Ueber den Vortrag der Mathematik, besonders der Geometrie in den unteren Schulclassen

Hanstein, Ludwig

Stendal, 1804

urn:nbn:de:hbz:466:1-82606

Ueber den Vortrag der Mathematik, besonders der Geometrie in den unteren Schulclassen;

nebst praktischer Anwendung auf einige Sätze aus dem Euklides.

Ein Versuch für Lehrer

von

Ludwig Hanstein.

Conrector in Stendal.

Mit einer Kupfertafel.

Stendal,

bei Franzen und Große 1804.

Sr. Hochwürden

dem Herrn

Gottfried Benedict Funk,

Königl. Pr. Consistorialrathe und Rector der Domschule in Magdeburg,

aus innigster und dankbarster Verehrung

gewidmet

von dem Verfasser.

Vorerinnerungen.

Schon längst ist die Bemerkung gemacht, daß in den Vorschlägen zur Verbesserung der Schulmethoden, in Absicht der Mathematik noch nicht jede Lücke ausgefüllt sei, und daß eben deshalb das Studium dieser Wissenschaft hinter manchen anderen Gegenständen des Unterrichts unverdienter Weise zurückbleibe. Eigene Erfahrung darüber, wie Wenige es selbst unter den Gebildeten noch bis jetzt gebe, welche der genannten Wissenschaft Geschmack abgewinnen können, und die offenherzigen Geständnisse mancher Lehrer, daß sie nicht wüßten, wie sie es mit dem Vortrage der mathematischen Wahrheiten, vorzüglich der geometrischen, eigentlich anfangen sollten, um ihren Schülern nützlich zu werden — haben mich belehrt, daß jene Klage wol nicht ungegründet sein müsse. Und dies brachte mich auf den Gedanken, die Methode, nach welcher ich seit beinahe zehn Jahren — und ich darf es vielleicht gestehen, nicht ohne Glück — in der Mathematik unterrichte, dem pädagogischen Publikum zur Prüfung vorzulegen.

Man hat also gegenwärtige Schrift nicht als eine Anweisung zum Selbstunterrichte, und noch viel weniger als ein Schulbuch zu betrachten, sondern bloß als ein Hülfsbuch für solche Lehrer, die ihrer eigenen Methode nicht recht zu trauen Ursache finden, auch aus dem Unter-

richte

richte in der Mathematik, welchen sie selbst ehemals genossen haben, keine richtige Vortragsweise lernen können, und sich doch jetzt in der Verlegenheit sehen, Mathematik vortragen zu müssen. Diesen gibt nachstehender Versuch vielleicht eine Anleitung zum weiteren Nachdenken darüber, wie sie, es sei ihnen ein Lehrbuch vorgeschrieben, welches da wolle, die in demselben enthaltenen Sätze verständlich, interressant und anwendbar, mit Einem Worte, zweckmäßig vortragen könnten.

Daß die praktische Darstellung meiner Methode gerade an einigen Sätzen aus dem Euklides versucht ist, hat bloß darin seinen Grund, weil dieser großer Mathematiker doch bisher immer noch den meisten neueren Verfassern mathematischer Compendien zum Muster gedient hat, und weil mir die Wahl unter den vorhandenen neueren Lehrbüchern in der That schwer geworden wäre. Uebrigens kommt ja auch für den gegenwärtigen Zweck gar nichts darauf an, aus welchem Buche der bearbeitete Stoff genommen sei. Eben so bedarf auch das keiner Entschuldigung, daß hier nur wenige Sätze vorgetragen sind; denn schon aus diesen wenigen kann die Methode erkannt werden. Sollte aber die, Seite 95 und 96 angegebene Idee eines, in den unteren Classen zu benutzenden Leitfadens Beifall finden, und ein solcher demnächst wirklich geliefert werden: So wäre es vielleicht nicht unzweckmäßig, einen vollständigen Commentar über denselben zum Gebrauche für Lehrer nachfolgen zu lassen.

Ob ich nun hoffen dürfe, der bemerkten Classe von Lehrern durch meine Vorschläge einigen Nutzen zu stiften, und dadurch den Abdruck dieser kleinen Schrift

ge-

gerechtfertigt zu sehen, das muß ich einsichtsvollen Beurtheilern zur Entscheidung überlassen; und füge nur noch den Wunsch hinzu, dieses Urtheil möge Männern anheim fallen, welche sich im Vortrage der Mathematik eigene Erfahrung und Uebung erworben haben.

Es sind übrigens kürzlich zwar mehrere Schriften erschienen, welche ebenfalls darauf hinzielen, das Studium der Mathematik, besonders der Geometrie, allgemeiner zu verbreiten, z. B. „Hoffmann's mathematische Elementarschule", und „Schmieder's Versuch einer praktischen Elementar-Geometrie"; dies konnte mich indeß nicht von meinem Vorhaben zurückbringen. Denn in jenen Schriften ist die praktische Darstellung und die Anwendung der reinen Sätze auf das gemeine Leben — Hauptsache, und die Theorie wird dabei nur mit wenigen Wor-

Worten, für einen großen Theil der Lehrer gewiß viel zu kurz, berührt; in den vorliegenden Bogen aber sollte die Theorie des Vortrags eigentlicher Zweck sein. Ist es also nicht zu anmaßend gesprochen, so scheint es mir, daß alle diese Schriften, weit entfernt, einander entgegen zu sein, vielmehr gegenseitig zur Erreichung eines gemeinschaftlichen Endzwecks einander die Hand bieten. Suum cuique.

Der Verfasser.

Ein-

Einleitung.

So oft und so gründlich auch schon über den bedeutenden Einfluß gesprochen ist, den das Studium der Mathematik — abgesehen von den übrigen mannichfachen Vortheilen dieser Wissenschaft — selbst auf die Bildung des Verstandes, auf die Ordnung der Begriffe und Ideen eines Menschen haben kann: so scheint es doch, als sei dieser Zweig des Unterrichts noch bei weitem nicht in diejenige Würde eingesetzt, welche er verdient. Denn daß man nun endlich, selbst auf Schulen, wo es bisher nicht gewöhnlich war, ebenfalls einige Stunden dazu anwendet, den Zöglingen geometrische Figuren vorzuzeichnen, und ihnen etwas über die Gleichheit oder Aehnlichkeit derselben zu sagen, beweist keineswegzes eine eigentlich gründliche Beschäftigung mit jener ernsten und strengen Wissenschaft, beweist durchaus noch nicht, daß man ihren Werth gehörig zu schätzen, und die Zöglinge in die Wichtigkeit wie in das Wesen derselben einzuweihen verstehe. Dieß liegt nun gewiß — zur Ehre unseres Zeitalters sei es gesagt — seltener in einer pedantischen Vorliebe für den Unterricht in Sprachen und Alterthümern, welcher einst beinahe den ganzen Lectionsplan der Gelehrten-Schulen füllte, als vielmehr in der Erfahrung, mit welchen Schwierigkeiten der Vortrag der Mathematik verbunden sei. Eine Reihe von reinen Verstandesbegriffen zu entwickeln, die sich wie eine Kette an einander schließen müssen, wo kein einziger Satz fehlen darf, wenn nicht die folgenden alle in ein undurchdringliches Dunkel gehüllt bleiben sollen; diese Begriffe und Sätze gehörig zu construiren; vom Leichteren zum Schwereren fortzugehn, und alles so verständlich zu machen, daß dem Geübteren das schwerere eben so leicht vorkomme, als dem Anfänger die ersten leichten Postulate: Dieß erfodert selbst bei den besten Lehrbüchern, die zum Grunde gelegt werden, eine ganz eigne Aufmerksamkeit, einen sehr deutlichen Ueberblick von Seiten des Lehrers, und eine beständig zu unterhaltende, unermüdete Anstrengung von Seiten der Schüler. Es ist etwas ganz anders, als ihnen bei einem vorgezeigten Thierbilde die Geschichte desselben zu erzählen, oder die Namen der Städte und Länder auf der Karte zu zeigen; es ist immer etwas anders, als einen alten Schriftsteller mit ihnen zu lesen, und sie auf die Schönheiten eines classischen Dichters aufmerksam zu machen. Woher käme es sonst, daß es unter den vielen geschickten Lehrern, die aus der Schule der verbesserten Pädagogik bereits hervorgetreten sind, verhältnißmäßig immer noch so wenig Mathematiker gibt? Woher käme es sonst, daß unter den vielen guten Köpfen, die sich auf den vorzüglichsten Lehranstalten entwickeln, immer noch weit weniger in den mathematischen Wissenschaften sich hervorthun, als man es nach der Vertheilung der Verstandesgaben erwarten sollte?

Und es ist doch warlich keine unbelohnte Mühe, welche man diesem Fache der Gelehrsamkeit schenkt. Denn die Mathematik macht ja auch den, welcher sie in seinem Berufe gerade nicht bestimmt anzuwenden hat, doch wenigstens für alles empfänglich, was nur durch sie verstanden werden kann. Sie macht ihm die neuen Entdeckungen in der Physik, Chemie, Astronomie u. s. w., welche unser Zeitalter so vorzüglich auszeichnen, erst interessant. Sie führt ihn also in ein neues Feld für seine Beobachtung, auf einen neuen Schauplatz des menschlichen Scharfsinns; sie gibt ihm neue Gelegenheiten zum Nachdenken, zur Berichtigung seiner Vorstellungen über die Dinge, die ihn umgeben; sie schenkt ihm neue Freuden. Sie gewährt endlich durch die Gewißheit ihrer Sätze, durch ihre strenge, hinreißende Schlußfolge dem Geiste eine willkommene Erholung,

wenn

wenn er von den Verirrungen im Gebiete der Philosophie ermüdet zurückkehrt; wenn er bei so manchen Erörterungen über Begebenheiten der Vorwelt noch immer unbefriedigt bleibt; wenn er das Dunkel, welches über viele Theile der Naturkunde auch jetzt noch verbreitet liegt, nicht zu enthüllen vermag; ja selbst wenn er beim Genusse classischer Werke alter und neuer Zeit durch Stellen, die seinen eigenthümlichen Ideen vielleicht nicht entsprechen, verstimmt ist. Nicht als ob hierdurch die Mathematik gleichsam über alles andere wissenswürdige erhoben werden, oder einen höheren Platz bekommen sollte, als den sie, vermöge ihrer Natur und ihres Einflusses auf die Erreichung der wahren Menschenbestimmung, dem Endzwecke alles Unterrichts, verdient: Nein, es sollte diese kleine Abschweifung, die gewiß Verzeihung verdient, nur auf das aufmerksam machen, wo der Lehrer jener Wissenschaft Muth und Neigung hernehmen kann, sich selbst mehr, als es hin und wieder geschieht, in dieses Fach gleichsam hineinzustudiren, sich des Unterrichts darin, mit Hinsicht auf die wichtigen, davon zu hoffenden Vortheile, eifriger anzunehmen, und besonders darüber mehr nachzudenken, wie er seine Methode, worauf bei diesem Lehrgegenstande geradehin alles ankommt, immer zweckmäßiger einzurichten habe. Nur dann erst, wenn dieses letzte mehr beachtet, und darin auf dem größten Theile unserer Schulen (denn viele sind ja auch in dieser Absicht schon von einer rühmlichen Seite bekannt) mehr geleistet würde, dann erst müßte es in der Folge — nicht gerade mehrere Mathematiker von Profession, wol aber mehrere Menschen in allen Ständen geben, die das Studium der Mathematik als eine sehr nützliche Nebensache zum Besten ihres Berufs und ihrer eigenen fortschreitenden Ausbildung nicht zurücksetzten. Dann erst könnte und würde es dahin kommen, daß man gemeinnützige Vorschläge und wohlthätige Entdeckungen, die auf das gemeine Leben sich beziehen, aber auf mathematischen Berechnungen und Zeichnungen be-

beruhen, mit einem weit größeren und allgemeineren Interesse annähme und benutzte, als es bisher geschehen ist.

Doch es ist hier nicht der Ort, diese Ideen weiter auszuführen. Es soll nur davon die Rede sein, wie auf die Realisirung derselben, d. h. auf die allgemeinere Verbreitung des Geschmacks an dieser Wissenschaft schon durch den ersten Unterricht in der Mathematik hingewirkt, und durch welche Mittel dieser Zweck erreicht werden könne.

Die Schwierigkeiten dabei, deren vorhin Erwähnung geschah, liegen nun theils in dem nothwendigen Ueberblicke dieses Unterrichts, den sich der Lehrer erwerben muß, theils in der verschiedenen Fassungskraft der Schüler, theils in einer vernachlässigten Erziehung derselben, wodurch sie nicht genug an den eigentlichen Gebrauch des Verstandes gewöhnt wurden, theils endlich in dem innern, höchst genauen Zusammenhange dieser Wissenschaft selbst. Alle diese Schwierigkeiten soll der Unterricht überwinden, und es ist daher nothwendig, daß man in dieser Hinsicht alle einzelnen Theile desselben in Erwägung ziehe. So wie nemlich jeder Elementar-, ja jeder Schulunterricht in zwei Theile zerfallen sollte, in den eigentlichen Vortrag, er sei nun dialogisch oder mehr zusammenhängend, und in die Wiederholung, sie sei schriftlich oder mündlich, so ist die doppelte Kraft dieser Methode ganz vorzüglich auch bei der Mathematik zu beachten, weil hier so vieles auf der eigenen Thätigkeit des Verstandes bei den Zöglingen beruht. Ja es kommt hierbei noch etwas sehr in Anschlag, das vor allem andern überdacht werden muß, nemlich die Vorbereitung des Lehrers sowol, als der Schüler, auf diesen Unterricht. Ueber alles dies wird sich also die folgende Abhandlung in drei Abschnitten ausbreiten.

I.

Von der Vorbereitung auf diesen Unterricht.

Wenn Pestalozzi's vortreffliche Lehrart einst allgemeiner verbreitet werden, und wenigstens in den größten Theil unserer öffentlichen Lehranstalten Eingang finden sollte, so würde zu einer näheren Vorbereitung auf das Studium der Mathematik nicht viel erforderlich sein. Denn Pestalozzi gibt ja eben dem Auge des Knaben die Kraft, bildliche Darstellungen und Constructionen mathematischer Begriffe rein aufzufassen und schnell zu übersehen; er gibt dem Verstande des Knaben die Richtung, welche dazu dient, ihn an mathematische Ordnung und Schlußfolge zu gewöhnen. Der Knabe muß es, vermöge der mechanischen Fertigkeiten, die er dabei erlangt, nach und nach immer interessanter finden, alles unter Maaß- oder Zahlenverhältnisse zu bringen, gemessene und gezählte Größen mit einander zu vergleichen, und die Eigenschaften ihrer Zusammensetzung aufzusuchen. Wie sollte er also nicht mit einer gewissen Vorliebe der Wissenschaft entgegen kommen, die ihn jene Uebungen nicht nur fortsetzen, sondern zugleich mit höheren und ernsteren Zwecken verbinden lehrt! Und wie sehr müßte nicht dem Lehrer, der selbst schon mit der Lehrart des edlen Schweizers vertraut, selbst schon mathematisch gebildet wäre, jener Unterricht bei solchen Knaben erleichtert werden!

Aber so weit sind wir noch nicht, und werden noch lange nicht dahin kommen. Der Weg ist weit, den die Burgdorfsche Methode durch die Schullehrerseminarien bis in die Bürgerschulen und in die niedrigsten Classen der Gelehrten-Schulen zu machen hat; er ist noch weiter, wenn sie bis in die Kinderstuben hindurchdringen soll, wo noch so viele Mütter keine Ahnung davon haben, daß auf ihrer Bemühung und Aufmerksamkeit ein so großer

Theil selbst der Verstandesbildung ihrer Kinder beruht.

Und so lange Pestalozzi's Absichten noch fromme Wünsche bleiben, so lange wird es auch nöthig sein, daß man den Unterricht in der Mathematik nur solchen Lehrern übertrage, die sich besonders darauf vorbereitet haben, und daß diese selbst ihre Zöglinge, vorzüglich die Anfänger gehörig dazu einzuweihen verstehen. Ein Ausdruck, der vielleicht auffallen mögte, aber sich entschuldigen läßt, weil die Anfänger sehr oft unter dieser Wissenschaft etwas geheimnißvolles und beinahe unbegreifliches fürchten, und weil man also nicht selten alles aufbieten muß, um sie dafür zu gewinnen; manche von ihnen aber auch bald so daran fesselt, daß sie als ächt Initiirte den Orden nie wieder verlassen.

Der Lehrer ist nun freilich über dem Schüler, und es sollte daher billiger Weise hier zuerst davon die Rede sein, in wie weit er sich selbst auf den Vortrag der Mathematik vorzubereiten habe.

habe. Da sich dieses aber aus dem, was er bei den Schülern leisten soll, von selbst ergibt, und darauf erst begründet werden muß, so ist es wol zweckmäßiger, zuerst die Mittel anzugeben, durch welche er seine Zöglinge für die Wissenschaft zu gewinnen im Stande sei.

Vorschläge, wie man den Verstand in den ersten Jahren überhaupt ausbilden, den Sinn für mathematische Gewißheit empfänglich machen, die Fassungskraft des geistigen, so wie die Sehkraft des körperlichen Auges auf mathematische Vorstellungen hinlenken und vorbereiten könne, finden ihren Platz hier nicht, weil sie in den ganzen Schulplan eingreifen, sich auf die Methode des gesammten Elementarunterrichts beziehen, und also den Lehrer der Mathematik nur dann angehen würden, wenn er zufälliger Weise zugleich in den Elementarclassen Unterricht gäbe, oder gar einziger Lehrer seiner Schule wäre. Auch ist über Vorschläge dieser Art schon von so manchem achtungswürdigen Pädagogen des Guten so vieles gesagt, daß

es

es unbescheiden sein würde, jenes alles hier zu wiederholen. Eins darf indessen nicht mit Stillschweigen übergangen werden, daß man nemlich keinen Zögling in die unterste mathematische Classe aufnehmen sollte, der nicht in den Anfangsgründen der Rechenkunst, besonders auch in der Bruchrechnung hinlänglich geübt ist. Denn es ist fast unglaublich, wie sehr der Mangel an solcher Uebung dem Anfänger in der Mathematik dieses Studium erschwere. Er findet dann Hindernisse und Schwierigkeiten, die ihn oft ganz davon zurückschrecken. Auf diese vorangegangene Uebung muß also der Lehrer der Mathematik fußen dürfen; mag er dann auch die Knaben im übrigen weniger gebildet in seinen Unterricht bekommen, wie es leider noch häufig genug der Fall sein wird, so ist es nun seine Sache, sie an seine Darstellungen zu fesseln, und das Interesse für seine Wissenschaft in ihnen zu erwecken. Und hierin besteht eben das, was vorhin Vorbereitung der Schüler auf diesen Unterricht genannt wurde. Freilich kann jenes Interesse erst durch nähere vertrautere Bekannt-

schaft

schaft mit der Wissenschaft selbst genährt und recht eigentlich belebt werden, und in dieser Hinsicht paßt der Name Vorbereitung nicht ganz darauf. Allein er kann auch nicht wegfallen, sobald man bedenkt, daß der erste Geschmack an dieser Wissenschaft sogleich in den ersten Stunden eingeflößt werden müsse, wenn man nicht befürchten will, daß für den größten Theil der Schüler der ganze nachfolgende Vortrag verloren gehe.

Bei anderen Wissenschaften, die für das Knabenalter gehören, ist es weniger schädlich, wenn hin und wieder das Interesse dafür auch nicht sogleich anfangs den gehörigen Grad erlangt. Man kann da einzelne Bruchstücke des Ganzen herausheben, um zu versuchen, auf welcher Seite ein Studium der Art dem Knaben am anziehendsten werde. Die Geographie z. B., die Weltgeschichte, die Naturlehre, die Naturgeschichte haben zwar ihre eignen wissenschaftlichen Formen, unter welchen sie der erwachsenere Jüngling kennen lernen muß, aber beim ersten Unterrichte, den der Knabe darin empfanpfangen soll, gleichen sie einem Garten, der vielerlei Ansichten bei mehreren Eingängen zeigt. Gefällt dem Zöglinge die Eine Ansicht nicht, so führe man ihn durch einen zweiten Eingang zu einer Andern, oder durch den dritten Eingang zu einer Dritten u. s. w. Eine davon fesselt ihn gewiß; er sucht hinterher die übrigen von selbst auf, und bittet den Führer, ihn dahin zurückzuleiten. Oder, um eigentlicher zu reden, ist dem Knaben die Beschreibung seines Vaterlandes nicht interessant genug, weil er es vielleicht schon zu kennen glaubt, so erzähle man ihm erst von den Schönheiten entfernter Länder, von den Sitten roher Nationen. Haben die neueren Helden der Geschichte zu wenig wunderbares für ihn, so lehre man ihn die älteren kennen, und sollte man auch selbst einen Herkules auffodern müssen, daß er ihn mit gewaltigem Arm in das Feld der Geschichte versetze. Meint er, die Vögel, die um ihn her flattern, schon oft genug gesehen zu haben, so zeige man ihm den Strauß, oder führe ihn zu den Felsen, welche der Adler bewohnt. Sind ihm die Wirkungen des Hebels noch nicht auffallend

genug,

genug, so hole man den Magnet in voller Armatur, und gebe diesem schwere Lasten zu tragen. Genug, wenn er nur durch irgend einen Abschnitt aus der ganzen Lehre für die ganze Lehre gewonnen wird; sei dieser Abschnitt der erste oder der letzte im System, sei der Lehrer aus eigner Wahl darauf gefallen, oder durch die Wünsche der Kleinen, die ihm oft als Leitfaden entgegen kommen, dazu veranlaßt: So thut das solchen Wissenschaften durchaus keinen Eintrag; und dem Knaben, der einzelne Lehren daraus begierig auffaßte, wird späterhin die Uebersicht des Ganzen, die höhere systematische Vereinigung aller einzelnen Bruchstücke nicht schwer fallen. Er wird selbst das, was er beim ersten Unterrichte darin überhörte, was ihm nicht reizend vorkam, vielleicht auch nicht verständlich genug war, ohne Schwierigkeit nachholen.

Nicht so verhält es sich mit der Mathematik. Waren jene Wissenschaften einem Garten ähnlich, den man von mehreren Eingängen aus ganz durchwandeln kann, so gleicht diese dage-

dagegen einem Irrgarten, zu welchem nur Eine Thür uns hineinführt, und in welchem wir nur Einen Hauptweg an der Hand eines sicheren Führers fortgehn müssen, wenn wir alle Theile desselben kennen lernen, uns nie ohne Kenntniß des Ganzen zu dem Eingange zurückgeleitet sehen, sondern glücklich den Ausgang am entgegengesetzten Ende erreichen wollen. Die Strenge der mathematischen Begriffe und Schlüsse macht es durchaus unmöglich, mit einem späteren Abschnitte anzufangen, als mit dem, welcher nach dem Systeme der erste ist; hier wäre es Unsinn, den Knaben, der die Lehre von den Triangeln nicht aufmerksam auffaßte, mit der Stereometrie bekannt machen, oder den, welchen die Ausziehung der Quadratwurzel zurückschreckte, zu algebraischen Auflösungen anleiten zu wollen. Das hieße ihn zu den oberen Stufen einer Leiter hinaufführen, ohne daß er die unteren berührte. Hier muß also das Interesse und die Aufmerksamkeit für diesen Unterricht sogleich anfangs gespannt, und für die ganze Folge der, einem Neulinge oft so trocknen Sätze erhalten werden.

Begreiflich ist es nun, daß das bei dem Anfänger, dem die befriedigende Strenge der Beweise und die einleuchtende Wahrheit der Sätze noch keine Neigung zu der Wissenschaft einflößen kann, nur durch eine faßliche Darstellung ihrer Vortheile und ihres Einflusses auf so manche andere Erkenntniß möglich wird, und es ist daher Pflicht des Lehrers, dasjenige aus diesen Vortheilen herauszuheben, was seinen Anfängern am deutlichsten zu werden, und sie am schnellsten dafür zu gewinnen vermag. Zu diesem Ende bringe er die ihm bekannten eigenthümlichen Neigungen der Schüler in Anschlag; er sehe auf den Stand, in welchem sie geboren, auf die Lebensart, in welcher sie erzogen wurden; er denke an den Beruf, welchem sie sich zu widmen vielleicht schon halb und halb entschlossen sind, und zeige ihnen, wie nothwendig die Kenntniß der Mathematik in der Einen oder Andern Hinsicht in diesem oder jenem Berufe sei; wie sie manche Aufgabe, die schon der Knabe angibt, mit leichter Mühe auflöse; wie sie endlich dem, der ihrer nicht nothwendig bedarf, wenigstens Erleichterung in seinen Arbeibeiten verschaffe. Da wird es dem Sohne des Tischlers nicht gleichgültig sein, daß sein Vater manches aus dieser Wissenschaft anzuwenden habe, und daß er selbst, wenn er den Stand des Vaters ergreifen will, aus derselben vieles lernen könne, um seine Arbeiten zu vervollkommnen und zu verschönern. Da wird der Sohn des Landmanns vielleicht nicht ungern die Regeln erfahren wollen, mit deren Hülfe er die Felder seines Vaters ausmessen könnte. Da hatte der Eine Knabe vielleicht schon von der Höhe eines Kirchthurms oder eines Berges sprechen hören, und ist begierig, zu wissen, wie man sie finde. Ein Andrer hatte vielleicht schon öfters gefragt, wie man so genau vorhersagen könne, zu welcher Stunde der Mond aufgehen werde. Ein Dritter hatte schon oft die Bewegung der Mühlräder bewundert, und es verlangt ihn, dieselbe näher einzusehn. Ein Vierter äußert Neigung zum Studium der Naturkunde; ein Fünfter zum Bauwesen u. s. w. Von vielen Anderen weiß der Lehrer, daß sie schon für eine Lebensart bestimmt sind, in welcher die Kenntniß seiner Wissenschaft vorzüglich nöthig sein wird, wie das z. B. auf Kadettenschulen und Ritterakademieen der Fall ist. Wie sollte es ihm da nicht leicht werden, seine Zöglinge für eine Lehre einzunehmen, die theils ihren Fragen die gewünschte Antwort verheißt, theils ihrem künftigen Berufe unentbehrlich ist. Ist doch die Verbindung nicht schwer einzusehn, worin die bekanntesten Arten von Ausmessung, sowol der Entfernungen als der Höhen, die Verfertigung von allerhand Instrumenten, welche theils im gemeinen Leben, theils von besonderen Handwerkern und Künstlern gebraucht werden, mit der Mathematik stehn. Ist es doch leicht zu begreifen, wie die bürgerliche Land- und Wasserbaukunst, die Anlegung nützlicher Maschinen, das Bergwesen und die leidigen Wissenschaften, welche der reguläre Krieg hervorgebracht hat, die Taktik, die Bevestigungs- und Belagerungskunst und der Gebrauch des Geschützes, wie diese alle unmittelbar auf dem Fundamente der Größenlehre beruhen. Ist es doch ohne tiefe Kenntniß zu fassen, daß man nur mit Hülfe dieser Lehre die Kräfte der Natur zu entdecken, zu berechnen und zu benutzen, und den Gang

der

der Sterne zu erspähen im Stande sei. In dem Umfange aller dieser Kenntnisse ist die Vorrathskammer enthalten, aus welcher der Lehrer der Mathematik seine Lockspeisen hernehmen muß, um die Zöglinge an sich zu ziehen. Er muß sie ihnen als Früchte eines Baumes darstellen, die ihnen nicht entgehen können, sobald sie den Stamm, auf welchem jene zahlreichen Aeste und Zweige sich bildeten, muthig erklimmen. — Seiner Weisheit bleibt es nun zwar überlassen, für den jedesmaligen Kreis seiner Zuhörer das genießbarste auszuwählen; allein was ihm vorzüglich zu empfehlen sein, was für Alle, mit wenigen Ausnahmen, ein bleibendes Interesse haben mögte, das ist unstreitig der Einfluß, welchen jene Lehre auf Physik und Astronomie, ihre edelsten Zweige, beweist. Darüber spreche der Lehrer so verständlich er kann; er rede davon, daß man den Lauf des Balls und der Kugel, die Bewegung des Lichtes und des Wassers u. s. w. nach mathematischen Gesetzen bestimme; die Größe der Sonne und der Planeten, ihre Umlaufszeiten, ihre Entfernungen von uns nach jenen Gesetzen berechne, daß man hiernach wieder die Richtung der Seeschiffe, und die Größe der Länder auf der Erde finde, und was sonst zu dergleichen allgemein interessanten Gegenständen gehört: So kann es ihm, wenn er nur Vertrauen bei seinen Zöglingen besitzt, und die Kunst versteht, sie nach dem, was er über jenes alles wisse, lüstern zu machen, durchaus nicht fehlen, ihr Interesse für seine Wissenschaft zu erregen. Ja er wird sie fesseln, wird manchen von ihnen begeistern, wenn er auch darauf hindeutet, wie durch die Mathematik und ihre Töchter selbst unsere Erkenntniß von Gottes Macht und Weisheit und Güte erweitert, unsre Ehrfurcht gegen ihn vester begründet, und das Gefühl unserer eignen Würde erhöht werde. Freilich sind dies Behauptungen, die manchem anstößig scheinen könnten; dem ächten Mathematiker aber werden sie gewiß nicht fremd und übertrieben vorkommen. Denn ist es nicht diese Wissenschaft, die dem Menschen seine Kleinheit wie seine Größe in der Natur erst recht fühlbar macht? Ist sie es nicht, die aus seinem eignen Verstande entsprungene, die ihm das Scepter in die Hand gibt, ihn zum Beherrscher der ihn umgebenden Schöpfung erhebt, aber auch eben dadurch seine Ideen von dem Allherrscher mit höherer Würde schmückt, mit tieferem Gefühle gegen diesen vereinigt? Schließt sie sich also nicht vest und innig an alles dasjenige an, was uns den Weg zu unserer höheren Bestimmung, unserer moralischen Vervollkommnung ebnet?

Bei dem allen entsteht aber nun die Frage: Wie, wann und wo soll der Lehrer von jenen Vortheilen zu seinen Schülern sprechen? Soll er hochstudirte Reden und ausgearbeitete Vorlesungen darüber seinem Cursus voranschicken? Vielleicht öfters eine Stunde, die dem Unterrichte gewidmet ist, solchen Vorträgen aufopfern? Oder soll er Bücher darüber schreiben, die er den Zöglingen zum eignen Nachlesen anriethe? Alles dies wäre offenbar nicht auf das Knabenalter berechnet. Es würde die armen Zuhörer und Leser ermüden, und hätten sie sich diesen Unterricht noch nicht schwer und dunkel vorgestellt, so würden sie nun erst darauf kom-

kommen, und den Muth dazu fürs erste völlig verlieren. Ein anderes aber ist es, wenn der Lehrer seine Winke darüber gelegentlich in seinen Unterricht einstreut, wenn er vorzüglich die ersten Stunden mit Erzählungen lächerlicher und schädlicher Unbekanntschaft in diesem Gebiete des menschlichen Wissens würzt, wenn er sogleich einige Fälle von leicht faßlicher Anwendung der Mathematik aufs gemeine Leben anführt, und dabei nebenher die ersten Definitionen und Sätze zum Besten gibt, und zwar alles mit Rücksicht auf Neigung und Stand, mit Hinsicht auf wahrscheinlichen künftigen Beruf der Knaben. Dieß wäre die Vorbereitung im eigentlichen engeren Sinne. Ermahnungen zur beständig ununterbrochenen Aufmerksamkeit, eigne Aufsicht des Lehrers über jeden einzelnen Zuhörer dürfen freilich auch nicht fehlen, damit er immer gewiß sei, daß in diesen ersten Schritten die ganze Classe ihm folge. Und wenn das von dem denkenden Lehrer während des ganzen ersten Cursus fortgesetzt wird, wenn er auch weiterhin zuweilen den Vortrag durch Darstellung eines höheren

Vor-

Vortheils, der dann schon verstanden werden kann, durch Erklärung eines angewandten Satzes unterbricht, so wird das gewiß vieles dazu beitragen, die Aufmerksamkeit in Spannung zu erhalten, das Interesse von neuem zu beleben; es wird auf diese Art Vorbereitung im weiteren und höheren Sinne dazu werden, daß der Schüler mit Nutzen und Vergnügen das Studium jener wohlthätigen Wissenschaft fortführe. Die Sätze zu finden und auszuzeichnen, deren Anwendung leicht einzusehn ist, das kann übrigens dem Manne, der die Wissenschaft übersieht, eben nicht schwer fallen. So erkläre man z. B. bei der Proportionslehre die Regel de tri. So erläutere man nach den ersten Sätzen vom Parallelogramme und dessen Diagonale die Anwendung, welche von dieser Figur gemacht wird, um nach physikalischen Gesetzen den Weg eines Körpers zu finden, der von zwei oder mehreren Kräften in verschiedener Richtung getrieben wird. Nur muß dies sogleich in einem concreten Falle gezeigt werden. Man mache es bei den Sätzen von der Aehnlichkeit der Triangel den Schülern begreiflich, daß daraus eine leichte Methode, Entfernungen zu messen, gefunden sei. Man versuche eine solche Messung selbst, wenn man auch nichts als einen Meßtisch nebst Kette dazu haben kann; der Knabe braucht ja nicht sogleich mit allen, für ihn noch unverständlichen genaueren Bestimmungen solcher Methoden bekannt gemacht zu werden. So etwas, an seinem Orte und zu seiner Zeit eingestreuet, thut gewiß keine unbedeutende Wirkung. Auch kann es wol keinem Manne von Erfahrung an Beweisen daran fehlen, wie schädlich die Unbekanntschaft mit dieser Wissenschaft in jedem Stande und Berufe werden könne. So gelang es z. B. einmal einem Lehrer, einige seiner Schüler durch folgende Anekdote wieder von neuem zur Aufmerksamkeit zu beleben. Ein Pächter beklagte sich einst, daß seine Schafe sich in kurzer Zeit ansehnlich vermehrt hätten, und nicht mehr hinlänglichen Platz in der Hürde fänden, worin sie übernachteten. Ein anwesender Mathematiker fragte ihn, wie denn die Hürde gestellt sei, und als der Pächter, der sich nicht mathematisch darüber auszudrücken verstand, die Figur eines

ziem-

ziemlich länglichen Rechtecks auf den Tisch gezeichnet hatte, so schlug ihm jener vor, die Hürde in ein breiteres Rechteck oder lieber sogleich in ein Quadrat stellen zu lassen. Der Oekonom fand das anfangs sehr lächerlich, ließ sich aber doch endlich bewegen, den Versuch zu machen und — die Schafe fanden alle Raum. Ohne Hülfe der Mathematik hätte er sich wahrscheinlich genöthigt gesehn, die Hürde durch neuen Einsatz zu vergrößern, welches er offenbar ersparen konnte. Wie manchen ähnlichen Fall mag es geben, der gewiß das seinige beitrüge, um den Schülern jenen Unterricht anziehender zu machen. Es versteht sich übrigens von selbst, daß dergleichen zweckmäßige Einwebungen den Lehrer nicht von der Hauptsache abbringen, ihn nicht zum Spaßmacher erniedrigen müssen, sondern daß er dabei in seinen und seiner Schüler Augen das Ziel immer vestzuhalten suchen werde, welches sie gemeinschaftlich erreichen wollen. Er wird lieber zu wenig als zu viel von der Zeit, die dem ernsten Unterrichte gewidmet ist, dazu aufopfern; er wird den Verlust an Zeit gegen den Gewinn, welchen er seinen Schülern in

Hinsicht ihres Studiums dadurch zu verschaffen gedenkt, gehörig berechnen; er wird, wenn er gewissenhaft handeln will, jenes alles nicht bloß in die Lehrstunden selbst verweisen, sondern auch, wenn er Gelegenheit dazu hat, bei anderen Unterhaltungen mit seinen Zöglingen, z. B. auf Spatziergängen, gern jeden Anlaß benutzen, um ihnen Interesse für s e i n e Wissenschaft wie für jeden anderen nützlichen Unterricht einzuflößen. Ja er würde sich freuen, wenn er ihnen nebenher auch Bücher zu diesem Behufe in die Hände geben könnte; nur nicht ernsthafte Abhandlungen über den Nutzen der Wissenschaft, die schon vorhin verworfen wurden, sondern Geschichten für Knaben, und fürs Knabenalter geschrieben, worin die Unwissenheit in jener Wissenschaft lächerlich gemacht, und Beispiele dargestellt würden, wie man sich durch Kenntnisse dieser Art so manchen Vortheil stiften, so manche Freude verschaffen könne. Aber leider fehlt es an dergleichen Werken bis jetzt noch gänzlich, und man darf wol mit Recht fragen: Warum gibt es unter dem Heere von Kinderbüchern, von Erzählungen für die Jugend

gend noch immer keins, das durch einen vorhin beschriebenen Inhalt die kleinen Leser von 10 — 14 Jahren auf das Studium der Mathematik aufmerksam machte? Hat man doch schon Erzählungen genug, worin man ihnen die Nothwendigkeit geographischer, naturhistorischer Kenntnisse zeigen will; ist etwa die Mathematik, sind ihre leichtesten Anwendungen auf Begebenheiten in der Natur um uns, und am Sternenhimmel über uns, wie sie der Knabe fassen kann, dessen weniger werth?

Was endlich das meiste beiträgt, dieser Wissenschaft für die Anfänger Reiz und anziehendes Gewand zu geben, das ist unstreitig ein richtiger und deutlicher Vortrag der mathematischen Lehrsätze und Wahrheiten selbst. Dieser wird also unser besonderes Nachdenken verdienen, so bald es nur erst bestimmt ist, wie der Lehrer darauf vorbereitet sein müsse.

Wenn der bisher beschriebene Weg, durch welchen die Anfänger zu dem Studium der Mathemathematik eingeführt, und auf welchem sie während des ganzen ersten Cursus erhalten werden sollten, der richtige ist: So erhellt aus dem oben gesagten, daß von demjenigen, welcher sie leiten will, nicht wenig verlangt werden müsse. Es ist überhaupt ein starker Fehlgriff, ein Vorurtheil, welches sich aus der alten Methode herübergeschlichen hat, wenn man noch hin und wieder glaubt, daß man die Elementarclasse in irgend einer Sprache oder Wissenschaft ohne Schaden einem ungeübteren und ungeschickteren Lehrer anvertrauen könne. Gerade dies stiftet Nachtheile, die nicht zu berechnen sind. Denn wenn auch nur Elementarkenntnisse hier ertheilt werden sollen, so wird der Ungeschicktere selten wissen, was dazu eigentlich gehöre, und wie es gelehrt werden müsse. Er sucht vielmehr alles das Stückwerk, dessen er selbst mächtig ist, anzubringen; er vermischt also verständliches mit unverständlichem, und macht eben dadurch seinen Vortrag für die Kleinen ungenießbar. Er wird nicht selten durch ihre Fragen in Verlegenheiten gesetzt, aus welchen er sich entweder gar nicht oder nur auf eine

sehr

sehr inhumane Weise zu retten vermag. Jenes benimmt ihm das Ansehn, dies Zuneigung und Vertrauen bei den Zöglingen. Die Gründlichkeit der ersten Kenntnisse geht darüber verloren, und die Jahre, welche der Knabe in einer solchen, nicht selten tumultuarischen Classe zubringen mußte, sind ohne seine Schuld auf eine unverantwortliche Weise verschwendet. So wie man also den Elementarunterricht auf Schulen überhaupt niemals dem weniger geschickten und minder fleißigen Lehrer anvertrauen sollte, so ist dies besonders auch in Absicht der Mathematik sehr zu beherzigen. Denn offenbar ist der Lehrer dieser Wissenschaft nicht im Stande, seine Schüler für dieselbe zu gewinnen, und durch eigne lebhafte Wärme dafür an seine Vorträge zu fesseln, sobald er selbst nichts weiter davon versteht, als höchstens die Anfangsgründe, welche er in seiner Classe docirt, und auch diese nur so mangelhaft inne hat, daß er sich auf jede Stunde ängstlich vorbereiten muß. Gewiß er müßte ein sehr guter Kopf sein, wenn er sich da nicht oft in seinen Ideen verwirren, oft mitten im Beweise den Faden verlieren, oft sich

falsch

falsch und unverständlich ausdrücken, kurz in alle die Fehler verfallen sollte, welche die Wissenschaft für die Anfänger als ein ungenießbares System von verworrenen Ideen darstellen können. Vielleicht fände er es sogar am Ende bequemer, die Sätze nur historisch anzuführen, und den Schülern ein gutes Lehrbuch zum eignen Nachlesen zu empfehlen, welches sie denn natürlich bald wieder an seinen Ort stellen würden. Wo wäre da an zweckmäßige und für diesen Unterricht unentbehrliche Wiederholung zu denken? Wie sollte es ein so unvorbereiteter Lehrer möglich machen, seiner Classe auch nur die geringste, kleinlichste Idee von der Anwendung seiner Wissenschaft vor Augen zu legen? Mögte er also übrigens auch die bedeutendsten Kenntnisse in andern Fächern besitzen, diesen Unterricht übernehme er nicht. Wollte er es dennoch im Vertrauen auf das oft bewährt gefundene docendo discimus thun, und gelänge es ihm auch, sich bald in diese Wissenschaft hineinzustudiren, so würde es gewiß nur auf Kosten derer geschehen, welche in den ersten Semestern seine mathematische Classe erfüllten.

Kurz, wer auch nur die ersten Elemente der Größenlehre zu dociren hat, der muß zum mindesten die Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie durchaus kennen und verstehn; und besonders mit den Abschnitten, welche er in seiner untersten Classe vorträgt, wozu doch wenigstens die ganze Planimetrie, die Rechnung mit Decimalbrüchen, die Buchstabenrechnung, die Anfangsgründe der Lehre von den Potenzen und Wurzeln und der Proportionslehre gehören, so vertraut sein, daß er die Folge der Sätze mit Leichtigkeit übersieht, und ihre Beziehung auf einander beständig vor Augen hat. Er muß die Auflösungen aller darin vorkommenden Aufgaben, die Beweise aller dieser, so äußerst wichtigen Elementarlehrsätze so studirt haben, daß er sich dieselben bei einer flüchtigen Ansicht sogleich vollkommen vergegenwärtigen kann, und daher mit völliger Sicherheit jeden Beweis, ohne ein Lehrbuch oder Heft in der Hand zu haben, an der Tafel zu führen im Stande sein. Nur diese vertraute Bekanntschaft wird es ihm möglich machen, alles recht deutlich ins Licht zu stellen, und die einzelnen

Theile der Beweise gehörig abzusondern. Nur dann wird er, ohne den Faden zu verlieren, mitten in der Schlußfolge abbrechen können, um zu erfahren, ob die Zuhörer ihm bis dahin gefolgt sind, oder ob er den Anfang des Beweises noch einmal darzustellen habe. Nur dann wird er vermögend sein, auf Einwürfe, die ihm der aufmerksame Schüler macht, ohne Verlegenheit Rücksicht zu nehmen, sie gehörig zu beantworten, einen neuen Weg zum Beweise, den jener etwa für möglich hält, zu verfolgen, bis die Unhaltbarkeit desselben dargethan, oder vielleicht auch hier die Wahrheit gefunden ist. Nur dann wird es ihm endlich leicht, ja überhaupt möglich sein, von Zeit zu Zeit zweckmäßige Wiederholungen anzustellen, stets auf bereits durchgenommene und verstandene Sätze zurückzuweisen, und die Zöglinge beständig im Gleise zu erhalten.

Aber auch mit dieser genauen Kenntniß der Elementar-Mathematik darf sich der Lehrer nicht begnügen. Denn wenn er seinen Schülern einen Begriff von der Anwendung der Elementarsätze beibringen, und sie dadurch von dem Nutzen der Wissenschaft überzeugen soll, so ist es einleuchtend, daß er diese Anwendung selbst überschauen muß, daß ihm also jene eigentlichen Noth- und Hülfswissenschaften des gemeinen Lebens, welche auf den Grundpfeilern der reinen Mathematik ruhen, nicht fremd sein dürfen. Freilich ist es zu seinem Zwecke nicht gerade zu verlangen, daß er Physik, Chemie, Mechanik, Optik und Astronomie durchaus eben so inne habe, als die Elemente der Größenlehre selbst; wiewol er dadurch für seine Classe natürlich noch nützlicher werden könnte. Allein ein deutlicher Ueberblick aller dieser Wissenschaften, eine gründliche Einsicht in ihre Verbindung mit der reinen Mathematik, darf ihm durchaus nicht fehlen. Wie vieles würde sonst wegfallen, wodurch er den Geschmack an trocknen Elementarsätzen unter den Zöglingen verbreiten, und ihnen auf die vorhin näher beschriebene Weise seine Wissenschaft interessant machen kann; dessen nicht zu gedenken, daß der Lehrer selbst durch das Studium jener anziehenden Wissenschaften erst recht für das, was er lehren soll, eingenommen wird, selbst mehr Interesse daran nimmt, und schon dadurch Geist und Leben in seinen Vortrag bringt. Die Erfahrung lehrt es wenigstens, daß diejenigen Lehrer der Mathematik, die sich zugleich mit dem Gebiete der angewandten Wissenschaften bekannt gemacht haben, auch in der Elementarklasse mit dem meisten Glücke unterrichten.

Doch selbst der gründlichste Kenner der Mathematik sollte diesen Unterricht in den niederen Classen nicht übernehmen, wenn er mit seinen Kenntnissen nicht auch eine schon erhaltene Uebung im mündlichen Vortrage verbindet; auch diese gehört wesentlich zur Vorbereitung darauf. Lebhaftigkeit, strenge Bestimmtheit im Ausdrucke, deutliches Bewußtsein einer vollständigen Ideenreihe, Gewandtheit, ja selbst eine gewisse Anmuth sind Eigenschaften, die zu einem nutzbaren Vortrage der Mathematik unumgänglich erfordert werden. Alles Schwankende, Ungewisse in der Wortfügung, alles Aengstliche in der Verfolgung eigner Ideen ist nirgends schädlicher, als hier.

Ein schleppender und zu langsamer Gang der Rede verdunkelt das Ganze eben so, als ein zu schnelles Dahinhüpfen. Eine beständige Aufmerksamkeit sowol auf den Gegenstand des Vortrags als auch auf die verschiedenen Zöglinge, welche demselben folgen sollen, ist in keiner Wissenschaft so nöthig und so schwer zu vereinigen als in dieser. Das alles setzt daher eine Uebung voraus, ein donum docendi, welches wol nur wenigen dann, wann sie überhaupt zu unterrichten anfangen, schon eigen sein mögte. Daher es denn wol nicht übel gerathen ist, daß der, welcher Mathematik dociren will, sich erst in andern Fächern des Unterrichts dieses donum eines deutlichen, bestimmten und wenigstens nicht unangenehmen Vortrags zu erwerben suche. Sollte aber dieser Vorschlag nicht ausführbar sein, weil das entweder die Einrichtung der Schule nicht vertrüge, oder der Lehrer unserer Wissenschaft in anderen Fächern zu wenig leisten könnte, so prüfe er im Privatunterrichte mit Einem oder wenigen Subjecten seine Lehrgabe. Und wäre auch dazu Zeit und Gelegenheit versäumt, so müßte er dann desto strenger und ernster darüber nachdenken, wie er seinen Vortrag so zweckmäßig als möglich einzurichten habe, um sich gleich anfangs, so früh als möglich jenes donum zu verschaffen; wiewol dies immer nur ein sehr unvollkommener Ersatz für den Mangel jener vorausgesetzten Uebung sein würde.

Daß der Lehrer endlich noch gewisse mechanische Fertigkeiten nöthig hat, bedarf kaum einer Erwähnung. Und steht ihm auch, an Instrumenten nichts weiter zu Gebote als ein Zirkel, Lineal, Transporteur und verjüngter Maaßstab, so muß er sie doch mit einer gewissen Gewandtheit zu gebrauchen wissen. Sonst würden ihm die Figuren entweder durchaus mißrathen, oder erst nach wiederholten Versuchen gelingen, und seine Constructionen an der Tafel nicht selten den Schülern lächerlich werden; oder er würde durch eine zu große Langsamkeit und Aengstlichkeit bei den Zeichnungen zu viel von der edlen Zeit hinopfern, da man mit Anfängern in der Mathethematik ohnehin nicht zu eilig fortschreiten darf. Schnell und sicher müssen also die Figuren entworfen sein; und das wird um so leichter von Statten gehen, wenn Hand und Auge des Lehrers Uebung genug haben, eine gerade Linie oder einen bestimmten Winkel allenfalls ohne Instrumente zu zeichnen. Wie sehr wird auch hierin Pestalozzi's Anleitung den künftigen Mathematikern vorarbeiten! Soll der Zögling ferner die Anwendung manches Satzes sogleich praktisch verstehen lernen, so erfodert dies ebenfalls eine Vorübung von Seiten des Docenten. Der Meßtisch mit dem Diopternlineal, die Meßkette nebst den Stäben und was sonst an Instrumenten für Anfänger auf der Anstalt zu haben ist, oder von dem Lehrer mit leichter Mühe angeschafft werden könnte, muß ihm eben so bekannt sein als Zirkel und Lineal. Das alles macht ihn und seinen Vortrag und seine Wissenschaft bei den Schülern beliebter, vervollkommnet das ganze Studium, und — es ist gewiß nichts leichter, als dergleichen Fertigkeiten sich zu erwerben.

Mit vorsichtiger Mäßigung, mit Rücksicht auf die wissenschaftliche Bildung des größeren Theils der Schullehrer, so wie auf den Zustand vieler armen, schlecht dotirten Schulen, wo an hinlängliche Bibliotheken und andere Sammlungen nicht zu denken ist, sind hier nur die wichtigsten Forderungen herausgehoben, die man an den Lehrer der Mathematik, selbst für die untersten Classen machen darf; was sich außerdem noch wünschen ließe, ist hin und wieder durch Winke angedeutet. Von jenen Foderungen kann aber auch nichts nachgelassen werden, wenn dieser Unterricht von bedeutendem Nutzen, wenn er nicht bloß für diejenigen, welche schon durch ein besonderes Talent auf jenes Studium hingeleitet werden, berechnet sein, sondern auch die minder talentvollen Knaben mit ergreifen, wenn also der Wunsch, daß sich das Studium der mathematischen Wissenschaften zur Beförderung allgemeiner Geistesbildung immer mehr ausbreiten mögte, da beherzigt werden soll, wo es am nothwendigsten und wirksamsten ist — beim Unterrichte der Jugend.

Wer

Wer denn nun mit Neigung und innerem Berufe, mit eigenem Interesse an der Wissenschaft, und mit den erwähnten Kenntnissen und Fertigkeiten ausgerüstet das Lehrzimmer der Mathematik betrit, dem wird es nicht schwer werden, beim Vortrage der Sätze selbst die richtige Methode zu finden, und besonders das Haupterfoderniß derselben, die Deutlichkeit nie aus den Augen zu setzen. Die folgenden Regeln sollen daher keineswegs als die einzig richtigen und zweckmäßigen dargestellt werden, sondern nur im allgemeinen zu einer Erweckung des Nachdenkens über diesen Gegenstand, und manchem einzelnen Lehrer vielleicht so lange zu einer Richtschnur dienen, bis es ihm gelungen ist, einen sichereren Weg zu entdecken.

II.
Vom Vortrage selbst.

Es kann hier nicht der Ort sein, die Eigenschaften eines zweckmäßigen Vortrags überhaupt zu entwickeln, denn theils ist dieser Gegenstand schon von erfahrneren Pädagogen mit Gründlichkeit untersucht, theils manches davon, in so fern es hieher gehört, im ersten Abschnitte berührt; und es darf daher jetzt nur von den Mitteln die Rede sein, wodurch die mathematischen Wahrheiten den Anfängern ohne weitläuftigen Apparat so deutlich und faßlich als möglich dargestellt, und eben deshalb für sie anziehender gemacht werden können. Es frägt sich also vor allem andern, ob die Sokratische Methode oder ein mehr zusammenhängender Vor-

Vortrag, der aber durchaus nicht eigentlich akademisch sein dürfte, zur Erreichung jenes Zweckes dienlicher sei.

Die Sokratische Methode, welche in der neueren Pädagogik eine so wichtige Rolle spielt, gewiß aber weit öfter mit übertriebenen Lobsprüchen empfohlen, als für diejenigen, welche sich ihrer bedienen sollten, richtig und faßlich dargestellt, ja unstreitig noch weit öfter gut auseinandergesetzt, als richtig und zweckmäßig angewandt ist, hat ungeachtet ihres inneren, bleibenden Werthes doch bei weitem noch nicht so viel Glück gemacht, als man anfangs erwartete; und das theils wegen der Schwierigkeiten der Sache selbst, denen im Ganzen immer noch wenige Schulmänner und Prediger eigentlich gewachsen sind, theils aber auch deshalb, weil man diese Lehrart bei Gegenständen hat benutzen wollen, bei welchen sie nicht anwendbar ist. Was soll man z. B. davon denken, wenn sogar Geographie und Weltgeschichte sokratisch docirt werden? Ist es denn möglich, die Lage der Länder und Städte, die Namen und Jahrzahlen

len von irgend einer Begebenheit aus dem Verstande der Kinder zu entwickeln? Sind dergleichen Kenntnisse in Begriffen a priori oder in den Gesetzbüchern der praktischen Vernunft enthalten? Dialogisch sollte jeder Schulvortrag sein; auch die zusammenhängendste Lection sollte oft durch Fragen des Lehrers unterbrochen werden, wodurch er die Aufmerksamkeit der Schüler prüfte, und, ob er sich ihnen verständlich ausgedrückt habe, untersuchte. Aber der dialogische Vortrag in diesem Sinne des Worts ist auch himmelweit von der Sokratischen Lehrart verschieden. Diese kann durchaus nicht überall wirksam sein; es ist Entweihung ihrer rechtmäßigen Würde, wenn man sie immer und überall benutzen will. Ja es liegt eben hierin der Grund, warum sie in den Augen manches Praktikers bereits wieder zu sinken beginnt; und es steht in unserem extremsüchtigen Zeitalter allerdings zu fürchten, daß man sie in kurzem wieder zu sehr vernachlässigen werde, wenn nicht bald die Gränzen ihrer Anwendbarkeit mit Gründlichkeit näher und sicherer bestimmt werden, als es bisher geschehen ist.

Was

Was nun die Anwendung derselben in der Mathematik betrifft, so scheint es allerdings auf den ersten Blick, als ob diese Wissenschaft, als ein Inbegriff reiner Verstandesideen, welche man nur durch Vernunftschlüsse an einander reihet, und nach Angabe der Vernunft allein, ohne Zuziehung der Erfahrung construirt, und zur Anschauung bringt, so ganz dazu geeignet sei, mit den Anfängern sokratisch abgehandelt zu werden. Man hat sie eben deshalb mit der Logik, mit der Pflichtenlehre, mit der Entwickelung religiöser Ideen u. s. w. in eine gewisse Parallele gestellt, und gemeint, der Mathematiker müsse mit seinen Schülern ganz auf ähnliche Art katechisiren wie der Religionslehrer, und wie der, welcher mit Anfängern im Denken überhaupt Verstandesübungen auf mancherlei Weise versucht. Allein ohne diesen Vorschlag eigentlich ganz zu verwerfen, ohne ihn besonders denjenigen zu widerrathen, die theils selbst sehr geübte Katecheten sind, theils sehr fähige, mit dem besonderen Talente zur Mathematik begabte Köpfe zu Zöglingen haben, lassen sich gegen die allgemeinere

Be-

Befolgung desselben bedeutende Gründe erhaben, die eine nähere Prüfung verdienen möchten. Wenn man die mathematischen Wahrheiten eben so wie z. B. einen moralischen Satz aus der Seele des Knaben entwickeln will, so hat man zuerst vielleicht das nicht genug in Anschlag gebracht, daß die moralischen Ideen, zur Erläuterung eines einzigen Satzes, auf eine weit mannichfachere Art mit einander verbunden werden, und auf einander folgen können, als die mathematischen; daß der Faden, an welchem der Lehrer jene vesthält, und zum Ziele leitet, nur lose gespannt sein darf, und vielerlei Biegungen verträgt; dahingegen der Faden eines mathematischen Beweises weit strenger angezogen ist, also bei einer etwas beträchtlichen Dehnung sogleich reißt, und wieder von neuem angeknüpft werden muß. Diese stärkere Spannung hat ihren Grund in der Construction, wodurch die Mathematik ihre Begriffe der Anschauung darstellt. So sehr eben diese Construction die ganze Sache erleichtert, und gewissermaßen die mathematische Gewißheit begründet, so sehr ist sie einer freieren ten Behandlung beim mündlichen Unterrichte hinderlich. Wie oft würde da nicht aller Vorsicht ungeachtet der Katechet mit den Schülern von der Bahn des Beweises zu weit abkommen, als daß er hoffen könnte, für diesmal das Ziel zu erreichen. Wie oft würde er also von neuem mit der Hypothesis anfangen müssen, um den Schlußsatz zu finden. Und ob nun bei diesen öfteren Verirrungen die endlich erlangte deutliche Einsicht in den Satz mehr gewinne, ob der Knabe hierbei für die Thätigkeit seines Verstandes wirklich mehr Vortheil, und für seinen Geist überhaupt mehr Unterhaltung finde als bei der schnellen Anschauung des Satzes, welche er durch einen faßlichen Beweis von Seiten des geübten Lehrers erhält, das ist doch ernstlich zu bezweifeln. Mögte es aber auch sein, daß dieser beschwerliche Weg am Ende sicherer zum Ziele führte, wie viele würde es denn zweitens unter allen, auch noch so geschickten Lehrern der Mathematik geben, welche in der sokratischen Methode eine hinlängliche Gewandtheit besäßen, um sie ungeachtet jenes bedeutenden Hindernisses der Construstruction mit Glücke anwenden zu können? Wie viele würden es denn dahinbringen, den Schülern eine gewisse freie Thätigkeit des Geistes in Auffindung der Beweise zu lassen, und sie dabei doch so geschickt zu leiten, daß der Beweis nicht zu oft verunglückte? Bei kurzen und leichten Sätzen ginge es wol, und kann es ja auch mit unter versucht werden; aber bei zusammengesetzteren Beweisen, wo es an sich schon nicht leicht ist, die einfache Schlußfolge gehörig zu übersehen, und ganz im Kopfe zu haben, dürfte es nicht selten dahinkommen, daß Lehrer und Schüler auf einen Standpunct geriethen, wo sie das Ziel ganz und gar aus den Augen verloren hätten. Und wollte der Lehrer, um dies zu verhüten, sich eine gewisse Folge von Fragen aufschreiben, so würde er die Schüler wieder zu ängstlich bei dem Faden erhalten, ihren eigenthümlichen Ansichten nicht nachgehen können, und also aus seinem Sokratismus gerade das verbannen, was den eigentlichen Geist dieser Lehrart bestimmt. Doch gesetzt auch, diese Schwierigkeiten wären hier zu groß geschildert, gesetzt es gäbe deren viele, die mit

Leich-

Leichtigkeit und Sicherheit die mathematischen Ideen katechetisch zu entwickeln verstünden, so bliebe immer noch ein dritter Grund dagegen übrig, daß diese Methode nemlich offenbar zu viele Zeit erfoderte, und daß der Gewinn, den sie für die Selbstthätigkeit und Unterhaltung der Zöglinge hoffen ließe, mit dem größeren Zeitaufwande in der That in keinem schicklichen Verhältnisse stände. Bei andern Gegenständen darf dieser Verlust nicht so sehr in Anschlag kommen, denn bei einer moralischen oder religiösen Wahrheit beruhet größtentheils die Ueberzeugung darauf, daß der Schüler den Satz selbst gefunden zu haben glaube; allein dafür ist dem Mathematiker gar nicht bange; er erzwingt die Ueberzeugung durch richtige Construction. Wozu also hier ein größerer Zeitaufwand, wenn der kleinere eben so sicher zum Ziele führt? Für die Thätigkeit des Schülers dabei kann auf andere Weise gesorgt werden; wovon nachher die Rede sein wird. Auch Pestalozzi hatte gewiß sehr bestimmte Gründe, warum er — laut aller Nachrichten, die wir von der Burgdorfschen Lehrart erhalten haben — selbst bei dem ersten Elementarunterrichte in den Zahl- und Maaßverhältnissen durchaus nicht sokratisch zu Werke geht.

Kurz sollte auch die sokratische Methode in der Mathematik von einzelnen vorzüglich talentvollen und geübten Lehrern bei ausgezeichneten Köpfen ohne Schaden angewandt werden können, so scheint es doch, daß sie fürs allgemeine nicht so zu empfehlen sei, als eine mehr zusammenhängende deutliche Darstellung der Definitionen und Beweise, die vielleicht nach folgenden Vorschlägen nicht unzweckmäßig einzurichten wäre.

Was zuvörderst den Unterricht in der Geometrie betrifft, so kommt hierbei besonders darauf vieles an, daß die ersten Definitionen der einfachen Größen in der Mathematik richtig gefaßt werden. Denn sie sind es, die den Knaben zuerst ganz aus dem Felde der Erfahrung herausheben und in das Gebiet des reinen Verstandes versetzen sollen; er soll hier zuerst die Ideen, welche er bisher bloß in concreto kannte, in ihrer abstracten Reinheit ken-

kennen, und die Bilder dieser Ideen, welche ihm vorgezeichnet werden, als Bilder von der Sache selbst unterscheiden lernen. Man eile also ja nicht über die Definitionen des Punctes, der Linie u. s. w. als über etwas leichtes zu schnell hinweg, sondern man spreche sie mehreremal den Kindern vor; lasse sie öfters von ihnen wiederholen; man lasse sich von ihnen mehr als einmal den Unterschied zwischen der reinen Idee selbst und dem davon gezeichneten Bilde, z. B. zwischen der mathematischen Linie im Verstande und der physischen Linie, die mit Kreide an der Tafel gezogen ist, bestimmt angeben; man versuche endlich die Sache auf mehr als Eine Art zu definiren, um zu erforschen, wie sie diesem oder jenem der Zöglinge zuerst am einleuchtendsten werde. Ein solcher Anfang gibt überhaupt sogleich Gelegenheit, die Kinder an mathematische Präcision und Bestimmtheit des Ausdrucks zu gewöhnen. Keine Definition von ihnen muß als richtig angenommen werden, wo auch nur Ein Wort fehlt oder überflüssig steht. Geben sie eine solche zur Antwort, so müssen sie sogleich auf das Unstatthafte derselben hingeleitet, und überführt werden, daß sie ganz etwas anders als die verlangte Idee definirt haben. Wäre z. B. von einem Zöglinge der Punct als „ein Körper ohne Breite, Länge und Höhe" definirt, so müßte er überzeugt werden, daß diese Bestimmung durch das Wort „Körper" allen Sinn verloren habe. Erhielte der Lehrer auf die Frage, was ein geradlinichter Winkel sei, die Antwort, es sei „die Neigung zweier Linien gegen einander": So zeichne er sogleich einen Winkel mit krummen Schenkeln, beweise alsdann, daß auch auf diesen jene Definition passe, folglich unrichtig sei, und durch den Ausdruck: „zweier gerader Linien" berichtiget werden müsse. Auf eine solche Bestimmtheit der Ausdrücke muß mit großer Strenge gehalten werden, weil davon hauptsächlich das richtige Verstehen aller folgenden Sätze abhängt, und dadurch nicht bloß die mathematischen Ideen in dem Kopfe des Zöglings zur Evidenz gelangen, sondern derselbe auch in seine übrigen Begriffe und Erkenntnisse mehr Klarheit und Deutlichkeit zu bringen veranlaßt wird.

Mit gleicher Ausführlichkeit erkläre man dann auch die Grundsätze der gesamten Mathematik, und suche sie durch mehrere Beispiele dem Vorstellungsvermögen des Zöglings geläufig zu machen. Am sichersten wird man gehen, wenn man diese Beispiele, wo es sich thun läßt, von Zahlen hernimmt. So fällt der Satz: „Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind einander selbst gleich," sehr in die Augen, wenn man ihn in Zahlen darstellt. Andere, der Geometrie angehörende Grundsätze, die sich in Zahlen nicht darthun lassen, leite man unmittelbar aus den Definitionen selbst her. Wer z. B. das verstanden hat, daß die Begränzungslinie des Kreises in allen ihren Puncten gleich weit vom Mittelpuncte abstehe, der wird eben dadurch leicht den Grundsatz fassen: Alle Radien Eines Kreises sind einander gleich. Dabei hüte man sich aber, in jenem Falle bloß bei den Zahlen, in diesem bloß bei Einem Kreise stehen zu bleiben; man wende vielmehr jenen Satz auch auf Größen anderer Art, und diesen auf Kreise von verschiedenen Durchmessern an, damit sich die

Vorstellung des reinen Grundsatzes nicht an Einen Fall anschließe, sondern zu einer allgemeinen erhebe, welche nachher überall, wo es nöthig ist, mit Leichtigkeit angewandt werden kann.

Sind auf diese Art die ersten Begriffe von den Gegenständen, mit welchen man zu thun hat, aufs reine gebracht, so ist dadurch dem folgenden Vortrage der eigentlichen Sätze und Aufgaben schon mächtig vorgearbeitet. Da nun jeder Satz zum Beweise eines später vorkommenden oder zur Auflösung einer nachfolgenden Aufgabe dient, so versteht es sich, daß kein Satz ohne eigentlichen Beweis hingestellt werde. Der Lehrer der Mathematik muß die Sache selbst reden lassen, nie bloß den Glauben an eine mathematische Wahrheit zu erwecken suchen, sondern überzeugen; und das ist ohne Beweis unmöglich. Es ist ja vielmehr ein Vortheil dieser Wissenschaft, daß sie alle ihre Thesen beweist, und der Lehrer also, welcher dies für unwichtig hält, und viele, vielleicht bedeutende Sätze bloß historisch anführt,

führt, versündiget sich dadurch um so mehr an seiner Wissenschaft, weil er ihr auf diese Art nicht nur kein größeres Interesse gibt, sondern sogar alles Anziehende raubt. Zur deutlichen Führung des Beweises gehört aber folgendes:

1) Bei den ersten Lehrsätzen, und bei vielen der später vorkommenden ist es vorzüglich nöthig, die Thesis selbst erst zu erläutern, d. h. zu zeigen, was darin bewiesen werden solle, und was man als ausbedungen voraussetze, oder als sogenannte Hypothesis annehme. Sehr oft verwechselt sonst der Anfänger die Thesis mit der Hypothesis, bekommt dadurch eine falsche Ansicht des Ziels, worauf bei dem Beweise hingearbeitet wird, und versteht die ganze Schlußfolge nicht. Leicht verfällt er z. B. bei dem Satze von der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie im gleichschenklichten Dreiecke, auf die Vorstellung, als ob die Gleichheit der beiden Schenkel, und nicht jener beiden Winkel erwiesen werden sollte; mag man ihm dann dies letzte auch noch so bündig darthun, er wird es nicht begreifen.

Anders ist aber gewiß seine Ansicht davon, wenn man ihn vorher darauf aufmerksam macht, es sei hier von einem gleichschenklichten Dreiecke die Rede, worin schon nach der Definition desselben die zwei Seiten gleich sein müssen; es solle also jetzt aus dieser Eigenschaft jenes Dreiecks eine zweite gefolgert werden, daß nemlich auch die Winkel, welche jenen Seiten gegenüberliegen, allemal gleich sind. Ueberhaupt muß man sehr deutlich machen, was unter Hypothesis verstanden werde. Denn wenn auch der Anfänger die Thesis rein abgesondert im Auge hält, so will er oft, da ihm von der Kraft der Mathematik im Beweisen vieles vorgesprochen wird, selbst die Hypothesis bei einem Satze erst bewiesen sehen. Er verlangt z. B. bei dem Lehrsatze, „daß zwei Triangel, wenn sie drei gleiche Seiten haben, einander gleich sind," man solle ihm erst die Gleichheit der drei Seiten darthun. Diesem sonderbaren Irrthume muß daher sogleich anfangs vorgebeugt werden. Dabei hat aber der Lehrer zu erwägen, daß die Hypothesis von doppelter Art sein kann. Bei einigen Lehrsätzen

liegt

liegt sie in dem Begriffe der gegebenen Figur, wie z. B. bei dem vorhin angeführten Satze vom gleichschenklichten Dreiecke; da sich kein Dreieck dieser Art denken läßt, welches nicht zwei gleiche Seiten hätte. Eben so bei dem Pythagoräischen Lehrsatze, indem ein rechtwinklichter Triangel ohne rechten Winkel ein Unding wäre. Bei andern besteht sie hingegen in außerwesentlichen Eigenschaften der Figur, deren sie nur für den vorliegenden Lehrsatz bedarf, und welche also diesen Lehrsatz für alle die Fälle, wo sich dieselben künftig zeigen, begründen. So ist, um dies durch ein Beispiel zu erläutern, bei einem unter den Sätzen von der Gleichheit der Triangel die Voraussetzung, „daß zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite des Einen Triangels einzeln eben so groß sind als zwei Winkel und die dazwischen liegende Seite des Andern"; d. h. wenn bei künftig erscheinenden Figuren in späteren Lehrsätzen, ja wenn überhaupt irgendwo zwei Triangel sich finden, welche die eben erwähnte Eigenschaft besitzen, so kann man aus derselben auf die Gleichheit und Aehnlichkeit dieser Triangel schließen. Eben um diesen Schluß alsdann mit Sicherheit machen zu können, muß man hier denselben ausführlicher Weise als richtig darthun. Es macht also dieser Schluß und nicht jene Voraussetzung die Thesis bei dem angeführten Lehrsatze aus. Uebrigens wird es für manche Zöglinge gewiß nöthig seyn, diesen Begriff der Hypothesis öfters zu erneuern, und dieselbe bei jedem Lehrsatze von dem, was erwiesen werden soll, gehörig zu unterscheiden.

Was indeß zu dieser Erläuterung (nach dem vorhin gegebenen Begriffe dieses Wortes) der Thesis und Hypothesis eines jeden Satzes nothwendig gehört, das ist die Figur. Sie muß daher sogleich zu Anfange gezeichnet, und an derselben müssen die demonstranda dem Schüler deutlich gemacht werden, ehe noch irgend eine Hülfslinie die anfängliche Figur in ihrer Reinheit dem Auge des Schülers entzieht.

Sind diese Vorsichtsregeln beobachtet, so wird es ihm leicht werden, das Ziel des Beweises vestzuhalten; er wird mit Ungeduld den

Aus-

Ausgang erwarten, und mit gespannter Aufmerksamkeit die Schlußfolge zu ergreifen suchen. Zweckmäßig ist es ferner, wenn man hierauf zunächst, ehe der eigentliche Beweis beginnt,

2) die Hülfssätze, welche zur Führung desselben erfodert werden, aufs neue in Erinnerung bringt; sie mögen nun entweder in allgemeinen mathematischen Grundsätzen (z. B. in dem, daß durch zwei Puncte nur Eine gerade Linie gedenkbar ist), oder in schon erwiesenen geometrischen Wahrheiten, oder endlich in arithmetischen Regeln z. B. aus der Proportionslehre, liegen. Dadurch wird ein doppelter Vortheil erreicht. Einmal sind jene Hülfssätze dann bei der Führung des Beweises selbst dem Knaben schon gegenwärtig; ihre Anwendung auf den vorliegenden Fall ist also sehr leicht, und die Demonstration geht ihren Gang ungehindert fort. Wenn jenes hingegen versäumt wurde, so hat der Lehrer oft nöthig, seinen Ideengang zu unterbrechen, und den Schülern die Hülfssätze mitten im Beweise von neuem darzustellen, wodurch er sie gewiß nicht selten

so

so weit von dem jetzt zu behandelnden Satze abziehen wird, daß er nach Erläuterung der Hülfswahrheit denselben von vorn anfangen muß. Eine unnütze Zeitverschwendung, eine gefahrvolle Erschwerung des Beweises sind die gewöhnlichen Folgen davon. Zweitens aber wird durch ein solches, zur rechten Zeit angebrachtes Hindeuten auf die Hülfssätze der Ueberblick, den der Schüler über die ganze Kette von Lehrsätzen erhalten soll, nach und nach ungemein erhellt; er fühlt bei jedem folgenden die Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit aller vorhergehenden; sein Interesse an der Wissenschaft wächst, und die ganze Folge ihrer Lehren, welche einzeln wie todte Massen daliegen, wird ihm zu einer lebendigen Ideenwelt, wo Eine der Andern forthilft, und keine müßig oder unbrauchbar dasteht.

Hat der Schüler nun diese Hülfssätze sich wieder vergegenwärtigt, hat er dadurch gleichsam die Werkzeuge in die Hand bekommen, womit er das Werk des Beweises angreifen soll, so bereite man ihm ferner die Handhaben

selbst

selbst, wo er seine Werkzeuge anzulegen hat, d. h. man ziehe nun

3) die Hülfslinien, wenn dergleichen nemlich zum Beweise nöthig sind. Man zeige, daß der Beweis nicht ohne dieselben geführt werden könne, weil man Gelegenheit haben müsse, die vorher bewiesenen Wahrheiten hier anzuwenden, daß es aber allerdings dem, welcher einen Beweis über irgend eine Figur zu führen habe, erlaubt sei, so viele Linien, als sein Zweck erfodere, zu ziehen, wenn nur die Grundfigur dadurch nicht im wesentlichen verändert werde. Eben deshalb müssen auch diese Nebenlinien, wenigstens vor den Augen der jüngsten Anfänger, sich von den Hauptlinien der Figur unterscheiden; sie müssen schwächer sein, oder nach einer längst bekannten Manier nur punctirt angezeigt werden. Noch deutlicher würde dies alles vielleicht dadurch dargestellt werden, wenn man, wenigstens bei schwierigeren Beweisen, welche sehr linienreiche Figuren erfodern, diese nicht an die Tafel zeichnete, sondern in dünne Holzplatten ausschneiden ließe,

an welche sich kleine Stäbchen als Hülfslinien durch Stifte nach Belieben bevestigen, und ohne Mühe wieder abnehmen ließen. Da, wo durch Hülfslinien vollständige neue Figuren in der Grundfigur entstehen, könnten die neuen Figuren ebenfalls besondere, aber durchlöcherte Holzplättchen von anderer Farbe sein, welche, ohne die Grundfigur zu verstecken, an derselben durch Stifte bevestigt würden. Doch dies ist nichts wesentliches, und es hat keine unüberwindliche Schwierigkeit, die Figuren mit allen Nebenlinien auch an der Tafel in das gehörige Licht zu stellen; so lange man nemlich, wovon hier einzig die Rede ist, im Gebiete der Planimetrie sich befindet.

Da ferner die meisten Lehrsätze eines zusammengesetzten Beweises bedürfen, so wird es nicht undienlich sein, wenn demselben

4) eine Uebersicht der Hauptmomente, worauf er beruht, eine Art von Disposition vorangeschickt wird. Man lasse sich nicht durch dieses, aus der Homiletik entlehnte Wort zu-

rück-

rückschrecken. Eine jeder Vortrag wird, sobald er ein Ganzes ausmachen soll, dadurch um so nützlicher, wenn der Zuhörer vorher eine kurze Anzeige der wichtigsten Abschnitte desselben erhält; sollte dies also nicht auch auf den mathematischen mit Nutzen angewendet werden können? Der Beweis eines Satzes besteht aus einzelnen Schlüssen, wovon zuweilen jeder wieder durch andere Schlüsse erst möglich gemacht werden muß. Ist z. B. die Congruenz zweier Figuren zu erweisen, so beruht dieselbe, weil Figuren nicht einfache, sondern zusammengesetzte Größen sind, auf der Gleichheit gewisser einzelner gleichliegender Theile. Sollte da nicht nothwendig das Verfolgen des Beweises selbst sehr erleichtert werden, wenn der Schüler vorher die einzelnen Theile kennen lernt, deren Gleichheit nach einander gezeigt werden muß? Wenn er schon im voraus die Reihe der Hauptschlüsse weiß, welche am Ende den letzten Schluß hervorbringen? Der Lehrer aber, welcher diesen Kunstgriff in Anwendung setzen wollte, müßte allerdings selbst die richtige Ansicht der Hauptmomente nicht verfehlen, und

schwie-

schwierigere Beweise zu diesem Zwecke genau prüfen, da es nicht überall in die Augen springt, welche Schlüsse die Hauptschlüsse sind, und die bisherigen Compendien noch nicht darauf hindeuten. Ein Paar Beispiele mögen es indeß deutlich machen, wie bald eine genaue Ueberlegung dem Lehrer die Hauptpuncte des Beweises zeigen könne. Wenn z. B. bewiesen werden sollte, „daß zwei Triangel ähnlich sind, sobald zwei Winkel des Einen dieselbe Größe haben wie zwei Winkel des Anderen": So bedenke man nur, worauf sich die Aehnlichkeit zweier Figuren gründe. Bekanntlich liegt sie darin, daß jeder Winkel der Einen dem gleichliegenden Winkel der Anderen gleich und jedes Paar Seiten der Einen dem gleichliegenden Paare der Anderen proportionirt sei. Da also hier die Gleichheit zweier Winkel in dem Einen und dem Anderen Triangel vorausgesetzt wird, so sind daraus noch vier einzelne Stücke zu erweisen, nemlich 1) die Gleichheit des dritten Winkels in beiden Triangeln, und dann die Proportionalität 2) der zwei Paar Seiten, die den ersten Winkel in beiden Triangeln, 3) der

zwei

zwei Paar Seiten, die den zweiten W. i. b. T., und 4) der zwei Paar Seiten, die den dritten W. i. b. T. einschließen. Diese vier Abschnitte geben also die Disposition des Beweises; denn nur erst, wenn sie alle einzeln dargethan sind, ist der Schluß auf die Aehnlichkeit beider Triangel möglich. Eben so zerfällt der Beweis des Satzes, „daß der äußere Winkel, welcher durch die Verlängerung irgend einer Seite des Dreiecks entsteht, den beiden ihm entgegengesetzten inneren Winkeln zusammengenommen gleich sei", offenbar in zwei Abschnitte. Man muß nemlich 1) zeigen, daß der Eine innere Winkel dem Einen, durch die Hülfslinie bestimmten Theile des äußeren, und 2) daß der Andere innere Winkel dem Andern Theile des äußeren gleich sei. Dann erst kann man schließen, daß beide innere zusammengenommen so groß sind als der äußere. Auf diese Art findet man leicht bei jedem Satze die Hauptmomente; man mache diese den Schülern bekannt, und, was nie vergessen werden darf, bringe sie an der schon gezeichneten Figur zur Anschauung; dann werden die Zuhörer auch längeren Beweisen mit einer unermüdeten Aufmerksamkeit folgen können. Und, was eben so wahr ist, der Lehrer hat sich unvermerkt seine eigene Arbeit dadurch erleichtert. Vorzüglich ist eine solche Disposition nöthig bei den sogenannten indirecten Beweisen, wo man das Gegentheil von der Thesis annimmt, und daraus eine Folgerung herleitet, die einen Widerspruch enthält. Diese Art zu schließen ist für Anfänger die schwerste, und man muß es ihnen vorher recht deutlich machen, wie eben dadurch, daß das angenommene Gegentheil zur Absurdität führe, die Wahrheit der Thesis erhelle. Auch dies gibt sehr bemerkbare Abschnitte im Beweise.

Es ist übrigens nicht zu befürchten, daß durch diese Zurüstungen zum eigentlichen Beweise zu viele Zeit verloren gehe. Sie scheinen nur, wenn man sie in solcher Darstellung überliest, weitläuftig zu sein; bei der wirklichen Anwendung sind sie es nicht, wie man bei dem Versuche bald finden wird. Im Gegentheil, ein vollständiger Beweis mit allen genannten

ten Vorbereitungen erfordert, in dieser Ordnung vorgetragen, und eben deshalb schneller verstanden, gewiß weniger Zeit, als wenn er ohne Umstände sogleich angefangen, und oft durch anzuführende Hülfssätze, durch Berichtigung unausbleiblicher Mißverständnisse u. s. w. unterbrochen wird.

Durch alles bisher erwähnte sind dann die Zöglinge auf den rechten Standpunct gestellt, von wo aus sie die Entwickelung der Thesis beobachten müssen; der Lehrer hat eben dadurch sich selbst auf das sicherste im Gebiete des Satzes, den er eben durchnimmt, orientirt, und er wird nun

5) gewiß mit Glücke den Beweis selbst vortragen können. Er lasse nun nach Anleitung der gegebenen Disposition Schluß auf Schluß nach einander folgen, und mache jeden vollendeten Abschnitt bemerkbar; er zeige dabei auf die Winkel und Linien der Figur, und benenne dieselben mit hinlänglichen Buchstaben, damit keine Verwechselung entstehen

könne: So wird die ganze Schlußfolge nach und nach in völliger Klarheit vor dem Auge des Knaben vorübergehen. Aber freilich ist eben hier der Ort, wo die Gabe des Vortrags recht eigentlich hingehört. Hier darf keine verwickelte und verfehlte Construction dem Lehrer entfallen; hier muß er sich aufs sorgfältigste vor dem zu viel und zu wenig in den Worten seiner Darstellung hüten; hier ist das, was man „sich versprechen" nennt, eben so schädlich für die Zuhörer, als es durch die vielen Buchstaben und schon durch die anstrengende Aufmerksamkeit auf die Schlußfolge, leider nur zu leicht möglich gemacht wird. Vorsichtig und bedachtsam gehe also der Lehrer dabei zu Werke; er spreche nicht zu schnell, weil er sich selbst dadurch zu Irrungen im Ausdrucke Anlaß gibt, und dem Schüler oft nicht verständlich genug wird. Aber er falle auch nicht in das andere Extrem einer zu langsamen, schleppenden und gedehnten Rede, weil eine solche nicht nur überhaupt für Knaben ermüdend und also für ihre Aufmerksamkeit höchst gefährlich ist, sondern auch in dem vorliegenden besonderen Falle dadurch nachtheilig wird, daß sie den Beweis zu sehr ausdehnt, und das Verstehen desselben erschwert. Hält also der Vortrag des Beweises das glückliche Mittel im Zeitmaaße; ist er dabei zugleich lebendig; bemerkt man an dem Lehrer das eigene Interesse, welches er an der Wissenschaft nimmt; weiß er das, was wichtig ist, die Schlüsse und Sätze, welche mehr als andere auf das Ziel hinarbeiten, selbst durch Ton und Stimme herauszuheben: So wird ein solcher Vortrag doppelt so viel wirken als ein anderer, dem es bei aller Richtigkeit und Bestimmtheit doch an diesen accidentellen Eigenschaften mangelt. — Indem aber der Lehrer auf diese Art den Beweis selbst zusammenhängend führt, darf er es nie vergessen, daß er nicht erwachsene, gebildete, an Schlußfolgen gewöhnte Zuhörer vor sich hat, sondern Knaben, deren Verstand hauptsächlich erst durch den Unterricht in der Mathematik jene Gewandtheit erhalten soll, die also in dieser Uebungszeit noch mancherlei Störungen ihrer Aufmerksamkeit unterworfen sind. Er frage also mit unter, besonders, wenn einzelne Abschnitte der Disposition vollendet sind, ob man auch alles verstanden habe, ob man gefolgt sei, und sich mit ihm auf Einem Puncte der Beweisbahn befinde. Ja er verlasse sich auch auf diese Fragen nicht allein; er prüfe die Aufmerksamkeit zuweilen dadurch, daß er bei einer Conclusion, die aus leichten Vordersätzen ohne Mühe hervorgeht, plötzlich inne hält, und von den Schülern seine eigene angefangene Periode vollenden läßt. Treffen sie dann das rechte, so leidet der Vortrag keine Unterbrechung; verfehlen sie es, welches gewiß selten der Fall sein wird, so ist das entweder ein Beweis von Nachlässigkeit der Schüler, oder von der Schwierigkeit der Sache selbst, und der Beweis muß von neuem geführt werden. Der Lehrer übe sich endlich, sogar während des Beweises die Mienen der Schüler zu prüfen, denn sehr oft läßt sich schon daraus ohne weiteres Fragen abnehmen, ob sie verstehen und folgen oder nicht. Eine jede eingesehene Wahrheit zwingt dem Menschen unwillkührlich eine Miene des Beifalls ab, die nicht zu verkennen ist; dahingegen auch der peinliche Zustand, wenn man etwas begreifen soll und doch nicht einzusehen vermag, sich auf dem Gesichte so deutlich ausdrückt, daß er dem aufmerksamen Lehrer nicht entgehen kann.

Zuweilen wird das Verstehen eines Beweises auch dadurch sehr erleichtert, wenn man die Hauptschlüsse desselben an die Tafel schreibt. Leichtere und kürzere Schlußfolgen werden zwar besser gefaßt, wenn man sie nicht durchs Anschreiben unterbricht; schwerere und längere aber gewiß nicht. Der Schüler folgt dem zusammengesetzten, mit vielen Hülfssätzen durchflochtenen Beweise weit leichter, wenn er die bereits gefundenen Prämissen vor Augen sieht; er trägt dann um so weniger Bedenken, sie als ausgemachte, nicht mehr zu bezweifelnde Wahrheiten zu benutzen; es wird ihm dann um so deutlicher, wie die Disposition theilweise hintereinander wirklich zur Ausführung kommt. Doch muß natürlich dies Anschreiben nur in der Kürze geschehen, um nicht zu viel Zeit zu verderben, und den Schüler nicht zur Unachtsamkeit zu verleiten; welches leicht der Fall sein dürfte, wenn er die Hoffnung hätte, am Ende des Vortrags den ganzen ausführlichen Beweis an der Tafel zu finden.

Alles, was hier von der Darstellung eigentlicher Lehrsätze gesagt ist, gilt auch von den Aufgaben, welche hin und wieder eingeschaltet werden. Sie zerfallen beim Vortrage in zwei Hauptt heile, weil erstlich die Auflösung des Problems selbst gezeigt, und dann die Richtigkeit derselben bewiesen werden muß. Bei der Auflösung selbst hat man besonders das zu beobachten, daß man deutlich mache, was gegeben sei, und was damit vorgenommen werden solle. So bestehn bei der Aufgabe: „ein Dreieck in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verwandeln" die data in einem Dreiecke, einem Winkel, und einer Linie; und das postulatum ist das Parallelogramm, worin der Winkel und die Linie befindlich sein müssen. Nach dieser Erörterung mache dann der Lehrer die Auflösung an der Tafel, und erkläre dabei zugleich das Verfahren. Der Beweis, daß alles verlangte geschehen sei, wird hierauf wie jeder andere Beweis auseinandergesetzt. —

Um

Um nun die ganze, bis hierher angegebene Vortragsweise für manchen noch deutlicher und anwendbarer zu machen, so soll sie im praktischen Abschnitte dieser Schrift in concreto dargestellt werden. Man wird daselbst bei jedem Lehrsatze Thesis, Hypothesis, Hülfssätze, Hülfslinien, Disposition und dann den Beweis; bei jeder Aufgabe aber das Gegebene, das Verlangte, die Auflösung, und darauf die ganze Darstellung ihrer Richtigkeit angegeben finden. Es ist übrigens leicht einzusehen, daß der Lehrer, wenn er nach dieser Methode vortragen will, die Beweise selbst sehr deutlich gefaßt haben, daß er recht eigentlich damit vertraut sein müsse; und es war daher oben nicht zu viel verlangt, wenn das Dociren aus dem Hefte oder Lehrbuche, welches in manchen andern Lectionen ohne Schaden zulässig ist, beim Vortrage der Mathematik gänzlich verworfen wurde. Ueberhaupt ist die Einführung eines Lehrbuchs in den unteren Classen aus einem andern Grunde nicht rathsam; wovon weiter unten die Rede sein wird.

Jetzt noch ein Paar Worte, um die Vertheidiger der Sokratischen Methode doch in etwas zufrieden zu stellen. Sind die Schüler schon einigermaßen im Beweisen geübt, haben sie bereits einige Einsicht in die Bündigkeit mathematischer Schlußfolgen erlangt, so kann man zuweilen bei leichteren Sätzen ihre Beurtheilungskraft auffodern und anleiten, den Beweis selbst zu finden, oder, wenn schon Ein Beweis gegeben ist, einen Anderen aufzusuchen. Dies macht fähigen Schülern gewöhnlich viel Freude, und erweckt die Aufmerksamkeit aufs neue. Sie werden dabei nicht selten einen falschen Weg einschlagen; aber dann lasse man sie denselben immer fortgehen, bis sie sich überzeugen, daß sie hier die gesuchte Wahrheit nicht erreichen können. Ja selbst, wenn sie mit richtigen und zweckmäßigen Sätzen anfangen, mache man ihnen bei jeder schwachen Seite, die ihr Beweis zeigen mögte, Einwürfe, damit sie sich nie mit dunkelen Vorstellungen begnügen, sondern alles mit gehöriger Begründung und Deutlichkeit darstellen lernen. Aber oft darf dies allerdings nicht geschehen, weil es sonst

eine

eine unnöthige und nachtheilige Zeitverschwendung veranlassen würde.

Ueber den Unterricht in der Arithmetik erwarte man hier keine ausführlichen Vorschläge. Denn theils wird ein Lehrer, der überhaupt die Gabe der Deutlichkeit sich erworben hat, und nach obigen oder ähnlichen Regeln die geometrischen Sätze zur Evidenz zu bringen weiß, auch bei der Arithmetik das nicht vernachlässigen, was vorzüglich zum Verstehen derselben dient, nemlich Vollständigkeit und völlige Klarheit der ersten Begriffe, deutliche Auseinandersetzung der arithmetischen Gesetze und Regeln, und Gewöhnung an eine geschickte und fertige Anwendung derselben; — theils aber ist es hierbei mit einzelnen allgemeinen Vorschlägen nicht abgethan, indem ein jeder Abschnitt der Arithmetik für die Anfänger eine eigene Behandlung erfodert. Sollte also dazu eine gründliche Anleitung gegeben werden, so müßte die ganze Elementar-Arithmetik, eben so wie der nachfolgende Abschnitt aus der Elementar-Geometrie, praktisch dargestellt hier ihren Platz finden. Allein da man längst schon in diesem Theile der Mathematik das Bedürfniß einer größeren Deutlichkeit fühlte, so hat man bereits leichtere Wege zur Erreichung derselben eröffnet, und es wäre unnütz, hier abzuschreiben und zusammenzuziehen, was von Anderen, namentlich von Kästner, Klügel*), Lorenz, Mönnich und vorzüglich von Busse **) darin vorgearbeitet ist. Welchem Lehrer der Mathematik sollte das alles unbekannt sein!

Eins vergesse man indeß nicht, die Knaben nemlich zu fortgesetzten Uebungen in den Regeln der Arithmetik zu veranlassen. Will und kann man nicht von den Schulstunden zu viele Zeit dazu verwenden, so gebe man ihnen Aufgaben für ihren Privatfleiß mit. Man findet

*) In den „Anfangsgründen der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie."

**) In dem „ersten Unterricht in der algebraischen Auflösung u. s. w."; in den Vorreden zu diesem Werke und zu dem allgemein geschätzten Rechenbuche; auch in der Schrift „über Plus und Minus" u. s. w.

det ja dergleichen in allen Lehrbüchern, und, kann leicht ähnliche nach diesen Mustern entwerfen*). Uebung aber macht auch hier die Sache leichter und — interessanter.

Es ist noch ein Mittel übrig, welches den Vortrag unterstützen muß, um die Anfänger mit dieser schwierigen Wissenschaft noch vertrauter zu machen; ein Mittel, ohne welches auch die deutlichste Darstellung für viele nicht hinreichend wäre, nemlich die Wiederholung. Auch sie bedarf, wenn sie zweckmäßig sein soll, einer besonderen Einrichtung; worüber einige Worte vielleicht nicht verloren sind.

*) Was die Algebra betrifft, so findet man dazu besonders in dem „Exempelbuche für Anfänger und Liebhaber der Algebra von Uflacker (2te Aufl. Braunschw. 1799)" eine zweckmäßige Sammlung von Aufgaben.

III.
Von der Wiederholung dieses Unterrichts.

Die nähere Untersuchung darüber, ob das Vorgetragene von den Schülern verstanden, behalten und benutzt sei, macht überhaupt einen wesentlichen Unterschied zwischen dem akademischen und dem Schul-Unterrichte aus. Der Lehrer muß sich dadurch überzeugen, was er geleistet, und was der Privatfleiß der Schüler gethan habe; er muß dadurch die Lücken und Mängel in ihren Einsichten kennen lernen, um dieselben ergänzen, und ähnlichen Mängeln für die Zukunft vorbeugen zu können. Beim Sprachunterrichte findet sich das von selbst; die Uebersetzungen aus Einer Sprache in in die Andere so wie in die freien Stylübungen geben dem Schüler Anlaß genug, die mitgetheilten Regeln anzuwenden, und dem Lehrer, darnach zu fragen. Nicht so ist es beim Unterrichte in den Wissenschaften, wo man daher mehr auf eigentliche Wiederholungen zu denken hat. Allein sehr häufig geht man darüber, besonders in den obern Classen, viel zu leicht hinweg, und glaubt oft in den letztern dergleichen gar nicht mehr nöthig zu haben. Man meint vielleicht die älteren Schüler schon mit mehrerem Zutrauen ihrer eignen Lernbegierde überlassen zu können, und hält nebenher das gewöhnliche Schul-Examen schon für eine hinlängliche Erinnerung an das Vorgetragene. Erfahrne Schulmänner werden aber gewiß die Unhaltbarkeit dieser beiden Gründe zugestehen. Denn theils sind wol unsere Gymnasiasten, selbst die älteren nicht alle so geneigt, den Unterricht mit Sorgfalt aufzunehmen, und für sich gehörig zu durchdenken, auch mit sich selbst die nöthigen Uebungen deshalb anzustellen, daß man sie ihrer eigenen Leitung allein überlassen und ihnen den Unterricht gleichsam als eine Geld-

summe

summe anvertrauen könnte, von der sie nicht nöthig hätten, dem Geber Rechnung abzulegen. Theils aber sind die gewöhnlichen Schulprüfungen gar nicht dazu geeignet, die Stelle vollständiger Wiederholungen zu ersetzen, weil sie an vielen Orten zu selten geschehen (auch, beiläufig gesagt, hin und wieder noch eine so veraltete und nachtheilige Form haben, daß man sie in dieser lieber ganz abschaffen mögte), weil sie ferner nicht den ganzen, in einem vollendeten Zeitabschnitte ertheilten Unterricht umfassen, und daher vielleicht vieles, was der Schüler gerade nicht verstanden oder nicht behalten hat, zufälliger Weise nicht berühren; weil sie endlich ihrer Einrichtung und ihrem Zwecke gemäß nicht dazu benutzt werden können, die bemerkten Lücken und Mängel in den Kenntnissen der Schüler vollständig zu ergänzen, und das, was vom Unterrichte auf irgend eine Art verloren gegangen ist, noch einmal zu geben.

Untersuchte man es näher, warum dessen ungeachtet die nöthigen Wiederholungen beim

Vor-

Vortrage der Wissenschaften oft vernachlässigt werden, so würde man den Grund davon gewiß nicht selten in der Bequemlichkeit mancher Lehrer oder in ihrer eigenen zu mangelhaften Kenntniß von der Sache finden. Denn leichter ist es freilich, über ein ausgearbeitetes Heft zu dociren, dasselbe wol gar nur abzulesen, als das Abgelesene selbst sich so zu eigen zu machen, daß man freie und ungezwungene Wiederholungen darüber anstellen kann. So ist das beim Unterrichte in der Weltgeschichte, Geographie, Naturgeschichte, Naturlehre u. s. w. gewiß schon von vielen empfunden. Hinc illae lacrimae! Allein dem sei, wie ihm wolle, die Wirkung des Unterrichts wird dadurch verringert; die schönsten und fruchtbarsten Vorträge werden oft ohne Nutzen angehört, weil doch viele in den Schuljahren leider nur durch Furcht und Ehrbegierde, und nicht durch das eigene Pflichtgefühl zum Studiren zu bringen sind; und es erklärt sich daraus die Erscheinung, daß von so manchen, berühmten Schulanstalten, wo längst schon ein verbesserter Lectionsplan und zweckmäßigere Lehrarten eingeführt wurden, immer noch mancher Jüngling mit einer sehr einseitigen Bildung abgeht, welcher von mehreren dort vorgetragenen Gegenständen so viel als nichts weiß. Die Lehrer sollten es sich also durchaus zur Pflicht machen, den Schülern, selbst denen von reiferem Alter durch von Zeit zu Zeit anzustellende Wiederholungen einen neuen Antrieb zur Aufmerksamkeit zu geben, und sich selbst dadurch einen neuen Weg, auf dem sie noch mehr Nutzen stiften würden, zu eröffnen. Der akademische Vortrag, welcher unbekümmert um die Fortschritte der Schüler seinen Gang ebenmäßig fortgehet, paßt wol für den Hörsaal auf der Universität, in welchem der Unfleißige und Verdrossene gar nicht erscheint; nicht aber für das Schulkatheder, vor welchem sich die Zuhörer zwangsweise einfinden müssen, und eben deshalb oft nur körperlich gegenwärtig sind. Sollte diese Anmerkung vielleicht manches Gymnasium treffen, so mag sie hier, als ein Wort zu seiner Zeit gesagt, eine günstige Aufnahme finden.

Vorzüglich nothwendig ist nun jene Wiederholung des Unterrichts bei der Mathematik, und hier muß sie besonders in den unteren Classen einen Hauptgegenstand ausmachen. Soll sie aber ihren Zweck erreichen, so muß sie eine solche Einrichtung erhalten, daß dadurch die Schüler alle zugleich in die größte Thätigkeit gesetzt werden, ohne doch einander zu stören. Vielleicht findet man folgende Vorschläge, deren Anwendung bereits geglückt ist, der Prüfung würdig. Die Wiederholung geschehe

1) mündlich. So leicht man auch einen jeden Lehrsatz durch deutlich geführte Beweise der Fassungskraft darstellen kann, so müßten es doch ganz besondere Köpfe sein, die, wenn sie noch nicht durch längere Uebung eine gewisse Fertigkeit darin bekommen haben, einen Beweis nach der ersten Auseinandersetzung sogleich einsähen. Es muß für die Anfänger jeder Satz wenigstens zweimal durchgegangen werden. Man lasse daher, sobald der Beweis zum erstenmal vollendet ist, einen der Zöglinge an die Tafel treten, und ihn denselben wiederholen. Die übrigen müssen dabei

mit Aufmerksamkeit folgen, um sogleich, wenn jener stockt, auf das Geheiß des Lehrers, der dann bald diesen bald jenen aufruft, einzuhelfen und fortzufahren. Jeder falsche Schluß, der dabei zum Vorschein kommt, muß durch Schüler verbessert, jeder unrichtige Gang, den der Eine wählt, durch einen Andern als unrichtig aufgedeckt werden. Kurz der Lehrer hat dabei nichts zu thun, als nur den Faden des Ganzen vestzuhalten, und zugleich darauf zu sehn, daß die Schüler sich an mathematische Genauigkeit im Ausdrucke gewöhnen. Auch wähle er zu diesen Wiederholungen nicht bloß die fähigsten unter seinen Schülern aus, sondern rufe nach und nach einen jeden hervor, den Einen bei diesem, den Andern bei jenem Satze; aber ja nicht nach einer bestimmten Ordnung, damit niemand vorherwisse, wann ihn die Reihe treffen werde, und also ein jeder stets darauf gefaßt sei. Uebrigens kann es bei längeren und schwierigeren Beweisen zuweilen nöthig sein, sie zweimal zu wiederholen, damit sie durchaus verstanden und behalten werden. Eine solche Wiederholung wird, abgesehen von jenem Hauptzwecke, auch zugleich dazu dienen, die Schüler selbst im deutlichen, zusammenhängenden und furchtlosen Vortrage ihrer Ideen zu üben.

Eben so nützlich aber und für das Ganze der Wissenschaft noch nothwendiger ist es zuweilen, eigene Repetitionsstunden zu halten, wenn es auch nur aller 6 Wochen, oder nach jedem vollendeten Hauptabschnitte einmal geschieht. Dabei nehme man aber nicht bloß einzelne abgerissene Lehrsätze und Aufgaben aus den vollendeten Abschnitten, sondern richte sein Augenmerk besonders auf den Zusammenhang der Sätze, so daß die Schüler die enge Verkettung alles dessen, was ihnen bisher vorgetragen ist, übersehen lernen. Man wähle zu diesem Zwecke irgend einen der durchgenommenen Lehrsätze, lasse den Beweis desselben wieder aufsuchen, darnach die Hülfssätze und Aufgaben, welche dazu gehören, angeben und beweisen, lasse sodann alles, worauf sich diese wieder gründen, beibringen, und setze dies so lange fort, bis man auf die ersten Grundsätze, Postulate und Definitionen zurückkommt.

Einige Beispiele werden dies Verfahren ins Licht stellen. Gesetzt, man hätte den Satz: „Parallelogramme auf Einer Grundlinie und in gleicher Höhe sind einander gleich", (nach Euklid's Elementen, I, 35.) von neuem beweisen lassen, so frage man nun, welche Lehrsätze dabei als bewiesen angenommen werden. Es gehört dazu

1) der Satz, daß in jedem Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten einander gleich sind. Ist dieser bewiesen, so findet der Schüler leicht, daß dabei wieder folgende Hülfssätze angewandt werden müssen:
   a) Zwei Triangel sind congruent, sobald in beiden Eine Seite und die beiden daran liegenden Winkel einander gleich sind;
   b) Bei zwei, von einer dritten Linie geschnittenen Parallellinien sind die Wechselswinkel gleich.

   Auch diese werden dann erwiesen.

2) Der Satz, daß zwei Triangel Congruenz haben, so bald ihre Seiten einzeln alle einander gleich sind.

3) Die

3) Die Hauptgrundsätze: Sind zwei Dinge einem dritten gleich, so sind sie einander selbst gleich; Gleiches zu Gleichem addirt gibt Gleiches; und Gleiches von Gleichem subtrahirt läßt Gleiches übrig. —

Oder wenn man folgenden Satz zur Wiederholung auswählte: „Wird vom Berührungspuncte einer Tangente eine Sehne gezogen, so ist der Winkel, welchen die Sehne mit der Tangente einschließt, dem Winkel im entgegengesetzten Kreisschnitte gleich", so würde dieser (nach dem Beweise in Euklid's Elementen, III, 32.) wieder auf nachstehende Sätze und Aufgaben zurückführen.

1) Schon um der Hülfslinien willen muß hier

a) Die Aufgabe wiederholt werden: Einen Perpendikel in einem bestimmten Puncte einer gegebenen Linie zu errichten. Nun beruhet

α) die Auflösung dieses Problems auf der eines andern, nemlich, auf jeder geraden Linie einen gleichseitigen Triangel zu beschreiben; und

β) der Beweis, daß der Perpendikel wirklich errichtet sei, auf den Sätzen:

1) daß alle Radien eines Kreises oder gleicher Kreise gleiche Länge haben, und

2) daß zwei Triangel, worin alle drei Seiten gleich sind, auch lauter gleiche Winkel haben (Dabei kommt zugleich die Frage in Anschlag, was ein Perpendikel sei).

Alsdann muß

b) bewiesen werden: daß in dem, auf dem Berührungspuncte der Tangente errichteten Perpendikel der Mittelpunct des Kreises liege, daß also dieser Perpendikel mit dem Diameter zusammenfalle. Dies wird aber erst klar, wenn man gezeigt hat, daß eine vom MP. des Kr. auf den Ber. P. einer Tang. gezogene gerade Linie auf der Tang. senkrecht stehe. Hiervon kann man sich wiederum erst durch den Satz überzeuzeugen, daß in jedem Triangel einem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüberliege. Dieser Satz folgt aus dem, daß ein, durch Verlängerung einer Seite am Triangel entstandener äußerer Winkel größer sei als jeder der ihm entgegenstehenden inneren Triangelwinkel. Dies beruht endlich auf den beiden Theoremen,

α) daß zwei Triangel, in welchen zwei Paar Seiten und die dazwischen liegenden Winkel gleich sind, Congruenz haben, und

β) daß Verticalwinkel stets gleich sind, welches dann aus dem bekannten Lehrsatze von den Nebenwinkeln einleuchtet. (Hierbei kommt man bis auf die Definitionen von Neben- und Scheitel-Winkeln.)

2) Der **Beweis** jenes Lehrsatzes **selbst** gibt darauf zur Wiederholung folgender Sätze Veranlassung:

a) Jeder Peripheriewinkel, der mit seinen Schenkeln auf den Endpuncten des

Diameters steht, ist ein rechter Winkel. Hierbei wird angewandt:

α) daß die Winkel an der Grundlinie in einem gleichschenklichten Dreiecke gleich sind, und

β) daß der äußere Winkel an einem Triangel so groß ist, als die Summe der beiden ihm entgegenstehenden inneren (woraus zugleich der, hier ebenfalls zu berührende Satz folgt, daß alle Winkel in jedem Triangel zusammen zwei rechte ausmachen); und dies hängt wieder an der Gleichheit der Wechselswinkel und des äußern und inneren Winkels bei Parallellinien. Hierbei entsteht auch die Frage, wie man Eine Linie einer Anderen parallel ziehe.

b) Die Winkel in zwei entgegengesetzten Kreisabschnitten sind zusammen zwei rechten gleich. Um dies einzusehen, muß man sich daran erinnern, daß alle Winkel in Einem und demselben Abschnitte einander gleich sind; und hiervon

von überzeugt der Beweis dessen, daß der Centriwinkel doppelt so groß ist als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf Einem Bogen steht; welches wiederum auf schon bemerkten Sätzen beruhet.

(Bei diesem Schema so wie bei dem vorigen sind noch manche Grundsätze, Nebensätze und Definitionen, auf welche der Verfolg jener Theoreme und Probleme führt, der Abkürzung halber übergangen.)

Eben so könnte man auch mit einer Aufgabe anfangen, z. B.: Jeden Triangel in ein Parallelogramm mit gegebenem Winkel zu verwandeln; oder: Jeden Kreisbogen zu halbiren; und auch hiervon könnte man auf alles das zurückkommen, wovon Auflösung und Beweis abhangen. Noch interessanter wäre es vielleicht für die Geübteren, eine Aufgabe aus der praktischen Meßkunst auszuwählen, und die Auflösung derselben bis zu den ersten Elementarsätzen hinauf zu entwickeln; wozu sich z. B. das Problem: die Entfernung zweier Gegenstände, welche man beide von einem gegebenen

Stand-

Standpuncte aus nicht erreichen kann, zu messen — sehr gut schicken würde.

Dergleichen Repetitionsstunden haben gewiß nicht geringen Nutzen, und man halte sie ja nicht für Zeitverlust. Was würde es schaden, wenn der Knabe darüber auch in einem halben Jahre einige Sätze weniger hörte, so bald er dafür das, was er hört, desto besser einsehen und vesthalten lernte *). Hat er die Elemente

*) Anm. Es ist überhaupt sonderbar, dem Lehrer der Mathematik in einem Lectionsplane eben so bestimmt wie den Lehrern anderer Wissenschaften und Sprachen vorzuschreiben, wie viel Abschnitte in jedem Semester vollendet werden sollen. Er hat es, wenn er gründlich unterrichten will, durchaus nicht in seiner Gewalt, stets gleichförmig fortzuschreiten, indem die Empfänglichkeit für diese Wissenschaft bei den Zöglingen gar zu verschieden ist. Genug also, wenn für jede mathematische Classe vestgesetzt wird, was darin vorkommen, was der Schüler aus derselben in die folgende mit hinübernehmen müsse; die Zeit, in welcher er so weit gelange, überlasse man seinen Fähigkeiten und dem Lehrer, der sich mit weiser Ueberlegung nach seiner jedesmaligen Zuhörerschaft richten sollte.

Elemente richtig gefaßt, so wird es ihm ein leichtes sein, in der Folge für sich selbst fortzustudiren, und manches Capitel, welches ihm vielleicht vorzüglich interessant war, weitläuftiger durchzugehen.

Da indeß der Lehrer bei der mündlichen Wiederholung noch nicht erfahren kann, ob jeder einzelne unter seinen Schülern einen jeden der vorgetragenen Sätze begriffen habe, so sollte billig die Wiederholung

2) auch schriftlich angestellt werden. Schon mehrere Pädagogen haben den Rath gegeben, Kinder, so bald sie schreiben können, zum Niederschreiben dessen, was ihnen gelehrt ist, anzuhalten; denn hierbei müssen sie sich des Gelernten noch weit deutlicher erinnern, und sich dasselbe noch weit ausführlicher ausdenken, als wenn sie es bloß mündlich wiedersagen sollen. Dies gilt von Sprachregeln, von erzählten Geschichten, von mitgetheilten moralischen und religiösen Wahrheiten, von anderen wissenschaftlichen Gegenständen, in so fern sie für das Alter der Knaben eingerichtet, und ihnen verständlich gemacht sind; und eben so läßt es sich be-

son-

sonders auch auf die Mathematik anwenden. Alle Definitionen, Auflösungen und Beweise, die in den Lehrstunden vorgetrageu sind, sollte man von den Schülern zu Hause vollständig ausarbeiten lassen. Der Lehrer müßte ihnen dazu etwa am Ende jeder Stunde die einzelnen Wörter und Redensarten, welche er erklärt hat, z. B. Punct, Linie, Triangel, Polygon; eine Linie in einen Zirkel eintragen u. s. w.; und eben so die durchgenommenen Aufgaben und Lehrsätze dictiren, zur Ausarbeitung derselben die nöthige Anweisung ertheilen, und den Anfängern bei schwierigeren und zusammensetzteren Beweisen selbst die Disposition mitgeben. Die Schüler müssen dann angehalten werden, ihre Aufsätze so einzurichten, als ob sie selbst dadurch Andere belehren wollten, also mit möglichster Deutlichkeit, mit Hinweisung auf die angewandten Hülfssätze, mit mathematischer Bestimmtheit im Ausdrucke, mit mathematischen Wendungen und Schlußformeln. Man halte diese letzten Foderungen nicht für Pedanterie. Soll eine Uebung der Art alle ihre Zwecke erreichen, nemlich Einsicht in die

Mathematik selbst zu befördern, und diese Wissenschaft zugleich als eine praktische Logik zu behandeln, so sind jene Bedingungen unerläßlich.

Uebrigens könnte man einwenden, daß das Dictiren zu viele Zeit wegnähme. Allein das ist nicht zu besorgen, denn die wenigen Sätze, die in Einer Stunde vorkommen können — bei Definitionen gar nur einzelne Wörter — sind bald niedergeschrieben, und erfodern wol kaum fünf Minuten. Indeß ließe sich auch diesem Uebel durch ein zum Grunde zu legendes Buch zuvorkommen. Nur wäre dazu, wie schon oben bemerkt wurde, ein eigentliches Lehrbuch wol nicht zu empfehlen. Denn in einem solchen sind Definitionen, Beweise und Auflösungen mit enthalten, auf welche sich der Schüler in Hinsicht seiner häuslichen Arbeit leicht verlassen, und seine eigene Kraft dann um so weniger anstrengen mögte. Sollte also ein für die hier beschriebene Methode nützliches Buch eingeführt werden, so müßte es ein bloßer Leitfaden sein, welcher durchaus nichts enthielte als Wörter ohne Definition, Aufgaben ohne Auflösung, Lehrsätze ohne Beweis und

die

die Grundsätze der gesammten Mathematik. Ein Buch, welches neben jener, wenigstens für die unteren Classen größeren Zweckmäßigkeit zugleich das Gute hätte, das es wohlfeil wäre*).

Jene Aufsätze der Schüler würden aber wenig helfen, und alles Interesse für sie verlieren, wenn der Lehrer nicht seinen Fleiß mit dem Fleiße seiner Zöglinge vereinigte, und ihre Arbeiten sorgfältig prüfte und verbesserte. Freilich eine neue Arbeit für Männer, die bei treuer Pflichterfüllung gewöhnlich schon übergenug zu thun haben. Indeß ist dies nicht allgemein, und jene Bemühung auch nicht so anstrengend und zeitraubend, als es auf den ersten Anblick zu sein scheint. Ein Dutzend solcher Aufsätze von einerlei Inhalt, die ohnedies nicht sehr lang

*) Schon im Jahre 1788 erschien in Magdeburg bei Scheidhauer ein „Leitfaden zum ersten mathematischen Unterricht"; welcher aber, ungeachtet in der Vorrede bemerkenswerthe Regeln für die Methode vorkommen, dennoch als eigentlicher Leitfaden viel zu vieles enthält, und dem Bedürfnisse eines eben beschriebenen Büchleins nicht abhilft.

lang sein können, ist bald durchgelesen und mit den nöthigen Anmerkungen versehen. Wäre aber die Zahl der Schüler zu groß, so würden sich unter denselben auch wol bald einige vorzüglich hervorthun, und ihre Aufsätze so fehlerfrei liefern, daß der Lehrer ihnen einen Theil der übrigen zur Recension übergeben könnte, welche er selbst nachher nur schnell durchsehen dürfte. Auch müßte sich die Verbesserung überhaupt nur mit denen Aufsätzen beschäftigen, welche derselben fähig wären; ganz mißlungene, vielleicht gar aus Flüchtigkeit und Nachlässigkeit verfehlte Beweise müßten bloß durchgestrichen, und den Zöglingen zur gänzlichen Umarbeitung zurückgegeben werden. Eben so würde der Lehrer bald diejenigen herausfinden können, die eines beständigen Antreibens bedürften, und für welche es also nützlicher wäre, auch einzelne Fehler nur anzudeuten, und sie selbst zur Verbesserung derselben anzuhalten. Auf diese Art könnte er sich seine Arbeit erleichtern, welche es übrigens in Absicht ihrer Nützlichkeit gewiß verdient, der Correctur aller eingeführten Stylübungen an die Seite gesetzt zu werden.

Aus solchen Ausarbeitungen ergibt es sich dann, ob jeder Einzelne das Vorgetragene gefaßt habe, so bald nemlich der Lehrer darüber wacht, daß niemand sich dabei fremder Hülfe bediene. Freilich weiß mancher Zögling, der den Lehrer auf diese Weise hintergeht, es schlau genug zu verbergen; allein in den mathematischen Aufsätzen findet sich doch vieles, wodurch man jenen Betrug in den meisten Fällen leicht entdecken kann. Man darf nur auf die Aehnlichkeit gewisser Wendungen und Ausdrücke, und besonders auf die, mehreren Aufsätzen gemeinschaftlichen Fehler achten, so wird man dadurch oft zu näherer Untersuchung veranlaßt. Zeigt es sich aber, daß dieser oder jener Beweis selbst von den Fleißigen und Fähigen nicht richtig aufgesetzt ist, so erhellt daraus offenbar, daß er nicht deutlich genug vorgetragen sei, und der Lehrer wird dann wissen, was er zu thun habe.

Ja es könnte endlich nicht schaden, wenn zuweilen statt der vorhin beschriebenen mündlichen Repetitionsstunde eine schriftliche gehalten würde. Hier wüßte der Lehrer irgend einen Satz aufgeben, welcher unter seiner Auf-

Aufsicht in der Classe von jedem einzelnen bearbeitet, und, so wie es sonst mündlich geschähe, bis zu seinen ersten Hülfssätzen zurückgeführt würde; doch ohne große Ausführlichkeit, damit alles in Einer Stunde vollendet werden könnte. Zu dieser Art der Wiederholung gehört indeß schon viele Uebung; es ist also rathsam, nur leichte Sätze dazu auszuwählen, und es den Schülern vorher anzuzeigen, damit sie sich allenfalls aus ihren Heften dazu vorbereiten können. Für die jüngsten Anfänger ist dies überhaupt nicht anwendbar; hat der Lehrer aber eine ziemliche Strecke Weges mit ihnen zurückgelegt, so kann er aus solchen Prüfungs-Arbeiten, wobei kein Betrug möglich ist, am sichersten abnehmen, ob und wie man ihm gefolgt sei.

Alle diese Vorschläge sind offenbar nur für die Elementarclassen berechnet; sie gehn hin und wieder in ein Detail, welches nur bei dem Anfänger mit Nutzen beobachtet werden kann, und dem Geübteren langweilig sein würde. Da es aber noch manche Provincialschule gibt, wo es bei der geringen Anzahl von Lehrern und Classen fast nicht möglich ist, der Mathematik mehr als Eine Classe zu ertheilen, wo also mancher Schüler erst in seinen letzten Schuljahren ein Lehrling dieser Wissenschaft wird: So mögte wol auf solchen Anstalten auch der an Jahren ältere Anfänger, sei er in andern Fächern so weit, als er wolle, in Absicht der Mathematik als Knabe zu behandeln, und also auch für eine solche Classe das meiste von den mitgetheilten Vorschlägen anwendbar sein. Eben das gilt gewiß nicht selten auch von den Unterrichtsanstalten beim Militair, z. B. von den im Preußischen seit kurzem eingerichteten Regiments-Junkerschulen, in welche mancher Jüngling aufgenommen wird, der in Absicht seiner Kenntnisse und seiner ganzen Verstandesbildung noch ein Knabe ist. Vielleicht findet sich auch in der beschriebenen Methode hin und wieder etwas, für höhere Classen brauchbares, welches dem erfahrenen Lehrer nicht entgehen wird.

Anwendung
der, Seite 50 — 73 beschriebenen Methode
auf die
erste Hälfte des ersten Buchs
der
Euklidischen Elemente.
(Nach der Uebersetzung von Lorenz. Halle 1798.)

Erklärungen.

(Siehe S. 50—52.)

1. Ein Punct ist, was keine Theile hat. Man gebe auch diese Definition, welche manchem faßlicher sein wird. Was keine Ausdehnung, weder in die Länge, noch in die Breite, noch in die Höhe hat. — Der Punct ist die erste rein-geometrische Idee, die so wie alle folgenden nur unter einem Bilde dargestellt werden kann. Alle Puncte, die man mit Kreide oder einem andern Material zeichnet, sind nicht wahre Puncte; denn sie sind lang, breit, und dick oder erhaben. Auch von den feinsten Darstellungen gilt dies; sonst würden sie nicht gesehen werden können, indem auf unsere Sinne nur das Ausgedehnte einen Eindruck machen kann. (Man mache

Punctbilder an der Tafel, auf Poppier u. s. w.). Der wahre Punct kann nur gedacht werden.

2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.

Was Ausdehnung in die Länge hat, nicht aber in die Breite und Höhe. Die wahre Linie kann ebenfalls nur eine Idee sein, von welcher die gezeichnete ein Bild ist; Denn diese ist breit und dick oder erhaben. (Man zeichne dergleichen Linienbilder).

3. Das Aeußerste einer Linie sind Puncte.

Eine bloße Benennung, die nichts neues zu den Eigenschaften eines Punctes hinzusetzt, und wobei man sich hüten muß, den Punct nicht als einen abgesonderten, für sich bestehenden Theil der Linie anzusehen; denn ein solcher wäre immer eine Linie. Jene Benennung wird nur in gewissen Redensarten gebraucht, z. B. „Die Linie ab (Fig. 1) hat im Puncte a ihren Anfang und im Puncte b ihr Ende"; oder: „Man ziehe vom Endpuncte b der Linie ab eine andere".

5. *) **Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.**

Auch, was nur Breite und Höhe hat; also eine jede Oberfläche, z. B. der Tafel, der Bank, des Buches, das Aeußere einer Wand, einer Säule u. s. w. Die Fläche kann man nicht von dem Dinge, woran man sie sieht, absondern, weil sie alsdann, auch noch so dünn abgeschält, eine gewisse Dicke haben, folglich nicht mehr Fläche sein würde. Will man also die wahre Fläche für sich allein betrachten, so ist auch sie nur eine Idee.

6. **Das Aeußerste einer Fläche sind Linien.**

Wiederum eine bloße Benennung. Man sagt z. B. „die Fläche endet sich in Linien".

Anm. Hierher gehört auch der Begriff eines geometrischen Körpers. Er ist das, was Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe (Dicke) hat. Er unterscheidet

 sich

*) Im Eukl. folgt hier erst die gerade Linie; davon nachher.

sich vom physischen Körper dadurch, daß man bei diesem auf seine Materie, z. B. Holz, Metall u. s. w. Rücksicht nimmt, bei jenem aber bloß auf den Raum, den er einschließt. Man denke sich einen Kasten oder eine hohle Kugel, woraus selbst die Luft verbannt wäre, und man hätte an dem inneren Raume, der lang, breit und hoch ist, einen geometrischen Körper; oder mit andern Worten: die Geometrie betrachtet an einem Körper bloß jene dreifache Ausdehnung. Darum muß sie sich bei jedem Körper alle physikalischen Eigenschaften desselben wegdenken; und es ist also auch der geometrische Körper nichts als eine Idee. So wie man nun vorher das Aeußerste der Fläche Linien nannte, so kann man auch das Aeußerste des Körpers Flächen nennen.

Diese vier Größen sind die einfachen Größen der Geometrie, aus deren verschiedenartiger Verbindung alle übrigen, welche diese Wissenschaft betrachtet,

tet, entstehen. Alles daher, was man in der Folge an den zusammengesetzten Größen untersucht, muß theilweise untersucht werden; eine Vorstellung, welche die Uebersicht der Beweise sehr erleichtert. Der geometrische Körper ist übrigens zwar diejenige Größe, an welcher die übrigen einfachen Größen: Puncte, Linien und Flächen sich zeigen; doch so, daß sie nicht für Theile desselben gehalten werden können, weil er sonst aus denselben zusammengesetzt wäre. Es ist also nichts gewonnen, wenn man, wie einige vorschlagen, mit der Definition des Körpers den Anfang macht.

4. Eine gerade Linie ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen Puncten auf einerlei Art liegt.

Am deutlichsten wird diese Erklärung, wenn man die krumme Linie dagegen hält. Die gerade Linie ab (Fig. 1) läßt sich zwischen den beiden Puncten a und b nicht an-

anders denken, als in der Lage, welche sie wirklich hat; sie ist der kürzeste Weg zwischen a und b. Hingegen kann man die Linie ab (Fig. 2) zwischen a und b auf mehrerlei Art legen, z. B. wie Fig. 3; auch über der Tafelfläche erhaben, welches sich mit einem Drathe andeuten ließe. Diese Linie ist also nicht gerade, sondern krumm. Würde ein Punkt diesen Weg von a nach b machen, so nähme er einen Umweg; er müßte seine Richtung ohne Unterlaß verändern, da er hingegen, wenn er nach Fig. 1 von a nach b ginge, stets in Einer Richtung bliebe. Krummer Linien lassen sich nun zwischen a und b unzählige denken; doch hüte man sich, auch solche dahinzurechnen, wie z. B. Fig. 4 zeigt. Diese ist zwar ebenfalls ein Umweg zwischen a und b, welchen man sich in sehr verschiedenen Lagen zwischen beiden Puncten denken kann; allein es gibt doch Theile in dieser Linie, welche zwischen gewissen Puncten derselben die unveränderliche Lage der geraden Linie haben, nemlich cd

und

und e f. Daher ist eine solche Linie eine gemischte oder zusammengesetzte, welche aus geraden und krummen Theilen besteht.

Anm. Aus der Erklärung der geraden Linie folgt: 1) daß man durch jede zwei Puncte nur Eine solche legen kann, daß also nur zwei Puncte nöthig sind, um die Richtung einer geraden Linie zu bestimmen; 2) daß zwei gerade Linien, welche durch einander hindurchgehen, oder, wie man es nennt, einander schneiden, dies nur einmal thun können. Denn sollten a b und c d (Fig. 5), welche einander im Puncte e schneiden, dies noch einmal thun, so müßte nothwendig Eine von beiden ihre gerade Richtung verlassen, und wieder zurückkehren; wie die Linie c d Fig. 6, wo aber in d f eine dritte gerade Linie entstände; oder wie die Linie c d f Fig. 7, welche aber alsdann zu einer gemischten würde.

7. Eine ebene Fläche oder Ebene ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt.

Deutlicher: Eine solche Fläche, auf welcher man zwischen jeden zwei Puncten derselben eine gerade Linie ziehen kann, die ganz in der Fläche liegt. So wird dies z. B. auf einem Planspiegel, auf einer polirten Tischplatte u. s. w. der Fall sein. Man mache diese Erklärung durch mehrere Versuche augenscheinlich, halte sie dann mit krummen Flächen verschiedener Art zusammen, und lasse auf diesen durch die Schüler selbst Versuche anstellen. Sie werden sich dann überzeugen, daß man erstlich krumme Flächen habe, auf denen keine zwei Puncte sich finden, wovon jenes gilt, z. B. die Oberfläche der Kugel; daß es ferner auf manchen krummen Flächen zwar einige Puncte gebe, deren gerade Verbindungslinie ganz in die Fläche fällt, daß das aber auf solchen Flä-

Flächen doch nicht bei jeden zwei Puncten möglich sei. So findet z. B. auf der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders (Fig. 8) oder eines Kegels (Fig. 9) zwischen den Puncten a und b eine gerade Linie Statt, welche ganz in der Fläche liegt; aber die Verbindungslinie zwischen c und d wird, wenn sie in der Oberfläche liegen soll, eine krumme sein, und wenn sie gerade sein soll, durch den Körper hindurchgehen. (An der bloßen Figur läßt sich dies aber dem Anfänger nicht deutlich machen. Man nehme daher Cylinder, Kegel u. s. w. von Holz oder Pappe; die gerade Linie cd sei ein durchgestochener Stift.) Findet man übrigens auf solchen Flächen, die man im Ganzen nicht Ebenen nennen kann, doch gewisse Theile, worauf jene Definition der Ebene paßt, so sind dergleichen Flächen gemischte (so wie vorhin von gemischten Linien die Rede war). Als Beispiel dazu dient die innere oder äußere Oberfläche eines gewöhnlichen Tellers u. s. w.

Anm.

Anm. Daß man den Anfängern sage, es sei in der Planimetrie bloß von solchen Linien die Rede, welche in Einer Ebene liegen, ist unnütz; denn auf das Gegentheil fallen sie nicht, und erhalten durch jene Andeutung, welche ihnen gewöhnlich unverständlich bleibt, keinen helleren Blick.

8. Ein Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander. (Die übrigen Bestimmungen beim Euklides sind, laut voriger Anmerkung, hier noch ohne Nutzen.)

Es entsteht also durch jede zwei Linien, welche in ihren Endpuncten einander treffen (Fig. 10) ein Winkel, und jede zwei einander schneidende Linien (Fig. 5) geben vier Winkel. Hier erkläre man zugleich die Ausdrücke Scheitel, b, und Schenkel, ba und bc: lehre den Winkel nach drei Buchstaben benennen, so daß der Buchstabe am Scheitel in die Mitte komme (abc); und mache deutlich, daß die Größe des Winkels nach der größeren oder geringeren Oeffnung der Schen-

kel,

kel, und nicht, wie es Anfänger gewöhnlich thun, nach der Länge derselben geschätzt werde. Man zeichne daher zur Beurtheilung Winkel, wie abc und def, Fig. 11.

9. Sind die Linien, welche den Winkel einschließen, gerade, so heißt derselbe ein geradlinichter Winkel.

Leicht zu verstehen, wenn man krummlinichte Winkel, wie Fig. 12, oder solche, die von einer krummen und einer geraden Linie eingeschlossen werden, wie Fig. 13, dagegen hält. Doch gehören die beiden letzten nicht in die Planimetrie.

Anm. Wichtiger ist hier noch die Definition der Nebenwinkel und Scheitelwinkel. Unter Nebenwinkel versteht man zwei, drei oder mehrere Winkel mit einem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte, von denen immer zwei einen Schenkel gemein haben, und deren zwei äußerste Schenkel in Einer geraden Linie liegen, wie abc, cbd, dbe, Fig. 14. Scheitelwinkel haben zwar ebenfalls den Scheitel, aber keinen der Schenkel gemein, sondern von diesen liegen jede zwei entgegengesetzte in Einer geraden Linie, wie bei aec und und deb, oder aed und ceb, Fig. 5. Oder es sind — anders definirt — zwei Winkel, in einer solchen Lage, als wären die Schenkel des Einen durch die über den Scheitel hinaus geschehene Verlängerung der Schenkel des Andern entstanden. Nebenwinkel sowol als Scheitelwinkel entstehen also, wenn zwei gerade Linien einander schneiden.

10. Steht eine gerade Linie auf einer anderen so, daß sie gleiche Nebenwinkel macht, so heißt sie perpendicular auf der anderen; und jeder der beiden gleichen Winkel heißt ein rechter Winkel.

Hierbei ist zu bemerken, daß der mathematische Begriff des Perpendicularen oder Senkrechten weit mehr umfasse, als der in der Physik vorkommende Begriff

des

des Verticalen. Die Verticallinie in der Physik ist die Richtung der Schwere, und diejenige, mit welcher sie rechte Winkel bildet, heißt die Horizontallinie. Die Perpendicularlinie in der Mathematik hingegen bestimmt sich nicht durch eine einzige, unabänderliche Richtung, sondern nur durch eine gewisse Lage gegen irgend eine andere Linie. Daher macht nicht bloß a b mit c d, Fig. 15, rechte Winkel, sondern auch a b mit c d Fig. 16 u. s. w.

11. 12. Stumpfer Winkel; spitzer Winkel.

Leicht zu verstehen. Jeder Winkel, der kein rechter ist, heißt allgemein ein schiefer. (Man vergesse nur nie die Zeichnung.)

13. 14. Gränze, das Aeußerste eines Dinges. Figur, was von Gränzen eingeschlossen ist.

Im engeren Sinne gebraucht man das

Wort Figur nur von begränzten Flächen", und in der Planimetrie nur von begränzten Ebenen (7). Der Ausdruck Fläche (5) zeigt eine unbegränzte Ausdehnung in die Länge und Breite an; Figur aber eine begränzte. Die geraden Gränzlinien heißen Seiten.

15. Ein Kreis ist eine ebene Figur, von einer einzigen Linie, Umkreis (Umring, Peripherie) genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu derselben aus einem gewissen, innerhalb der Figur befindlichen Puncte gezogen werden, alle einander gleich sind.

Zur Erläuterung des hierher gehörigen Grundsatzes, „daß alle Radien Eines Kreises einander gleich sind", dient auch besonders die genetische Definition des Kreises: „Er entsteht, wenn eine gerade Linie ab (Fig. 17) sich um den einen vesten Endpunct a herumbewegt, bis sie wieder

wieder in die anfängliche Lage kommt. Die immer gleichbleibende a b ist der Radius, und der Punct b beschreibt die Peripherie.

Anm. Unterschied zwischen den Ausdrücken Peripherie und Perimeter; jenes ist die Begränzungslinie des Kreises; dieses bedeutet die Summe der Gränzlinien jeder anderen Figur.

16 — 19. Leicht zu fassende Erklärungen vom: Mittelpuncte, Durchmesser, Halbkreise und Abschnitte.

Anm. Hierher gehören auch die Definitionen von der Sehne, als einer geraden Linie c d (Fig. 17), die von Einem Puncte der Peripherie bis zu einem Anderen, aber nicht durch den Mittelpunct geht; vom Bogen, als einem jeden Stücke der Peripherie, wie b e; und vom Ausschnitte, als einem Theile des Kreises zwischen zwei Radien, und dem durch diese abgeschnittenen Bogen, wie b a e.

20—23. Geradlinichte Figuren; dreiseitige, vierseitige, vielseitige oder Polygone —

erklären sich durch den Namen.

24—29. Eintheilung der Dreiecke.

Man kann sie tabellarisch so ordnen:

I. nach den Seiten.	II. nach den Winkeln:
1. gleichseitige.	1. rechtwinklichte.
2. gleichschenklichte.	2. schiefwinklichte; entweder
3. ungleichseitige.	a. stumpfwinklichte, oder
	b. spitzwinklichte.

Zeichnet man in eben dieser Ordnung die dazu gehörigen Figuren an der Tafel, so werden die verschiedenen Merkmale sehr deutlich.

35. Parallel (Fig. 18) sind gerade Linien, die, so weit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen *).

Dies muß ebenfalls durch Zusammenstellung

*) Die Folge lehrt, warum es rathsam sei, diese Definition hier vorauszuschicken.

lung mit dem Gegentheile, d. i. mit Linien (Fig. 19), die an Einer Seite, bei a und c, convergent, und an der Anderen Seite, bei b und d, divergent sind, deutlich gemacht werden. Man zeige, daß diese in e zusammen laufen, sobald man sie verlängert.

30 — 34. Eintheilung der Vierecke.

Auch diese lassen sich nach folgender Tabelle mit eben so geordneten Figuren darstellen:

I. Parallelogramme.		II. Nichtparallelogramme.
1. Rechtwinklichte — Rectangel;	2. Schiefwinklichte.	1. Trapez;
a. mit gleichen Seiten-Quadrat;	a. mit gleichen S.-Rhombus;	2. Trapezoid.
b. mit ungleichen S.-Oblongum.	b. mit ungleichen S.-Rhomboid.	

Diese Ordnung erleichtert die Definitionen, wenn man bei No. I. überall den Begriff des Parallelogramms, als „eines Vierecks mit zwei Paar paralleler Seiten" zum Grunde legt. Alsdann ist nemlich das Quadrat ein rechtwinklichtes Parallelorallelogramm mit gleichen, das **Oblongum** ein rechtw. Parall. mit ungleichen Seiten u. s. w. Unter No. II. ist das **Trapez** ein Viereck mit Einem Paar paralleler Seiten, wie Fig. 20; das **Trapezoid** aber ein Viereck ohne allen Parallelismus der Seiten, wie Fig. 21.

Foderungen.

Die Möglichkeit, diese Aufgaben zu lösen, ist zu leicht einzusehen, als daß sie einer Erklärung bedürfte. Wer sie nicht begreift, für den mögte wol jeder mathematische Begriff unerreichbar sein.

Grundsätze.

(S. Seite 53.)

Num. 1 — 7. Diese lassen sich am besten durch Zahlen erläutern, z. B. n. 1: $4+4=8$; $6+2=8$; also $4+4=6+2$. — n. 2: $3+2=5$; wenn ich also zu $3+2$ noch 3, und eben so zu 5 auch 3 addire, so muß $3+2+3=5+3$ sein, beides nemlich $=8$. — n. 6: $2 \times 3=6$; also auch

auch $2 \times (2+1) = 6$, weil nemlich $3 = 2+1$ war.

8. Was einander deckt, ist einander gleich.

Dies gilt nur von Linien, Winkeln (wobei auf die Bemerkung über Fig. 11 (8. Erkl.) Rücksicht genommen werden muß), von Ebenen und Figuren im engeren Sinne (11. Erkl.). Man zeige es durch wirkliches Uebereinanderlegen dünner Platten, z. B. gleicher und ungleicher Triangel von Holz u. s. w.; wobei aber das körperliche Wesen solcher Figurenbilder sorgfältig beseitiget werden muß.

Anm. Man bemerke, daß sich dieser Grundsatz nicht immer umkehren lasse, weil es Größen gebe, welche gleich sind, ohne einander zu decken. Von geraden Linien und Winkeln gilt die Umkehrung immer; sonst aber kann nur, was gleich und ähnlich ist, einander decken — ein Satz, der in der Folge erst deutlich werden kann.

N. 9. bedarf keiner Erläuterung.

N. 10. liegt in der Definition des rechten Winkels (10. Erkl.).

N. 11. Die Erläuterung dieses Grundsatzes mögte für Anfänger wol nicht wenig Schwierigkeiten haben. Denn entweder verstehen sie nichts davon, oder wenn sie ihn einigermaßen begreifen, so werden sie sich wundern, daß sie so einen Satz ohne Beweis annehmen sollen. Die Zweifel gegen seine Richtigkeit werden ihnen bei jeder nachfolgenden Anwendung desselben in den Weg treten, und ihnen die streng beweisende Wissenschaft von einer schwachen Seite zeigen. Man streiche daher diesen Satz als Grundsatz aus, und schiebe ihn hinter Lib. I, 29 als Lehrsatz ein, wo er sich aus dem bis dahin vorgetragenen bündig erweisen läßt *).

*) Anm. Wird denn das Problem nie gelöst werden, diesen Satz ohne Hülfssätze zu beweisen? Oder hat man alle Hoffnung dazu aufgegeben? Des Hrn. Prof. Klügel's Anfangsgründe, in welchen ein, freilich nicht befriedigender Beweis davon versucht ist, zeigen

No. 12. Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Ist durch Winkel und Parallellinien leicht zu erläutern. Zu einer geradlinichten Figur gehören wenigstens drei Gränzlinien oder Seiten.

Aufgaben und Lehrsätze.

(S. Seite 55—73.)

§. 1. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie einen gleichseitigen Triangel zu errichten.

Diese Aufgabe zerfällt in zwei Theile: die Erfüllung des Verlangten, und den Beweis, daß es damit seine Richtigkeit habe. Ehe man aber die Auflösung unternimmt, erinnere man sich

wenigstens, wie sehr die systematische Ordnung der Elementarsätze dadurch gewinnen würde, wenn man mit der Lehre von den Linien und Winkeln anfangen könnte.

sich an die Definition des gleichseitigen Triangels (24. Erkl.), damit man bestimmt vor Augen habe, was hier eigentlich verlangt werde.

I. Auflösung. Man lege die gegebene Linie a b (Fig. 22) zum Grunde, setze den Zirkel*) mit der Spitze in a ein, öffne ihn bis nach b, und beschreibe dann den Kreis b c d, dessen Radius also a b ist. Eben so setze man die Spitze in b ein, und beschreibe den Kreis a c e, dessen Radius b a ist, also derselbe, wie beim ersten Kreise. Beide Kreislinien werden über der Linie a b in einem gewissen Puncte c durch einander hindurchgehen, d. h. einander schneiden, und von diesem Puncte ziehe man

als-

*) Unter dieser Benennung wird in der Folge stets das Zirkelinstrument verstanden; unter der Benennung „Kreis" aber die damit beschriebene Figur. Uebrigens werden nachher zur Abkürzung folgende Zeichen gebraucht:

E.	bedeutet	Erklärung
G.	—	Grundsatz
Th.	—	Thesis
Hyp.	—	Hypothesis
HS.	—	Hülfssatz
Const.	—	Construction.

alsdann gerade Linien nach a und nach b, so entsteht dadurch ein Triangel.

II. Beweis, daß dieser Triangel die verlangte Eigenschaft habe.

1. Die Thesis ist hier also, daß ab = ac; ab = bc und ac = bc.

2. Als Hülfssätze dienen hier die Grundsätze: 1) daß alle Radien Eines Kreises einander gleich (15. E.), und 2) daß zwei Dinge, die einem dritten gleich sind, einander selbst gleich sind (1. G.).

3. Die Disposition des Beweises liegt hier deutlich in der Thesis; denn es muß von jedem der drei Paar Seiten einzeln die Gleichheit dargethan werden.

4. Man überlege also 1) daß ab = ac sein müsse, weil sie beide Radien des Kreises bcd sind; 2) daß ab = bc, weil sie beide Radien des Kreises ace sind: So wird man leicht, da hiernach sowol ac als bc der ab gleich sind, 3) nach HS. 2. den Schluß machen, daß auch ac = bc sein müsse. Daher sind alle drei Seiten dieses, auf ab errichteten Triangels gleich, und das Verlangte ist geschehen.

Anm.

Anm. Hat man künftig dergleichen Triangel zu construiren, so ist es nicht nöthig, ganze Kreise zu zeichnen, sondern nur kleine Bogen davon, in der Gegend, wo diese einander schneiden können; denn es ist ja nur um die Bestimmung des Punctes c zu thun.

§. 2. Aufgabe.

An einen gegebenen Punct eine, einer gegebenen gleiche, gerade Linie zu legen.

Eine Aufgabe, welche die Weitläuftigkeit, womit Euklides sie behandelt, nicht erfordert. Wer nur etwas mit dem Zirkel umzugehen weiß, der muß von selbst auf leichte Auflösungen derselben fallen. Man lasse es daher die Zöglinge versuchen; und sollten sie es ja verfehlen, so lasse man sie vom gegebenen Puncte c (Fig. 23) aus einer Linie ziehen, dann die gegebene Linie ab in den Zirkel fassen, diesen in c einsetzen, und einen Bogen beschreiben, welcher die neue Linie schneidet. Das dadurch abgeschnittene Stück cd muß nun, wie jeder ohne Beweis einsieht, der Linie ab gleich sein.

§. 3. Aufgabe.

Es sind zwei ungleiche gerade Linien gegeben; man soll von der größeren eine, der kleineren gleiche Linie wegnehmen.

Bedarf eben so wenig vieler Vorbereitung. Wer die Auflösung der vorigen Aufgabe selbst fand, oder wenigstens ohne Mühe begriff, der wird auch diese leicht bewerkstelligen. Man fasse nemlich die gegebene kleinere Linie ab (Fig. 24) in den Zirkel, setze diesen im Anfangspuncte c der größeren Linie cd ein, und beschreibe einen Bogen, welcher die cd schneidet: So ist ce (= ab) von cd weggenommen.

Anm. Eben so würde man die ab zu der cd hinzuthun, wenn man die ab in den Zirkel nähme, damit von d aus nach der, dem Puncte c entgegengesetzten Seite einen Bogen beschriebe, und alsdann die cd verlängerte, bis sie in f den Bogen träfe. Offenbar wäre dann $df = ab$, also $cf = cd + ab$.

§. 4. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel des Einen, zweien Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel des Anderen, Stück für Stück gleich sind, so sind die Triangel selbst und alle noch übrigen Theile derselben, so wie sie einzeln eine gleiche Lage haben, ebenfalls einander gleich *).

Der erste Lehrsatz und zugleich einer der wichtigsten.

Man lasse hier zuerst vor den Augen der Zöglinge zwei Triangel mit den im Lehrsatze ausbedungenen Eigenschaften entstehen, wie Fig. 25. Man nehme also dazu zwei Paar Linien, etwa ab und de, ac und df von gleicher Länge, und lege ab und ac unter dem Winkel bac an einander, dem der Winkel edf, wel-

*) Eine verzeihliche Abänderung des Euklidischen Textes, der hier nicht bündig genug ausgedrückt ist.

welchen de und df einschließen, gleich werden muß. Alsdann erläutere man an der Figur

1. Die Hypothesis: $ab = de$; $ac = df$; $\angle bac = \angle edf$; und die Thesis: $\triangle abc = \triangle def$; $bc = ef$; $\angle abc = \angle def$; und $\angle acb = dfe$.

2. Bringe man als Hülfssätze in Erinnerung: 1) den S., daß zwischen zwei Puncten nur Eine gerade Linie Statt finde (nach E. 4, Anm. 1.); und 2) den 8. S. nebst der Anm.

3. Lege man als Disposition zum Grunde, daß hier 1) die Gleichheit der beiden Linien bc und ef zu erweisen sei, woraus denn 2) die übrigen Stücke der Th. gefolgert werden können.

4. Beweis.

1) Man denke sich den $\triangle abc$ auf def gelegt, so daß a auf d und ab in die Richtung von de kommen. Ohne Zweifel wird nun b auf e fallen, weil (nach der Hyp.) $ab = de$; auch werden die (nach der Hyp.)

gleichen Winkel b a c und e d f einander decken, daher muß a c in die Richtung von d f und der P. c also auf den P. f fallen, weil (nach der Hyp.) a c = d f. Nun läßt es sich (HS. 1) nicht denken, daß zwischen e und f noch eine andere gerade Linie Statt finde als e f; folglich muß b c, welche die auf e und f gefallenen Puncte b und c verbindet, ebenfalls mit e f zusammenfallen; also wird b c die e f decken, und ihr gleich sein.

2) Da nun b c die e f deckt und a b die d e, so ist auch V a b c = d e f. Und da b c die e f deckt, und a c die d f, so ist auch V a c b = d f e. Also sind, wenn jene drei, in der Hyp. angegebenen Theile beider Triangel gleich sind, auch alle übrigen, gleichliegenden Theile derselben gleich, und daher die ganzen Triangel selbst.

§. 5. Lehrsatz.

In jedem gleichschenklichten Triangel sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. (Auch sind, wenn man die Schenkel verlängert, die Winkel unter der Grundlinie einander gleich.) Fig. 26.

Ein Satz, der wegen seines vielfach zusammengesetzten Beweises den Anfängern viele Schwierigkeiten macht, und daher, weil man in der Folge sehr oft seiner bedarf, mit größter Behutsamkeit vorgetragen werden muß.

Vorläufig erinnere man beim △ abc an die 25ste E., und erkläre den Ausdruck Grundlinie, welcher im gleichsch. △ die dritte, ungleiche Seite bedeutet; hier also bc. Nun liegt

1. Die Hypothesis in der E. des gleichsch. △, nemlich ab = ac; und die Thesis ist V acb = V abc (welche an der Grundlinie bc liegen).

2. Zu Hülfssätzen dienen: 1) G. 3. 2) §. 4.

3. Um die zur Beweisführung nöthigen Hülfslinien zu erhalten, verlängere man

die gleichen Schenkel a b und a c unter b und c hinaus, und mache a f = a g. Weil nun (Hyp.) a b = a c ist, so wird natürlich, wenn man sich diese beiden von a f und a g weggenommen denkt, (G. 3) etwas gleiches übrig bleiben, also b f = c g sein. Endlich ziehe man f c und b g. Dadurch sind in der Figur a b f g c außer der Grundfigur a b c noch zwei Paar Triangel, 1) a f c und a g b, 2) b f c uud c g b entstanden, welche zum Theil über einander liegen. Man zeige sie daher dem Schüler, damit er sie alle deutlich bemerke, entweder in einzelnen Figuren, wie sie hier Fig. 26 um a b f g c herumgestellt sind; oder in einzelnen, danach geformten Blättern von Pappe, die man willkührlich über einander legen kann. (Ohne diese Vorsicht mögte der Beweis Vielen dunkel bleiben.)

4. Disposition. Es wird 1) gezeigt, daß △ a f c = △ a g b, und daraus gefolgert, daß V a c f = V a b g; 2) bewiesen, daß △ b f c = △ c g b, und daraus geschlossen, daß V b c f = c b g; woraus denn 3) die Th. hervorgeht.

5) Be-

5) Beweis.

1) Da (nach der Hyp.) ac = ab (wovon jene dem △ acf und diese dem △ abg zugehört), und (nach der Const.) af = ag (jene in acf, diese in abg); da auch der Winkel bei a in beiden Triangeln derselbe ist, also V caf = bag: So ist △ acf = △ agb, weil sie beide die Eigenschaften haben, unter welchen nach §. 4. zwei △ △ einander gleich sind. Daher ist auch *V acf = V abg*, weil sie gleichliegende Stücke der beiden gleichen △ △ sind. (Diese Folgerung werde vorzüglich bemerkt.) Auch ist aus eben dem Grunde fc = bg und V afc = V agb.

2) Da, wie eben bewiesen ist, fc = bg (man sehe auf die kleineren △ △ bfc und cgb), und V bfc (oder afc) = V cgb (oder agb); da auch (nach der Const. und G. 3.) bf = cg: So ist, ebenfalls nach §. 4, △ bfc = △ cgb, und daher auch *V bcf = V cbg*, als gleichliegende Stücke.

3) Weil nun nach n. 1. V acf = V abg, und
nach n. 2. V bcf = V cbg, so subtrahire man diese beiden letzten von den beiden ersten, und es wird (n. G. 3) *V acb* = *V abc* sein.

Anm. Da nach n. 2. △ bfc = △ cgb, so sind auch die Winkel cbf und bcg gleich, als gleichliegende Stücke dieser beiden Triangel. Die genannten Winkel sind aber die, an dem Triangel abc, nach Verlängerung der beiden gleichen Seiten, unter der Grundlinie bc entstandenen; mithin ist auch der eingeklammerte Zusatz des obigen Lehrsatzes erwiesen.

§. 6. Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel zwei Winkel einander gleich sind: So sind auch die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten einander gleich. Fig. 27.

Der umgekehrte Lehrsatz aus §. 5. Dort war das Gleichschenklichte des Triangels ausbedungen, hier soll es erwiesen werden; dort wurde

wurde die Gleichheit der Winkel an der Grundl. dargethan, hier ist sie Bedingung. — Also ist beim △ abc

1. Die Hypothesis: V abc = acb; die Thesis: ab = ac.

2. Hülfssätze: 1) §. 4. 2) S. 9. 3) Bei der Const. erinnere man sich an §. 3.

3. Disposition. Der Beweis wird indirecte geführt (Siehe S. 66); es wird also 1) das Gegentheil der Thesis angenommen, daß ab und ac nicht von gleicher Länge wären, und daraus eine Folgerung gezogen, aus deren Unmöglichkeit 2) die Wahrheit der Thesis erhellet.

4. Beweis.

1) Wären ab und ac ungleich, so müßte eine von beiden größer sein, etwa ab. Wäre ab > ac, so ließe sich auf ab von b aus ein Theil abschneiden (§. 3), der so lang wäre als ac; dieser sei bd. Ziehet man nun von d nach c eine Linie, so entsteht dadurch ein neuer Triangel dbc, der, weil er ganz im △ abc liegt,

 den

den Schülern (wie es bei §. 5 geschah) bemerkbar gemacht werden muß, damit sie ihn genau vom △ abc unterscheiden. Von diesem △ dbc ließe sich nun (nach HS. 1) beweisen, daß er dem △ abc gleich wäre. Denn nach der Const. wäre ac = db; die Seite bc ist in beiden Triangeln dieselbe, und (nach der Hyp.) V acb = dbc (oder abc). Folglich wäre △ acb = △ dbc, d. h. das Ganze wäre so groß wie ein Theil davon, welches (HS. 2) unmöglich ist.

2) Da also aus der vorhin angenommenen Ungleichheit der beiden Seiten ab und ac etwas unmögliches folgen, und diese absurde Folgerung nicht bloß aus dem Einen hier aufgestellten Falle, daß ab > ac, sondern auch aus dem Gegentheile von diesem, wenn man ac > ab annähme, herfließen würde: So kann jene Ungleichheit beider Seiten durch=

durchaus gar nicht Statt finden, und es muß also $ab = ac$ sein.

§. 7. Lehrsatz.

Wenn über einer geraden Linie aus ihren Endpuncten zwei gerade Linien in Einem Puncte zusammen laufen: So können nicht über derselben Linie aus eben den Puncten zwei andere gerade Linien, die jenen jede für sich gleich sind (die erste nemlich der ersten, die zweite der zweiten) in einem anderen Puncte an eben der Seite zusammenlaufen. Fig. 28.

Man ziehe über einer gegebenen geraden Linie ab zwei Linien, ac und bc, die in c zusammen treffen; nun besteht

1. Die Thesis darin, zu zeigen, daß man nicht noch zwei andere, der ac und bc gleiche Linien von a und b aus, an derselben Seite von ab, so ziehen könne, daß sie in einem anderen Puncte als c zusammen liefen.

2. Hülfssätze: 1) §. 5. 2) G. 9.

3. Disposition. Der Beweis wird indirecte geführt, also 1) angenommen, daß man zwei andere Linien ad (= ac) und bd (= bc), die nicht in c, sondern etwa in d zusammen träfen, ziehen könne; und daraus ein Widerspruch hergeleitet, welcher 2) die Thesis als einen bewiesenen Satz darstellt.

4. Als Hülfslinie ziehe man cd, wodurch außer den schon vorhandenen beiden Triangeln acb und adb noch zwei andere entstehen, nemlich acd und bcd, auf welche es hier vorzüglich ankommt. (Man mache sie wie bei §. 5 bemerkbar.)

5. Beweis.

1) Wären, wie es hier angenommen ist, ac = ad und bc = bd, so müßte man auch die △△ acd und bcd als gleichschenklichte anerkennen. Folglich wären (HS. 1) im △ acd die Winkel an der Grundlinie cd einander gleich, V acd = V adc. Offenbar wäre also, weil (G. 9) V acd > bcd ist, auch V adc > bcd.

Nun

Nun aber ist (HS. 2) $\angle bdc > adc$, folglich noch weit mehr $\angle bdc > \angle bcd$.

Betrachtet man aber nun auch den $\triangle$ b c d als einen gleichschenklichten (weil b c = b d angenommen ist), so ist ja in demselben (HS. 1) $\angle bdc = \angle bcd$.

Es entsteht hier also ein Widerspruch, indem dieselben zwei Winkel einmal einander ungleich, und dann wieder gleich sein sollen.

2) Da nun dieser Widerspruch aus der angenommenen Möglichkeit, daß a d (= a c) und b d (= b c) in einem anderen Puncte als in c zusammenlaufen könnten, nach richtigen Schlüssen hervorgeht: So ist daraus klar, daß jene Linien a d und b d, wenn sie den Linien a c und b c gleich sind, nicht in einem anderen P. als in c sich treffen können, und mithin die Thesis erwiesen.

§. 8. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, jede für sich, gleich sind, und die dritte Seite der dritten gleich ist: So ist auch ein Winkel einem Winkel gleich, der nemlich, welchen die (ersten beiden) gleichen Seiten einschließen. Fig. 29.

Man lasse die beiden Triangel abc und def so vor den Augen der Schüler entstehen, daß man die drei Seiten des zweiten, einzeln genommen, so lang macht, wie die des ersten. Es ist dann

1. Die Hypothesis: 1) ab = de; ac = df, und 2) bc = ef (die dritte Seite gleich der dritten); die Thesis: V bac = V edf (die von den beiden ersten Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel).

2. Hülfssätze. 1) der ganze Beweis dieses Lehrsatzes beruht auf dem im 7ten §, welcher bloß deshalb vorangeschickt wurde. Uebrigens erinnere man sich noch 2) an E. 4. Anm. 1, und 3) an Gr. 8.

3) Be-

3. **Beweis.** Man denke sich den △abc auf den △def gelegt, und zwar so, daß b auf e, und bc in die Richtung von ef komme. Weil nun (nach der Hyp.) bc = ef, so muß c auf f fallen. Da ferner (n. d. Hyp.) ba = ed und ca = fd, so können (§. 7) ba und ca über ef, von e und f aus, in keinem anderen Puncte zusammenlaufen als in d. Es fallen also die Endpuncte der gleichen Linien ba und ed in e und d, und eben so die Endpuncte der gleichen Lin. ca und fd in f und d zusammen. Folglich deckt (HS. 2) ba die ed und ca die fd, und daher auch der ∠bac den ∠edf; welche also (HS. 3) einander gleich sind.

Anm. Offenbar ist auch ∠abc = def, weil sie einander decken, und eben so ∠acb = dfe; folglich sind die **ganzen Triangel** abc und def **einander gleich**. Es ist dies, wenn man auf §. 4 zurücksieht, der **zweite** Satz von der Gleichheit der Dreiecke, den man auch ohne Hülfe des 7ten §, nach einer leichten Construction, bloß mit Zuziehung des 4ten und 5ten §. und des 2ten G., **directe**

(also

(also für die Anfänger weit deutlicher) darthun kann. S. Klügel, Mönnich u. s. w.

§. 9. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinichten Winkel zu halbiren. Fig. 30.

Gegeben ist hier ein Winkel, bac.

Verlangt wird, diesen in zwei gleiche Theile zu theilen.

I. Auflösung. (Mit Rücksicht auf §. 1). Man schneide auf den Schenkeln des Winkels bac mit dem Zirkel, von a aus, gleiche Stücke ab, nemlich ad=ae; ziehe de, und errichte auf de, nach der, dem Puncte a entgegengesetzten Seite hin, (§. 1) den gleichseitigen △ def. Alsdann ziehe man von a nach f eine gerade Linie, wodurch der V bac in zwei Theile, V baf und V fac, getheilt wird.

II. Beweis, daß diese beiden Winkel einander gleich seien, folglich die Aufgabe erfüllt sei. Also ist

1. Die Thesis: V daf(baf)=V eaf (caf). Dabei legt man hier zum Grunde, was

durch

durch die Const. ausgemacht ist, daß nemlich ad = ae, und df = ef.

2. Hülfssatz: §. 8; welcher sich hier auf die beiden △△ daf und eaf anwenden läßt.

3. Disposition. Man zeige 1) die Gleichheit zwischen den drei Seiten des △ daf und den drei Seiten des △ eaf, und daraus 2) die Th.

4. Beweis.

1) Da (nach der Const.) da = ae und af in beiden Triangeln liegt, da ferner auch (n. d. Const.) df = ef, also alle drei Seiten des △ daf einzeln den gleichliegenden Seiten des △ eaf gleich sind: So ist

2) (§. 8) V daf = V eaf, und daher die Auflösung richtig.

§. 10. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie zu halbiren. Fig. 31.

Gegeben ist hier eine begränzte Linie ab.

Verlangt wird, diese in zwei Hälften zu theilen.

I. Auflösung. (Mit Rücksicht auf §. 1 und 9). Wenn man über ab einen gleichseitigen Triangel acb errichtet, und den Winkel an der Spitze, acb, (nach §. 9) durch die Linie cd halbirt: So wird durch eben diese, gehörig verlängerte Linie, auch die ab in zwei Theile, ad und db getheilt.

II. Beweis, daß diese beiden Stücke, wie verlangt wurde, gleich groß seien. Es ist also

1. Die Thesis: ad $=$ db. Aus der Const. erhellet, daß ac $=$ cb.

2. Hülfssatz: §. 4, welcher auf die beiden, durch die Auflösung entstandenen Triangel acd und bcd angewandt werden kann.

3. Disposition. Weil ad und db in diesen beiden Triangeln liegen, so muß 1) die Gleichheit der Triangel bewiesen, und daraus 2) die Th. gefolgert werden.

4. Beweis.

1) Wenn man die einzelnen Stücke der $\triangle\triangle$ acd und bcd betrachtet, so ist (nach der Const.) ac $=$ bc, und

V acd

V acd = V bcd; auch gehört die cd beiden Triangeln an, und ist daher in beiden dieselbe; folglich ist (§. 4) △ acd = △ bcd; also auch
2) ad = bd; mithin die Aufgabe aufgelöst.

§. 11. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, in einem in ihr gegebenen Puncte, einen Perpendikel zu errichten. Fig. 32.

Gegeben: 1) eine gerade Linie ab; 2) in derselben ein Punct c.

Verlangt: Von dem Puncte c aus eine Linie zu errichten, die auf der Linie ab senkrecht stehe (E. 10).

I. Auflösung. Auf der Linie ab werden von c aus auf beiden Seiten dieses Punctes mit dem Zirkel gleiche Stücke, cd und ce, abgeschnitten. Auf der, dadurch begränzten Linie de, wird (§. 1) ein gleichseitiges Dreieck errichtet, und von der Spitze desselben nach dem gegebenen Puncte c die Linie fc gezogen.

II. Beweis, daß fc auf ab senkrecht stehe. Dies ist (E. 10) der Fall, wenn die Nebenwinkel (E. 9. Anm.), welche fc mit ab bildet, nemlich die VV fcd und fce, gleiche Nebenwinkel oder rechte Winkel sind. Daher ist hier

1. Die Thesis: V fcd = V fce. Die Const. lehrt übrigens, daß cd = ce, und fd = fe.

2. Hülfssatz: §. 8, angewandt auf die beiden Triangel fdc und fec.

3. Disposition. Es wird gezeigt, daß 1) die Bedingung des 8ten §, die Gleichheit der drei Seiten, hier eintrete, also 2) mit Grunde auf die Richtigkeit der Th. geschlossen werden könne.

4. Beweis.

1) Nach der Const. ist in den △ △ fdc und fec, cd = ce. Ferner ist die Seite fc beiden Triangeln gemein, und endlich (auch nach der Const.) fd = fe. Folglich ist

2) (§. 8) V fcd = V fce. Sie sind also gleiche Nebenwinkel, und daher

ist

ist fc der verlangte Perpendikel auf ab, errichtet im Puncte c.

§. 12. Aufgabe.

Auf eine gegebene (unbegränzte) gerade Linie, von einem außerhalb derselben gegebenen Puncte, einen Perpendikel zu fällen. Fig. 33.

Man erläutere hier zuerst, worin diese Aufgabe von der vorigen verschieden sei. In beiden ist die Linie, auf welcher der Perpendikel stehen soll, gegeben; allein bei der vorigen Aufgabe war der Punct in der Linie bestimmt, von welchem aus man den Perpendikel errichten sollte, und bei der gegenwärtigen Aufgabe ist ein Punct außerhalb der Linie vorgeschrieben, von welchem aus der Perpendikel gefällt werden soll. Die gegebene Linie sei ab, und der bestimmte Punct über derselben sei c.

I. Auflösung. (Mit Rücksicht auf §. 10, und deshalb auch auf §. 9). Man nehme an der, dem Puncte c entgegenstehenden Seite der

Linie ab einen beliebigen Punct d, fasse die Entfernung von c bis d in den Zirkel, und beschreibe von c aus mit diesem Radius einen Kreis. Durch diesen Kreis wird ab in zwei Puncten, g und e, geschnitten, mithin die Linie ge begränzt werden. Nun halbire man ge (nach §. 10), und ziehe von c nach dem Theilungspuncte h der Linie ge eine gerade Linie ch.

II. Beweis, daß ch auf ab senkrecht stehe, d. h. (wie bei §. 11) daß chg und che gleiche Nebenwinkel oder rechte Winkel seien. Es ist also auch hier

1. Die Thesis: V chg = V che. Dabei merke man sich, daß nach der Const. hg = he ist.

2. Als Hülfssätze sind hier nöthig: 1) §. 8, und 2) E. 15 (Der G. von der Gleichheit der Radien). Um aber nach diesen beiden den Beweis führen zu können, muß man noch

3. zwei Hülfslinien ziehen, nemlich von c nach g und von c nach e, wodurch zwei Triangel, chg und che entstehen, auf welche §. 8 sich anwenden läßt.

4. Die

4. Die Disposition ist hier wie bei §. 11.

5. Beweis.

1) Die drei Seiten des △ chg sind einzeln den drei gleichliegenden Seiten des △ che gleich. Denn hg=he (n. d. Const.); ch liegt in beiden Triangeln; und cg=ce (HS. 2). Daher ist

2) (HS. 1) V chg=V che. Diese sind also gleiche Nebenwinkel, und deshalb ist ch ein, vom Puncte c auf ab gefällter Perpendikel, wie verlangt wurde.

§. 13. Lehrsatz.

Die Winkel, welche eine gerade Linie, die auf einer anderen stehet, mit dieser anderen macht, (oder kürzer: Nebenwinkel, E. 9. Anm.) sind entweder zwei rechte, oder zwei rechten gleich.

Es treten hier zwei verschiedene Fälle ein, indem die Eine Linie auf der Anderen entweder senkrecht stehet, oder nicht.

I. Steht die Eine Linie auf der Anderen senkrecht, wie ab und cd Fig. 15: So sind die Winkel, welche sie mit derselben macht, abc und abd (E. 10) an sich schon gleiche Nebenwinkel, also zwei rechte; denn darauf beruht ja eben die Erklärung des Senkrechten.

II. Steht aber jene Linie nicht senkrecht, sondern etwa wie ab Fig. 34, so sind die Winkel, welche sie mit der anderen, dc, macht, nemlich die Winkel abc und abd zwar einander ungleich; aber es läßt sich beweisen, daß sie beide zusammengenommen so groß seien, als zwei rechte, oder daß der Eine (abc) um eben so viel kleiner sei, als ein rechter, um wie viel der Andere (abd) größer ist. Also ist hier

1. Die Thesis: $\vee cba + \vee abd = 2 R$.

2. Als Hülfssätze hat man hier bloß zwei Grundsätze zu beachten, nemlich G. 1 u. 2.

3. Als Hülfslinie dient ein Perpendikel, den man (nach §. 11) auf dc im Puncte b zu errichten hat, nemlich be. Dadurch entstehen zwei rechte Winkel, cbe und ebd; und der Beweis nimmt nun folgenden Gang.

4. Dis-

4. Disposition. Es muß 1) gezeigt werden, daß die beiden rechten Winkel, welche be mit dc macht, aus denselben Theilen bestehen, wie 2) die beiden Winkel, welche durch ab auf dc entstanden sind; woraus 3) die Th. hervorgeht.

5. Beweis.

1) Der V cbe besteht offenbar aus den beiden VV cba und abe; also bestehen (S. 2) die beiden rechten cbe und ebd aus den drei Winkeln cba, abe und ebd; oder mathematisch ausgedrückt: $cbe + ebd = cba + abe + ebd$.

2) Sieht man nun auf die Winkel, welche ab mit dc macht, so besteht nach der Const. der Eine davon, nemlich abd, aus den beiden Winkeln abe und ebd; also bestehen (S. 2) cba und abd aus den drei Winkeln cba, abe und ebd; oder mathematisch bestimmt: $cba + abd = cba + abe + ebd$.

3) Da nun die VV cbe + ebd aus denselben Theilen, cba + abe + ebd, zusammengesetzt sind, wie cba + abd: So müssen (G. 1) cbe + ebd = cba + abd sein. Nun sind cbe + ebd 2 Rechte, also sind auch $cba + abd = 2$ R.

Anm. 1. Für manchen wird folgender kürzere Beweis anziehender sein: Da (n. d. Const.) cbe ein rechter Winkel ist, so ist cba offenbar um den V abe kleiner, als ein R. Da ferner ebd ein R. ist, so ist abd um denselben V abe größer, als ein R. Der V cba ist also gerade um so viel kleiner, als ein R., um wie viel der V abd größer ist, als ein R. Daher müssen V cba + abd = 2 R. sein. (Denn wenn die 5 um 3 kleiner ist, als 8, die 11 aber um 3 größer, als 8, so ist natürlich $5 + 11 = 2 \times 8$.)*).

Anm.

*) Anm. Man versuche beide Beweise, weil dieser Lehrsatz, welcher in der Folge so oft benutzt wird, den An-

Anm. 2. Auf ähnliche Art kann man diesen Satz beweisen, wenn der Nebenwinkel drei, vier oder mehrere sind; ein Versuch für die Schüler.

§. 14. Lehrsatz.

Macht eine gerade Linie an Einem und demselben Puncte, aber auf zwei verschiedenen Seiten, mit zwei anderen geraden Linien, Winkel, welche zusammengenommen zwei rechten gleich sind: So sind diese Winkel Nebenwinkel, d. h. jene beiden anderen Linien liegen in Einer geraden Linie *).

Der umgekehrte Lehrsatz des 13ten §. Dort wurde angenommen, daß (in Fig. 34)

Anfängern gewöhnlich Schwierigkeiten macht. Daher es auch Entschuldigung verdient, daß er hier ausführlicher, als mancher andere behandelt ist.

*) Anm. Euklid's Worte konnten hier nicht ungeändert stehen bleiben, weil er den Ausdruck „Nebenwinkel" unrichtig gebrauchte. Er sagt: „Machen mit einer geraden Linie, in eben demselben Puncte, zwei andere, nicht

die beiden äußeren Schenkel, cb und bd in Einer geraden Linie lägen, also mit ab Nebenwinkel (E. 9. Anm.) bildeten; und daraus wurde bewiesen, daß die beiden V cba + abd = 2 R. Hier wird dies letzte angenommen, daß nemlich eine Linie ab (Fig. 35) mit zwei anderen, bc und bd, welche im Puncte b einander treffen, zwei Winkel, abc und abd mache, welche zusammengenommen zwei rechten W. gleich sind; und daraus bewiesen, daß diese

nicht an (Einer und) derselben Seite liegende gerade Linien — Nebenwinkel, welchen zwei R. gleich sind: So liegen diese Linien in gerader Linie an einander." Allein in dem Begriffe der Nebenwinkel (E 9. Anm.) ist das schon mit enthalten, daß ihre zwei äußersten Schenkel in Einer geraden Linie liegen. Wenn daher angenommen wäre, eine Linie machte mit zwei anderen — Nebenwinkel, so dürfte nicht erst erwiesen werden, daß diese beiden anderen in Einer geraden Linie lägen. Und doch beweist dies Euklides im vorliegenden Lehrsatze. Man könnte einwenden, Eukl. habe den Ausdruck „Nebenwinkel" in einem anderen, weiteren Sinne genommen, da sich überhaupt keine Erkl. dieses Begriffs in seinen Definitionen finde. Aber aus n. 10 in denselben sieht man allerdings, daß er stillschweigend eben die E. davon voraussetze, welche E. 9. Anm. gegeben ist.

diese beiden W. — Nebenwinkel sein müssen. Also ist

1. Hypothesis: V cba + V abd = 2R. Thesis: daß cbd Eine gerade Linie sei. Beim Beweise liegt

2. Als Hülfssatz der 13te §. zum Grunde, mit Zuziehung des 1sten, 3ten und 9ten G.

3. Disposition. Indirecter Beweis; daher 1) aus dem Gegentheil der Th., als lägen nemlich cb und bd nicht in Einer geraden Linie, eine Absurdität gefolgert, und daraus 2) die Wahrheit des Satzes hergeleitet wird.

4. Beweis.

1) Wären cb und bd nicht in Einer ger. Linie, so ließe sich doch cb nach der Seite von d hin verlängern, so daß etwa cbe eine gerade Linie ausmachte. Wäre dies der Fall, so müßten die Winkel, welche ab mit cbe macht, als Nebenwinkel (§. 13) zusammengenommen zwei rechten gleich sein; also V cba + abe = 2R. Nun sind aber (nach der Hyp.) V cba + abd = 2R. Also wären

ren (S. 1) c b a + a b e = c b a + a b d; folglich wäre, wenn man c b a auf beiden Seiten wegnimmt, (S. 3) a b e = a b d; und dies läßt sich (S. 9) nicht denken, indem a b e ein Theil von a b d ist.

2) Da also aus dem, was angenommen wurde, daß die verlängerte c b nicht nach d, sondern nach e hinlaufe, etwas unmögliches folgt; da auch eben dasselbe immer folgen würde, wenn man irgend eine andere Linie, die von b aus neben b d hinliefe, als die verlängerte c b ansehen wollte: So kann keine andere, als b d selbst, die verlängerte c b sein; und diese verlängerte c b muß daher mit b d zusammenfallen. Also ist c b d eine gerade Linie, und die Winkel c b a und a b d sind daher Nebenwinkel.

§. 15.

§. 15. Lehrsatz.

Zwei gerade Linien, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel. Fig. 5.

Aus der (E. 9. Anm.) gegebenen Definition der Scheitelwinkel erhellet, daß durch jede zwei, einander schneidende (E. 4. Anm. 2) gerade Linien zwei Paar Scheitelwinkel entstehen; z. B. in Fig. 5 die V V aec und deb; aed und ceb. Ist dieser Lehrsatz indeß von Einem Paare erwiesen, so läßt er sich von dem Anderen auf eben die Art darthun. Hier also sei

1. Thesis: V aec = V deb.

2. Als Hülfssatz liegt §. 13 zum Grunde; außerdem G. 1 und 3.

3. Beweis. Um auf dem 13ten §. fortzubauen, bemerke man hier die beiden Paar Nebenwinkel (E. 9. Anm.); aec und aed, aed und deb, wovon jene auf der geraden Linie ced, diese aber auf der geraden Linie aeb liegen. Nun sind (§. 13) V aec + aed = 2 R. und auch V aed + deb = 2 R.; folglich (G. 1) V aec + aed = V aed + deb.

Nimmt

Nimmt man nun auf beiden Seiten denselben V aed weg, so bleibt (G. 3) übrig: V aec = V deb.

Eben so wird bewiesen, daß V aed = V ceb; welches man zur Prüfung von den Schülern versuchen lasse.

Zusatz. Wenn man alle vier Winkel dieser Figur ansieht, so kann man sie sich als zwei Paar Nebenwinkel an der Linie ab vorstellen, wovon das erste Paar, nemlich aed und deb über ab, das andere Paar aber, aec und ceb unter ab liegt. Da nun (§. 13) V aed + deb = 2 R., und eben so V aec + ceb = 2 R., so ist offenbar nach folgender Addition:

V aed + deb = 2 R.
V aec + ceb = 2 R.

(G. 2) V aed + deb + aec + ceb = 4 R.; d. h. alle vier Winkel, die um den Punct e (es versteht sich, in Einer Ebene) herum liegen, machen zusammengenommen so viel, als vier rechte Winkel.

Anm. Da ferner, nach §. 13. Anm. 2, jede Summe von Nebenwinkeln, so viel

ihrer

ihrer auf Einer geraden Linie liegen, zwei rechten Winkeln gleich ist: So gilt es auch im allgemeinen von allen und allerlei Winkeln, die um Einen Punct herum in Einer Ebene liegen, daß sie zusammengenommen vier rechten gleich sind. So sind z. B. Fig. 36 über ab die V amc + cmd + dmb = 2R., und eben so unter ab die V ame + emf + fmg + gmb = 2R., also nach obiger Addition: V amc + cmd + dmb + ame + emf + fmg + gmb = 4R.

§. 16. Lehrsatz.

An jedem Triangel ist, wenn man eine seiner Seiten verlängert, der (dadurch entstandene) äußere Winkel größer, als jeder der ihm gegenüber liegenden inneren Winkel. Fig. 37 u 38.

Wenn man an dem Triangel abc irgend eine Seite, hier die bc, verlängert, so entsteht dadurch ein Winkel acd, den man den äußeren Winkel nennt. Die Winkel des

Triangels selbst, nemlich bac, abc und bca, heißen dagegen innere Winkel; und von diesen ist, in Beziehung auf jenen äußeren, der V bca der daran liegende, die VV bac und abc aber sind die dem äußeren gegenüber liegenden. Soll nun bewiesen werden, daß der äußere größer, als jeder dieser beiden letzten sei, so muß man dies von jedem derselben besonders darthun, und der Beweis zerfällt demnach in zwei Theile; daher ist

1. Die doppelte Thesis: 1) V acd > bac. 2) acd > abc.

2. Zu Hülfssätzen dienen dabei 1) §. 4. 2) §. 15. 3) G. 9 und 4) bei der Const.: §. 10. — Dieser Hülfssätze bedarf man bei beiden Theilen des Beweises. Da aber die Const. nicht in beiden dieselbe ist, so sehe man nun

I. auf den ersten Satz: daß V acd > bac sein solle. Um dies mit Benutzung jener Hülfssätze beweisen zu können, hat man

1. folgende Construction nöthig. Man halbire (Fig. 37) (nach §. 10) die Seite, welche an beiden Winkeln liegt, nemlich ac, ziehe

ziehe von dem gegenüber liegenden Winkel b nach dem Theilpuncte e eine gerade Linie, verlängere sie über e hinaus so weit, bis das äußere Stück ef = be ist, und ziehe dann von f nach c; wodurch die beiden △△ eab und ecf entstehen.

2. Disposition. Nach der Const. läßt sich 1) die Gleichheit der Winkel eab und ecf beweisen, und daraus 2) folgern, daß V acd > eab (oder bac).

3. Beweis.

1) ist (HS. 1) △eab = △ecf; denn (n. d. Const.) ist ea = ec (weil ac halbirt wurde), und be = ef; auch ist (SH. 2) V aeb = V cef. Aus der Gleichheit dieser Triangel folgt aber, daß auch die VV eab und ecf als gleichliegende Winkel einander gleich sind.

2) Nun ist (HS. 3) V acd > V ecf, und also, weil V eab = V ecf ist, auch V acd > V eab, d. h. V acd > V bac.

Auf ähnliche Art wird auch

II. Der zweite Satz bewiesen: daß V acd > V abc sei.

1. Construction. Man halbire (Fig. 38) die an beiden Winkeln liegende Seite bc, ziehe vom gegenüber liegenden Winkel a nach dem Theilpuncte g die Linie ag, verlängere sie unter g hinaus, bis gh = ag ist, und ziehe hc; wodurch ebenfalls, wie vorhin, zwei Triangel, gba und gch entstehen. Auch verlängere man noch die Seite ac unter c hinaus bis zu einer beliebigen Länge, etwa bis k.

2. Disposition. Man beweist: 1) daß V gba = V gch; schließt daraus 2) daß V gck > V gba; und 3) daß V acd > V gba (oder abc).

3. Beweis.

1) Auch hier findet HS. 1 Anwendung, indem in den beiden △△ gba und gch, (n. d. Const.) die Seite gb = gc; ag = gh; und (HS. 2) V agb = V hgc ist. Also ist △gba = △gch, und daher V gba = V gch.

2) Of-

2) Offenbar ist aber (HS. 3) $V\,gck > V\,gch$, folglich weil $V\,gba = V\,gch$ ist, auch $V\,gck > V\,gba$.

3) Da endlich (HS. 2) $V\,gck = V\,acd$, und $V\,gck > V\,gba$, so ist auch $V\,acd > V\,gba$, d. h. $V\,acd > V\,abc$.

Anm. Zur Uebung, und zur Prüfung, ob der Beweis verstanden sei, verlängere man eine andere Seite des Triangels, bc oder ac, und lasse von dem, hierdurch entstandenen äußeren Winkel den Satz beweisen.

§. 17. Lehrsatz.

In jedem Triangel sind jegliche zwei Winkel zusammen kleiner, als zwei rechte. Fig. 39.

Es ist einerlei, von welchen zwei Winkeln des $\triangle$ abc man beweise, daß sie zusammen genommen weniger ausmachen, als zwei rechte; wer den Beweis verstanden hat, wird sogleich einsehen, daß er auf jede zwei Winkel passe. Nimmt man hier die Winkel abc und acb, so ist

1. Thesis: abc + acb < 2 R.

2. Hülfssätze: 1) §. 16; 2) §. 13; 3) G. 4. (Dieser Grundsatz bedarf aber hier noch einer Erläuterung, welche für Anfänger nicht immer entbehrlich ist. „Zu Ungleichem Gleiches hinzugethan, bringt Ungleiches" ist nemlich so zu verstehen: Wenn von zwei Größen die Eine größer ist, als die Andere, und zu der ersten eben so viel hinzugethan wird, wie zu der letzten, so entstehen dadurch zwei ungleiche Summen, von welchen diejenige die größere ist, bei welcher die erste (größere) Größe sich befindet. Wenn zur 5 sowol als zur 3 die 2 addirt wird, so ist von den dadurch entstandenen ungleichen Summen diejenige (5 + 2) größer, in welcher die größere der beiden anfänglichen Zahlen, nemlich die 5, mit enthalten ist, und die andere (3 + 2) kleiner.) Um diese benutzen zu können, ziehe man

3. eine Hülfslinie; man verlängere nemlich die an beiden W. liegende Seite bc.

4. Beweis. Durch die Const. ist am △ abc ein äußerer Winkel, acd, entstanden, welcher (HS. 1) größer ist, als V abc. Addirt man nun zum V acd sowol als zum V abc den V acb, so entstehen dadurch zwei ungleiche Summen, acd + acb und abc + acb, von welchen (HS. 3) die letzte kleiner sein muß, weil abc < acd. Also abc + acb < acd + acb. Nun ist (HS. 2) acd + acb = 2 R., also offenbar abc + acb < 2 R.

Mit derselben Schlußfolge läßt sich nach derselben Const. beweisen, daß V bac + acb < 2 R. Soll aber eben dies auch von abc + bac bewiesen werden, so muß man eine andere Seite des △ abc verlängern, etwa ab, wie Fig. 40. Beides wäre ein Versuch für die Schüler.

§. 18. Lehrsatz.

In jedem Triangel liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber, Fig. 41.

Man soll jedesmal, wenn Eine Seite eines Triangels länger ist, als eine Andere, mit Sicherheit schließen können, daß auch der Winkel, welcher der längeren Seite gegenüber liegt, größer sei, als der, der kürzeren gegenüber liegende. (Hier lasse man an der Figur die Winkel nennen, welche jeder Seite gegenüber liegen; der Anfänger trifft dies nicht immer.) Ist also im △ abc die Seite ac größer, als ab, so liegt eben hierin

1. Die Hypothesis: ac > ab; und die Thesis ist: ∨ abc > ∨ acb.

2. Hülfssätze: 1) §. 16; 2) §. 5; 3) G. 9.

3. Construction: Man schneide, da ac > ab ist, auf ac von a aus, ein Stück ab, welches der ab gleich ist, nemlich ad, und verbinde die Puncte b und d. Dadurch ist dann der gleichschenklichte △ abd entstanden, und zugleich der kleine △ bdc, an welchem man sich den ∨ adb als den, durch die Verlängerung der Seite cd entstandenen äußeren Winkel vorstellen kann. Auf alles dies merke man, so ist

4. Der Beweis leicht geführt. Sieht man nemlich den ∨ adb als den äußeren Winkel

am

am △ bdc an, so ist (HS. 1) *Vadb* > *Vdcb* (oder acb). V adb ist aber auch zugleich der Eine Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten △ abd, und als solcher dem Anderen Winkel an der Grundlinie, nemlich dem V abd (HS. 2) gleich; was also vom V adb gilt, das gilt auch vom V abd, folglich ist *Vabd* > *acb*. Da nun (HS. 3) V abc > abd, so ist offenbar noch viel mehr *Vabc* > *acb*.

Anm. Eben so könnte man, nur mit veränderter Const., beweisen, daß abc > bac, weil ac > bc; oder daß acb > bac, weil ab > bc ist.

§. 19. Lehrsatz.

In jedem Triangel liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber. Fig. 42.

Der umgekehrte Satz aus §. 18. Dort wurde aus der Größe der Einen Seite im Vergleich mit einer Anderen auf die Größe der gegenüber liegenden Winkel; hier wird aus der Größe des Einen Winkels im Vergleich mit einem Anderen auf die Größe der gegenüber liegenden Seiten geschlossen. Demnach ist hier im △ abc.

1. Hypothesis: ∨abc > ∨acb; und Thesis: ac > ab.

2. Hülfssätze: 1) §. 5 und 2) §. 18.

3. Disposition. Der Satz wird indirect bewiesen, und zwar 1) das Gegentheil der Thesis angenommen, und daraus etwas, der Hyp. widersprechendes hergeleitet, welches denn 2) den Schluß auf die Thesis als unwiderlegbar darstellt.

4. Beweis.

1) Nimmt man an, daß ac nicht größer als ab sei: So sind nur noch zwei andere Fälle möglich, indem ac entweder der ab gleich, oder kleiner als ab sein müßte. Was würde aber hieraus folgen?

a) Wäre ac = ab, so wäre △abc gleichschenklicht, folglich (HS. 1) ∨abc = ∨acb. Dies kann aber nicht sein, weil nach der Hyp. abc > acb ist.

b) Wäre

b) Wäre ac < ab, so müßte (HS. 2) V abc < V acb sein; welches aber ebenfalls der Hyp. widerspricht.

2) Da also ac weder der ab gleich (n. a), noch kleiner als ab (n. b) sein kann: So bleibt nichts anderes übrig, als daß ac > ab ist; mithin ist daran nicht zu zweifeln.

Anm. 1. Die Anwendung auf andere Seiten: ac und bc, ab und bc mag, wie bei §. 18, zur Uebung der Zuhörer dienen.

Anm. 2. Der Beweis könnte auch auf folgende freiere und kürzere Art geführt werden. Vergleicht man die beiden Seiten in Absicht ihrer Größe mit einander, so sind nur drei Fälle möglich; es muß entweder 1. ac = ab, oder 2. ab > ac, oder 3. ac > ab sein. Aus n. 1. würde folgen: daß V abc = V acb; aus n. 2: daß abc < acb wäre. Beides ist n. d. Hyp. unmöglich, also n. 3, als Thesis dieses Satzes, richtig.

§. 20. Lehrsatz.

In jedem Triangel sind jegliche zwei Seiten zusammen größer als die dritte. Fig. 43.

Wählt man im $\triangle$ abc zu diesem Satze die beiden Seiten ba und ac, so ist

1. Die Thesis: $ba + ac > bc$.

2. Hülfslinien. Soll gezeigt werden, daß ba und ac zusammengesetzt länger seien, als bc, so setze man jene beiden Seiten wirklich in Eine zusammen; man verlängere die Eine, etwa ba über den Punct a (wo beide Seiten an einander stoßen) hinaus so weit, daß das daran gesetzte Stück ad der Seite ac gleich sei. Verbindet man nun noch d mit c, so finden hier

3. Die Hülfssätze: 1) §. 5 und 2) §. 19 Anwendung.

4. Disposition. Man zeigt 1) daß $\vee adc < bcd$; 2) daß $bd > bc$; also auch 3) $ba + ac > bc$.

5) Be-

5. Beweis.

1) Offenbar ist der, durch die Hülfslinien entstandene △ adc gleichschenklicht (weil ad der ac gleich gemacht wurde); mithin (HS. 1) V adc = V acd. Was daher vom V acd gilt, das gilt auch vom V adc. Da also V acd < bcd ist, so ist auch V adc < bcd.

2) Diese beiden Winkel aber sind zwei Winkel des großen △ bdc, so bald man sich die Seite ac wegdenkt [Anm. Der Lehrer könnte hier den △ bdc ohne ac daneben setzen, wie es bei §. 5 gemacht wurde]; und da in diesem △ der V bcd > V bdc ist, so muß (HS. 2) auch die Seite, welche dem V bcd gegenüber liegt, größer sein, als die, welche dem V bdc gegenüber liegt, d. h. bd > bc.

3) Endlich bemerke man, daß bd aus ba und ad bestehe, ad aber der

ac gleich sei, so ist klar, daß bd = ba + ac, und daß von ba + ac desselben wahr sein müsse, was von bd bewiesen ist; folglich ba + ac > bc.

Anm. 1. Will man diesen Satz auch von anderen Seitenpaaren des △ abc beweisen, so bemerke man nur, daß die Const. der Hülfslinien immer über den Punct hinaus geschehen müsse, in welchem die beiden Seiten zusammen treffen. Soll also erwiesen werden, daß ac + cb > ab, so verlängere man (Fig. 44) ac unter c hinaus so weit, bis ce = cb ist, d. h. stelle ac und cb in der Einen Linie ae dar. Wäre zu zeigen, daß ab + bc > ac, so müßte (Fig. 45) ab (oder cb) über b hinaus verlängert werden, bis af so lang wäre, wie ab + bc. Alle diese Veränderungen sind für die Zuhörer nützlich.

Anm. 2. Wer es etwa aus Zeitmangel rathsam fände, die Folge der Euklidischen Sätze und einzelne Beweise so viel als möglich abzukürzen (wozu schon bei §. 3 und 4, besonders aber bei §. 8 in der Anm. Winke gegeben sind), der könnte auch den Beweis des vorliegenden Lehrsatzes ersparen, und die Wahrheit desselben allein auf E. 4 begründen. Denn die Seite bc (Fig. 43) ist offenbar als einfache gerade Linie der kürzeste Weg vom Puncte b zum Puncte c. Daher ist jeder andere Weg von b nach c, der nicht gerade zu die Richtung von bc nimmt, länger als bc. Also ist der Weg von b nach c, welcher über den Punct a geht, unstreitig länger, als bc, d. h. die beiden Seiten ba und ac sind zusammen größer als bc.

§. 21. Lehrsatz.

Wenn innerhalb eines Triangels über einer seiner Seiten, aus deren Endpuncten, zwei gerade Linien in Einem Puncte zusammenlaufen: So sind die zusammenlaufenden Linien kleiner als des Triangels beide übrige Seiten, schliessen aber einen größeren Winkel ein. Fig. 46.

Dies sind eigentlich zwei verschiedene Lehrsätze, welche ganz unabhängig von einander bewiesen werden. Wenn man nemlich innerhalb des $\triangle$ abc auf der Grundlinie bc den kleineren $\triangle$ bdc errichtet, so sind I. die Seiten bd und dc des kleineren Triangels zusammen kleiner als die Seiten ba und ac des größeren Triangels; aber es ist II. der $\angle$ bdc im kleineren Triangel größer, als der $\angle$ bac im größeren. Daher ist

I. im ersten Satze

1. Die Thesis: $bd + dc < ba + ac$; oder: $ba + ac > bd + dc$.

2. Hülfs-

2. Hülfssätze. Der Beweis beruht ganz auf §. 20, mit Zuziehung des 4ten G. (nach der, §. 17 gegebenen Erläuterung dieses G.). Um §. 20 anwenden zu können, bedarf es

3. Der Hülfslinie de (d. h. der bis an die Seite ac verlängerten Seite bd), wodurch zwei neue Triangel, abe und dec, entstehen.

4. Disposition. Man hat zu zeigen, 1) daß $ba + ac > be + ec$, und 2) daß $be + ec > bd + dc$, woraus 3) die Thesis sich ergiebt.

5. Beweis.

1) Um einzusehen, daß $ba + ac > be + ec$, bemerke man, daß im $\triangle abe$ (§. 20) die Seiten $ba + ae > be$ sein müssen. Addirt man nun auf beiden Seiten die Linie ec, so ist (G. 4) $ba + ae + ec > be + ec$; und weil $ae + ec$ nichts anderes als die Seite ac ist, so kann ich in jenen Ausdruck ac für $ae + ec$ setzen. Daher ist $ba + ac > be + ec$.

2) Sieht

2) Sieht man nun auf den $\triangle$ dec, so sind auch hier (§. 20) de $+$ ec $>$ dc. Wird auf beiden Seiten bd addirt, so muß (wie vorhin nach G. 4) bd $+$ de $+$ ec $>$ bd $+$ dc sein. Nun machen bd $+$ de die Linie be aus, und es kann daher in jenen Ausdruck be anstatt bd $+$ de gesetzt werden, so daß nun $be + ec > bd + dc$.

3) Man vergleiche hierauf den Schlußsatz von n. 1 mit dem von n. 2. Die Summe ba $+$ ac war größer als die S. be $+$ ec, und diese wieder größer als die S. bd $+$ dc; folglich muß ja offenbar ba $+$ ac $>$ bd $+$ dc, oder, wie es im Lehrsatze heißt: bd $+$ dc $<$ ba $+$ ac sein.

II. Im zweiten Satze

1. ist die Thesis: V bdc $>$ V bac.

2. Der Beweis beruht allein auf §. 16, welcher (nach derselben Const. wie in n. I) auf die beiden Triangel dec u. abe Anwendung findet.

3. Dis-

3. Disposition. Die Th. zu beweisen, muß man den V dec mit zu Hülfe zu nehmen, und zeigen, daß 1) V bdc > dec, 2) V dec bac, also 3) V bdc > bac sei.

4. Beweis.

1) Betrachtet man den △ dec, so kann man den V bdc als einen durch die Verlängerung der Seite ed entstandenen äußeren Winkel an jenem Triangel ansehen, welcher daher (§. 16) größer, als jeder von den, ihm entgegen stehenden inneren ist, z. B. größer als V dec; also *V bdc > dec.*

2) Sieht man aber auf den △ abe, so ist wieder der V dec als ein, durch die Verlängerung der Seite ae entstandener äußerer Winkel an diesem Triangel zu betrachten, und also (§. 16) größer als jeder der entgegen stehenden inneren; folglich *V dec > bac (bae).*

3) Vergleicht man nun, was n. 1 lehrt, „daß bdc größer ist als dec" mit

dem, was sich aus n. 2 ergibt, „daß dec wieder größer ist, als bac“: So muß ja ohne Zweifel $\mathrm{V}\,bdc > \mathrm{V}\,bac$ sein.

§. 22. Aufgabe.

Es sind drei gerade Linien gegeben, von denen jede zwei zusammen größer als die dritte sind; man soll einen Triangel beschreiben, dessen Seiten den gegebenen Linien, jede für sich, gleich sind. Fig. 47.

Gegeben sind hier drei gerade Linien: a, b, c; welche die Eigenschaft haben, daß $a+b>c$; $a+c>b$; und $b+c>a$.

Verlangt wird, aus diesen einen Triangel zu beschreiben, d. h. einen Triangel zu zeichnen, dessen Seiten, einzeln, jenen drei Linien gleich seien. Eben darum mußten die drei Linien die erwähnte Eigenschaft haben. Denn nach §. 20 sind in jedem Triangel jede zwei Seiten zusammen größer als die dritte; aus drei Linien also, welchen diese Eigenschaft fehlte, ließe sich kein Triangel construiren.

I. Auf-

I. Auflösung. Man ziehe von einem beliebigen Puncte d aus eine Linie, welche nach e hin unbegränzt sei. Auf diese trage man, von d aus, eine der gegebenen, etwa a; sie wird bis f reichen. Von f aus trage man die zweite Linie b auf, welche bis g reicht; und von g aus trage man die dritte Linie c auf, die sich bis h erstrecken wird. So ist denn df=a; fg=b; gh=c. Danach nehme man fd in den Zirkel, und beschreibe damit aus f einen Kreis; eben so fasse man gh in den Zirkel, und beschreibe damit aus g einen Kreis. Beide Kreise werden unfehlbar einander schneiden, hier im Puncte k; von diesem ziehe man alsdann kf und kg, so entsteht daraus der △ kgf.

II. Beweis, daß kgf der verlangte Triangel sei, dessen Seiten

1. (Thesis) den gegebenen Linien, Stück für Stück, gleich seien. Man merke dabei auf das, was in der Construction geschehen, daß nemlich fd der Linie a, fg der Linie b, und gh der Linie c gleich gemacht ist.

2. Erinnert man sich an E. 15 und G. 1, so ist ohne Zuziehung besonderer Lehrsätze der

3. Beweis leicht geführt, wenn man die Seiten des $\triangle$ kgf nach einander betrachtet. Denn nach der Const. ist fd=a; aber (E. 15) fd=fk; mithin (G. 1) fk=a. Eben so ist n. d. Const. gh=c; und (E. 15) gh=gk; folglich (G. 1) gk=c. Die dritte Seite des Triangels, nemlich fg, war n. d. Const. der Linie b gleich; also hat der Triangel die verlangten Seiten erhalten.

Anm. Bei der Anwendung der gegebenen Auflösung in der Folge hat man nicht nöthig, ganze Kreise zu zeichnen, sondern nur kleine Bogen, in der Gegend, wo die Kreise einander schneiden würden; weil es bloß auf den Punct k ankommt.

§. 23. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie, an einen in ihr gegebenen Punct, einen, einem gegebenen gleichen geradlinichten Winkel zu setzen. Fig. 48.

Gegeben ist hier 1) eine gerade Linie ab, 2) in derselben ein Punct a, und 3) außerhalb derselben ein Winkel ecd.

Ver-

Verlangt wird, an a einen, dem V ecd gleichen Winkel anzulegen, und zwar so, daß die Linie ab ein Schenkel desselben werde.

I. Auflösung. Ohne weitere Vorrichtung an a einen Winkel von bestimmter Größe zu legen, dazu finden sich in den bisher vorgetragenen Sätzen noch keine Hülfsmittel. Wie aber, wenn der Winkel ecd ein Winkel in einem Triangel wäre. Könnte man dann nicht auf der Linie ab einen Triangel construiren, welcher jenem gleich wäre, mithin auch den verlangten Winkel in sich enthielte? Ließe sich auch nicht diese Construction so einrichten, daß der Winkel gerade an den Punct a käme? Ein Rückblick auf die vorige Aufgabe und auf den 8ten §. wird dies lehren. Um den V ecd zu einem Triangelwinkel zu machen, darf man nur auf den Schenkeln desselben, ce und cd, zwei beliebige Puncte, f und g, nehmen, und sie durch die Linie fg verbinden. Dadurch entsteht ein Triangel, dessen Seiten cf, cg und fg sind; und mit diesen beschreibe man (n. §. 22) auf ab einen neuen Triangel akh, jedoch mit der Vorsicht, daß die Seiten des △ akh dieselbe Lage gegen ab haben, wie die Seiten des △ cfg gegen ce. (Man fängt zu dem Ende damit an, daß man (§. 3) cf auf ab von a aus in die Richtung nach b hin legt. Alsdann beschreibt man, wie der vorige §. lehrt, mit cg von a aus einen Bogen, und eben so mit fg von k aus. Beide Bogen treffen einander in h, und von h zieht man darauf nach a und nach k.) Es ist also dann ak=cf, ah=cg, und kh=fg.

II. Der Beweis, daß dadurch das verlangte geschehen sei, daß nemlich der Winkel bei dem gegebenen V ecd (oder fcg) gleich sei, hat keine Schwierigkeit, so bald man nur an §. 8 zurückdenkt. Denn aus der Const. erhellet ja, daß die Seiten des △ akh einzeln den Seiten des △ cfg gleich sind, und auch in jenem Triangel dieselbe Lage haben, wie in diesem. Daher sind (§. 8) in beiden Triangeln jede zwei gleichliegende Winkel ebenfalls gleich), folglich V kah=V ecd (oder fcg). Auch liegt der V kah am Puncte a, und zwar so, daß ab einen Schenkel des W. ausmacht; mithin ist die ganze Aufgabe aufgelöst.

§. 24.

§. 24. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, jede für sich, gleich sind; ein Winkel (des Einen Triangels) aber größer ist, als ein Winkel (des Anderen Tr.), der nemlich, welchen die gleichen Seiten einschließen: So ist auch die dritte Seite in jenem Triangel größer, als die dritte in diesem. Fig. 49.

Erläuterung. Wenn man die Triangel abc und def so gezeichnet hat, daß die Seiten ab und ac des △ abc einzeln so groß sind, als die Seiten de und df des △ def, der dazwischen liegende Winkel (bac) aber in jenem Triangel größer ist als der in diesem (edf): So soll bewiesen werden, daß unter solchen Bedingungen allemal die Seite bc, welche jenem größeren Winkel (des ersten Tr.) gegenüber liegt, auch größer sei als die Seite ef, welche dem kleineren Winkel (des zweiten Tr.) entgegen steht. Es ist hier also

1. Hypothesis: ab = de; ac = df; V bac > V edf. Thesis: bc > ef. Dies zu beweisen, erfordert

2. mehrere Hülfssätze: 1) §. 4; 2) §. 5, und 3) §. 19. Und deshalb ist noch

3. eine besondere weitläuftige Construction nöthig. Man lege (§. 23) an de im Puncte d einen Winkel an, welcher dem V bac (der n. d. Hyp. größer als V edf ist) gleich sei, also den V edg, und mache den neuen Schenkel desselben, dg, so lang, daß er der Seite ac gleich sei, mithin auch der Seite df (weil n. d. Hyp. ac = df). Endlich ziehe man ge und gf. Dadurch sind drei neue Triangel, edg, dfg und efg entstanden, welche zum Theil über einander liegen, und den Zuhörern deutlich gezeigt werden müssen. Mit Hülfe derselben, besonders des △ efg, welcher die beiden Seiten bc und ef in sich vereinigt, kann die Th. dargethan werden, und zwar nach folgender

4. Disposition. Es ist zu beweisen, daß 1) eg = bc; 2) V efg > V egf, und also 3) eg (bc) > ef sei.

5) Be-

5. Beweis.

1) Die beiden Triangel abc und deg sind (HS. 1) einander gleich, weil (n. d. Hyp.) ab = de und (n. d. Const.) nicht nur ac = dg, sondern auch V bac = V edg ist. Ist aber hiernach △ abc = △ deg, so sind auch die gleichliegenden dritten Seiten derselben, nemlich bc und eg gleich; was also in der Folge von eg bewiesen wird, das gilt auch von bc.

2) Man sehe nun auf den △ dfg, welcher ein gleichschenklichter ist, indem (n. d. Const.) df = dg; worin also (HS. 2) V dfg = V dgf. Offenbar ist aber V efg > dfg, mithin auch V efg > dgf. Da nun wiederum V dgf > egf, so muß noch viel mehr V efg > V egf sein.

3) Diese beiden Winkel efg und egf sind aber zugleich Winkel des kleinen △ efg. Daher muß (HS. 3) in diesem Triangel dem größeren

kel auch eine größere Seite gegenüber liegen; also ist e g > e f, und folglich, wenn man hiermit den Schlußsatz von n. 1 vergleicht, auch b c > e f.

§. 25. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Seiten zweien Seiten, jede für sich, gleich sind, die dritte Seite (des Einen Triangels) aber größer ist als die dritte (des Anderen Triangels): So ist auch ein Winkel in jenem Triangel größer als ein Winkel in diesem, der nemlich, welchen die gleichen Seiten einschließen. Fig. 50.

Die Verwandtschaft dieses Satzes mit dem vorigen ist leicht einzusehen. Dort wurde angenommen, daß die Winkel zwischen den gleichen Seiten ungleich wären, und daraus auf die Ungleichheit der denselben gegenüber liegenden dritten Seiten geschlossen. Hier wird angenommen, daß zwar zwei Seiten des △ a b c zweien Seiten des △ d e f gleich, aber die dritten Seiten, b c und e f, in beiden Triangeln

geln ungleich seien, und daraus soll bewiesen werden, daß der V bac, welcher der größeren von jenen beiden Seiten, bc, gegenüber steht, größer sei als der V edf, welcher der kleineren von jenen beiden Seiten, ef, gegenüber steht. Also ist hier

1. Hypothesis: ab = de; ac = df; bc > ef. Thesis: V bac > V edf.

2. Hülfssätze: 1) §. 4, und 2) §. 24.

3. Disposition. Der Beweis wird indirect geführt; es wird 1) angenommen, daß V bac nicht größer sei als V edf, und daraus etwas, der Hyp. widersprechendes hergeleitet, welches 2) auf die Wahrheit der Thesis schließen läßt.

4. Beweis.

1) Wäre V bac nicht größer als V edf, so müßten entweder beide gleich, oder edf müßte größer sein.

a) Nähme man V bac = V edf an, so wäre, da (n. d. Hyp.) auch ab = de und ac = df ist, (HS. 1) bc = ef. Dies kann aber nicht sein, weil n. d. Hyp. bc > ef ist.

b) Wollte man annehmen, daß $V\,edf > V\,bac$, so müßte man (HS. 2) schließen, daß auch $ef > bc$ sei. Aber auch dies ist unmöglich, weil es der Hyp. widerspricht.

2) Kann nun, der Hyp. zufolge, $V\,bac$ weder dem $V\,edf$ gleich sein (n. a), noch auch kleiner als edf (n. b): Was bleibt alsdann weiter übrig, als daß $V\,bac > V\,edf$ ist? Mithin ist der Satz erwiesen.

Anm. Eine freiere Ansicht des Beweises wäre folgende. In Absicht der Größe beider Winkel gibt es nur drei Fälle: Entweder 1. sind sie einander gleich, oder 2. es ist $edf > bac$, oder 3. $bac > edf$. Aus n. 1 würde folgen: daß $bc = ef$; aus n. 2: daß $ef > bc$. Beides ist nach der Hyp. unmöglich, also n. 3 das einzige, welches unter den Bedingungen dieses Satzes Statt finden kann.

§. 26.

§. 26. Lehrsatz.

Wenn in zwei Triangeln zwei Winkel zweien Winkeln, jeder für sich, gleich sind, und eine Seite einer Seite gleich ist, sie mag nun an den gleichen Winkeln, oder einem derselben gegenüber liegen: So sind auch die beiden übrigen Seiten (des Einen Triangels) den beiden übrigen Seiten (des Anderen Triangels), jede für sich, auch der dritte Winkel (im ersten) dem dritten (im zweiten Triangel) gleich. Fig. 51 und 52.

Dieser Satz zerfällt in zwei Theile, oder eigentlich in zwei Sätze, deren jeder einen eigenen Beweis erfodert; denn der Fall ist ganz anders, wenn die, in beiden Triangeln gleiche Seite zwischen den gleichen Winkeln, als wenn sie einem von diesen Winkeln gegenüber liegt.

Erster Fall.

Es sind hier zwei Triangel, abc und def, (Fig. 51) so gezeichnet, daß die beiden Winkel an der Seite bc, einzeln den beiden Winkeln an der Seite ef gleich, und daß diese Seiten selbst gleich lang sind. Also ist in diesem Falle

1. Hypothesis: V abc = def, V acb = dfe, und $bc = ef$. — Thesis: ba = ed, ac = df, und V bac = edf (Kurz: $\triangle\, abc = \triangle\, def$).

2. Hülfssätze: 1) §. 4; 2) G. 1; und 3) G. 9.

3. Disposition. Es kommt hier bloß darauf an, ob nach der Hyp. bewiesen werden könne, daß $ba = ed$ sei. Denn, ist dies dargethan, so treten die Bedingungen des im 4ten §. enthaltenen Lehrsatzes ein, und auf diesen wird dann der vorliegende Satz zurückgeführt. Es wird also 1) bewiesen, daß ba = ed; und zwar indirect, indem man a) das Gegentheil davon annimmt, daraus eine ungereimte Folgerung zieht, nnd so b) auf die Gleichheit von ba und ed schließt. Alsdann werden hieraus 2) die übrigen Theile der Th. hergeleitet.

4. Beweis.

1) ba muß der ed gleich sein. Denn

a) wäre dies nicht der Fall, wäre etwa ba > ed, so müßte sich auf ba von b aus eine Linie abschneiden lassen, die so lang wäre als ed. Dies sei bg. Zieht man nun gc, so entsteht dadurch △ gbc, dessen Gleichheit mit dem △ def sich beweisen ließe. Es wäre nemlich, wie eben bemerkt wurde, bg = ed; auch ist (n. d. Hyp.) bc = ef, und V gbc (abc) = V def; demnach wären zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel des △ gbc zweien Seiten und dem dazwischen liegenden Winkel des △ def gleich, also (HS. 1) △ gbc = △ def, und auch V gcb = V dfe. Nun war aber (n. d. Hyp.) V acb = V dfe, folglich wäre auch (HS. 2) V gcb = V acb, welches (HS. 3) unmöglich ist.

b) Da mithin aus dem angenommenen Satze, daß $ba > ed$, etwas ungereimtes folgt, und eben dies auch sich folgern ließe, wenn man annähme, daß $ba < ed$: So muß $ba = ed$ sein.

2) Ist nun $ba = ed$, und nimmt man dazu, daß (n. d. Hyp.) auch $bc = ef$ und der dazwischen liegende V abc = V def ist: So ist (HS. 1) $ac = df$ und V bac = V edf (mithin $\triangle abc = \triangle def$).

Anm. Man könnte auch den ganzen Beweis darauf ankommen lassen, ob $ac = df$ sei; der Gang wäre derselbe.

Zweiter Fall.

Jetzt sind die beiden Triangel abc und def (Fig. 52) so beschrieben, daß außer denen beim ersten Falle vorkommenden Winkeln (b und e, c und f), nicht die daran liegenden Seiten gleich sind, sondern die, den VV c und f gegenüber liegenden Seiten ba und ed.

[Statt

[Statt dieser beiden könnten es auch ac und df sein.] Also ist hier

1. Hypothesis: V abc = def, V acb = dfe, und *ba* = *ed*. — Thesis: bc = ef, ac = df, und V bac = edf (Kurz: △ *abc* = △ *def*).

2. Hülfssätze: 1) §. 4; 2) G. 1; und 3) §. 16.

3. Disposition (ähnlich der Disp. im ersten Falle). Es frägt sich hier nur, ob nach der Hyp. gezeigt werden könne, daß *bc* = *ef* sei. Ist dies erwiesen, so beruht der Satz wieder, wie vorhin, auf §. 4. Es wird also 1) ausgemacht, daß bc = ef, und zwar indirect, wie beim ersten Falle; daraus aber 2) das übrige der Th. gefolgert.

4. Beweis.

1) bc und ef sind gleich; denn

a) wären sie ungleich, wäre etwa bc > ef, so ließe sich doch auf bc von b aus eine Linie abschneiden, welche mit ef gleiche Länge hätte. Diese sei bk. Verbindet man nun k mit a, so entsteht ein

neuer

neuer $\triangle$ abk, der dem $\triangle$ def gleich sein müßte. Es wäre nemlich, nach eben bemerkter Construction, bk = ef; ferner ist (n. d. Hyp.) ba = ed, und V abk (abc) = V def. Mithin wäre (HS. 1) $\triangle$ abk = $\triangle$ def und V akb = V dfe. Nun war aber (n. d. Hyp.) V acb = V dfe; also müßte auch (HS. 2) V akb = V acb sein. Und dies ist (HS. 3) unmöglich, denn man kann sich akb als den, durch die Verlängerung von ck entstandenen äußeren Winkel am $\triangle$ akc vorstellen, und daraus schließen, daß er größer sei, als V acb.

b) Aus dem angenommenen Satze also, daß bc > ef sei, läßt sich ein anderer folgern, welcher eine Unwahrheit enthält; eben das wäre der Fall, wenn man ef > bc annähme: Folglich läßt es sich nicht anders denken, als daß *bc* = *ef* ist.

2) Ist

2) Ist nun ausgemacht, daß bc = ef, und nimmt man dazu, daß (n. d. Hyp.) auch ba = ed, und V abc = V def (welche zwischen den gleichen Seiten liegen): So ist (HS. 1) ac = df, und V bac = V edf (mithin △ *abc* = △ *def*).

Anm. In diesem §. sind der dritte und vierte Lehrsatz von der Gleichheit der Triangel enthalten; den ersten enthielt §. 4, den zweiten §. 8. Diese vier Sätze gehören wegen ihrer oft wiederholten Anwendung zu den wichtigsten in der ganzen Geometrie, und verdienen deshalb vorzüglich eingeschärft zu werden. Zugleich ist es interessant, ihre genaue Verwandtschaft zu beobachten; denn sowol der hier gegebene Beweis des dritten und vierten, als auch der, in der Anm. zum 8ten §. nachgewiesene (directe) Beweis des zweiten von diesen Sätzen beruhen sämtlich auf dem er-

ersten. Dieser ist eben deshalb eine der größten mathematischen Wahrheiten, die sich um so höher erhebt, je weiter man sich in der Folge der Sätze von ihr entfernt. Und bedenkt man zugleich, wie jener Satz auf dem einfachen Grundsatze, „daß zwischen zwei Puncten nur Eine gerade Linie Statt finde", sich stütze: So erscheint dieser als ein Hauptgrundstein des ganzen Gebäudes.

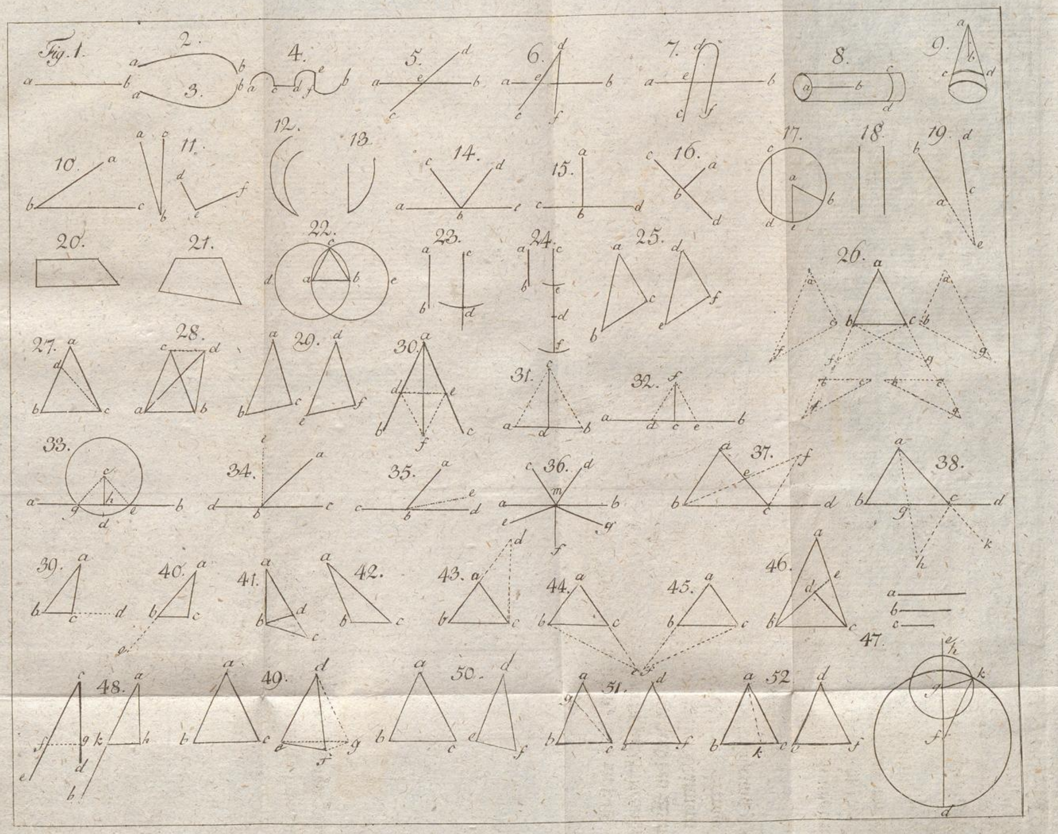
Fig. 1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52

Hanstein
Mathe-
matik.