Ueber den Vortrag der Mathematik, besonders der Geometrie in den unteren Schulclassen

Hanstein, Ludwig

Stendal, 1804

Erklärungen. (Siehe S. 50 - 52.)

urn:nbn:de:hbz:466:1-82606

Erklärungen.

(Siehe S. 50—52.)

1. Ein Punct ist, was keine Theile hat. Man gebe auch diese Definition, welche manchem faßlicher sein wird. Was keine Ausdehnung, weder in die Länge, noch in die Breite, noch in die Höhe hat. — Der Punct ist die erste rein-geometrische Idee, die so wie alle folgenden nur unter einem Bilde dargestellt werden kann. Alle Puncte, die man mit Kreide oder einem andern Material zeichnet, sind nicht wahre Puncte; denn sie sind lang, breit, und dick oder erhaben. Auch von den feinsten Darstellungen gilt dies; sonst würden sie nicht gesehen werden können, indem auf unsere Sinne nur das Ausgedehnte einen Eindruck machen kann. (Man mache

Punctbilder an der Tafel, auf Poppier u. s. w.). Der wahre Punct kann nur gedacht werden.

2. Eine Linie ist eine Länge ohne Breite.

Was Ausdehnung in die Länge hat, nicht aber in die Breite und Höhe. Die wahre Linie kann ebenfalls nur eine Idee sein, von welcher die gezeichnete ein Bild ist; Denn diese ist breit und dick oder erhaben. (Man zeichne dergleichen Linienbilder).

3. Das Aeußerste einer Linie sind Puncte.

Eine bloße Benennung, die nichts neues zu den Eigenschaften eines Punctes hinzusetzt, und wobei man sich hüten muß, den Punct nicht als einen abgesonderten, für sich bestehenden Theil der Linie anzusehen; denn ein solcher wäre immer eine Linie. Jene Benennung wird nur in gewissen Redensarten gebraucht, z. B. „Die Linie a b (Fig. 1) hat im Puncte a ihren Anfang und im Puncte b ihr Ende"; oder: „Man ziehe vom Endpuncte b der Linie a b eine andere".

5. *) Eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.

Auch, was nur Breite und Höhe hat; also eine jede Oberfläche, z. B. der Tafel, der Bank, des Buches, das Aeußere einer Wand, einer Säule u. s. w. Die Fläche kann man nicht von dem Dinge, woran man sie sieht, absondern, weil sie alsdann, auch noch so dünn abgeschält, eine gewisse Dicke haben, folglich nicht mehr Fläche sein würde. Will man also die wahre Fläche für sich allein betrachten, so ist auch sie nur eine Idee.

6. Das Aeußerste einer Fläche sind Linien.

Wiederum eine bloße Benennung. Man sagt z. B. „die Fläche endet sich in Linien".

Anm. Hierher gehört auch der Begriff eines geometrischen Körpers. Er ist das, was Ausdehnung in die Länge, Breite und Höhe (Dicke) hat. Er unterscheidet

*) Im Eukl. folgt hier erst die gerade Linie; davon nachher.

sich vom physischen Körper dadurch, daß man bei diesem auf seine Materie, z. B. Holz, Metall u. s. w. Rücksicht nimmt, bei jenem aber bloß auf den Raum, den er einschließt. Man denke sich einen Kasten oder eine hohle Kugel, woraus selbst die Luft verbannt wäre, und man hätte an dem inneren Raume, der lang, breit und hoch ist, einen geometrischen Körper; oder mit andern Worten: die Geometrie betrachtet an einem Körper bloß jene dreifache Ausdehnung. Darum muß sie sich bei jedem Körper alle physikalischen Eigenschaften desselben wegdenken; und es ist also auch der geometrische Körper nichts als eine Idee. So wie man nun vorher das Aeußerste der Fläche Linien nannte, so kann man auch das Aeußerste des Körpers Flächen nennen.

Diese vier Größen sind die einfachen Größen der Geometrie, aus deren verschiedenartiger Verbindung alle übrigen, welche diese Wissenschaft betrachtet,

tet, entstehen. Alles daher, was man in der Folge an den zusammengesetzten Größen untersucht, muß theilweise untersucht werden; eine Vorstellung, welche die Uebersicht der Beweise sehr erleichtert. Der geometrische Körper ist übrigens zwar diejenige Größe, an welcher die übrigen einfachen Größen: Puncte, Linien und Flächen sich zeigen; doch so, daß sie nicht für Theile desselben gehalten werden können, weil er sonst aus denselben zusammengesetzt wäre. Es ist also nichts gewonnen, wenn man, wie einige vorschlagen, mit der Definition des Körpers den Anfang macht.

4. Eine gerade Linie ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen Puncten auf einerlei Art liegt.

Am deutlichsten wird diese Erklärung, wenn man die krumme Linie dagegen hält. Die gerade Linie ab (Fig. 1) läßt sich zwischen den beiden Puncten a und b nicht an=

anders denken, als in der Lage, welche sie wirklich hat; sie ist der kürzeste Weg zwischen a und b. Hingegen kann man die Linie ab (Fig. 2) zwischen a und b auf mehrerlei Art legen, z. B. wie Fig. 3; auch über der Tafelfläche erhaben, welches sich mit einem Drathe andeuten ließe. Diese Linie ist also nicht gerade, sondern krumm. Würde ein Punkt diesen Weg von a nach b machen, so nähme er einen Umweg; er müßte seine Richtung ohne Unterlaß verändern, da er hingegen, wenn er nach Fig. 1 von a nach b ginge, stets in Einer Richtung bliebe. Krummer Linien lassen sich nun zwischen a und b unzählige denken; doch hüte man sich, auch solche dahinzurechnen, wie z. B. Fig. 4 zeigt. Diese ist zwar ebenfalls ein Umweg zwischen a und b, welchen man sich in sehr verschiedenen Lagen zwischen beiden Puncten denken kann; allein es gibt doch Theile in dieser Linie, welche zwischen gewissen Puncten derselben die unveränderliche Lage der geraden Linie haben, nemlich cd

und

und ef. Daher ist eine solche Linie eine gemischte oder zusammengesetzte, welche aus geraden und krummen Theilen besteht.

Anm. Aus der Erklärung der geraden Linie folgt: 1) daß man durch jede zwei Puncte nur Eine solche legen kann, daß also nur zwei Puncte nöthig sind, um die Richtung einer geraden Linie zu bestimmen; 2) daß zwei gerade Linien, welche durch einander hindurchgehen, oder, wie man es nennt, einander schneiden, dies nur einmal thun können. Denn sollten ab und cd (Fig. 5), welche einander im Puncte e schneiden, dies noch einmal thun, so müßte nothwendig Eine von beiden ihre gerade Richtung verlassen, und wieder zurückkehren; wie die Linie cd Fig. 6, wo aber in df eine dritte gerade Linie entstände; oder wie die Linie cdf Fig. 7, welche aber alsdann zu einer gemischten würde.

7. **Eine ebene Fläche oder Ebene** ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt.

Deutlicher: Eine solche Fläche, auf welcher man zwischen jeden zwei Puncten derselben eine gerade Linie ziehen kann, die ganz in der Fläche liegt. So wird dies z. B. auf einem Planspiegel, auf einer polirten Tischplatte u. s. w. der Fall sein. Man mache diese Erklärung durch mehrere Versuche augenscheinlich, halte sie dann mit krummen Flächen verschiedener Art zusammen, und lasse auf diesen durch die Schüler selbst Versuche anstellen. Sie werden sich dann überzeugen, daß man erstlich krumme Flächen habe, auf denen keine zwei Puncte sich finden, wovon jenes gilt, z. B. die Oberfläche der Kugel; daß es ferner auf manchen krummen Flächen zwar einige Puncte gebe, deren gerade Verbindungslinie ganz in die Fläche fällt, daß das aber auf solchen Flä-

Flächen doch nicht bei jeden zwei Puncten möglich sei. So findet z. B. auf der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders (Fig. 8) oder eines Kegels (Fig. 9) zwischen den Puncten a und b eine gerade Linie Statt, welche ganz in der Fläche liegt; aber die Verbindungslinie zwischen c und d wird, wenn sie in der Oberfläche liegen soll, eine krumme sein, und wenn sie gerade sein soll, durch den Körper hindurchgehen. (An der bloßen Figur läßt sich dies aber dem Anfänger nicht deutlich machen. Man nehme daher Cylinder, Kegel u. s. w. von Holz oder Pappe; die gerade Linie cd sei ein durchgestochener Stift.) Findet man übrigens auf solchen Flächen, die man im Ganzen nicht Ebenen nennen kann, doch gewisse Theile, worauf jene Definition der Ebene paßt, so sind dergleichen Flächen gemischte (so wie vorhin von gemischten Linien die Rede war). Als Beispiel dazu dient die innere oder äußere Oberfläche eines gewöhnlichen Tellers u. s. w.

Anm.

Anm. Daß man den Anfängern sage, es sei in der Planimetrie bloß von solchen Linien die Rede, welche in Einer Ebene liegen, ist unnütz; denn auf das Gegentheil fallen sie nicht, und erhalten durch jene Andeutung, welche ihnen gewöhnlich unverständlich bleibt, keinen helleren Blick.

8. Ein Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander. (Die übrigen Bestimmungen beim Euklides sind, laut voriger Anmerkung, hier noch ohne Nutzen.)

Es entsteht also durch jede zwei Linien, welche in ihren Endpuncten einander treffen (Fig. 10) ein Winkel, und jede zwei einander schneidende Linien (Fig. 5) geben vier Winkel. Hier erkläre man zugleich die Ausdrücke Scheitel, b, und Schenkel, ba und bc: lehre den Winkel nach drei Buchstaben benennen, so daß der Buchstabe am Scheitel in die Mitte komme (abc); und mache deutlich, daß die Größe des Winkels nach der größeren oder geringeren Oeffnung der Schenkel,

kel, und nicht, wie es Anfänger gewöhnlich thun, nach der Länge derselben geschätzt werde. Man zeichne daher zur Beurtheilung Winkel, wie abc und def, Fig. 11.

9. Sind die Linien, welche den Winkel einschließen, gerade, so heißt derselbe ein geradlinichter Winkel.

Leicht zu verstehen, wenn man krummlinichte Winkel, wie Fig. 12, oder solche, die von einer krummen und einer geraden Linie eingeschlossen werden, wie Fig. 13, dagegen hält. Doch gehören die beiden letzten nicht in die Planimetrie.

Anm. Wichtiger ist hier noch die Definition der Nebenwinkel und Scheitelwinkel. Unter Nebenwinkel versteht man zwei, drei oder mehrere Winkel mit einem gemeinschaftlichen Scheitelpuncte, von denen immer zwei einen Schenkel gemein haben, und deren zwei äußerste Schenkel in Einer geraden Linie liegen, wie abc, cbd, dbe, Fig. 14. Scheitelwinkel haben zwar ebenfalls den Scheitel, aber keinen der Schenkel gemein, sondern von diesen liegen jede zwei entgegengesetzte in Einer geraden Linie, wie bei aec und und deb, oder aed und ceb, Fig. 5. Oder es sind — anders definirt — zwei Winkel, in einer solchen Lage, als wären die Schenkel des Einen durch die über den Scheitel hinaus geschehene Verlängerung der Schenkel des Andern entstanden. Nebenwinkel sowol als Scheitelwinkel entstehen also, wenn zwei gerade Linien einander schneiden.

10. Steht eine gerade Linie auf einer anderen so, daß sie gleiche Nebenwinkel macht, so heißt sie perpendicular auf der anderen; und jeder der beiden gleichen Winkel heißt ein rechter Winkel.

Hierbei ist zu bemerken, daß der mathematische Begriff des Perpendicularen oder Senkrechten weit mehr umfasse, als der in der Physik vorkommende Begriff des Verticalen. Die Verticallinie in der Physik ist die Richtung der Schwere, und diejenige, mit welcher sie rechte Winkel bildet, heißt die Horizontallinie. Die Perpendicularlinie in der Mathematik hingegen bestimmt sich nicht durch eine einzige, unabänderliche Richtung, sondern nur durch eine gewisse Lage gegen irgend eine andere Linie. Daher macht nicht bloß a b mit c d, Fig. 15, rechte Winkel, sondern auch a b mit c d Fig. 16 u. s. w.

11. 12. Stumpfer Winkel; spitzer Winkel.

Leicht zu verstehen. Jeder Winkel, der kein rechter ist, heißt allgemein ein schiefer. (Man vergesse nur nie die Zeichnung.)

13. 14. Gränze, das Aeußerste eines Dinges. Figur, was von Gränzen eingeschlossen ist.

Im engeren Sinne gebraucht man das

Wort Figur nur von begränzten Flächen", und in der Planimetrie nur von begränzten Ebenen (7). Der Ausdruck Fläche (5) zeigt eine unbegränzte Ausdehnung in die Länge und Breite an; Figur aber eine begränzte. Die geraden Gränzlinien heißen Seiten.

15. Ein Kreis ist eine ebene Figur, von einer einzigen Linie, Umkreis (Umring, Peripherie) genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche bis zu derselben aus einem gewissen, innerhalb der Figur befindlichen Puncte gezogen werden, alle einander gleich sind.

Zur Erläuterung des hierher gehörigen Grundsatzes, „daß alle Radien Eines Kreises einander gleich sind", dient auch besonders die genetische Definition des Kreises: „Er entsteht, wenn eine gerade Linie a b (Fig. 17) sich um den einen vesten Endpunct a herumbewegt, bis sie

wieder

wieder in die anfängliche Lage kommt. Die immer gleichbleibende ab ist der Radius, und der Punct b beschreibt die Peripherie.

Anm. Unterschied zwischen den Ausdrücken Peripherie und Perimeter; jenes ist die Begränzungslinie des Kreises; dieses bedeutet die Summe der Gränzlinien jeder anderen Figur.

16 — 19. Leicht zu fassende Erklärungen vom: **Mittelpuncte, Durchmesser, Halbkreise und Abschnitte.**

Anm. Hierher gehören auch die Definitionen von der Sehne, als einer geraden Linie cd (Fig. 17), die von Einem Puncte der Peripherie bis zu einem Anderen, aber nicht durch den Mittelpunct geht; vom Bogen, als einem jeden Stücke der Peripherie, wie be; und vom Ausschnitte, als einem Theile des Kreises zwischen zwei Radien, und dem durch diese abgeschnittenen Bogen, wie bae.

20—23. Geradlinichte Figuren; dreiseitige, vierseitige, vielseitige oder Polygone —

erklären sich durch den Namen.

24—29. Eintheilung der Dreiecke.

Man kann sie tabellarisch so ordnen:

I. nach den Seiten.	II. nach den Winkeln:
1. gleichseitige.	1. rechtwinklichte.
2. gleichschenklichte.	2. schiefwinklichte; entweder
3. ungleichseitige.	a. stumpfwinklichte, oder
	b. spitzwinklichte.

Zeichnet man in eben dieser Ordnung die dazu gehörigen Figuren an der Tafel, so werden die verschiedenen Merkmale sehr deutlich.

35. Parallel (Fig. 18) sind gerade Linien, die, so weit man sie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen *).

Dies muß ebenfalls durch Zusammenstellung

*) Die Folge lehrt, warum es rathsam sei, diese Definition hier vorauszuschicken.

lung mit dem Gegentheile, d. i. mit Linien (Fig. 19), die an Einer Seite, bei a und c, convergent, und an der Anderen Seite, bei b und d, divergent sind, deutlich gemacht werden. Man zeige, daß diese in e zusammen laufen, sobald man sie verlängert.

30 — 34. Eintheilung der Vierecke.

Auch diese lassen sich nach folgender Tabelle mit eben so geordneten Figuren darstellen:

I. Parallelogramme.		II. Nichtparallelogramme.
1. Rechtwinklichte —	2. Schiefwinklichte.	
Rectangel;		1. Trapez;
a. mit gleichen Seiten-Quadrat;	a. mit gleichen S.-Rhombus;	2. Trapezoid.
b. mit ungleichen S.-Oblongum.	b. mit ungleichen S.-Rhomboid.	

Diese Ordnung erleichtert die Definitionen, wenn man bei No. I. überall den Begriff des Parallelogramms, als „eines Vierecks mit zwei Paar paralleler Seiten" zum Grunde legt. Alsdann ist nemlich das Quadrat ein rechtwinklichtes Parallelogramm mit gleichen, das **Oblongum** ein rechtw. Parall. mit ungleichen Seiten u. s. w. Unter No. II. ist das **Trapez** ein Viereck mit Einem Paar paralleler Seiten, wie Fig. 20; das **Trapezoid** aber ein Viereck ohne allen Parallelismus der Seiten, wie Fig. 21.

Foderungen.

Die Möglichkeit, diese Aufgaben zu lösen, ist zu leicht einzusehen, als daß sie einer Erklärung bedürfte. Wer sie nicht begreift, für den mögte wol jeder mathematische Begriff unerreichbar sein.

Grundsätze.

(S. Seite 53.)

Num. 1—7. Diese lassen sich am besten durch Zahlen erläutern, z. B. n. 1: $4+4=8$; $6+2=8$; also $4+4=6+2$. — n. 2: $3+2=5$; wenn ich also zu $3+2$ noch 3, und eben so zu 5 auch 3 addire, so muß $3+2+3=5+3$ sein, beides nemlich $=8$. — n. 6: $2\times3=6$; also

auch

auch $2 \times (2+1) = 6$, weil nemlich $3 = 2+1$ war.

8. Was einander deckt, ist einander gleich.

Dies gilt nur von Linien, Winkeln (wobei auf die Bemerkung über Fig. 11 (8. Erkl.) Rücksicht genommen werden muß), von Ebenen und Figuren im engeren Sinne (11. Erkl.). Man zeige es durch wirkliches Uebereinanderlegen dünner Platten, z. B. gleicher und ungleicher Triangel von Holz u. s. w.; wobei aber das körperliche Wesen solcher Figurenbilder sorgfältig beseitiget werden muß.

Anm. Man bemerke, daß sich dieser Grundsatz nicht immer umkehren lasse, weil es Größen gebe, welche gleich sind, ohne einander zu decken. Von geraden Linien und Winkeln gilt die Umkehrung immer; sonst aber kann nur, was gleich und ähnlich ist, einander decken — ein Satz, der in der Folge erst deutlich werden kann.

N. 9. bedarf keiner Erläuterung.

N. 10. liegt in der Definition des rechten Winkels (10. Erkl.).

N. 11. Die Erläuterung dieses Grundsatzes mögte für Anfänger wol nicht wenig Schwierigkeiten haben. Denn entweder verstehen sie nichts davon, oder wenn sie ihn einigermaßen begreifen, so werden sie sich wundern, daß sie so einen Satz ohne Beweis annehmen sollen. Die Zweifel gegen seine Richtigkeit werden ihnen bei jeder nachfolgenden Anwendung desselben in den Weg treten, und ihnen die streng beweisende Wissenschaft von einer schwachen Seite zeigen. Man streiche daher diesen Satz als Grundsatz aus, und schiebe ihn hinter Lib. I, 29 als Lehrsatz ein, wo er sich aus dem bis dahin vorgetragenen bündig erweisen läßt *).

No. 12.

*) Anm. Wird denn das Problem nie gelöst werden, diesen Satz ohne Hülfssätze zu beweisen? Oder hat man alle Hoffnung dazu aufgegeben? Des Hrn. Prof. Klügel's Anfangsgründe, in welchen ein, freilich nicht befriedigender Beweis davon versucht ist, zeigen wenig-

No. 12. Zwei gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Ist durch Winkel und Parallellinien leicht zu erläutern. Zu einer geradlinichten Figur gehören wenigstens drei Gränzlinien oder Seiten.

Aufgaben und Lehrsätze.

(S. Seite 55—73.)

§. 1. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie einen gleichseitigen Triangel zu errichten.

Diese Aufgabe zerfällt in zwei Theile: die Erfüllung des Verlangten, und den Beweis, daß es damit seine Richtigkeit habe. Ehe man aber die Auflösung unternimmt, erinnere man sich

wenigstens, wie sehr die systematische Ordnung der Elementarsätze dadurch gewinnen würde, wenn man mit der Lehre von den Linien und Winkeln anfangen könnte.