Lehrbuch der Perspektive

Meisel, Ferdinand

Leipzig, 1908

§ 48. Der Zilinder als Bildfläche.

urn:nbn:de:hbz:466:1-82190

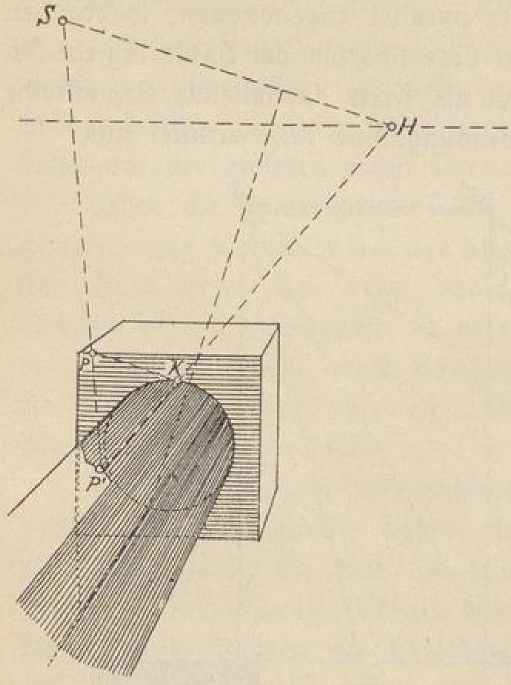

Abb. 229

Projektion des Sonnenſtrahls auf die Unterſeite der Platte dar. Dieſe Gerade ſchneidet den oberen Grenzkreis des Zilinders in K, und durch dieſen Punkt legen wir eine durch H gehende Gerade, die das Bild einer Erzeugenden iſt. Der Schnitt dieſer Geraden mit dem Sonnenſtrahl iſt offenbar der geſuchte Schattenpunkt P'; der Strahl, ſeine Projektion auf die Unterſeite der Platte und die Erzeugende des Zilinders liegen in einer vertikalen Ebene. — Die Konſtruktion der Streiflinien iſt ganz dieſelbe, wie die im § 32 behandelte Konſtruktion der Streiflinien eines zur Bildebene rechtwinkligen Zilinders bei vertikaler Bildebene.

Die Abb. 230 giebt als Illuſtration zu einer Abbildung auf wagerechter Bildebene eine der Nummer 32 des Jahrgangs 1908 der „Woche“ entnommene, ſehr intereſſante Vogelſchau-Anſicht aus New-York, den Blick vom „Singer-Building“, dem höchſten „Wolkenkratzer“, auf den Broadway darſtellend. Hier iſt der Blick natürlich nicht, wie bei einem Deckengemälde, aufwärts, ſondern abwärts gerichtet. Uebrigens ſtand die Axe des Apparats nicht genau lotrecht, die Bildebene alſo auch nicht genau, ſondern nur annähernd wagerecht; man erkennt das daran, daß die Bilder wagerechter Kanten nicht genau parallel laufen.

§ 48. Der Zilinder als Bildfläche.

Eine zilindriſche Bildfläche liegt bei den Panoramen vor; ein derartiges Rundbild iſt, wenn es gut ausgeführt iſt, von ganz überraſchender Wirkung und vermag, namentlich wenn die Vermittelung des Innenraums mit dem Gemälde durch wirkliche Gegenſtände geſchickt hergeſtellt iſt, tatſächlich zu täuſchen. Bei den Rundgemälden iſt die Bildfläche eine vertikale Zilinderfläche, in deren Axe das Auge liegt;

der kleine, für die Beschauer bestimmte Platz befindet sich in der Mitte, und durch einen über diesem Platze angebrachten, ein Dach oder dergl. darstellenden Schirm ist dafür gesorgt, daß man den oberen Rand der Leinwand nicht sehen kann.

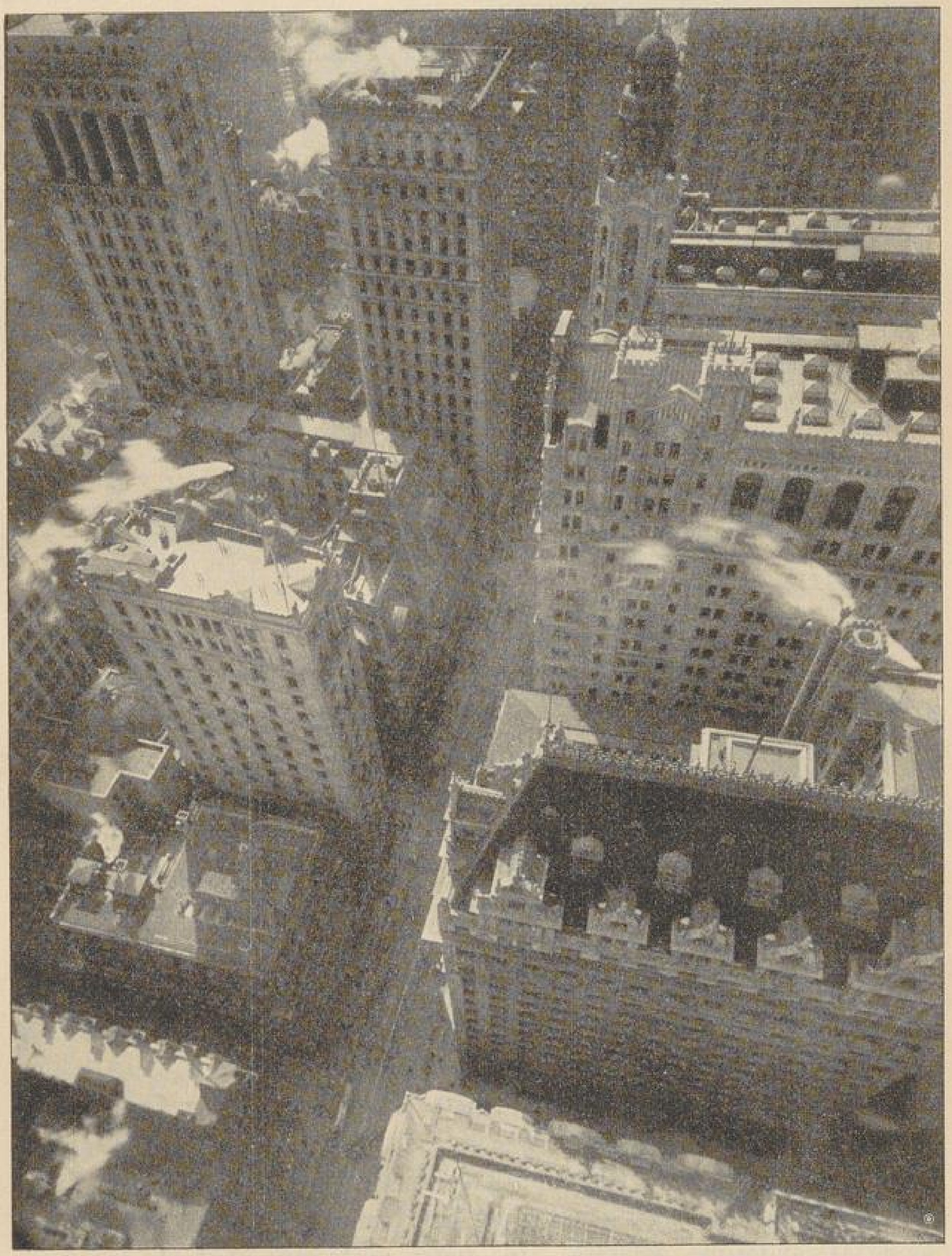

Abb. 230

Die Darſtellung auf vertikaler Zilinderfläche iſt bei Objekten, die in horizontalem Sinne ſehr ausgedehnt ſind, der Darſtellung auf der Ebene weit vorzuziehen. Die perſpektiviſche Verzerrung im genannten Sinne fällt vollſtändig weg, jede wagerechte Blickrichtung iſt rechtwinklig zur Bildfläche, es giebt keine bevorzugte Richtung. Für in vertikalem Sinne ſehr ausgedehnte Objekte freilich iſt die Verzerrung dieſelbe wie auf ebener Bildfläche.

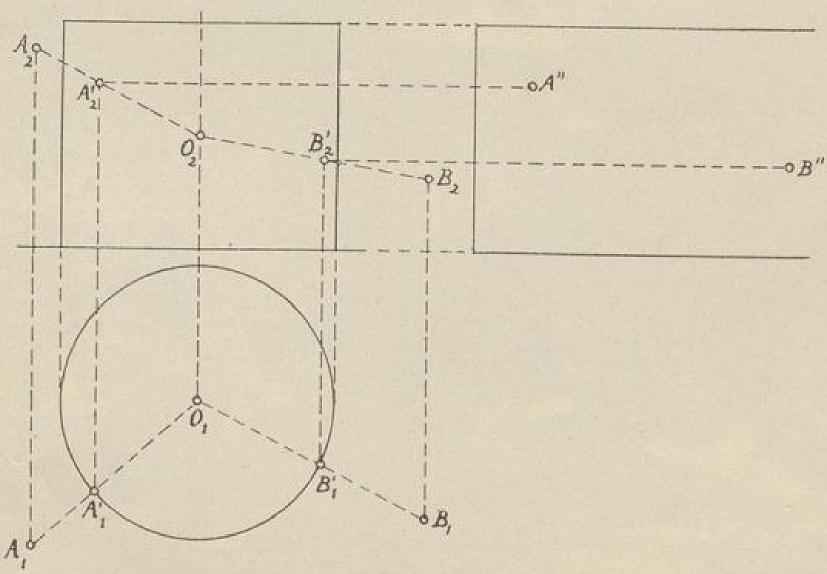

Abb. 231

Wir wollen alſo nun die auf normalzilindriſcher Bildfläche entſtehenden Bilder unter der Vorausſetzung ermitteln, daß ſich das *Auge in der Axe des Zilinders* befindet. Die Abb. 231 zeigt den Zilinder im Grund- und Aufriſſe; A_1 iſt der Grundriß, A_2 der Aufriß eines beliebigen Punkts A, O_1 der Grundriß, O_2 der Aufriß des Auges O. Der Sehſtrahl OA ſchneidet die Bildfläche in einem Punkte A', der das Bild von A iſt. Der Grundriß A_1' dieſes Punkts iſt einfach der Schnittpunkt von O_1A_1 mit dem Kreiſe; der Aufriß A_2' ergiebt ſich ſofort daraus. In genau derſelben Weiſe ergeben ſich die Projektionen B_1' und B_2' des Bildes B' eines durch ſeine Projektionen B_1 und B_2 beſtimmten Punkts B.

Schneiden wir nun die Bildfläche längs irgend einer Erzeugenden auf und wickeln ſie in die Ebene des Papiers ab, ſo erhalten wir die Punkte A'' und B''. Ihr horizontaler Abſtand iſt gleich der Länge des Kreisbogens $A_1'B_1'$, während ihre Höhen durch die Abwickelung keine Veränderung erleiden. In dieſer einfachen Weiſe können wir die Bilder beliebig vieler Punkte in der Abwickelung beſtimmen.

Wir wollen nun die Abbildung einer geraden Linie untersuchen. Diese Abbildung ist die Schnittlinie des Zilinders mit einer durch das Auge und die Gerade gelegten Ebene, der Sehstrahlenebene.

Ist die Gerade lotrecht, so ist auch die Sehstrahlenebene lotrecht; sie schneidet also den Zilinder in einer Erzeugenden, einer lotrechten Geraden. Alle vertikalen Geraden bilden sich also als vertikale Gerade ab, und auch in der Abwickelung bleiben diese Bilder, da sie mit Erzeugenden zusammenfallen, offenbar vertikale Gerade.

Es sei eine wagerechte Gerade gegeben. Wir wollen sie, da wir ja die vertikale Projektionsebene ganz beliebig stellen können, zu dieser Ebene senkrecht in der Horizontalebene annehmen.

Zunächst ist klar, daß das Bild der Geraden zwei Fluchtpunkte F_1 und F_2 besitzen muß, die wir einfach dadurch finden, daß wir durch das Auge eine Parallele mit der Geraden ziehen und mit dem

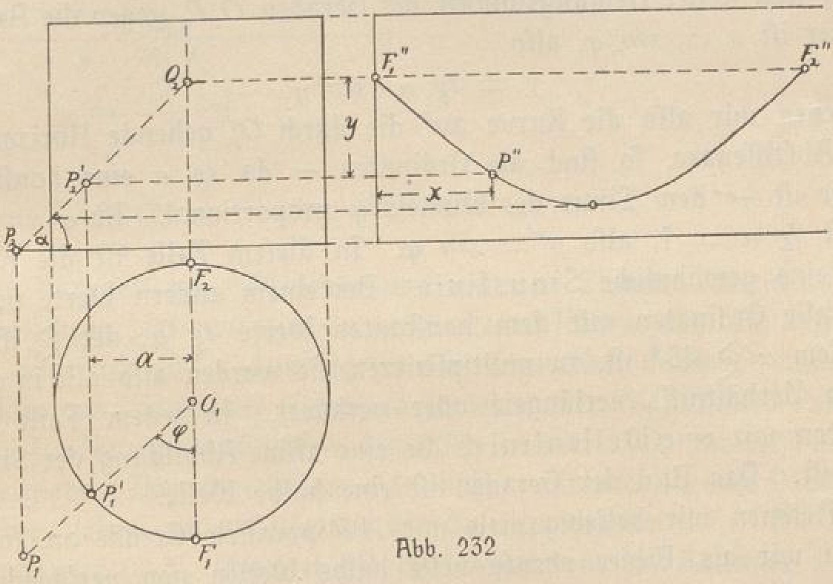

Abb. 232

Zilinder schneiden (Abb. 232). Diese Fluchtpunkte ergeben in der Abwickelung die Punkte F_1'' und F_2'', wobei die Bildfläche in der durch F_1 gehenden Erzeugenden aufgeschnitten gedacht ist. Wir erkennen ferner sofort, daß die Fluchtpunkte der verschiedenen wagerechten Richtungen auf einem Kreise liegen, der der Schnitt der Bildfläche mit einer durch das Auge gehenden Horizontalebene ist. Dieser Kreis ist der Horizont; er erscheint in der Abwickelung als die durch F_1'' und F_2'' gehende wagerechte Gerade. Der Abstand $F_1''F_2''$ ist offenbar gleich dem halben Umfange des Kreises.

Um das Bild der Geraden zu finden, müssen wir durch sie und das Auge eine Ebene legen. Diese Ebene schneidet den Zilinder in einer Ellipse, deren in der Abbildung links liegende, durch die Fluchtpunkte begrenzte Hälfte das Bild der Geraden ist. In der Abwickelung erhalten wir die dargestellte, von F_1'' nach F_2'' reichende Kurve.

Es sei nun P ein beliebiger Punkt der Geraden, P_1 und P_2 seine Projektionen; sein Bild P', das sich in P_1' und P_2' projiziert, ist der Schnitt des Strahls OP mit der Bildebene. In der Abwickelung erhalten wir den zugehörigen Punkt P'', indem wir vom linken Rande aus den Abstand x, der gleich der Bogenlänge F_1P_1' ist, auftragen, durch den gefundenen Punkt eine Vertikale ziehen und sie mit einer durch P_2' gezogenen Horizontalen schneiden. Bezeichnen wir den Winkel $F_1O_1P_1'$ mit φ und nehmen den Radius des Kreises als Einheit an, so ist $x = \varphi$. Der vertikale Abstand der Punkte F_1'' und P'' ist $y = a \cdot tg\ \alpha$, wenn a der Abstand der Parallelen O_1O_2 und P_1P_2 und α der Neigungswinkel der Geraden O_2P_2 gegen die Axe ist. Ferner ist $a = sin\ \varphi$, also

$$y = tg\ \alpha \cdot sin\ \varphi.$$

Beziehen wir also die Kurve auf die durch O_2 gehende Horizontale als Abszissenaxe, so sind die Ordinaten — da $tg\ \alpha$ eine konstante Größe ist — dem Sinus des Winkels φ proportional. Ist $\alpha = 45^0$, so ist $tg\ \alpha = 1$, also $y = sin\ \varphi$. In diesem Falle ist die Kurve also eine gewöhnliche Sinuslinie. Bei einem andern Werte von α sind alle Ordinaten mit dem konstanten Werte $tg\ \alpha$, der $\gtrless$ ist, je nachdem $\alpha \gtrless 45^0$ ist, zu multiplizieren, sie werden also alle in demselben Verhältnisse verlängert oder verkürzt. In jedem Falle also erhalten wir eine Wellenlinie, die eine affine Abbildung der Sinuslinie ist. Das Bild der Geraden ist eine halbe Welle.

Nehmen wir beliebig viele mit AB parallele Gerade an, so erhalten wir als Bilder ebenso viele halbe Wellen von verschiedenen Höhen, die alle von F_1 bis F_2 reichen und deren Scheitel auf einer Vertikalen liegen, die durch die Mitte der beiden Fluchtpunkte geht.

Endlich wollen wir das Bild einer unter beliebigem Winkel gegen die Horizontalebene geneigten Geraden PQ (Abb. 233) ermitteln; P_1Q_1 und P_2Q_2 seien ihre Projektionen; der Punkt P_1 ist ihre Horizontalspur. Da wir die Vertikalebene ganz beliebig annehmen können, bedeutet es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir P_1Q_1 der Projektionsaxe parallel legen. In der rechts gezeichneten dritten Projektion erscheint die Gerade als die Vertikale P_3Q_3. Zunächst erhalten wir die Fluchtpunkte F_1 und F_2 wieder dadurch, daß wir durch

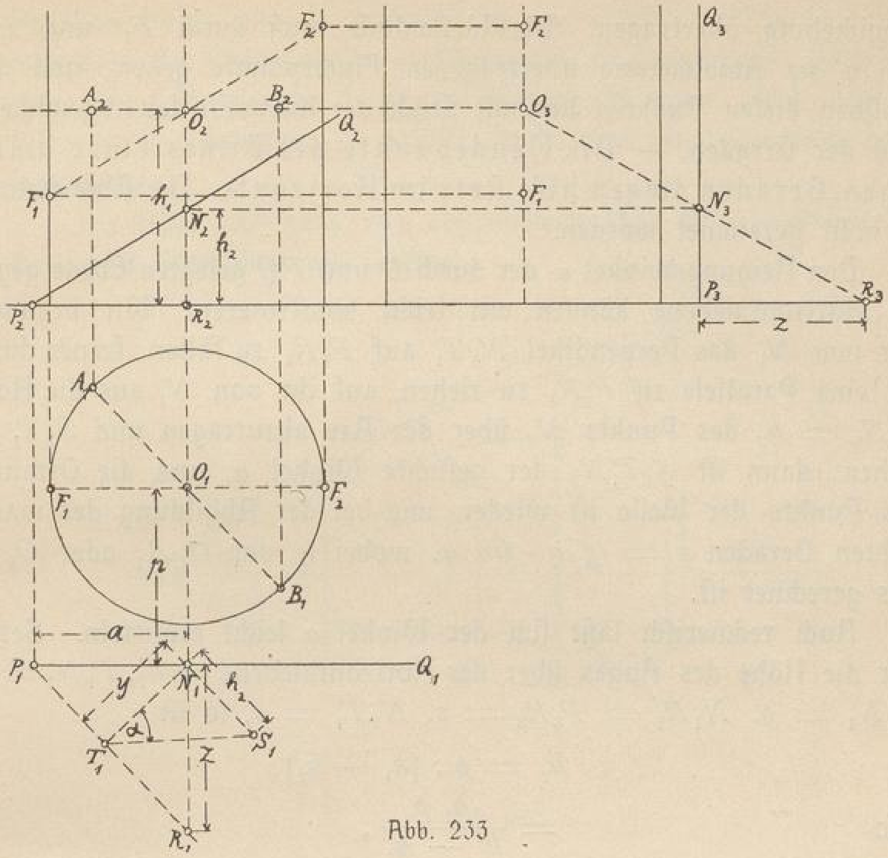

Abb. 233

O eine Parallele zu PQ ziehen und mit dem Zilinder schneiden; die Punkte liegen jetzt natürlich in verschiedenen Höhen, aber um dasselbe Stück über und unter dem Horizonte. Legen wir durch O eine zur Projektionsaxe senkrechte Ebene, so schneidet sie PQ in einem Punkte N_1, dessen Aufriß N_2 sich sofort als Schnitt von P_2Q_2 mit der Mittellinie ergiebt. Daraus erhalten wir, indem wir von N_2 eine Parallele zur Axe ziehen, ohne Weiteres die Seitenprojektion N_3. Die Verbindungslinie O_3N_3 schneidet die Horizontalebene im Abstande z von P_3, und, indem wir dieses Maß in den Grundriß übertragen, ergiebt sich die Gerade P_1R_1, die die Horizontalspur der durch O und PQ gelegten Ebene darstellt. Diese Linie ist also eine in der Horizotalebene liegende Gerade, deren Bild mit dem von PQ zusammenfällt, und wir erkennen also sofort, daß das Bild auch hier wieder eine halbe Ellipse, in der Abwickelung eine halbe Welle einer Wellenlinie ist. Die Wellenlinie schneidet den Horizont in zwei Punken A'' und B'', die wir dadurch erhalten, daß wir im Grundrisse durch den Mittelpunkt des Kreises eine Parallele zu P_1R_1 ziehen und deren Schnittpunkte mit dem Kreise (A_1, B_1) in den Aufriß (A_2, B_2) und in die

Abwickelung übertragen. Die Wellenlinie muß durch F_1'' und F_2'', die in die Abwickelung übertragenen Fluchtpunkte gehen, und das zwischen diesen Punkten liegende Stück der Kurve ist das abgewickelte Bild der Geraden. — Die Wendepunkte des Bildes einer beliebigen Geraden liegen also stets im Horizonte. Die Abwickelung ist nicht gezeichnet worden.

Den Neigungswinkel α der durch O und PQ gelegten Ebene gegen die Horizontalebene können wir leicht konstruieren. Wir brauchen nur von N_1 das Perpendikel N_1T_1 auf P_1R_1 zu fällen, ferner durch N_1 eine Parallele zu P_1R_1 zu ziehen, auf ihr von N_1 aus die Höhe $N_1S_1 = h_2$ des Punkts N_2 über der Axe abzutragen und S_1T_1 zu ziehen; dann ist $S_1T_1N_1$ der gesuchte Winkel α, und die Ordinate des Punkts der Welle ist wieder, wie bei der Abbildung der wagerechten Geraden $y = tg\ \alpha \cdot sin\ \varphi$, wobei φ von O_1A_1 oder O_1B_1 aus gerechnet ist.

Auch rechnerisch läßt sich der Winkel α leicht ermitteln. Setzen wir die Höhe des Auges über der Horizontalebene $= h_1$, $P_1N_1 = a$, $O_1N_1 = p$, $N_1R_1 = P_3R_3 = z$, $N_1T_1 = y$, so ist

$$z : h_2 = p : (h_1 - h_2),$$

also

$$z = \frac{h_2\, p}{h_1 - h_2},$$

ferner

$$y = \frac{a\, z}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{a\, h_2\, p}{\sqrt{(h_1 - h_2)^2\, a^2 + h_2{}^2\, p^2}},$$

schließlich

$$tg\ \alpha = \frac{h_2}{y} = \frac{\sqrt{(h_1 - h_2)^2\, a^2 + h_2{}^2\, p^2}}{a\, p}$$

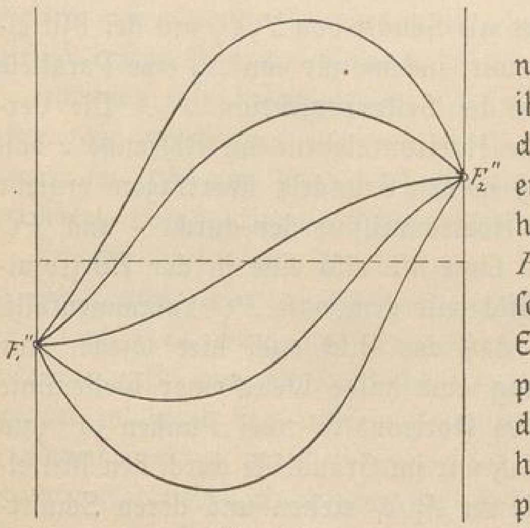

Abb. 234

Sind mehrere parallele, geneigte Gerade abzubilden, so gehen ihre Bilder natürlich alle durch die Fluchtpunkte, in denen sie endigen. In der Abwickelung erhalten wir halbe Wellen, die von F_1'' bis F_2'' reichen und sehr verschiedene Höhen besitzen (Abb. 234). Eine Gerade, für die der Schnittpunkt N in gleicher Höhe mit dem Auge liegt, bildet sich als halbe Welle ab, deren Scheitelpunkte gerade die Fluchtpunkte F_1'' und F_2'' sind; eine andere

Parallele bildet sich als halbe Welle von größerer Höhe ab; die Koordinaten der Fluchtpunkte in Bezug auf die zugehörigen Scheitel sind entgegengesetzt gleich. Liegt die Gerade in einer durch das Auge gehenden Vertikalebene, so zerfällt ihr Bild in zwei gegenüber liegende Erzeugende.

Die Abb. 235 giebt das abgewickelte Bild eines einfachen Häuschens mit Satteldach als Beispiel.

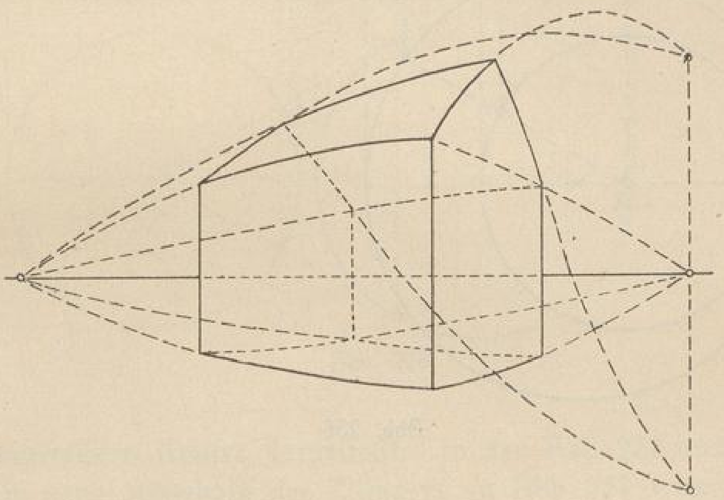

Abb. 235

Schneidet die abzubildende Gerade den Zilinder, so gehören die zwei Durchstoßpunkte dem Bilde an. Für die wirkliche Abbildung im Panorama kommen natürlich nur die beiden außerhalb des Zilinders liegenden Halbstrahlen in Betracht, deren Bilder von je einem Durchstoßpunkte bis zu dem zugehörigen Fluchtpunkte gehen. Das innerhalb des Zilinders liegende Stück der Geraden ist körperlich darzustellen. Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn eine Mauer sich durch den Raum des Panoramas nach beiden Seiten bis in weite Ferne erstreckt; der innerhalb des Zilinders liegende Teil wird nun tatsächlich als Mauer ausgeführt, während die außerhalb liegenden Teile so gemalt werden, daß die Kanten sich als Ellipsenbögen nach den Fluchtpunkten hinziehen. Geht eine Kante durch die Mitte des Zilinders, so geht ihr Bild in zwei gegenüber liegende vertikale Gerade über.

Die Abbildung eines Kreises ist als Schnitt des Zilinders mit dem Strahlenkegel — da beide Flächen zweiter Ordnung sind — eine Kurve vierter Ordnung. Diese Kurve nimmt je nach der Lage des Kreises sehr verschiedene Gestalten an. In den Abb. 236, 237, 238 sind die Bilder nebst ihren Abwickelungen für verschiedene Lagen

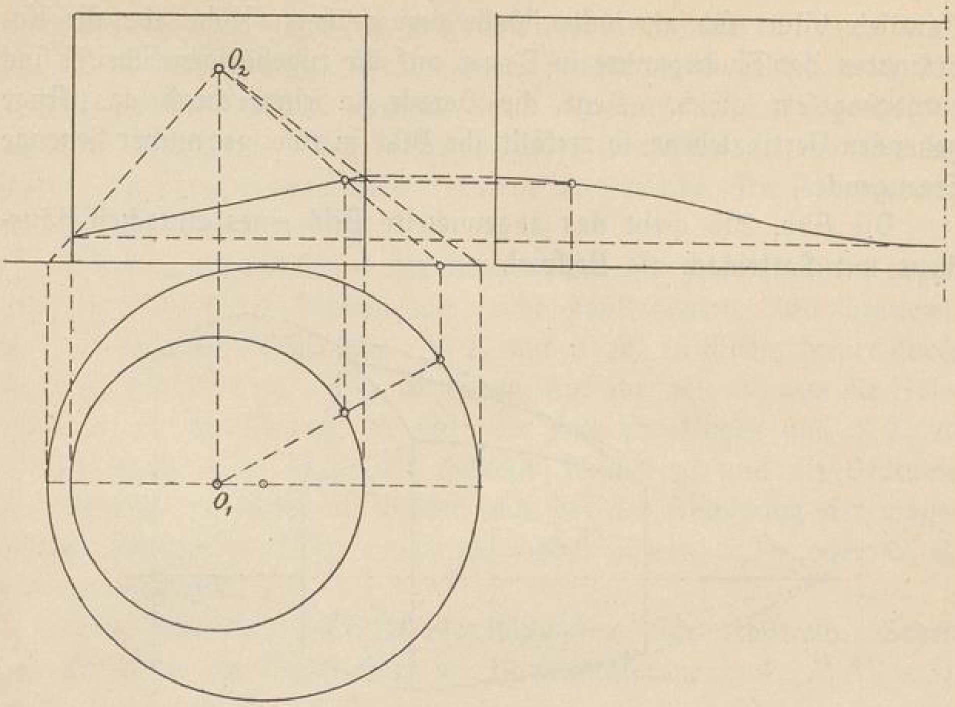

Abb. 236

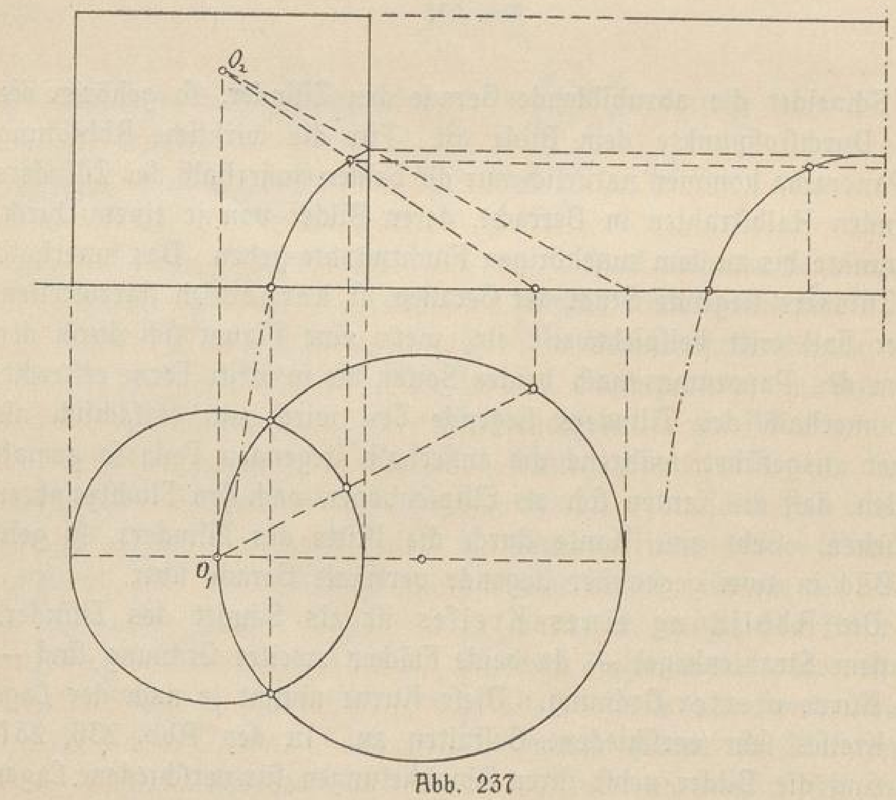

Abb. 237

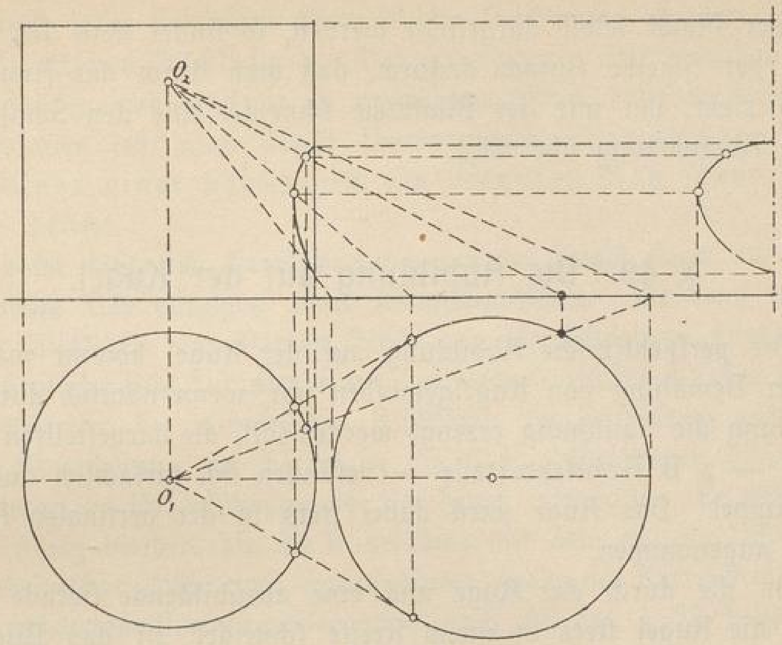

Abb. 238

eines wagerechten Kreises dargestellt. In den Abb. 236 und 238 liegt der Kreis ganz außerhalb des Zilinders, in Abb. 237 teils außerhalb, teils innerhalb. In Abb. 238 liegt der Kreis ganz an einer Seite des Beschauers, in Abb. 237 geht er durch den Standpunkt des Beschauers, in Abb. 236 schließt er diesen Standpunkt ein. Der innerhalb des Zilinders liegende Teil des Kreises — einer runden Mauer etwa — ist körperlich darzustellen; für die wirkliche Abbildung kommt immer nur der außerhalb des Zilinders liegende Teil in Betracht. Die Abbildung des innerhalb liegenden Teils hat nur die Bedeutung eines virtuellen Bildes und ist in Abb. 237 strichpunktiert. — Ueberall ist die halbe Abwickelung der Kurve dargestellt worden; die in Abb. 237 auftretende Kurve besitzt zwei vertikale Asymptoten.

Die Konstruktion der Schatten direkt im abgewickelten Bilde ist, wenn auch theoretisch möglich, so doch praktisch fast unausführbar und daher wertlos. Alle zur Konstruktion erforderlichen Linien mit Ausnahme der vertikalen Geraden sind Wellenlinien, und das Aufzeichnen derselben würde nicht nur sehr mühsam sein, sondern auch höchst ungenaue Schnittpunkte ergeben. Es bleibt also nichts übrig, als die Konstruktion der Schatten nach den Regeln der gewöhnlichen Schattenkonstruktion im Grund- und Aufrisse anzuführen und die ermittelten Schattenumrisse genau so wie die körperlichen Umrisse in das perspektivische Bild und die Abwickelung zu übertragen. Soll die Sonne oder der Mond selbst dargestellt werden, so findet man den Mittelpunkt der Scheibe einfach dadurch, daß man durch das Auge einen Strahl zieht, ihn mit der Bildfläche schneidet und den Schnittpunkt in die Abwickelung überträgt.

§ 49. Die Abbildung auf der Kugel.

Die perspektivische Abbildung auf der Kugel kommt manchmal bei der Bemalung von Kugelgewölben vor, wenn nämlich durch diese Bemalung die Täuschung erzeugt werden soll, die dargestellten Gegenstände — z. B. Architekturteile — befänden sich tatsächlich außerhalb der Kuppel. Das Auge wird dabei stets in der vertikalen Axe der Kugel angenommen.

Da die durch das Auge und eine abzubildende Gerade gelegte Ebene die Kugel stets in einem Kreise schneidet, ist das Bild einer Geraden ein durch die beiden Fluchtpunkte begrenzter Kreisbogen. Diese Fluchtpunkte, von denen bei einem Gewölbe gewöhnlich nur einer vorhanden ist, werden, wie immer, gefunden, indem man eine durch das Auge parallel zur abzubildenden Geraden gezogene Gerade mit der Kugel schneidet. — Vertikale Gerade haben ihren Fluchtpunkt im Scheitel, wagerechte Gerade haben zwei Fluchtpunkte im Horizonte, der der Schnitt der Kugel mit einer durch das Auge gelegten Horizontalebene ist. — Da bei einem Gewölbe das Auge in der Regel unter dem unteren Grenzkreise des vorhandenen Kugelabschnittes liegt, ist der Horizont gewöhnlich nicht vorhanden; eine oberhalb des Gewölbes liegende wagerechte Gerade bildet sich jetzt als Kreisbogen ab, der bis an die untere Grenze des Gewölbes reicht. Wäre die Kugel vollständig vorhanden, so würde das Bild der Geraden für ein unterhalb ihres tiefsten Punktes liegendes Auge ein voller Kreis sein.

Das Bild eines Kreises ist als Schnitt der Kugel mit einer Kegelfläche zweiter Ordnung eine Kurve vierter Ordnung.

Liegt das Auge im Mittelpunkte der Kugel, so ist das Bild jeder Geraden die Hälfte eines Großkreises; die Fluchtpunkte sind diametral gegenüber liegende Punkte.

Die um das Auge als Mittelpunkt beschriebene Kugel ist die ideale Bildfläche; so erscheint uns der mit Sternen erfüllte unendliche Weltraum als Kugelfläche, deren Mittelpunkt unser Auge ist, und auf die sich die Himmelskörper projizieren. Bei dieser Bildfläche giebt es keine perspektivischen Verzerrungen; alle Richtungen sind gleich