beiden Pupillen von einander, entstehen in beiden Augen merkbar verschiedene Bilder des Körpers. Wir können das sehr deutlich wahrnehmen, wenn wir

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN