UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Visual Library

Dr. W. JORDAN

VERMESSUNGSKUNDE

I

AUSGLEICHUNGS-RECHNUNG



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

3984.
L. d. 1.

E. k. 3984,
1290.



Karl Friedrich Gauss.

Geboren am 30. April 1777 in Braunschweig,
gestorben am 23. Februar 1855 in Göttingen.

Theoria motus, art. 179 und art. 186:
„quadrata differentiarum ... summam minimam efficiunt."
„.... principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus."

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

E. K. 3984
1290

HANDBUCH

DER

VERMESSUNGSKUNDE

VON

Dr W. JORDAN
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU HANNOVER

ERSTER BAND

AUSGLEICHUNGS-RECHNUNG

NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

VIERTE ERWEITERTE AUFLAGE

03
M
22955





STUTTGART
J. B. METZLER'SCHER VERLAG
1895



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Übersetzungsrechte vorbehalten.

J. B. Metzlersche Buchdruckerei, Stuttgart.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

VORWORT.

Diese neue, 4. Auflage enthält in dem I. Kapitel im wesentlichen wieder den früheren grundlegenden Teil, das II. und III. Kapitel sind in praktischer Beziehung durch die Hannoversche Triangulierung und auch in theoretischer Beziehung durch manche neue Teile erweitert, und die folgenden Kapitel IV. und V. sind fast völlig umgearbeitet, so dass die zweite Hälfte dieses Bandes wohl wieder als ein neues Werk bezeichnet werden kann.

Alles, was zur einfachen laufenden trigonometrischen Praxis gehört, ist in Kürze enthalten etwa in folgenden Paragraphen:

§ 1.—23. , § 25.—28. , § 37.—41. , § 57.—61. , § 88.—93.

Diese wenigen 43 Paragraphen werden zuerst zu studieren sein, sie enthalten auch mindestens alles das an Theorie, was z. B. zum Verständnis der neuen preussischen trigonometrischen Anweisungen nötig ist.

Im Interesse des weiten Leserkreises solcher Landmesser und Trigonometer, die damit sich begnügen, haben wir an allen Abschnitten, die darüber hinausgehen, Andeutungen zum Überschlagen gemacht, z. B. gleich in § 24. S. 77 dem Leser geraten, die Theorie des Funktions-Gewichtes zunächst zu übergehen und erst nach Bedürfnis später nachzuholen. Auch wo solcher Rat nicht so geradezu gegeben werden konnte, sind die erst in zweiter Linie nötigen Theorien doch stets genügend kenntlich gemacht, so dass der Anfänger sich davon fernhalten kann.

Andererseits hoffen wir aber, dass nach Erlernung der elementaren Teile die Ermutigung zum Lesen auch der schwierigeren Abschnitte sich einstellen möge, und dass z. B. kein deutscher „Trigonometer“ unterlassen werde, sich mit der Besselschen (§ 72.) und mit der Schreiberschen (§ 79.) Triangulierungsausgleichung bekannt zu machen, auch wenn er sie nicht unmittelbar braucht; dahin gehört z. B. auch die Theorie der Richtungsgewichte (§ 75.—77.), die Theorie der günstigsten Bedingungsgleichungen im Viereck (§ 84.—85. und § 145.) u. s. w.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ein vorzügliches Versuchs-Material für diesen Band hat die vom Verfasser in den letzten Jahren ausgeführte Hannoversche Stadt-Triangulierung geliefert, erstens zur Netz-Ausgleichung und zweitens zu den Punkteinschneide-Ausgleichungen. Die Netz-Ausgleichung § 60. 61. gab zugleich Veranlassung, die Coordinatenrechnung sowohl im conformen System der Landesaufnahme (§ 63.) als auch im Soldnerschen System der Katasterverwaltung (§ 64.) durchzuführen, und beide Rechnungsarten zu vergleichen. Die Punkteinschneidungen haben, wie wir hoffen, es ermöglicht, für die Rechenformen und Rechenformulare, wie sie bei den trigonometrischen Behörden der einzelnen Staaten zur Zeit vorkommen, einen Beitrag zur Weiterentwicklung zu geben.

Schon lange haben wir für Vereinfachung dieser kleinen trigonometrischen Ausgleichungen, für glatte Bezeichnungen, zweckmässige Anordnung der Rechenproben, und Beseitigung des Ziffernbalastes gekämpft, wozu vor allem die Einführung des Rechenschiebers nützlich gefunden wurde; und es war mir eine Freude, hierin einen guten Bundesgenossen vor kurzem gefunden zu haben in den neuen Württembergischen Vorschriften zur Fortführung des Katasters (vgl. Zeitschr. f. Verm. 1895, S. 283—285).

Solche Vereinfachungs- und Rechenschieber-Verfahren u. s. w. genügend auszuprobieren, und in Formularen auszudrücken, (z. B. S. 343 und S. 351) sind die 158 Punkteinschneidungen mit 1300 Richtungen (§ 143. S. 558) sehr nützlich gewesen; die verschiedenen Zahlenfragen von § 105. und § 144. und die darin enthaltenen Vergleichungen sind das Ergebnis davon.

Dass in Hinsicht auf die mathematischen Bezeichnungen, die alten klassischen $[bb.1]$, $[ll.2]$ und andere Bezeichnungen, welche seit vielen Jahrzehnten in der Methode der kleinsten Quadrate sich eingebürgert haben (vgl. S. 54), auch in diesem Bande beibehalten wurden, wird keiner Begründung bedürfen.

Ein früheres Kapitel, Genauigkeits-Kurven, Fehler-Ellipsen u. s. w. musste in dieser Auflage gänzlich geopfert werden, um den Band in mässigem Umfange und damit mit mässigem Preise verkäuflich zu erhalten; eine besondere Ausgabe jenes jedem Trigonometer oder Mathematiker gewissen Reiz bietenden Abschnittes, sowie auch eines ebenfalls nur aus Raumrücksichten zurückgelegten Kapitels über Polygon-Züge, könnten unter Umständen nachgeholt werden.

Statt dessen haben wir jetzt im letzten Kapitel V. dieses Bandes die früheren kurzen Notizen über mittlere Triangulierungsfehler zu geschicht-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

lichen Abrissen der Triangulierungen der einzelnen Staaten erweitert, welche nun, wie wir hoffen, für viele Zwecke eine beredtere Sprache reden als nackte Gleichungen und Logarithmen. Die Vermessungen der einzelnen Staaten unseres Vaterlandes zeigen sich in der Geschichte als ausgeprägte Individuen, ausgestattet mit allen Zügen geodätischer und menschlicher Charaktere ihrer Urheber.

Hier möchte ich noch die Theorie des Maximalfehlers erwähnen, welche in § 120.—121. und § 146.—147. im Anschluss an das Gauss sche Fehlergesetz sich auf längerem Wege (seit 1877, Z. f. Verm. S. 35) nun, wie mir scheint, soweit entwickelt hat, dass der bisher von aller Theorie ausgeschlossene Begriff des Grenzfehlers der Rechnung zugänglich gemacht worden ist.

In diesem Jahre 1895 feiern wir das hundertjährige Jubiläum der Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate durch Gauss, welcher in Art. 186 der „theoria motus“ schrieb:

. . . . *principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus* . . . .

Dieses hundertjährige Jubiläum haben wir gewagt zu feiern durch das unserem Bande vorgesetzte, als Photographie nach einem Ölgemälde im Welfenmuseum zu Hannover gewonnene *Bildnis von Gauss.*

Was der Meister zu Lebzeiten, 1843, seinem Schüler Gerling gestattet hat, Widmung eines Buches über Methode der kleinsten Quadrate, möge das auch heute, nach 52 Jahren, durch solche Bild-Vorsetzung einem Jünger dieser Wissenschaft gestattet sein, der auf dem klassischen Boden der Gauss schen Gradmessung geodätisch thätig ist.

Hannover, Juli 1895.

Jordan.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

INHALTS-ÜBERSICHT.

Seite

§ 1. Einleitung. Überblick über die Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate 1

Kapitel I. Allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme.

§ 2. Erklärungen 10
§ 3. Der durchschnittliche Fehler 11
§ 4. Der mittlere Fehler 13
§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz 15
§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler 19
§ 7. Das einfache arithmetische Mittel 20
§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel 24
§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen 29
§ 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck 31
§ 11. Beobachtungs-Differenzen 35
§ 12. Allgemeines Ausgleichungsprinzip 41
§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten 45
§ 14. Einführung von Näherungswerten bei zwei Unbekannten 49
§ 15. Gauss'sche Elimination, und Fehlerquadratsumme, für zwei Unbekannte . 52
§ 16. Mittlerer Gewichtseinheits-Fehler bei zwei Unbekannten 54
§ 17. Mittlere Fehler der ausgeglichenen x und y 56
§ 18. Coefficienten-Berechnung und Summenproben 59
§ 19. Eliminations-Beispiel mit zwei Unbekannten 62
§ 20. Eliminations-Rechnung mit Logarithmen 65
§ 21. Ungleiche Gewichte 67
§ 22. Nicht lineare Funktionen 70
§ 23. Ausgleichung von Barometerständen 72
§ 24. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen x und y 77
§ 25. Übergang zu beliebig vielen Unbekannten 80
§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen 83
§ 27. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ und mittlerer Fehler m 84
§ 28. Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. 87
§ 29. Gewicht einer Funktion der x , y , z nach der Ausgleichung 92

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Seite
§ 30. Gewicht einer Funktion von Funktionen 94
§ 31. Partielle Elimination 95
§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder 98
§ 33. Gemeinsame Bestimmung aller Unbekannten x , y , z . . . und aller Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. 100
§ 34. Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Normalgleichungen . 106
§ 35. Determinantenformeln für drei Elemente 108
§ 36. Interpolations-Ausgleichung einer periodischen Erscheinung 110

Bedingte Beobachtungen.

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen 115
§ 38. Minimum mit Nebenbedingungen 117
§ 39. Bedingte Beobachtungen mit Korrelaten 118
§ 40. Ungleiche Gewichte 120
§ 41. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ 122
§ 42. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Elemente 123
§ 43. Zusammenstellung der Formeln für Ausgleichung bedingter Beobachtungen 126
§ 44. Ausgleichung der drei Winkel eines ebenen Dreiecks 128
§ 45. Partielle Ausgleichung 130
§ 46. Gewicht einer Funktion von Funktionen 133
§ 47. Verschiedene Nebenbetrachtungen 134
§ 48. Günstigste Gewichtsverteilung. Der Schreibersche Satz 138

Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

§ 49. Eliminierung der Bedingungsgleichungen 145
§ 50. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung . . . 146
§ 51. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils 148
§ 52. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler 151
§ 53. Funktionsgewicht nach der Ausgleichung 153
§ 54. Vermittelnde Beobachtungen mit partiellen Bedingungsgleichungen . . . 154
§ 55. Formel-Zusammenstellung für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen 156
§ 56. Zusammenfassung aller Formen von Ausgleichungsaufgaben 161

Kapitel II. Triangulierungs-Netze.

§ 57. Bedingungsgleichungen im Viereck 164
§ 58. Allgemeine Betrachtung der Bedingungsgleichungen 170
§ 59. Ausgleichung eines Vierecks mit vollen Richtungssätzen 178
§ 60. Triangulierungs-Netz der Stadt Hannover 185
§ 61. Ausgleichung des Hannoverschen Fünfecks 189
§ 62. Genauigkeit einer Netz-Diagonale 197
§ 63. Abrisse und Coordinaten im System der Landesaufnahme 200
§ 64. Abrisse und Coordinaten im Kataster-System mit dem Nullpunkt Celle . 205
§ 65. Schwerds Basisnetz mit Winkelmessungen 207
§ 66. Triangulierungsausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Schwerds Basisnetz 213

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Seite

§ 67. Stationsausgleichung mit Winkelmessungen 217
§ 68. Berechnung voller Richtungssätze 224
§ 69. Genäherte Berechnung unvollständiger Richtungssätze 227
§ 70. Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsmessung 230
§ 71. Strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze 232
§ 72. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach Bessel s Methode 239
§ 73. Genauigkeitsbestimmung für die Bessel sche Dreiecksnetz-Ausgleichung . 246
§ 74. Die Bessel sche Nullpunkts-Korrektion z 249
§ 75. Theorie der vollen Richtungssätze 251
§ 76. Besonderer Fall dreier Sichtstrahlen 254
§ 77. Winkelmessung in allen Combinationen 259
§ 78. Winkelmessung in allen Combinationen mit Anschlusszwang 267
§ 79. Triangulierung nach Schreiber s Methode 268
§ 80. Die Elbkette (mit Netzbild S. 280—281) 272
§ 81. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkelausgleichung und Richtungsausgleichung 276
§ 82. Genäherte Richtungs-Gewichte 282
§ 83. Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz mit Ausgleichung von Helmert 291
§ 84. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck 299
§ 85. Günstige und ungünstige Seitengleichung in einem Vierecks-Beispiel . 308
§ 86. Ergänzungen zur Theorie der Stations-Ausgleichungen 315
§ 87. Geographische Coordinaten und Azimute des Hannover schen Fünfecks . 324

Kapitel III. Punktbestimmung durch Coordinaten-Ausgleichung.

§ 88. Allgemeines 325
§ 89. Richtungs-Änderung und Coordinaten-Änderung 325
§ 90. Verschiedene Hilfsmittel zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten . 330
§ 91. Vorwärts-Einschneiden mit 3 Winkeln 334
§ 92. Vorwärts-Einschneiden mit Richtungen 340
§ 93. Rückwärts-Einschneiden mit Richtungen 345
§ 94. Elimination von z beim Rückwärts-Einschneiden mit Richtungen . . . 352
§ 95. Rückwärts-Einschneiden mit Winkeln 355
§ 96. Richtungsanschluss an feste Strahlen 358
§ 97. Innere und äussere Richtungen 365
§ 98. Combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden 369
§ 99. Doppel-Punkt-Einschaltung 374
§ 100. Mittlere Coordinatenfehler und Entfernungsfehler nach der Ausgleichung 380
§ 101. Übertragung in das System Celle 382
§ 102. Doppelpunkt-Ausgleichung mit vollen Richtungssätzen 384
§ 103. Die Schreiber schen Regeln 389
§ 104. Folge-Punkte 393
§ 105. Verschiedene Zahlenfragen 395
§ 106. Triangulierung der Stadt Hannover (mit Netzbild S. 408—409) 399
§ 107. Triangulierung III. Ordnung der Preussischen Landes-Aufnahme . . . 406
§ 108. Netzeinschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung 414

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Kapitel IV. Theorie der Fehler-Wahrscheinlichkeit.

Seite
§ 109. Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung 423
§ 110. Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler 425
§ 111. Fehler-Wahrscheinlichkeits-Funktion 427
§ 112. Reihen-Entwicklungen und Fehlerkurxen 432
§ 113. Der wahrscheinliche Fehler 438
§ 114. Der durchschnittliche Fehler 441
§ 115. Beziehungen zwischen dem mittleren, wahrscheinlichen und durchschnittlichen Fehler 442
§ 116. Verschiedene Fehler-Potenz-Summen 445
§ 117. Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers 447
§ 118. Scheinbare Fehler v statt wahrer Fehler ε 451
§ 119. Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen 454
§ 120. Fehlerkurven mit endlicher Erstreckung 458
§ 121. Der Maximalfehler (mit Fortsetzung in § 146 und 147) 463

Kapitel V. Genauigkeit der Triangulierungen. Geschichtliche Abrisse.

§ 122. Allgemeines 468
§ 123. Die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler . . 469
§ 124. Verschiedene Berechnungen des mittleren Winkelfehlers 472
§ 125. Triangulierung der Niederlande von Snellius. 1610 477
§ 126. Triangulierung von Schickhart in Württemberg. 1620 479
§ 127. Die französischen Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts 483
§ 128. England, Russland, Dänemark 484
§ 129. Die klassischen Arbeiten von Gauss 489
§ 130. Die Arbeiten von Bessel und Baeyer 499
§ 131. Die Preussische Landes-Triangulation 506
§ 132. Triangulierungen des geodätischen Instituts 513
§ 133. Bayern 518
§ 134. Württemberg 522
§ 135. Baden 527
§ 136. Hessen 532
§ 137. Nassau 535
§ 138. Oldenburg 537
§ 139. Mecklenburg 539
§ 140. Sachsen 546
§ 141. Zusammenfassung der mittleren Winkelfehler 551

Nachträge.

§ 142. Rückwärtseinschneiden mit mehreren Standpunkten 554
§ 143. Genauigkeitsangaben von Stadt-Triangulierungen 558
§ 144. Rechenproben zu den Einschneide-Ausgleichungen 559
§ 145. Günstigste Winkelgleichungen im Viereck 562
§ 146. Theorie des Maximalfehlers 565
§ 147. Ausrechnung des Maximalfehlers 569

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anhang, Hilfstafeln.

	Seite
Quadrate der Zahlen von 0,01 bis 10,00	[2]—[6]
Reciprok-Zahlen der Quadrate $p = \frac{1}{m^2}$	[7]
Richtungs-Coefficienten a, b für alte Teilung, mit Intervall 1°	[8]—[9]
„ „ „ „ „ „ „ 10′	[10]—[15]
„ „ „ neue „ „ „ 1^g	[16]—[17]
Hilfstafel für Richtungs-Coefficienten $(a^2 + b^2)$	[18]
„ „ „ „ A , B	[19]
Fehlerwahrscheinlichkeit	[20]—[21]

Berichtigungen.

Seite 1. Im vierten Absatz, statt zu *berechnenden* Einzelheiten lies zu *behandelnden* Einzelheiten.

„ 70. Der Schluss von § 21. ist dahin zu berichtigen, dass die Zusammenfassung (18′) als *eine* Gleichung zählt, wie in § 96. S. 360 an einem Beispiele gezeigt ist.

„ 141. In der Gleichung (17) im letzten Glied im Nenner, statt p_2 soll p_1 stehen.

„ 166. Rechts unten statt (8) = 66° 40′ 27″ soll stehen 66° 40′ 24″ und dazu statt $w = +1''$ muss entsprechend $w = -2''$ sein. Dieses (8) setzt sich auch auf S. 167 fort, wie in § 145. S. 562 ausführlicher berichtigt wird.

„ 263. Vor der Gleichung (15): statt „sich 50 darstellt“ ist zu lesen „sich so darstellt“.

„ 350. Die zwei letzten (φ_3) und (φ_4) sollen sein (φ_4) und (φ_5), ebenso auch S. 349, oben statt (φ_4) soll stehen (φ_5).

„ 418. 5. Linie von unten statt „Glied 3ter Ordnung“ soll stehen „Glied 4ter Ordnung.“

„ 462. Unten in den Gleichungen (14) und (17) ist für n^{te} Ordnung die $(n+1)^{te}$ Potenz zu setzen u. s. w., wie am Anfange von § 146. S. 565 ausführlicher dargelegt ist.

„ 469. 10. Linie von oben. Die „internationale Fehlerformel“ mit *allen* Dreiecken eines Netzes ist an jener Stelle noch nicht vorhanden.

„ 480. 15. Linie von oben statt $y = +9833$ soll stehen $y = +49833$ und in der Überschrift zu Fig. 2. statt delineat*i* soll stehen delineat*ae*.

„ 482. 8. Linie von unten statt Tabul*e* lies Tabul*a*.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 1. Einleitung*). Überblick über die Geschichte der Methode der kleinsten Quadrate.

Es ist jetzt nahezu ein Jahrhundert verflossen seit der Begründung einer Theorie, welche sich mit den Fehlern der Beobachtungen und Messungen beschäftigt, und daher die Feld- und Landmessung sehr nahe berührt, nämlich der sogenannten „Methode der kleinsten Quadrate".

Im Jahre 1795 wurde diese Theorie von dem damals erst 18jährigen Mathematiker *Gauss* gefunden, und bald darauf durch die Anwendung auf die Ausgleichung des Planeten Ceres bewährt.

Nahezu gleichzeitig hat auch der Franzose *Legendre* das Princip der kleinsten Quadratsumme aufgefunden und in einer kleinen Abhandlung im Jahre 1806 veröffentlicht, während die erste öffentliche Abhandlung von Gauss über die Methode der kleinsten Quadrate erst aus dem Jahre 1809 stammt, so dass also die Priorität der *Veröffentlichung* Legendre hat.

Allein die Priorität der *Entdeckung* gebührt Gauss zweifellos, wie aus den nachher zu berechnenden Einzelheiten zu ersehen ist; und die ganze Behandlungsweise von Gauss unterscheidet sich so sehr durch Tiefe und mathematische Schärfe von der flüchtigen Behandlung Legendres, und Gauss allein hat bis zum Jahre 1826 in sechs classischen Abhandlungen alles wesentliche von dem geschaffen, was heute Methode der kleinsten Quadrate heisst, so dass unbestritten *Gauss* der Vater der Methode der kleinsten Quadrate ist.

Wenn hiebei auch die Nationalitäten der beiden Erfinder in ihrer weiteren Teilnahme an der Sache verglichen werden, so finden wir in Frankreich ein Erlöschen der Ausgleichungstheorie nach dem schwachen Anfang Legendres von 1806, während in Deutschland der von Gauss gepflanzte Baum kräftig Wurzel schlug und Früchte trug, welche dann erst in den letzten Jahrzehnten, als die deutschen Triangulierungs-Ausgleichungen sich als unübertrefflich und durch andere Verfahren nicht ersetzbar bewährt hatten, wie nach anderen Ländern so auch nach Frankreich als neu eingeführt wurden.

Als Vorläufer der heutigen Methode der kleinsten Quadrate sind zu betrachten die Theorien von *Euler, Tob. Mayer, Boscowich, Lagrange, Laplace.* Es handelt sich stets darum, aus einer Anzahl von Gleichungen, die grösser ist als die Zahl der Unbekannten, ein möglichst anschliessendes System der Unbekannten zu bestimmen, ohne einzelne Gleichungen ungerecht zu bevorzugen oder zu vernachlässigen. Euler verfuhr 1748 in der Abhandlung „Sur les inégalités du mouvement de

*) Diese Einleitung entstand im wesentlichen aus zwei öffentlichen Vorträgen des Verfassers, nämlich erstens Antrittsrede als Professor am Polytechnikum in Karlsruhe im April 1868 und zweitens Vortrag auf der 17. Hauptversammlung des deutschen Geometer-Vereins am 2. Juni 1891 in Berlin (Zeitschr. f. Verm. 1892, S. 321—329).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Saturne et de Jupiter", so, dass er durch zweckmässig scheinende Verbindung aller Unbekannten für jede Unbekannte eine Art Normalgleichung zu bilden suchte. Ähnlich verfuhr auch *Tob. Mayer* in seiner Abhandlung „Über die Umwälzung des Mondes"; aber auch bei ihm musste noch feiner Takt die fehlende sichere Methode ersetzen. Etwa 1770 stellte *Boscowich* das Princip auf, man müsse im Falle von überschüssigen Gleichungen die Unbekannten so bestimmen, dass die absolute Summe der übrig bleibenden Fehler ein Minimum werde. (Vorstehendes giebt *Wolf*, Handbuch der Astronomie 1891, S. 133.)

Eine erste auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründete theoretische Untersuchung der Beobachtungsfehler ist im Jahr 1770 von Lagrange angestellt worden (vgl. Encke, Berl. astr. Jahrb. für 1853, S. 310—351), doch ist diese Theorie wieder in Vergessenheit geraten. Der Auffindung unserer heutigen Methode der kleinsten Quadrate ging unmittelbar voraus ein Versuch einer Ausgleichungstheorie von Laplace, welcher zum Zweck der Bestimmung der Erddimensionen aus mehr als zwei Gradmessungen, aus mehreren Gleichungen die unbekannten Elemente bestimmte mittelst der zwei Bedingungen, 1) dass die algebraische Summe der übrig bleibenden Fehler gleich Null werde, und 2) dass die absolute Summe der Fehler ein Minimum werde. Diese Theorie ist entwickelt in „Traité de mécanique céleste, tome second, an VII, (1802) première partie, livre III art. 40. S. 143.

Weiteres über die Entstehungsgeschichte der Methode der kleinsten Quadrate giebt auch *Czuber*, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 11 u. ff.

Der Name „*Methode der kleinsten Quadrate*" rührt von Legendre her (vgl. das Folgende) und dieser Name unserer Wissenschaft hat sich auch festgesetzt. Czuber sagt in Theorie der Beobachtungsfehler, 1891, S. 234: die treffendere Bezeichnung „Methode der kleinsten Quadrat*summen*" ist schon 1841 von Hülsen gebraucht worden, und citiert auch Jordan, „Handb. d. Verm., 2. Aufl. 1877, I. S. 7", wo das „*Princip* der kleinsten Quadratsumme" genannt ist. Ich wollte aber damit nicht, wie Czuber meint, diese Bezeichnung an Stelle der längst feststehenden wieder einführen, sondern ich habe daselbst (Inhaltsübersicht S. VII—VIII) das „Princip der kleinsten Quadratsumme" als eine Unterabteilung der gesamten Theorie der Beobachtungsfehler aufgefasst. Der Name „Methode der kleinsten Quadrate" ist nun seit nahe 100 Jahren so fest eingewurzelt, dass es verkehrt wäre, obgleich dieser Name nicht ganz bezeichnend ist, daran rütteln zu wollen.

Wie schon im Eingange kurz angegeben ist, wurde die heute allgemein anerkannte Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate zuerst öffentlich behandelt von Legendre im Jahr 1806 in einer kleinen Abhandlung am Schlusse des Werkes „Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes", appendice S. 72—80 „sur la méthode des moindres carrés". (Eine zweite Veröffentlichung hievon gab Legendre in den Mémoires de la classe des Sciences mathém. et phys. de l'institut de France, 1810, seconde partie S. 149 u. ff.) Legendre begründete seine Methode nur durch die Allgemeinheit und Leichtigkeit der Anwendung (Nouvelles méthodes etc. S. 72: „De toutes les principes, qu'on peut proposer pour cet objet, je pense qu'il n'en est pas de plus général, de plus exacte, ni d'une application plus facile que celui" etc.) Als Beispiel der Anwendung giebt Legendre die Bestimmung der Erddimensionen aus 5 in Frankreich gemessenen Polhöhen und den dazwischen liegenden 4 geodätischen Meridianbögen.

Unabhängig von Legendre hatte schon Gauss die Methode der kleinsten Quadrate gefunden im Jahre 1795 als Studierender der Mathematik auf der Universität Göttingen, veröffentlichte sie aber erst in wesentlich erweiterter und vervollkommneter Behandlung im Jahr 1809 in dem Werke: „theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium." (Liber II, Sectio III S. 205—224.)

Gauss sagt über die Prioritätsfrage hier in Art. 186, S. 220: „Ceterum principium nostrum, quo jam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. Legendere in opere „nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris 1806 prolatum est" (Gesamtausgabe von Gauss' Werken, Band VI. S. 56 u. 59).

Sartorius v. Waltershausen berichtet in seiner Biographie von Gauss (Gauss

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zum Gedächtnis 1856, S. 21) über diesen Gegenstand: „Ein so ausserordentlicher Ideenreichtum quoll damals Tag und Nacht aus der Seele dieses jugendlichen Genies hervor, dass eine Entdeckung gleichsam die andere überstürzte, dass sich kaum Zeit und Musse fand, auch nur die äusseren Umrisse derselben zu Papier zu bringen. So haben denn die grössten Entdeckungen meist über ein Jahrzehnt, selbst über ein halbes Jahrhundert gelegen, ohne dass sie zu einer weiteren Kenntnis des wissenschaftlichen Publikums gelangt sind." Und S. 23: „Wie tief auch die Entdeckungen von Gauss damals auf dem Felde der reinen Mathematik gewesen sind, blieben sie doch, wie dies die Natur der Sache mit sich bringt, für längere Zeit, selbst bis auf den heutigen Tag, auf einen sehr engen Kreis von Denkern beschränkt, und es musste noch eine andere Entdeckung aus der Astronomie hinzukommen, die Gauss' Namen auch im grossen Publikum zu einem der gefeiertsten in Europa gemacht hat."

Mit dieser Entdeckung hatte es folgende Bewandtnis: Am 1. Januar 1801 entdeckte Joseph Piazzi in Palermo den Planeten Ceres (ersten kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter), beobachtete ihn während 41 Tagen, und teilte seine Entdeckung mehreren Astronomen mit. Da jedoch dieselben die Nachricht Piazzis erst mehrere Monate nach der ersten Entdeckung erhielten, zu einer Zeit, in welcher die Beobachtung des Planeten wegen seiner ungünstigen Stellung zur Sonne nicht mehr möglich war, so blieben die 41tägigen Beobachtungen Piazzis das einzige Material, um die Bahnelemente zu berechnen und den Planeten im nächsten Jahr wieder zu finden. Mit dieser Aufgabe beschäftigten sich sofort die Astronomen.

Gauss war es vorbehalten, mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate eine Ephemeride des neuen Planeten zu berechnen, welche den sämtlichen Einzelbeobachtungen, die sich nur auf 9° der ganzen Bahn erstreckten, möglichst gerecht werdend, von der Wahrheit so wenig abwich, dass der erste Wiederentdecker des Planeten, Zach, sich dahin äusserte, die Ellipse des Dr. Gauss stimme „zur Bewunderung genau" mit der Stellung des Planeten überein.

Obgleich durch die Berechnung der Bahnelemente der Ceres das Ausgleichungsverfahren von Gauss einen vollständigen Triumph errungen hatte, so fühlte Gauss sich doch noch nicht veranlasst, dieselbe der Öffentlichkeit zu übergeben. Zur Erklärung dieser Verzögerung dient folgende Stelle der Vorrede der „theoria motus" (praefatio pag. IX): „Es wünschten mehrere Astronomen, unmittelbar nach der Wiederauffindung der Ceres, ich möchte die dabei angewendeten Rechnungsmethoden veröffentlichen; indessen verhinderten mich mehrere Ursachen, den Bitten der Freunde zu willfahren, erstens andere Arbeiten, ferner der Wunsch, die Sache später ausführlicher zu behandeln, hauptsächlich aber die Hoffnung, dass fortgesetzte Beschäftigung mit diesem Gegenstand verschiedenen Teilen der Auflösung in Beziehung auf Allgemeinheit, Einfachheit und Eleganz zum Vorteil gereichen werde. Und da mich diese Hoffnung nicht getäuscht hat, so glaube ich, die Verzögerung nicht bedauern zu müssen."

Die Gauss schen Werke über die Methode der kleinsten Quadrate sind:

1809 Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Auctore Carolo Friderico Gauss. Hamburgi 1809, Liber II. sectio III.

1810 Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. Auctore Carolo Friderico Gauss, societati regiae tradita Nov. 25. 1810. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores Vol. I. 1808—1811.)

1816 „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen." Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau u. Bohnenberger. Tübingen 1816. Bd. I. S. 185—196.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

1821 Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, societati regiae exhibita Febr. 15. 1821. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores, Vol. V. ad a. 1819—1822. S. 33—62).

1823 Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior, societati regiae exhibita Febr. 2. 1823. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores Vol. V. S. 63—90.)

1826 Supplementum theoriae combinationis erroribus minimis obnoxiae, societati regiae exhibita Sept. 16. 1826. (Commentationes societatis regiae scientiarum Goettingensis recentiores. Vol. VI. 1823—27 S. 57—98.)

In der Gesamtausgabe von Gauss' Werken (Carl Friedrich Gauss' Werke, herausgegeben von der Königl. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen) bildet die theoria motus den VII. Band. Die Disquisitio de elementis ellipticis Palladis bildet den Anfang von Band VI., die übrigen Schriften über die M. d. kl. Q. finden sich in Band IV.

Eine Zusammenfassung bzw. Übersetzung der Gauss schen Schriften über die M. d. kl. Q. ist enthalten in „Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauss, in deutscher Sprache herausgegeben von Dr. A. Börsch und Dr. P. Simon, Assistenten im Königl. Preussischen Geodätischen Institut. Berlin 1887".

In der „theoria motus" wird die Methode der kleinsten Quadrate durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung begründet, es findet sich dabei für das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz die Exponentialfunktion $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$ Hiemit wird die Ausgleichung und Gewichtsbestimmung für vermittelnde Beobachtungen vollständig behandelt.

In der „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis" wird unter Einführung der Bezeichnungen [*bb*. 1] u. s. w. das Minimum der Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler bestimmt.

Die Abhandlung „Über die Genauigkeit der Beobachtungen" bestimmt den wahrscheinlichen Fehler einer Unbekannten nicht nur aus der Quadratsumme, sondern zur Vergleichung auch aus anderen Potenzsummen wahrer Beobachtungsfehler.

Die „theoria combinationis" geht nach einigen allgemeinen Betrachtungen über Fehlergesetze zu der selbständigen Definition des mittleren Fehlers über und stellt die Bedingung auf, dass die zu bestimmenden Unbekannten oder Funktionen derselben mit möglichst kleinen mittleren Fehlern behaftet seien.

Endlich wendet das „Supplementum theoriae combinationis" diese Bedingung auf bedingte Beobachtungen und insbesondere auf die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit Winkelbeobachtungen oder vollständigen Richtungsbeobachtungen an.

Diese Gauss schen Theorieen nebst einigen Bessel schen Zusätzen wurden von *Encke* in einer Abhandlung „Über die Methode der kleinsten Quadrate" verarbeitet, welche als Anhang der drei Jahrgänge 1834, 1835, 1836 des Berliner astronomischen Jahrbuchs erschienen ist. In der Sammelausgabe: „J. E. Encke s astronomische Abhandlungen, zusammengestellt aus den Jahrgängen 1830 bis 1862 des Berl. astr. Jahrb." bildet obige Abhandlung über die M. d. kl. Q. die Nummern XII. XIII. XIV. des ersten Bandes (1866).

Dieses bezieht sich alles auf die *theoretischen* Arbeiten von Gauss über Methode der kleinsten Quadrate. Über Gauss' praktische Anwendungen dieser Theorie auf Triangulierungs-Ausgleichung ist erst in jüngster Zeit Licht verbreitet worden durch Mitteilungen von Oberst *Schreiber* in der „Zeitschrift für Vermessungswesen 1879" S. 141, und von Hauptmann *Gäde*, Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch-geodätischen Arbeiten, „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 113—225; vgl. auch Jordan-Steppes, „Deutsches Vermessungswesen", Stuttgart 1882, S. 5—18.

Zu den Begründern der Methode der kleinsten Quadrate ist auch noch *Bessel* zu zählen, welcher in einer Abhandlung „Untersuchungen über die Bahn des *Olbers*schen Kometen" (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften, mathematische Klasse 1812—1813, S. 119) und in dem Werk „Fundamenta astronomiae" 1818, S. 18—21 die Fehlerverteilung in längeren Beobachtungsreihen untersucht.

Hagen hat in seinen „Grundzügen der Wahrscheinlichkeitsrechnung" Berlin 1837 (2. Auflage 1867) eine Fehlertheorie aufgestellt, welche von der Anschauung ausgeht, dass sich jeder Beobachtungsfehler aus einer sehr grossen Zahl sehr kleiner teils positiver, teils negativer, absolut genommen gleicher Elementarfehler zusammen-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

setzt. Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die verschiedenen Fälle der möglichen Kombinationen dieser Elementarfehler führt auf das Gauss sche Exponential-Fehlergesetz.

In ähnlicher Weise hat Bessel in den „Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler" diese Sache behandelt. („Astr. Nachrichten" 15. Band Nr. 358 und 359 vom Oktober 1838, S. 369 u. ff.)

In der „Gradmessung in Ostpreussen" 1837 hat Bessel eine von Gauss unberücksichtigt gelassene Aufgabe, nämlich die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, gelöst und auf die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit unvollständigen Richtungsbeobachtungen angewendet. Auf Gewichts- und Fehlerberechnungen wurde hiebei nicht eingegangen.

Die Anwendungen der neuen Wissenschaft waren vorwiegend *geodätisch*.

Von Gauss haben wir von 1823 als erstes Zahlenbeispiel eine trigonometrische Ausgleichung für Rückwärtseinschneiden („Astr. Nachr." 1. Band, 1823, S. 81—86) und schon von 1826 zwei Triangulierungs-Netz-Ausgleichungen in dem „supplementum theoriae combinationis".

Auch die anschliessenden Arbeiten von *Bessel*, *Hansen*, *Andrae* u. A. waren wesentlich durch geodätische Bedürfnisse hervorgerufen; und wenn wir die heutige im Laufe fast eines Jahrhunderts angewachsene Litteratur über Ausgleichungsrechnung überblicken, so finden wir darunter keine Disciplin so sehr vertreten wie die Geodäsie, und neben Astronomen, Physikern u. A. können wir Feld- und Landmesser uns wohl rühmen, die eifrigsten Jünger des Meisters Gauss in Hinsicht auf die methodus quadratorum minimorum zu sein.

Indessen *unmittelbar* aus den Gauss schen Quellen konnten die Praktiker Anfangs nicht schöpfen; sie brauchten vermittelnde Lehrmeister, und diese waren zuerst 1837 der Wasserbaumeister Hagen und 1843 der Landmesser Gerling. Hagen ging 1837 von der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus, und hat damit die Sache den Praktikern unnötig erschwert, während Gerling 1843 als späterer Schüler von Gauss schlechthin das Princip der kleinsten Quadratsumme an die Spitze stellte und in populärster Weise, durch Zerlegung in je *„sieben Hauptgeschäfte"* die Sache seinen Lesern so mundgerecht machte, dass der Begriff des mittleren Fehlers und die Grundzüge der Ausgleichung trigonometrischer Messungen sich in wenigen Jahrzehnten allgemein verbreiteten, und dass Gerlings „Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie oder die Methode der kleinsten Quadrate" heute noch als Buch für Anfänger geschätzt wird.

In seiner Vorrede sagt Gerling: „Ich erinnere mich noch gar wohl der Zeit, wo der Landmesser, welcher mit den logarithmischen Tafeln umzugehen wusste, für den Gelehrten unter seinen Collegen galt. Jetzt würde sich einer lächerlich zu machen glauben, wenn er sich ohne diese Kenntnisse nur zum Examen melden wollte. In ähnlicher Weise wird es demnächst wohl auch mit der Ausgleichungsrechnung gehen".

Jetzt, 50 Jahre nachdem sie geschrieben, ist diese Prophezeihung erfüllt, denn die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung werden jetzt in allen gut eingerichteten Feldmesserprüfungen unseres Vaterlandes verlangt.

Allerdings ist diese halbhundertjährige Entwickelung nicht immer gleichförmig, und auch nicht ohne Kämpfe, verlaufen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ein Haupteinwand gegen die geodätischen Anwendungen der Methode der kl. Q. betraf die grosse Arbeit der dabei nötigen Zahlenrechnungen, namentlich bei Auflösung der Normalgleichungen. Allen Anfängern bereiten diese Rechnungen grossen Kummer, und sie bildeten eine stehende Beschwerde, welcher wir aber am wirksamsten begegnen, indem wir den Spiess *umkehren*, indem wir sagen, dass die richtig angewendete Methode der kl. Q. nicht Vermehrung, sondern *Verminderung* der geodätischen Rechenarbeit gebracht hat.

Hierzu wollen wir zuerst einen Ausspruch des bayerischen Geodäten *von Orff* citieren, welcher im Jahre 1866 sich an die schwierige Arbeit gemacht hat, die ganze alte bayerische Triangulierung von Anfang des Jahrhunderts an neu zu berechnen und auszugleichen; er wirft dabei die Frage auf, ob die mancherlei probeweise vorzunehmenden Rechnungen, welche mit der Anwendung anderer Ausgleichungsmethoden verbunden sind, ohne in den Schlussergebnissen zu Tage zu treten, nicht einen ähnlichen Aufwand von Zeit und Mühe verursachen wie die M. d. kl. Q.?

Von dem westlichen Nachbar Bayerns, dem trefflichen *Bohnenberger* in Württemberg, wissen wir, dass er wegen Mangels eines festen Ausgleichungsverfahrens niemals zu einem festen Abschluss seiner Triangulierung gekommen ist; und ebenso war es in Baden, wo man bis zu den vierziger Jahren eine unzählige Menge von Winkeln gemessen und jahrzehntelang gerechnet hatte, bis endlich der tüchtige Obergeometer *Rheiner* noch in reifen Lebensjahren die M. d. kl. Q. lernte und damit die jahrzehntelangen Triangulierungs-Messungen und Berechnungen in Baden endlich (etwa 1850) zum Abschluss brachte.

Wie Triangulierungen in ganzen Netzen früher ausgeglichen wurden, das kann niemand sagen; man weiss nur so viel, dass vor der M. d. kl. Q. ein ewiges Verwerfen und Wiederholen, Probieren, Rücken und Drücken Mode war, und es hat sich aus jener Zeit die treffende Redensart erhalten: Wenn es nicht stimmt, so schickt man einen Trigonometer hinaus und lässt ihn einen Winkel so lange messen, bis er um 3″ grösser (— oder kleiner —) wird. —

In solchem Wirrwarr wirkte die Methode der kleinsten Quadrate wie eine Erlösung, aber allerdings musste dabei eine lange Schule durchgemacht werden, und noch vor kaum 20 Jahren haben sich höchstgestellte Geodäten noch öffentlich gestritten um rein formelle Fragen, wie die „Berechnung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen“ oder die berühmte Bessel sche „Nullpunktskorrektion ε“.

Wenn nun auch solche Streitfragen jetzt verstummt sind und die Unentbehrlichkeit der M. d. kl. Q. in der *höheren* Geodäsie jetzt allgemein anerkannt ist, so wurde andererseits deren Anwendbarkeit für die sogenannte niedere Geodäsie lange bestritten.

Allerdings häufen sich die Zweifel und Schwierigkeiten der Anwendung der M. d. kl. Q. umsomehr, je weiter man von den Triangulierungen I. Ordnung zu der II.—IV. Ordnung herabsteigt, allein auch auf diesem Gebiete hat sich die M. d. kl. Q. siegreich bewährt.

General *Schreiber* hat sich als Chef der Preussischen Landesaufnahme hierüber ausgesprochen in dem Berichte über die Erdmessungs-Conferenz zu Nizza 1887 (Annex X b. S. 10): „Die M. d. kl. Q. dient bei den Triangulierungen niederer Ordnung lediglich dem Zweck, auf eine möglichst willkürfreie Art zu widerspruchsfreien und plausiblen Resultaten zu gelangen. Dieses Ziel wird aber mit Hilfe der Methode,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wenn man nur da, wo wirkliche Strenge ohnehin unerreichbar, auch auf den Schein einer solchen verzichtet, in der denkbar *einfachsten* und elegantesten Weise erreicht."

Dieses leitet uns über zu den Näherungsmethoden im allgemeinen, namentlich auch trigonometrischer Art, welche die M. d. kl. Q. ersetzen sollen. Es giebt deren eine grosse Menge von der persönlichen Willkür im einzelnen Fall bis zu den verklausuliertesten Anleitungen und Zwangsformularien. Wenn auf dem Gebiete der Feld- und Landmessausgleichung in den letzten zwei Jahrzehnten gesündigt worden ist, so ist es sicher bei diesen Näherungsmethoden am meisten geschehen. Allgemein wird die M. d. kl. Q. als Prüfstein für Näherungsverfahren anerkannt und deswegen muss man verlangen, dass ein Näherungsverfahren erheblich *weniger* Arbeit erheische, als die wirkliche M. d. kl. Q. Dieses ist aber bei vielen der zahlreichen Vorschläge jener Art nicht der Fall.

Eine grosse Zahl von Einwirkungen der M. d. kl. Q. auf unser Fach kann man kurz als *moralische* Vorteile bezeichnen; das Messen und Berechnen ist durch die M. d. kl. Q. ehrlicher geworden. Jeder von uns weiss, welche Gemütsbedrückungen entstehen können, wenn Messungen nicht stimmen, wie sie nach billigem Erwarten stimmen sollten. In der Geschichte der Geodäsie wird berichtet, dass der Astronom und Geodät *Mechain* bei der berühmten französisch-spanischen Gradmessung von 1792 durch unehrliches Unterdrücken eines Teiles seiner Messungen bei Barcelona sich eine dauernde Gemütskrankheit und mittelbar den Tod zugezogen habe und in der „Zeitschrift für Verm. 1884", S. 285 wurde hiezu bemerkt, dass vielleicht Mechain gerettet worden wäre, wenn er sich bereits im Besitze der M. d. kl. Q. befunden hätte. Ob die M. d. kl. Q. dazu genügt hätte, lässt sich natürlich nicht bestimmt behaupten, aber das ist zweifellos, dass unehrliches Unterdrücken von Messungen und dergleichen seit der M. d. kl. Q. viel seltener geworden ist als früher.

Den besten Einblick in die geodätischen Ehrlichkeitsverhältnisse früherer Zeiten giebt der Bericht, den Hauptmann *Gäde* aus den Gauss schen Gradmessungsakten gezogen hat. („Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205, Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel S. 423.) Im Jahre 1830 schrieb Gauss an Bessel: Ich habe das System meiner Hauptdreiecke sorgfältig ausgeglichen, *„ohne alle Willkür, ohne Auswählen oder Ausschliessen"*. Wenn Gauss das ausdrücklich hervorhebt, so kann man daraus rückwärts schliessen, wie es vorher und anderwärts zugegangen sein mag; und in der That werden über die niederländischen, bayerischen, österreichischen und französischen Triangulierungen Einzelheiten berichtet, welche deutlich zeigen, wie gering die Objektivität der Messungen jener Zeit war. Es sei nur das eine erwähnt, dass oft schon die Diagonalen-Controlen (Seitengleichungen) hinreichten, um unehrlich zusammen gestimmte Dreiecksketten zu entlarven.

Alle diese Verhältnisse haben sich nun wesentlich gebessert und wir haben in unseren neuesten Ausgleichungen sogar ein gewisses mathematisches Maass für die Objektivität des Beobachters, nämlich in dem Verhältnis des mittleren Gewichtseinheitsfehlers *nach* der Ausgleichung und *vor* der Ausgleichung, ein Verhältnis das theoretisch = 1 sein sollte, aber häufig 1,5 bis 2,0 sich einstellt. Dasselbe hängt allerdings auch von gänzlich unbekannten Elementen ab, bringt aber doch auch den Ehrlichkeitsgrad der Messung und Berechnung mit zum Ausdruck.

Ein schönes Feld der Anwendung hat die Theorie der Beobachtungsfehler

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

auch in den Genauigkeitsbestimmungen für Messungen irgend welcher Art, insbesondere für unsere Feld- und Landmessungen, Festsetzung amtlicher Fehlergrenzen u. s. w.

In früheren Zeiten wurden die Messungsfehler so wenig als möglich erwähnt, es giebt ganze Bücher über Landmessung, welche die Frage der Messungsgenauigkeit mit unbestimmten Redensarten abhandeln oder auch ganz übergehen. Ja manche alte Verordnung verpflichtet den Feldmesser *bei seinem Eide „ganz genau"* zu messen.

Solchen Anschauungen gegenüber ist die Einführung des mittleren Fehlers an und für sich schon ein grosser Fortschritt, auch wenn die mittleren Fehler nicht immer richtig berechnet wurden. Die beste Bearbeitung eines Vermessungswerkes besteht jetzt nicht mehr wie früher darin, die Fehler zu verstecken, sondern sie so hervorzuheben und zusammenzustellen, dass man rasch ein Urteil über das Ganze gewinnen kann.

Die Genauigkeitsbestimmungen früherer Zeit bewegten sich fast nur in Procentangaben oder Verhältniszahlen; man sagte z. B., der mittlere Fehler einer Kettenmessung sei 1 : 1000, oder der zulässige Fehler einer Flächenbestimmueg sei $1/2$ %, oder gar, die Genauigkeit eines Nivellements sei 1 : 500 000 der Länge u. s. w., was alles unzutreffend ist.

Erst mit Hilfe der M. d. kl. Q. sind für die meisten Feldmessarten richtige Fehlergesetze gefunden worden, welche für die Anordnung der Messungen zum Voraus, zur Beurteilung des Erfolges nach der Messung und zur amtlichen Fehlergrenzbestimmung von höchster Wichtigkeit sind.

Wir wollen hierbei uns der langen Controversen über die Fehler der Ketten-, Band- und Lattenmessung erinnern, welche im deutschen Geometerverein vor etwa 20 Jahren geführt worden und in den ersten Bänden der „Zeitschr. f. Verm." enthalten sind.

Diese Sache wurde von den Streitenden damals vielleicht teilweise überschätzt, allein die Ergebnisse jener Erörterungen finden wir heute mittelbar in zahlreichen amtlichen und privaten Schriften anerkannt wieder.

Wenn nun schon die einfache Frage nach den Fehlern der Ketten- und Lattenmessungen nicht ohne Fehlertheorie gelöst werden konnte, so ist das noch vielmehr der Fall bei den so wichtigen Fehlergesetzen der Polygonzüge, des Nivellierens u. s. w. Wir wissen jetzt z. B., dass der mittlere Querfehler eines gestreckten gleichseitigen Zuges proportional der $1\,1/2$ Potenz der Gesamtlänge ist, dass der zu fürchtende Querfehler eines offenen Zuges durch Azimutanschluss auf die Hälfte und wenn noch Coordinatenanschluss hinzu kommt, auf $1/8$ reduciert wird, oder wir wissen, dass der Querfehler eines Theodolitzuges umgekehrt proportional der Quadratwurzel der Zielweite, dagegen der Fehler eines Kompasszuges und eines Nivellements direkt proportional der Quadratwurzel der Zielweite ist u. s. w. und wir können darnach unsere Anordnungen treffen und den Erfolg beurteilen.

Solche Fehlergesetze sind zu vergleichen den Spannungs- und Biegungsgesetzen der Ingenieurmechanik; und wir wollen daraus auch die weitere Analogie bilden, dass auch die praktischen Anwendungen solcher Gesetze in beiden Fällen innig verwandt sind. Tausende von Bauwerken werden ohne Festigkeitsberechnung nur nach dem praktischen Griff des Maurers und Zimmermanns ausgeführt; aber wer nicht gegebenen Falles auch mit der Berechnung von Spannungen und von Trägheitsmomenten umzugehen weiss, der kann heutzutage wohl als Bauhandwerker aber nicht als wissenschaftlicher Ingenieur gelten. Ähnlich verhält es sich mit den Fehlergesetzen unseres

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Faches. Züge und Dreiecke u. s. w. zu messen und nach *sin* und *cos* zu berechnen, genügt für den täglichen Bedarf, aber von dem Meister unseres Faches verlangt man, dass er auch einen Einblick in die verschlungenen Fäden der Fehlerzusammenwirkung besitze.

Die erwähnten allgemeinen Fehlergesetze bilden insofern einen ganz besonderen Gewinn für unsere Messungen als sie, einmal gefunden und aufgestellt, jedermann mühelos zu gute kommen, und es ist keine Übertreibung, wenn wir aussprechen: in diesem Sinne lässt sich die M. d. kl. Q. auf *alle* Messungen, sogar auf diejenigen mit der Kette mit Vorteil anwenden, allerdings durchaus nicht so, dass immer Fehlergleichungen gebildet und Normalgleichungen aufgelöst würden, sondern so, dass zwar nach Gutdünken im einzelnen Falle ausgeglichen, dabei aber die Fehlereinflüsse aller Einzelgeschäfte im Ganzen nach theoretischen Gesetzen berücksichtigt werden.

Nach all diesen idealen Vorteilen wollen wir auch die realen und materiellen Gewinne betrachten, welche die M. d. kl. Q. den Feld- und Landmessern gebracht hat und zwar dadurch, dass die Berechnungen schwieriger und eben damit geachteter und *lohnender* geworden sind.

Um dieses zu zeigen, müssen wir uns der gedrückten Lage erinnern, in welcher die Feld- und Landmessung neben den anderen technischen Wissenschaften sich lange befand und teilweise sich noch befindet.

Da das Aufmessen eines kleinen Lageplans oder das Nivellieren eines Flusslaufes u. dgl. allerdings eine einfache Sache ist, die wohl jeder gute Architekt oder Bauingenieur nebenbei machen kann, wenn er nur den guten Willen dazu hat, so glaubten viele Staatsbehörden, die ganze Landmesserei sei nur eine Art Handwerk für Techniker zweiten Ranges und könne einem Beamten von anderem Fache amtlich *unterstellt* werden. — Da war es nun eine für uns ganz vorteilhafte Neuerung, dass z. B. in den Nivelliertabellen neue Spalten auftraten mit Quadraten und Quadratwurzeln, deren Bedeutung die Vertreter der alten Schule nicht mehr verstanden. Dieses führte an vielen Orten zu der nützlichen Erkenntnis, dass zu solchen Arbeiten Männer angestellt werden müssen, welche die Sache nicht nur nebenbei, sondern ganz verstehen und als Lebensberuf betreiben und dass solche Männer mit gleichen Rechten wie alle anderen Beamten angestellt und in gleicher Weise auch bezahlt werden müssen.

Diese Erkenntnis haben wir nicht zum geringsten Teile dem Eindringen der M. d. kl. Q. in unser Fach zu verdanken.

Beim Rückblick auf die Entwickelung, welche die M. d. kl. Q. einerseits im Ganzen und andererseits in ihren einzelnen Zweigen und bei ihren einzelnen persönlichen Vertretern genommen hat, finden wir die Analogie eines physiologischen Gesetzes über die „Entstehung der Arten“ bestätigt, nämlich dass alle die Stadien, welche die Gesamtheit allmählich durchlaufen hat, auch in der Entwickelung der Unterabteilungen und der einzelnen Individuen nochmals verhältnismässig kurz durchgemacht werden müssen.

Die Hauptstufen dieser Entwickelung sind in unserem Falle: Erstens langsames Erlernen und bedenkliches Auffassen, zweitens Überschätzen und blindes Vertrauen wie zu einem Universalmittel gegen alle Messungsschäden, drittens ruhige Würdigung und erfolgreicher Gebrauch.

So war es z. B. eine zu hoch aufgeschossene Blüte des zweiten Stadiums, als

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hansen vor 25 Jahren glaubte, bei Triangulierungen brauche man nun fast keine Rücksicht auf schiefe Dreiecke und spitze Winkel zu nehmen, wenn man nur genügend viele Kontrollen hat, deren Gesamtausgleichung alle Schäden heilen sollte.

Andererseits ist es eine Frucht des dritten, reifen, Stadiums, dass die Fehlerwirkung der Messungs-Elemente schon vor Beginn der Messungen selbst erwogen und die Gesamt-Anlage und Auswahl der Messungen darnach getroffen wird.

Zur richtigen Auswahl gehören aber namentlich die schon oben erwähnten mannigfaltigen Fehlergesetze.

Die Theorie der Beobachtungsfehler ist fast der einzig *deductive* Teil unserer sonst wesentlich nur *empirisch-inductiven* Feld- und Landmessung, welche in vielen Beziehungen erst durch Einführung jener Theorie zu dem Range einer Wissenschaft erhoben worden ist.

Versuchen wir zum Schlusse die Entwickelung und die heutige Stellung der M. d. kl. Q. in der Feld- und Landmessung durch wenige zusammenfassende Worte zu charakterisieren, so können wir sagen: Diese Methode hat unserem Fache die wichtigsten Dienste teils auf unmittelbarem, teils auf mittelbarem Wege geleistet, unmittelbar in der Klarstellung und Sicherung der Fehlerausgleichungen und der Genauigkeitsbestimmungen, mittelbar als wichtigster Hebel zur Hebung unseres Faches und Gleichstellung desselben mit den übrigen technischen Wissenschaften.

Kapitel I.

Allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme.

In diesem ersten Kapitel werden wir die allgemeine Theorie der Methode der kleinsten Quadrate nach der Definition des mittleren Fehlers und nach dem Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme in einem Zuge behandeln, und nur so viel von Anwendungen und Beispielen aufnehmen als zur Erläuterung der Theorien nöthig ist. Die eigentlichen Anwendungen, namentlich geodätischer Natur, werden in den nachfolgenden Kapiteln besonders behandelt werden.

§ 2. Erklärungen.

Wer sich mit Messungen irgend welcher Art beschäftigt, macht dabei die Erfahrung, dass diese Messungen Fehlern ausgesetzt sind.

Man hat hauptsächlich zwei Mittel, die Richtigkeit von Messungen zu prüfen, entweder wiederholt man eine Messung unmittelbar und sieht zu, ob man das Ergebnis der ersten Messung wieder erhält, oder man misst verschiedene Grössen, welche unter sich in einer bekannten Beziehung stehen, je einmal, und untersucht, ob die Messungsergebnisse die erwähnte Beziehung zeigen; z. B. man misst die drei Winkel eines ebenen Dreiecks und vergleicht deren Summe mit 180°. Wenn man bei jeder Messung sich eine derartige Probe verschafft, und dieselbe in aller Strenge

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

verfolgt, so wird man zu dem Schluss geführt, dass keine Messung vollkommen fehlerfrei ist.

Damit ist natürlich nicht gesagt, dass es nicht möglich ist, eine Messung so auszuführen, dass der noch zu fürchtende Fehler so klein ist, dass er für gewisse Zwecke unschädlich bleibt.

Trotz der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen können doch die Fehler gewisse Grenzen nicht übersteigen, sofern der Beobachter die nötige Sorgfalt anwendet. Ist letzteres nicht der Fall, so treten „grobe Fehler" auf (z. B. falsches Zählen der ganzen Lattenlagen bei Längenmessungen u. A.). Solche grobe Fehler sollen von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen sein.

Gewisse Messungsfehler wirken immer in demselben Sinn, z. B. das Ausweichen der Messlatten aus der zu messenden Geraden führt immer auf ein zu grosses Messungsergebnis. Obgleich die Theorie der Beobachtungsfehler sich auch mit solchen „regelmässigen" oder „einseitig wirkenden" Beobachtungsfehlern zu befassen hat, werden wir doch im folgenden, sofern nicht das Gegenteil bemerkt ist, die Annahme machen, dass einseitig wirkende Fehler nicht zu befürchten sind, sondern nur unvermeidliche, unregelmässige Beobachtungsfehler, welche gleichwahrscheinlich positiv oder negativ sind.

Sobald man erkannt hat, dass die *wahren* Werte der beobachteten Grössen in aller Strenge zu bestimmen unmöglich ist, hat man sich ein weniger hohes Ziel zu stecken, nämlich nur die Erreichung der unter gegebenen Umständen *wahrscheinlichsten* Werte der Unbekannten, welche sich der Gesamtheit aller Messungen am besten anpassen. Je nach der Art der Beobachtung und der Anzahl der angewendeten Probemessungen wird man den wahren Werten der Unbekannten mehr oder weniger nahe kommen; man kann deswegen nach Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte noch die Frage aufwerfen, welche Genauigkeit erzielt worden ist.

Es ist hiernach die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus Beobachtungen, welche infolge der unvermeidlichen ihnen anhaftenden Beobachtungsfehler auf Widersprüche führen, diejenigen Ergebnisse zu ziehen, welche sich den Messungen am besten anpassen (oder die geringsten Fehler fürchten lassen); ferner diejenigen Beträge anzugeben, um welche mutmasslich die gefundenen Ergebnisse von der Wahrheit noch abweichen.

Oder mit anderen Worten:

Die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt sich mit der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern und mit der Bestimmung von mittleren zu fürchtenden Fehlern.

§ 3. Der durchschnittliche Fehler.

Die ersten Fehlerbetrachtungen führen immer auf eine Durchschnittsberechnung, welche zwar in der heutigen Fehlertheorie eine nur untergeordnete Rolle spielt, welche aber zur Einführung in das Verständnis der Sache hier zuerst mitgeteilt werden muss.

Wenn die Fehler mehrerer gleichartiger Beobachtungen bekannt sind, so kann man aus diesen Fehlern (absolut genommen, d. h. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) einen Durchschnittswert bilden, welcher „*durchschnittlicher Fehler*" heisst. Allerdings kennt man die wahren Beobachtungsfehler im allgemeinen ebensowenig als die wahren Werte der beobachteten Grössen, doch hindert dieses nicht, den strengen Begriff des

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

durchschnittlichen Fehlers zu bilden, d. h. wenn $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ eine Anzahl wahrer Beobachtungsfehler von gleicher Art sind, so ist der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \tag{1}$$

wobei das Zeichen $[\pm\,\varepsilon]$ die absolute Summe der ε im Gegensatz zu der algebraischen Summe andeuten soll, indem die eckige Klammer als Summenzeichen dient.

Als Beispiel für die Berechnung des Durchschnittswertes wahrer Fehler nehmen wir folgendes:

Bei der „Gradmessung in Ostpreussen" wurden in 22 Dreiecken alle Winkel α, β, γ, gemessen und die Winkelsummen mit den theoretischen Summen $180° +$ sphär. Excess verglichen. Dabei ergaben sich folgende 22 Widersprüche:

$$\alpha + \beta + \gamma - (180° + \text{sphär. Excess}) = \varepsilon$$

Num.	Fehler ε	Num.	Fehler ε	Num.	Fehler ε
1.	$+0{,}36''$	9.	$+0{,}56''$	17.	$+1{,}62''$
2.	$+0{,}93$	10.	$0{,}00$	18.	$+1{,}62$
3.	$-0{,}51$	11.	$-0{,}59$	19.	$+1{,}67$
4.	$-1{,}46$	12.	$0{,}00$	20.	$-0{,}72$
5.	$-0{,}95$	13.	$-1{,}36$	21.	$-1{,}35$
6.	$-1{,}40$	14.	$+1{,}86$	22.	$-0{,}98$
7.	$+1{,}76$	15.	$-0{,}42$		$7{,}96$
8.	$+0{,}92$	16.	$+1{,}68$		$6{,}47$
	$8{,}29$		$6{,}47$		$8{,}29$

Summe $22{,}72'' = [\pm\,\varepsilon]$

$$\text{Durchschnitt} = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} = \frac{22{,}72''}{22} = \pm\,1{,}03''.$$

Betrachtet man nun die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines Dreiecks als Messungsgrösse, so hat man den durchschnittlichen Fehler derselben hiemit bestimmt $= \pm\,1{,}03''$, und dieser Wert als durchschnittlicher Dreiecksfehler hat immer ein gewisses Interesse (dagegen wurde der durchschnittliche Fehler eines einzelnen Dreieckswinkels hiebei nicht gefunden).

Ebenso wie diese Dreiecksschlussfehler haben auch die Differenzen, welche man bei Messungswiederholungen findet, den Charakter *wahrer* Beobachtungsfehler ε.

Im Gegensatz zu diesen *wahren* Beobachtungsfehlern stehen die *scheinbaren* Fehler, welche man z. B. findet, wenn man das arithmetische Mittel mehrerer Beobachtungen mit den einzelnen Beobachtungen vergleicht.

Dieses giebt folgende Formeln:

Beobachtungen: $l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad \ldots l_n$

Arithmetisches Mittel:
$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} \tag{2}$$

oder mit Annahme der eckigen Klammer als Zeichen für algebraische Summierung

$$x = \frac{[l]}{n} \tag{3}$$

Man bildet die scheinbaren Fehler, d. h. die Differenzen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots v_n = x - l_n$$

dabei bemerkt man, dass die algebraische Summe dieser Differenzen $= 0$ ist, nämlich

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = n\,x - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots)$$
$$[v] = n\,x - [l] = 0 \text{ wegen (2) oder (3)}$$
$$[v] = 0 \qquad (4)$$

Diese Gleichung (4) kann als Rechenprobe dienen.

Diese scheinbaren Fehler v behandelt man näherungsweise wie wahre Beobachtungsfehler ε, d. h. man berechnet nach Anleitung der Gleichung (1) den durchschnittlichen Fehler:

$$t = \frac{[\pm v]}{n}$$

Beispiel. Ein Winkel ist 5mal unabhängig gemessen worden:

Beobachtungen l	Differenzen v	Probe
35° 26′ 16″	+ 2,8″	
20″	— 1,2	
18″	+ 0,8	$[+v] = +7{,}4$
25″	— 6,2	$[-v] = -7{,}4$
15″	+ 3,8	$[v] = 0$
Summen: 94″	14,8″	

Mittel $x = 35°\ 26'\ 18{,}8''$ $\qquad t = \frac{14{,}8}{5} = 2{,}96''.$

Damit hat man ein Mass für die mutmassliche Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung. Nun wäre es weiter von Wichtigkeit, zu wissen, wie sich die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zur Genauigkeit des arithmetischen Mittels verhält, allein diese und andere hier sich anschliessende Fragen lassen sich auf Grundlage des durchschnittlichen Fehlers und der vorstehenden einfachen Betrachtungen *nicht* lösen.

Aus diesem Grunde lassen wir jetzt den durchschnittlichen Fehler fallen und gehen zu einem anderen Genauigkeitsmass, dem *mittleren* Fehler über.

§ 4. Der mittlere Fehler.

Nachdem der durchschnittliche Fehler sich als ungeeignet zur Behandlung weiterer Aufgaben der Ausgleichungsrechnung erwiesen hat, machen wir einen Versuch mit einem anderen Mittelwert der Fehler. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ vorliegt, so bilden wir daraus einen Mittelwert m nach der Gleichung:

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \qquad (1)$$

Man nennt diesen Mittelwert den „mittleren Fehler“ oder „mittleren zu fürchtenden Fehler“. (error medius metuendus).

Der mittlere Fehler bietet gegenüber dem durchschnittlichen Fehler den Vorteil, dass bei der Summierung $[\varepsilon^2]$, da alle Quadrate positiv sind, keine Unterscheidung der Vorzeichen nötig ist, sowie dass das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt $\pm$ aus der Rechnung hervorgeht. Abgesehen von diesen äusserlichen Unterschieden ist aber der mittlere Fehler ein besseres Genauigkeitsmass als der durchschnittliche Fehler, weil in den Quadraten die grossen Fehler mehr ins Gewicht fallen.

Der mittlere Fehler ist im allgemeinen grösser als der durchschnittliche Fehler

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und nur, wenn alle Einzelfehler ε gleich sind, so werden auch der durchschnittliche und der mittlere Fehler einander gleich; dieses lässt sich zunächst für zwei Elemente leicht einsehen; hat man nämlich zwei wahre Fehler ε_1 und ε_2, so ist:

der durchschnittliche Fehler	der mittlere Fehler
$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$	$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}}$
$t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{4}$	$m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} = \frac{2\,\varepsilon_1^2 + 2\,\varepsilon_2^2}{4}$

Um zu untersuchen, welches von beiden der grössere Wert ist, behandeln wir die Differenz beider:

$$m^2 - t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{4} \text{ also } = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} \qquad (2)$$

Als Quadrat ist dieses stets positiv, es ist also stets m^2 grösser als t^2 (ausgenommen den besonderen Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, in welchem m und t gleich werden).

Dieser Beweis (2) lässt sich leicht auch auf beliebig viele Elemente $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ausdehnen.

Zur weiteren Vergleichung zwischen dem durchschnittlichen Fehler und dem mittleren Fehler betrachten wir folgende zwei Fehler-Reihen:

											Summe	Quadratsumme
I.	5	6	2	7	3	8	10	9	3	5	58	402
II.	14	3	0	0	6	20	2	2	1	10	58	750

Der durchschnittliche Fehler wird in beiden Fällen gleich, nämlich = 5,8, der mittlere Fehler dagegen wird:

$$m_{\text{I}} = \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6{,}34, \qquad m_{\text{II}} = \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8{,}66$$

Der mittlere Fehler lässt die erste Reihe besser erscheinen als die zweite Reihe, und in der That ist eine ziemlich gleiche Fehlerverteilung bis zur Grenze 10 günstiger als das zweimalige Überschreiten dieser Grenze mit 14 und sogar 20, bei II, was durch das zweimalige Vorkommen von 0 nicht aufgewogen wird.

Obgleich man auf diese oder ähnliche Art die Einführung des „mittleren Fehlers“ wohl als zweckmässig darstellen kann, gelingt es doch nicht, diese Wahl eines Genauigkeitsmasses als *notwendig* nachzuweisen. Die beste Rechtfertigung des „mittleren Fehlers“ liegt aber darin, dass sich auf ihn eine allseitig befriedigende und nun schon seit nahezu 100 Jahren anerkannte Fehlertheorie gründen lässt.

Indem wir hiernach die Definition des mittleren Fehlers nach der Gleichung (1) festhalten, wenden wir diese Gleichung auf das frühere kleine Beispiel § 3. S. 13 an, zunächst mit der Annahme, als ob die scheinbaren Fehler v wie wahre Beobachtungsfehler ε behandelt werden dürften.

Beobachtungen	v	v^2
35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
20	− 1,2	1,44
18	+ 0,8	0,64
25	− 6,2	38,44
15	+ 3,8	14,44
Summe 94	$[v] = 0{,}0$	$[v] = 62{,}80$
Mittel 35° 26′ 18,8″		

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$m = \sqrt{\frac{62{,}80}{5}} = \pm 3{,}54'' \quad (?) \tag{3}$$

Dieser Berechnung (3) haben wir ein Fragezeichen (?) zugesetzt, weil es fraglich ist, ob die zunächst gemachte Annahme der v als wahrer Fehler zulässig ist? Die Antwort hierauf wird in unserem spätern § 7. gegeben werden. Inzwischen müssen wir uns einer anderen Betrachtung zuwenden.

Der *mittlere Fehler* nach der im Vorstehenden gegebenen Definition ist der Grundbegriff der Genauigkeitsuntersuchungen; neben diesem mittleren Fehler hat der durchschnittliche Fehler, der sich zuerst in § 3. dargeboten hat, eine nur sehr untergeordnete Bedeutung.

Es bestehen noch zwei andere Fehlermasse, welche wir hier vorläufig erwähnen wollen, nämlich der *wahrscheinliche Fehler* und der *Grenzfehler*.

Diese beiden Fehler werden jedoch erst in einem späteren Kapitel zu behandeln sein.

§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Es handelt sich um die Frage, in welcher Weise sich die mittleren Fehler gemessener Grössen auf die hieraus durch Rechnung abgeleiteten Grössen übertragen. Diese wichtige Frage muss erledigt sein, ehe weitere Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gelöst werden können. Wir behandeln zuerst einzelne besondere Fälle dieser Frage, nämlich Multiplikation und Addition gemessener Grössen.

I. Multiplikation. Eine gemessene Grösse l wird mit einer gegebenen Zahl a multipliziert, man hat also ein Produkt

$$x = a\,l \tag{1}$$

Hier ist a als gegebene Zahl fehlerfrei, dagegen l als gemessene Grösse soll mit einem mittleren Fehler m behaftet sein, und es fragt sich, welches der mittlere Fehler M des Produktes x wird?

Durch die Multiplikation a werden auch die der Grösse l anhaftenden Fehler betroffen, man kann also rasch überblicken, dass das Ergebnis sein wird:

$$M = a\,m \tag{2}$$

Zur Veranschaulichung mag das Messen einer Geraden mit unsicheren Latten dienen. Wenn eine Messlatte l an sich um den Betrag $\pm m$ unsicher ist, d. h. wenn sie ungenau mit dem Normalmass verglichen ist und wenn die Handhabung der Messung selbst ganz fehlerfrei ist (d. h. wenn von den Messungsfehlern selbst hier gar nicht die Rede sein soll), so wird bei a maligem Anlegen der fehlerhaften Latte offenbar ein Fehler $M = a\,m$ erzeugt, und zwar $\pm M$, wenn $\pm m$ im Vorzeichen unbestimmt ist.

II. Addition. Es werden zwei Grössen l und l' unabhängig von einander gemessen und dann addiert, man hat also eine Summe:

$$x = l + l' \tag{3}$$

die l und l' seien mit mittleren Fehlern $\pm m$ und $\pm m'$ behaftet und es fragt sich nun, was der mittlere Fehler M der Summe x ist?

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob einfach zu setzen wäre:

$$M = m + m' \quad (?), \tag{3 a}$$

allein sobald man die Sache näher betrachtet, so bemerkt man, dass dieses nur dem äussersten Fall der *Häufung* der Fehler m und m' entspricht, während bei unregelmässigen Vorzeichen $\pm m$ und $\pm m'$ auch der Fall der gegenseitigen *Tilgung* $m - m'$

berücksichtigt werden muss. Zudem muss man beachten, dass der Fehler von l und l' durchaus nicht gerade m und m' selbst sind, sondern dass diese m und m' nur die *Mittel*werte der den l und l' anhaftenden Fehler vorstellen, dass also von einer so einfachen Lösung wie (3 a) nicht die Rede sein kann.

Um zur richtigen Lösung der vorliegenden sehr wichtigen Aufgabe zu gelangen, müssen wir den Grundbegriff des mittleren Fehlers anwenden, und dazu denken wir uns die Addition $l + l' = x$ nicht nur *ein*mal, sondern wiederholt (etwa n mal) vorgenommen, und wir ziehen *alle* Fehler ε, ε' u. s. w. in Betracht, welche bei allen diesen Fällen auftreten. Im ersten Falle habe man l behaftet mit dem Fehler ε, und l' behaftet mit ε', dann ist zweifellos der Fehler von x im ersten Falle gleich $\varepsilon + \varepsilon'$, was mit δ bezeichnet werden soll. Dieses n mal angewendet giebt:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_1' \\
\delta_2 &= \varepsilon_2 + \varepsilon_2' \\
\delta_3 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_3' \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\delta_n &= \varepsilon_n + \varepsilon_n'
\end{aligned}$$

Um zu mittleren Fehlern überzugehen, müssen wir quadrieren:

$$\begin{aligned}
\delta_1^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1' \\
\delta_2^2 &= \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2' \\
\delta_3^2 &= \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3'^2 + 2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3' \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\delta_n^2 &= \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2\,\varepsilon_n\,\varepsilon_n'
\end{aligned}$$

Quadratsumme $[\delta^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] + 2\,[\varepsilon\,\varepsilon']$

Quadrat-Mittel $$\frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + 2\,\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n} \qquad (4)$$

Hier ist zufolge der Grunderklärung des mittleren Fehlers:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2, \quad \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2, \quad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2 \qquad (5)$$

und es fragt sich noch, was $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n}$ ist?

Dieses ist der Durchschnittswert aller Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2'$ u. s. w. und da alle ε gleich wahrscheinlich positiv oder negativ sein sollen, also auch kein Grund vorhanden ist, warum in der Reihe der Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2'$ ... die positiven oder negativen Beträge überwiegen sollten, so ist der Durchschnittswert des letzten Gliedes in (4) gleich *Null* zu setzen. (Genauer gesagt, der Grenzwert, gegen welchen bei wachsender Anzahl n jenes Glied konvergiert, ist gleich Null.)

Damit und wegen (5) giebt nun (4):

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= m^2 + m'^2 \\ \text{oder } M &= \sqrt{m^2 + m'^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Dieses ist der wichtigste Satz der ganzen Ausgleichungs-Rechnung, er ist gleichlautend mit dem pythagoräischen Satz der Geometrie, indem M als Hypotenuse zu den Katheten m und m' gehört.

Der wichtige pythagoräische Lehrsatz der Ausgleichungs-Rechnung heisst also: Wenn eine Messung mit dem mittleren Fehler $\pm m$ addiert wird zu einer zweiten Messung mit dem mittleren Fehler $\pm m'$, so entsteht eine Summe, deren mittlerer

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fehler $\pm M$ die Quadratwurzel aus der Quadratsumme von m und m' ist, oder es ist der Summenfehler M die Hypotenuse zu den Teilfehlern m und m' als Katheten.

Derselbe Satz gilt wie für Summen, so auch für Differenzen, d. h. wenn aus den Messungen $l \pm m$ und $l' \pm m'$ die Differenz $D = (l \pm m) - (l' \pm m')$ gebildet wird, so haftet an dieser Differenz *derselbe* mittlere Fehler $M = \sqrt{m^2 + m'^2}$ wie an der Summe $l + l'$. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man die vorstehende Entwicklung nochmals durchgeht, denn es wird sich mit $l - l'$ statt $l + l'$ nichts ändern als dass in (4) das letzte Glied negativ wird, da aber dieses letzte Glied in (4) gleich Null wird, bleibt alles bestehen.

Der Satz (6) lässt sich auch auf mehr als zwei Messungen leicht ausdehnen. Hat man

$$x = (l \pm m) + (l' \pm m') + (l'' \pm m'')$$

so kann man zuerst die zwei ersten Elemente nach dem Satze (6) zusammenfassen und dann das dritte hinzunehmen, d. h. man hat für drei Elemente:

$$M^2 = (m^2 + m'^2) + m''^2$$

So kann man beliebig fortfahren, wodurch man erhält:

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 + m'''^2 + \ldots \tag{7}$$

Sind hiebei alle Einzelfehler m m' m'' ... einander *gleich*, was als besonderer Fall vorkommen kann, so wird bei n Fehlern:

$$M^2 = m^2 + m^2 + m^2 \ldots = n\,m^2$$

$$M = m\sqrt{n} \tag{8}$$

Zur Veranschaulichung mag wieder das Beispiel der Lattenmessung dienen; jedoch soll nun im Gegensatz zu dem früheren Falle bei (2) angenommen werden, dass die Latten an sich fehlerfrei seien, dass aber bei jeder Lattenanlage l ein aus der Handhabung entspringender Fehler begangen werde, dessen Mittelwert gleich $\pm m$ sei, wobei das Überwiegen positiver oder negativer Fehler ausgeschlossen sein soll. (Letzteres ist bekanntlich nicht wirklich der Fall, doch sei davon jetzt nicht die Rede.)

Unter diesen Voraussetzungen haben wir die Gleichung (8) giltig für n maliges Lattenanlegen mit $\pm m$ als mittlerem Fehler einer Anlage, und hiernach ist der mittlere Lattenmessungsfehler proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl n der Lattenanlagen, d. h. auch proportional der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge L (weil L proportional n).

III. Lineare Funktion. Durch Verbindung der beiden Sätze I für Multiplikation und II für Addition bzw. Subtraktion, erhalten wir den allgemeinen Satz für Bestimmung des mittleren Fehlers einer linearen Funktion gemessener Grössen:

Wenn l, l', l'' ... gemessene Grössen und m, m', m'' ... deren bekannte mittlere Fehler sind, so handelt es sich um die lineare Funktion

$$x = a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{9}$$

deren mittlerer Fehler M sich nach dem Vorhergehenden leicht ergiebt:

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m')^2 + (a''\,m'')^2 + \ldots} \tag{10}$$

Wenn dabei $m' = m'' = m''' \ldots = m$ ist, so wird

$$M = m\sqrt{[a\,a]} \tag{11}$$

IV. Allgemeine Funktion. Mit den vorstehenden Sätzen I, II, III ist das

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wichtige Fehlerfortpflanzungsgesetz an sich erledigt; mehr als eine lineare Funktion (9) lässt sich in diesem Sinne nicht allgemein behandeln; man kann aber jede beliebige andere Funktion wenigstens näherungsweise auf eine lineare Funktion zurückführen durch Differentiieren nach dem Taylor schen Satze, mit der Annahme, dass die Fehler verhältnismässig *kleine* Grössen seien. Obgleich die darauf gegründete Verallgemeinerung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu unserem nächsten Gang der Theorie in § 6.—§ 11. nicht gebraucht wird (also auch zunächst übergangen werden kann), wollen wir dieselbe doch hier einschalten und durch ein kleines geodätisches Beispiel erläutern.

Man habe irgend eine Funktion gemessener Grössen:

$$X = f(l_1\, l_2\, l_3 \ldots) \tag{12}$$

Bezeichnet man jetzt mit $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ die wahren Werte der gemessenen Grössen, mit $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ deren mittlere Fehler, und mit $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots$ bestimmte denselben anhaftende Fehler, so kann man unter der Voraussetzung, dass diese Fehler so klein sind, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können, mit Hilfe des Taylor schen Satzes den entsprechenden Fehler ε von x bestimmen, nämlich:

$$\varepsilon = f(l_1 + \varepsilon_1\, ,\ l_2 + \varepsilon_2\, ,\ l_3 + \varepsilon_3 \ldots) - f(l_1\, ,\ l_2\, ,\ l_3 \ldots)$$

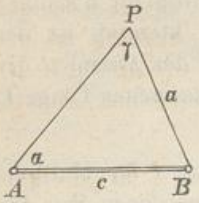
$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_3 + \ldots$$

Durch ähnliche Schlüsse wie die bei I. und II. angewendeten kommt man zu dem Ergebnis:

$$M = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_3} m_3)^2 + \ldots} \tag{13}$$

wobei die Differentialquotienten mit Hilfe von Näherungswerten der $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ berechnet werden.

Fig. 1.
Mittlerer Fehler der Seite a.



Ein einfaches Beispiel zur Anwendung dieses Satzes (13) ist folgendes (Fig. 1.):

Ein Punkt P wird gegen eine feste Basis $A\,B = c$ festgelegt durch Messung der zwei Winkel α und γ, wodurch die Seite $B\,P = a$ bestimmt wird:

$$a = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha \tag{14}$$

dabei sind α und γ mit mittleren Fehlern $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ behaftet; es fragt sich, was der mittlere Fehler M der Seite a ist. Die Basis c wird dabei als fehlerfrei betrachtet.

Man bildet das totale Differential von (14):

$$d\,a = \frac{\partial\, a}{\partial\,\alpha}d\,\alpha + \frac{\partial\, a}{\partial\,\gamma}d\,\gamma$$

$$d\,a = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha\, d\,\alpha - c\sin\alpha\,\frac{\cos\gamma}{\sin^2\gamma}d\,\gamma$$

Wegen (14) kann man dieses auch so schreiben:

$$d\,a = a\,cotg\,\alpha\, d\,\alpha - a\,cotg\,\gamma\, d\,\gamma$$

Nun setzt man an Stelle der Differentiale $d\,\alpha$ und $d\,\gamma$ die mittleren Fehler $\pm\,\delta\,\alpha$ und $\pm\,\delta\,\gamma$, und hat damit den mittleren Fehler M zunächst in unbestimmter Form:

$$\pm\, M = a\,cotg\,\alpha\,\delta\,\alpha \pm a\,cotg\,\gamma\,\delta\gamma;$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

endlich nach der Regel von (13):

$$M = a\sqrt{cotg^2\,\alpha\,(\delta\alpha)^2 + cotg^2\,\gamma\,(\delta\gamma)^2} \qquad (15)$$

Wenn beide Winkel α und γ gleich genau gemessen sind, so sei $\delta\alpha = \delta\gamma = \delta$, damit wird:

$$M = a\,\delta\sqrt{cotg^2\,\alpha + cotg^2\,\gamma}$$

Hiebei ist δ in analytischem Masse verstanden; wenn δ'' der Winkelfehler in Sekunden ist, so wird:

$$\frac{M}{a} = \frac{\delta''}{\varrho''}\sqrt{cotg^2\,\alpha + cotg^2\,\gamma}$$

Wir nehmen beispielshalber $\alpha = \gamma = 60°$ und $\delta = 10''$, das giebt

$$\frac{M}{a} = \pm\,0{,}0000\,396$$

oder es ist der Fehler M etwa $= 0{,}004\,\%$ von a.

Nehmen wir dabei $a = 1000^m$, so ist also $M = 0{,}04^m$.

Wenn etwa in dem Dreieck (Fig. 1.) der dritte Winkel bei B auch gemessen ist, dann lässt sich die Berechnung des mittleren Fehlers der Seite a nicht mehr in so einfacher Weise machen; wie dann zu verfahren ist, wird erst später bei der Theorie der bedingten Beobachtungen gezeigt werden.

§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass keine konstanten oder einseitig wirkenden Fehler vorhanden sind, indessen gilt der Hauptsatz II. des vorigen § 5. über Fehlerfortpflanzung auch dann noch, wenn es sich um Kombination eines unregelmässigen mit einem regelmässigen oder mit einem konstanten Fehler handelt, denn der Mittelwert $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n}$, auf welchen es bei dem Falle II. S. 16 hauptsächlich ankommt, konvergiert auch dann noch gegen Null, wenn nur ε *oder* ε' gleichwahrscheinlich positiv und negativ ist.

Als Beispiel hiefür nehmen wir wieder wie im vorigen § 5. S. 15 die Längenmessung mit Messlatten. Eine solche Messung ist nämlich nicht nur mit unregelmässigen Fehlern, sondern auch mit regelmässigen Fehlern behaftet. Solche regelmässige Fehler sind z. B. das Ausweichen aus der Geraden nach links oder rechts, nach oben oder unten. Diese Ausweichungen heben sich durchaus nicht gegenseitig auf, sondern sie geben lauter positive Fehler, d. h. Fehler, welche die Länge zu gross erscheinen lassen.

Bei n maliger Lattenanlage wird man die einseitig wirkenden Fehlerteile $= A\,n$ und die unregelmässig wirkenden Teile $= B\sqrt{n}$ annehmen können, dann ist der mittlere Gesamtfehler:

$$M = \sqrt{(A\,n)^2 + (B\sqrt{n})^2} = \sqrt{A^2\,n^2 + B^2\,n}.$$

Der Begriff des mittleren Fehlers ist also nicht an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden; man kann den mittleren Fehler auch als Genauigkeitsmass für solche Messungen benützen, bei welchen einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein mittlerer Fehler, welcher konstante Teile enthält, im allgemeinen nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es ist ein oft gehörter Einwurf gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf gewisse Messungen, dass diese Messungen einseitige Fehler enthalten, und dass deswegen die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen überhaupt nicht anzuwenden sei.

Dem ist entgegenzuhalten, dass gerade die Methode der kleinsten Quadrate die feinsten Mittel darbietet, um einseitig wirkende oder unbekannte Fehler aufzufinden, und dann die Ausgleichung mit Rücksicht auf solche Fehlerquellen zu behandeln.

§ 7. Das einfache arithmetische Mittel.

Wenn eine Messung mehrfach gleichartig und unabhängig wiederholt worden ist mit den Ergebnissen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, so nimmt man als bestanschliessenden Wert das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \tag{1}$$

Die Abweichungen der Einzelmessungen von dem Mittel x, d. h. die scheinbaren Fehler sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ v_3 &= x - l_3 \\ &\ldots\ldots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

deren Summe wegen (1) gleich Null ist, d. h.:

$$[v] = 0. \tag{3}$$

Durch Quadrierung der scheinbaren Fehler v findet man den mittleren Fehler einer Beobachtung zunächst näherungsweise durch die Formel:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\ (?) \tag{4}$$

Es handelt sich nun um Bestimmung des mittleren Fehlers M des arithmetischen Mittels selbst, wozu die Anleitung des Satzes über Fehlerfortpflanzung (10) und (11) § 5. S. 17 dient, denn vermöge (1) ist x eine lineare Funktion der beobachteten Grössen l, denen sämtlich der mittlere Fehler m zukommt, wie sich noch deutlicher zeigt, wenn man die Gleichung (1) auseinanderzieht und so schreibt:

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \ldots \frac{1}{n} l_n \tag{5}$$

Dieses entspricht der Gleichung (9) § 5. S. 17, nämlich

$$x + a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{5 a}$$

und dazu gehört die Anwendung (10) § 5. S. 17, nämlich

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m')^2 + (a''\,m'')^2 + \ldots} \tag{5 b}$$

Es treten also die $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ von (5) an Stelle der früheren $l\ l'\ l'' \ldots$ in (5 a) und die dort mit $a\ a'\ a'' \ldots$ bezeichneten Coefficienten sind in unserem Falle (5) sämtlich $= \frac{1}{n}$; die mittleren Fehler $m\ m'\ m'' \ldots$ sind in unserem Fall alle einander gleich, nämlich alle $= m$, also giebt die Anwendung von (5 b) nun:

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m)^2 + (a''\,m)^2 + \ldots} = m\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dabei ist $a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots = n\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$

also $$M = m\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{oder} \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

d. h. der mittlere Fehler M des arithmetischen Mittels x wird erhalten aus dem mittleren Fehler m einer Einzelbeobachtung durch Division mit der Quadratwurzel $\sqrt{n}$ aus der Anzahl n der Beobachtungen. Wir werden diesen wichtigen und interessanten Satz nachher mit Fig. S. 23 noch etwas näher betrachten, zuvor aber müssen wir uns nochmals der Gleichung (4) zuwenden, um die daselbst noch offen gelassene Frage zu behandeln, inwiefern die scheinbaren Fehler v zur Vertretung der wahren Fehler ε geeignet sind.

Diese wahren Fehler ε bleiben ewig unbekannt, aber dennoch kann man die Abweichungen zwischen den v und den ε näherungsweise berücksichtigen in folgender Weise:

Im Gegensatz zu dem arithmetischen Mittel x bezeichnen wir mit X den wahren Wert der Unbekannten, und mit ε die wahren Beobachtungsfehler im Gegensatz zu den scheinbaren Beobachtungsfehlern v; dann haben wir die Gleichungen:

$$\varepsilon = X - l \quad , \quad v = x - l \quad , \quad \text{also } \varepsilon = v + (X - x) \tag{7}$$

Wenn man dieses auf n Fälle anwendet und die $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ quadriert, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= v_1^2 + (X-x)^2 + 2\,v_1\,(X-x)\\
\varepsilon_2^2 &= v_2^2 + (X-x)^2 + 2\,v_2\,(X-x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_n^2 &= v_n^2 + (X-x)^2 + 2\,v_n\,(X-x)\\
\text{Summe}\quad [\varepsilon^2] &= [v^2] + n\,(X-x)^2 + 2\,(v_1 + v_2 + \ldots v_n)\,(X-x)
\end{aligned}$$

Nun ist aber $v_1 + v_2 + \ldots v_n = [v] = 0$ nach (3), also

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n\,(X-x)^2 \tag{8}$$

Der Wert $X - x$, d. h. die Abweichung des arithmetischen Mittels x von dem wahren Wert X der Unbekannten ist in aller Strenge niemals zu bestimmen, allein man kann wenigstens für $X - x$ einen guten Näherungswert einführen, indem man dafür den mittleren Fehler M des arithmetischen Mittels selbst setzt, d. h. nach (6)

$$X - x = M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad , \quad (X-x)^2 = \frac{m^2}{n}$$

Damit giebt (8):

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + m^2 \tag{9}$$

Es ist nun in aller Strenge:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2$$

denn die wahren Fehler ε müssen den streng richtigen mittleren Fehler bestimmen. Damit wird (9):

$$n\,m^2 = [v^2] + m^2$$

Diese Gleichung kann nach m^2 aufgelöst werden und giebt:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{10}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das ist die gesuchte richtige Formel, welche an Stelle der genäherten Formel (4) tritt, die Formel (10) kann man auch wieder in (6) einsetzen, womit man hat:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} \tag{11}$$

Die neue Formel (10) erscheint auch ohne die mathematische Herleitung, nach dem blossen Anblick besser als die frühere Formel (4); insbesondere in dem besonderen Fall mit $n = 1$. Hiefür würde (4) geben $[v^2] = 0$ also $m = 0$. Dagegen (10) giebt zwar auch $[v^2] = 0$, aber auch im Nenner $n - 1 = 0$, also im ganzen $m = \sqrt{\frac{0}{0}}$, d. h. unbestimmt, und in der That muss beim Vorhandensein von nur *einer* Beobachtung die Genauigkeit unentschieden bleiben. (Als letzten extremen Fall kann man auch noch $n = 0$ setzen, d. h. nach der Genauigkeit einer Beobachtung fragen, welche gar nicht gemacht worden ist; auch hiefür giebt (10) die richtige Antwort, indem wegen $n - 1 = 0 - 1 = -1$ der mittlere Fehler m imaginär wird.)

Zur Anwendung der in Vorstehendem entwickelten Theorie des einfachen arithmetischen Mittels nehmen wir nochmals das kleine Zahlenbeispiel am Schlusse des § 3. S. 13:

Beobachtungen l		v	v^2
1.	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
2.	20	— 1,2	1,44
3.	18	+ 0,8	0,64
4.	25	— 6,2	38,44
5.	15	+ 3,8	14,44
Summe	= 94	0,0	62,80 = $[v^2]$

Mittel = 35° 26′ 18,8″.

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{62{,}80}{4}} = \pm 3{,}96''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}} = \frac{3{,}96}{\sqrt{5}} = \pm 1{,}77''$$

Im ganzen schreibt man nun abgerundet:

$$x = 35° 26' 18{,}8'' \pm 1{,}8''.$$

Zweites, grösseres Zahlenbeispiel.

In der „Gradmessung in Ostpreussen“ (S. 78) giebt *Bessel* 18 unabhängige Messungen für den Winkel Mednicken-Fuchsberg auf der Station Trenk, wie folgende Zusammenstellung zeigt, welche zugleich die Fehlerberechnung enthält.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nr.	Beobachtung l	v	v^2
1	83° 30′ 36,25″	− 1,38″	1,90
2	7,50	− 2,63	6,92
3	6,00	− 1,13	1,28
4	4,77	+ 0,10	0,01
5	3,75	+ 1,12	1,25
6	0,25	+ 4,62	21,34
7	3,70	+ 1,17	1,37
8	6,14	− 1,27	1,61
9	4,04	+ 0,83	0,69
10	6,96	− 2,09	4,37
11	3,16	+ 1,71	2,92
12	4,57	+ 0,30	0,09
13	4,75	+ 0,12	0,01
14	6,50	− 1,63	2,66
15	5,00	− 0,13	0,02
16	4,75	+ 0,12	0,01
17	4,25	+ 0,62	0,38
18	5,25	− 0,38	0,14
Summe	87,59	+ 10,71	46,97
Mittel	83° 30′ 34,87″	− 10,64	$= [v^2]$

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{46{,}97}{17}} = \pm 1{,}66''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

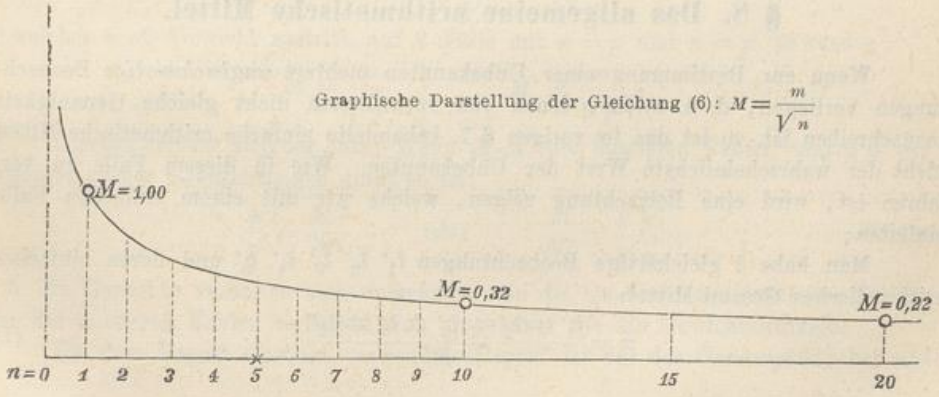
$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}66}{\sqrt{18}} = \pm 0{,}39''$$

Haupt-Ergebnis = 83° 30′ 34,87″ ± 0,39″.

Graphische Darstellung der Gleichung (6).

Die oben S. 21 gefundene Gleichung (6) ist in mehr als einer Hinsicht sehr wichtig, sie sagt in Worten, dass der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels sich im Verhältnis der *Quadratwurzel* der Anzahl der Messungen verkleinert. Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes kann man M als Ordinate zur Abscisse n auftragen, wobei man eine hyperbelartige Kurve dritten Grades erhält, welche in der nachfolgenden Figur dargestellt ist. Die Zahlenwerte hiefür sind:

$$\left.\begin{array}{lccccccccccc} n = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 20 & 50 & 100 \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} = & 1{,}00 & 0{,}71 & 0{,}58 & 0{,}50 & 0{,}45 & 0{,}41 & 0{,}35 & 0{,}32 & 0{,}22 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{array}\right\} \quad (12)$$



Die Kurve läuft asymptotisch aus, d. h. der mittlere Fehler M nähert sich unbegrenzt der Null, ohne den Wert Null selbst je zu erreichen. Die ersten 5—10 Wiederholungen geben rasch eine Abnahme von M, d. h. eine Genauigkeitssteigerung; dann aber hat weiteres Wiederholen wenig Erfolg, und um den mittleren Fehler *einer* ersten Messung auf ein Zehntel seines Wertes herunter zu bringen, müsste man 100 Wiederholungen machen.

Das thut man aber gewöhnlich nicht; eine und dieselbe Messung pflegt man höchstens 5—10 mal zu wiederholen, und zwar nicht bloss deswegen, weil von da an der Wert M nur noch langsam abnimmt, sondern aus einem noch viel wichtigeren Grund: die Gleichung (6) und die darnach berechneten Zahlenwerte (12), nebst der dazu gehörigen Kurve, setzen nämlich voraus, dass die Messungen *nur* mit unregelmässigen, positiv oder negativ gleich wahrscheinlichen Fehlern behaftet seien, und dieses ist in Wirklichkeit fast nie der Fall. Im Gegenteil, je feiner die Messungen werden und je öfter man sie wiederholt, desto mehr kommt man zu der Überzeugung, dass fast überall konstante Fehlerquellen einwirken. Man soll daher bei Wiederholungen auch die Nebenumstände möglichst abändern, z. B. bei Winkelmessungen nach und nach verschiedene Striche der Kreisteilung benützen u. s. w.

Einführung des Gewichtes.

Zur späteren Anwendung (z. B. im folgenden § 8.) betrachten wir nochmals die wichtige Gleichung (6) in anderer Hinsicht:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{oder} \qquad M^2 = \frac{m^2}{n} \tag{13}$$

Es folgt hieraus, dass man das arithmetische Mittel als Ergebnis *einer* Beobachtung betrachten kann, deren mittlerer Fehler M ist; es ist also das Genauigkeitsverhältnis dieser fingierten Beobachtung und einer ursprünglichen Beobachtung durch die Werte M und m festgestellt.

Dieses führt zu dem Begriff des *Gewichtes*.

Das Verhältnis von m^2 zu M^2 ist bestimmt durch die Zahl n, welche angiebt, wie viele Beobachtungen der einen Art in ein arithmetisches Mittel vereinigt werden müssen, damit dieses die Genauigkeit einer Beobachtung der anderen Art hat. n heisst in diesem Falle das *Gewicht* der letzteren Beobachtung (wobei man das Gewicht einer Beobachtung der ersteren Art $= 1$ setzt).

§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel.

Wenn zur Bestimmung einer Unbekannten mehrere *ungleichwertige* Beobachtungen vorliegen, d. h. solche, denen von vorn herein nicht gleiche Genauigkeit zuzuschreiben ist, so ist das im vorigen § 7. behandelte einfache arithmetische Mittel nicht der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten. Wie in diesem Falle zu verfahren ist, wird eine Betrachtung zeigen, welche wir mit einem einfachen Falle einleiten:

Man habe 5 gleichartige Beobachtungen $l_1'\ l_2'\ l_3'\ l_4'\ l_5'$ und deren einfaches arithmetisches Gesamt-Mittel:

$$x = \frac{l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5'}{5} \tag{1}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ausserdem betrachten wir zwei Partial-Mittel aus 2 und 3 Beobachtungen:

$$l_1 = \frac{l_1' + l_2'}{2} \qquad l_2 = \frac{l_3' + l_4' + l_5'}{3} \tag{2}$$

dann ist leicht einzusehen, dass man aus den Partial-Mitteln l_1 und l_2 wieder das Gesamtmittel x herstellen kann, ohne Zurückgreifen auf die ursprünglichen Beobachtungen l'; es ergiebt sich nämlich aus (1) und (2):

$$x = \frac{2\,l_1 + 3\,l_2}{2+3} \tag{3}$$

der an diesem einfachen Falle mit $2+3=5$ Beobachtungen gezeigte Grundgedanke lässt sich leicht auch allgemeiner durchführen; wir wollen Gruppenmittel $l_1\,l_2\,l_3\ldots$ aus $p_1\,p_2\,p_3\ldots$ ursprünglichen gleich genauen Beobachtungen annehmen, und daraus nach Analogie von (3) das Gesamtmittel berechnen

$$x = \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2 + p_3\,l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{4}$$

Die Zahlen p haben hier die Bedeutung von Gewichten nach der Erklärung am Schlusse des vorigen § 7., d. h. die p sind dasselbe was die dort mit n bezeichneten Wiederholungszahlen, zu welchen die Partial-Mittel $l_1\,l_2\,l_3\ldots$ gehören.

Wir gehen einen Schritt weiter, indem wir annehmen, dass diese $l_1\,l_2\,l_3\ldots$ nicht Partial-Mittel, sondern selbst *unmittelbare* Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit seien; dann müsste man ebenso verfahren wie im vorigen Falle nach Gleichung (4), nachdem man zuvor diejenigen Zahlen p ermittelt hätte, welche den einzelnen Genauigkeiten entsprechen, und dieses wird erreicht, wenn man für p die Gewichte nach der am Ende des vorigen § 7. S. 24 gegebenen Definition nimmt.

Da übrigens der Wert von x in (4) nicht verändert wird, wenn man alle Gewichte p mit einer beliebigen Zahl multipliziert, so folgt, dass es zur Lösung der Aufgabe genügt, wenn solche Gewichte p benützt werden, welche den früher als Gewichte definierten Zahlen *proportional* sind, und wir werden deswegen künftig allgemein die Gewichte nur als Verhältniszahlen auffassen.

Es lässt sich weiter leicht zeigen, dass die Gewichte p umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler sein müssen, weil nach (6) § 7. S. 21 der mittlere Fehler umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Wiederholungen d. h. aus der Gewichtszahl p ist. Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die erwähnte Gleichung (6) § 7. S. 21, nämlich

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

in welcher n als Gewicht auftritt, auf 2 Fälle mit $n=p$ und $n=p'$ anwenden:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \qquad M' = \frac{m}{\sqrt{p'}}.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Wenn $M\,M'$ die mittleren Fehler, und $p\,p'$ die Gewichte zweier Beobachtungen sind, so ist:

$$\frac{p}{p'} = \frac{M'^2}{M^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \tag{5}$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler, oder die mittleren Fehler verhalten sich umgekehrt wie die Gewichtswurzeln.

Ein dem Begriff Gewicht verwandter Begriff ist der der *Genauigkeit;* bei ab-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nehmendem mittlerem Fehler wächst sowohl das Gewicht als die Genauigkeit, jedoch in verschiedenem Mass. Während das Gewicht umgekehrt proportional dem *Quadrat* des mittleren Fehlers ist, verstehen wir unter Genauigkeit eine Grösse, welche nur umgekehrt proportional dem mittleren Fehler selbst ist. Übrigens ist kein Bedürfnis vorhanden, besondere Genauigkeitszahlen in unsern Rechnungen einzuführen.

In welcher Weise die Gewichte ermittelt werden, lässt sich nicht allgemein angeben. Am einfachsten ist die Bestimmung der Gewichte, wenn man es nicht mit unmittelbaren Beobachtungen, sondern, entsprechend der Untersuchung am Anfang dieses §, mit Partial-Mitteln aus einzelnen Beobachtungsgruppen zu thun hat, was zuweilen vorkommt.

Nachdem die Bedeutung der Gewichte p erklärt ist, giebt sich alles Weitere, ähnlich wie beim einfachen arithmetischen Mittel. Wir haben bis jetzt folgendes:

Gegeben die Beobachtungen: $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots\ l_n$

mit den Gewichten: $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ p_n$

Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten ist das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{6}$$

Man bildet wie früher die scheinbaren Fehler:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \text{ mit dem Gewicht } p_1 \\ v_2 &= x - l_2 \quad " \quad " \quad " \quad p_2 \\ v_3 &= x - l_3 \quad " \quad " \quad " \quad p_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= x = l_n \quad " \quad " \quad " \quad p_n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Wenn man diese v bezw. mit ihren p multipliziert und sie dann addiert, so erhält man wegen (6):

$$[p\,v] = 0 \tag{8}$$

Wir betrachten nun denjenigen mittleren Fehler m, welcher zu einem Gewichte $p = 1$ gehört; ob unter der Reihe der $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots$ wirklich ein Wert $p = 1$ vorkommt, ist dabei gleichgültig, jedenfalls kann man sich einen solchen Wert $p = 1$ denken und den ihm entsprechenden mittleren Fehler m betrachten, welchen man auch kurz *Gewichtseinheitsfehler* nennt. Hieraus und aus den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3\ldots$ folgen auch nach den Verhältnissen (5) die mittleren Fehler der $l_1\ l_2\ l_3\ \ldots$ nämlich bezw.

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \qquad \ldots\ldots \qquad \frac{m}{\sqrt{p_n}} \tag{9}$$

Um nun das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden, schreiben wir zuerst (6) in der auseinandergezogenen Form:

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \ldots \frac{p_n}{[p]} l_n \tag{10}$$

Dieses (10) entspricht wieder der linearen Funktion (9) des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes in § 5. S. 17, nämlich

$$x = a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{10 a}$$

die a , a' , ... sind in (10) vertreten durch $\frac{p_1}{[p]}$, $\frac{p_2}{[p]}\ldots$ und da wir auch die mittleren Fehler der einzelnen Summanden in (9) haben, giebt die Anwendung von (10a):

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_3}}\right)^2 + \cdots$$

$$M^2 = \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \left((\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + (\sqrt{p_3})^2 + \cdots\right)$$

$$M^2 = m^2 \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}{[p]^2} = m^2 \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{11}$$

Wir gehen über zur Bestimmung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung vom Gewicht 1, (Gewichtseinheitsfehlers). Wenn die Gewichte p alle $= 1$ wären, so würde man aus den scheinbaren Fehlern v in (7) höchst einfach einen Mittelwert bilden wie beim einfachen arithmetischen Mittel in § 7. und obgleich dieses nicht der Fall ist, können wir doch die zu ungleichen Gewichten gehörigen v reduzieren auf gleiches Gewicht $p = 1$, nämlich nach den Proportionen (5) muss sein:

Gewicht	Fehler	Gewicht	Fehler	
p_1	v_1	1	$v_1\sqrt{p_1}$	reduziert
p_2	v_2	1	$v_2\sqrt{p_2}$	„
p_3	v_3	1	$v_3\sqrt{p_3}$	„
. . . . .		. . . . .		

Dabei ist angenommen, dass die scheinbaren Fehler v den Gesetzen der wahren mittleren Fehler folgen, was zulässig ist. Man berechnet nun aus den auf das Gewicht 1 reduzierten Fehlerbeträgen den mittleren Gewichtseinheitsfehler nach der früheren Formel (10) § 7. S. 21, nämlich:

$$m^2 = \frac{(v_1\sqrt{p_1})^2 + (v_2\sqrt{p_2})^2 + (v_3\sqrt{p_3})^2 + \cdots}{n-1} = \frac{[p\,v^2]}{n-1}$$

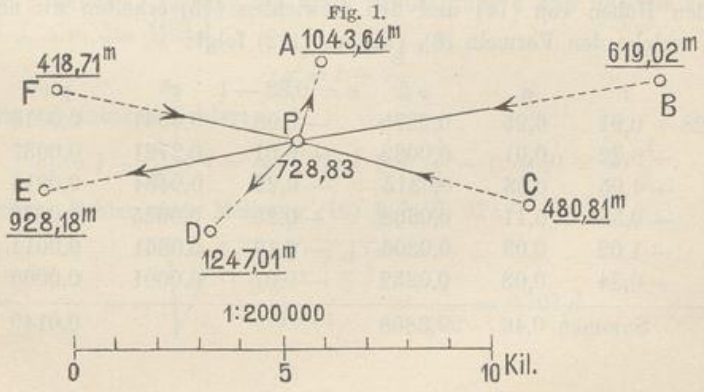
$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} \tag{12}$$

Nun hat man in den beiden Gleichungen (11) und (12) die ganze Fehlertheorie des allgemeinen arithmetischen Mittels; man kann auch aus (11) und (12) zusammen noch bilden:

$$M = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{[p]\,(n-1)}} \tag{13}$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir mit der nachfolgenden Fig. 1. eine Höhenberechnung nehmen, bei welcher die Gewichte nicht etwa durch ungleichartige Messungswiederholungen bestimmt sind, sondern aus der Natur der Aufgabe sich selbst ergeben.

Fig. 1.



Es seien nämlich $A\ B\ C\ D\ E\ F$ Höhenpunkte der Landesaufnahme, deren Höhen über $N.\ N.$ unabänderlich gegeben sind, z. B. A hat die Höhe 1043,64^m über $N.\ N.$ u. s. w. Wir nehmen auch an, diese 6 Höhenangaben seien fehlerfrei, oder es sollen ihre Fehler nicht in Betracht kommen neben den Fehlern der 6 fachen Höhenbestimmung von einem Punkte P aus, in welchem die Höhenwinkel nach A, B u. s. w. gemessen und mit den bekannten Entfernungen PA, PB u. s. w. zu Höhenberechnungen benützt worden sind. Auf diese Weise ist folgendes erhalten worden:

Zielweite s	Gegebene Höhen über $N.\ N.$	Gemessene Höhenunterschiede	Berechnete Höhen von P
$AP = 2010^m$	A 1043,64^m	$h_1 = -314{,}73^m$	728,91^m
$BP = 8903$	B 619,02	$h_2 = +109{,}20$	728,22
$CP = 5820$	C 480,81	$h_3 = +248{,}24$	729,05
$DP = 3002$	D 1247,01	$h_4 = -518{,}43$	728,58
$EP = 6197$	E 928,18	$h_5 = -199{,}16$	729,02
$FP = 5800$	F 418,71	$h_6 = +310{,}13$	728,84
			(Einfaches Mittel = 728,77^m)

(14)

Das einfache arithmetische Mittel der 6 Höhenbestimmungen für den Punkt wäre 728,77^m; dieses einfache Mittel dürfen wir aber nicht als Resultat annehmen, weil bei der Ungleichheit der Entfernungen s die 6 Bestimmungen nicht gleichwertig sind. Aus der Theorie der trigonometrischen Höhenmessung weiss man, dass die Fehler der Höhenunterschiede h (nahezu) proportional den Zielweiten s sind, und folglich müssen die Gewichte p umgekehrt proportional den Quadraten der Zielweiten s sein, oder $p = \frac{1}{s^2}$.

Die Masseinheit ist hiebei beliebig, wir nehmen s in Kilometern, und zwar abgerundet nach (14):

$$s = 2{,}0 \quad 8{,}9 \quad 5{,}8 \quad 3{,}0 \quad 6{,}2 \quad 5{,}8 \text{ km}$$

Hieraus wird berechnet

$$p = \frac{1}{s^2} = 0{,}25 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}11 \quad 0{,}03 \quad 0{,}03 \qquad (15)$$

Wir haben absichtlich ziemlich stark abgerundet, weil es keinen praktischen Wert hat, in solchen Fällen, wo die Gewichtsbemessung selbst auf gewissen, nicht strengen Annahmen beruht, mit vielen Dezimalen zu rechnen.

Mit den Höhen von (14) und den Gewichten (15) erhalten wir nun folgende Berechnung, welche den Formeln (6), (11) und (12) folgt:

l	p	pl	$v = 0{,}83 - l$	v^2	pv^2
728 + 0,91	0,25	0,2275	− 0,08	0,0064	0,0016
+ 0,22	0,01	0,0022	+ 0,61	0,3721	0,0037
+ 1,05	0,03	0,0315	− 0,22	0,0484	0,0015
+ 0,58	0,11	0,0638	+ 0,25	0,0625	0,0070
+ 1,02	0,03	0,0306	− 0,19	0,0361	0,0011
+ 0,84	0,03	0,0252	− 0,01	0,0001	0,0000
Summen	0,46	0,3808			0,0149

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{0{,}3808}{0{,}46} = 0{,}83$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0149}{5}} = \pm 0{,}055^m \qquad (16)$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}46}} = \pm 0{,}080^m$$

Also im ganzen: $H = 728^m + x = 728{,}83^m$
mit dem mittleren Fehler: $\pm 0{,}08^m$.

Anmerkung zu § 8.

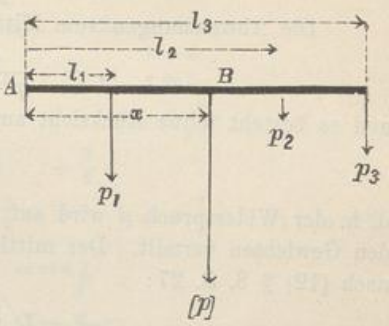
Die im Vorstehenden behandelten Formeln gestatten zum Teil einfache mechanische Deutungen.

Denkt man sich nach Fig. 2. verschiedene Gewichte $p_1\,p_2\,p_3\ldots$ an einer Drehaxe A mit Hebelsarmen $l_1\,l_2\,l_3\ldots$ wirkend, so sind die statischen Momente dieser Gewichte bezw. $p_1\,l_1\;\;p_2\,l_2\;\;p_3\,l_3\ldots$, und die Gleichung

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

liefert denjenigen Hebelsarm x, welcher, mit der Summe aller Gewichte $[p]$ belastet, dasselbe statische Moment giebt, wie die Summe der Einzelmomente.

Fig. 2.



Denkt man sich nun die Drehaxe von A um den Betrag x nach B verschoben, dann haben die Gewichte $p_1\,p_2\,p_3$ in Bezug auf die neue Axe B die Hebelsarme $v_1\,v_2\,v_3$, wobei

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3$$

und es ist:

$$p_1\,v_1 + p_2\,v_2 + p_3\,v_3 = [p\,v] = 0$$

oder es ist B der Schwerpunkt eines den Gewichten $p_1\,p_2\,p_3$ entsprechenden Massensystems.

Auch die Summe $[p\,v^2]$ hat eine mechanische Deutung; es ist dieses das Trägheitsmoment des soeben erwähnten Massensystems in Bezug auf die Axe B, und die Bedingung $[p\,v^2] = \text{Minimum}$, welche den Mittelwert x im Sinne der Ausgleichungsrechnung bestimmt, heisst im Sinne der Meckanik, es soll B eine Axe kleinsten Trägheitsmomentes sein.

§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen.

Zur Übung der Theorie vom arithmetischen Mittel nehmen wir den Fall zweier Beobachtungen, welcher ausserdem in manchen Beziehungen wichtig ist.

Wenn zwei gleich genaue Beobachtungen vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, so mag die erste Beobachtung l sein und die zweite Beobachtung $l + d$, also das Mittel

$$x = l + \frac{d}{2}$$

dann sind die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = l + \frac{d}{2} - l = +\frac{d}{2} \text{ und } l + \frac{d}{2} - (l + d) = -\frac{d}{2}$$

also der mittlere Fehler einer Messung (10) § 7. S. 21:

$$m = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,d \qquad (1)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und der mittlere Fehler des Mittels selbst, nach (11) § 7. S. 22:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2} = 0{,}5\,d \tag{2}$$

Dieser Fall war sehr einfach und wird in § 11. uns nochmals in weiterem Sinne beschäftigen.

Wir gehen auch noch über zu dem Falle zweier ungleich genauer Messungen derselben Grösse.

Wenn zwei ungleichartige Beobachtungen mit den Gewichten p und q vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, indem etwa die erste den Wert l und die zweite den Wert $l + d$ geliefert hat, so wird das Mittel:

$$x = \frac{p\,l + q\,(l+d)}{p+q} = l + \frac{q}{p+q}\,d \tag{3}$$

Die Abweichungen vom Mittel, d. h. die scheinbaren Fehler werden:

$$v_1 = +\frac{q}{p+q}\,d \qquad v_2 = -\frac{p}{p+q}\,d \tag{4}$$

und es besteht (ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) das Verhältnis:

$$v_1 : v_2 = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} \tag{5}$$

d. h. der Widerspruch d wird auf die beiden Beobachtungen umgekehrt proportional den Gewichten verteilt. Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird nach (12) § 8. S. 27:

$$m = \sqrt{\frac{p\,v_1^2 + q\,v_2^2}{2-1}} = d\sqrt{\frac{p\,q}{p+q}} \tag{6}$$

und der mittlere Fehler des Mittels selbst nach (13) § 8. S. 27:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p+q}} = \frac{d}{p+q}\sqrt{p\,q} \tag{7}$$

Die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2 der beiden Beobachtungen *vor* der Ausgleichung sind:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p}} \quad , \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{q}} \tag{8}$$

Es besteht also das Verhältnis:

$$m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{q}} \tag{9}$$

Wir wollen hieran einige Betrachtungen anknüpfen, welche zur Vermeidung von Missverständnissen nützlich sind:

Bei einer ersten Betrachtung scheint die Gleichung (9) und die Gleichung (5) nicht gut vereinbar. Die Verbesserungen v_1 und v_2, welche man schliesslich den Messungen zuteilt, haben ein anderes Verhältnis als die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2, welche man den Messungen von vornherein zugeschrieben hat. Man hat sich hier zu erinnern, dass der Widerspruch d entstanden ist als die Differenz zweier Beobachtungen, deren *mittlere* zu fürchtende Fehler $\pm m_1$ und $\pm m_2$ sind, dass man also im Mittel nicht annehmen darf

$$m_1 + m_2 = d$$

sondern:

$$\pm m_1 \pm m_2 = d$$

also nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (6) § 5. S. 16

$$m_1^2 + m_2^2 = d^2$$

und diese Beziehung wird durch die Werte m_1 und m_2 von (8) und (6) in der That erfüllt. Dagegen sind v_1 und v_2 die *bestimmten* Korrektionen, welche man den Beobachtungen zuteilt, und welche deshalb die Beziehung erfüllen müssen:

$$v_1 - v_2 = d$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese v sind übrigens durchaus nicht untrüglich, im Gegenteil, es haftet ihnen der mittlere Fehler M des Mittels selbst an, und man muss deswegen annehmen, dass v_1 einschliesslich seiner Unsicherheit M, dem a priori zu fürchtenden Fehler m_1 gleich ist, d. h.

$$v_1 \pm M = \pm m_1$$

also nach (4), (7), (8) und (6):

$$\frac{q}{p+q}\,d \pm \frac{d}{p+q}\sqrt{p\,q} = d\sqrt{\frac{q}{p+q}}$$

und in der That giebt die Quadrierung mit Weglassung des mit $\pm$ behafteten Doppelproduktes eine identische Gleichung:

$$\frac{q^2+p\,q}{(p+q)^2} = \frac{q}{p+q}$$

Zur weiteren Veranschaulichung behandeln wir noch den einfachen Fall $p=1$, $q=2$, d. h. es ist eine Unbekannte zweimal beobachtet worden, und zwar das erstemal mit dem Gewicht 1, das zweitemal mit dem Gewichte 2. Die Beobachtungen haben die Differenz d gegeben. Entsprechend vorstehenden Gleicnungen erhält man:

	Beobachtung 1.	Beobachtung 2.
Beobachtungsresultate	l	$l+d$
Gewichte	$p=1$	$q=2$
Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 = m$	$m_2 = \frac{m}{\sqrt{2}}$
Mittel, wahrscheinlichster Wert	$l+\frac{2}{3}d$	
Wahrscheinlichste Verbesserungen	$v_1 = +\frac{2}{3}d$	$v_2 = -\frac{1}{3}d$ $\quad (v_1 - v_2 = d)$
Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1	$m = d\sqrt{\frac{2}{3}}$	
Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels	$M = \frac{d}{3}\sqrt{2}$	

Es bestehen die Verhältnisse:

Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 : m_2 = \sqrt{2} : 1{,}414 : 1$
Genauigkeiten	$\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = 1 : 1{,}414$
Verbesserungen	$v_1 : v_2 = 2 : 1.$

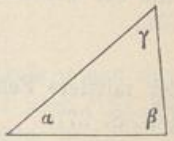
Wenn dagegen zwei Beobachtungen vorlägen, deren Genauigkeiten a priori sich wie 1 : 2 verhielten, so müsste man den Widerspruch im Verhältnis 4 : 1 verteilen.

§ 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Eine einfache Aufgabe, welche zunächst nicht als Mittelbildung mit Gewichten erscheint, welche aber hierauf zurückgeführt werden kann, ist die Ausgleichung der 3 Winkel in einem Dreieck.

Wenn in einem ebenen Dreieck (Fig. 1.) die drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen werden, mit den Ergebnissen α, β, γ, so wird wegen der Messungsfehler ein Widerspruch der Summe $\alpha+\beta+\gamma$ gegen 180° auftreten, welchen man auf die drei gemessenen Winkel zu gleichen Teilen verteilt. Um dieses bekannte Verfahren durch das Prinzip des arithmetischen Mittels zu begründen, betrachten wir zunächst nur *einen* der drei Winkel als Unbekannte.

Fig. 1.
$\alpha+\beta+\gamma-180° = w.$



Für den ersten Winkel sind zwei unabhängige Beobachtungsergebnisse vorhanden:

erstens $x_1 = \alpha$ mit dem Gewicht $= p_1 = 1$ (1)

zweitens $x_2 = 180° - (\beta+\gamma)$ mit dem Gewicht $= p_2 = \frac{1}{2}$ (2)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das zweite Gewicht ist $= \frac{1}{2}$, weil in x_2 die Fehler von β *und* von γ, d. h. der $\sqrt{2}$ fache Wert eines mittleren Winkelfehlers, zusammenwirken, was nach den Proportionen (5) § 8. S. 25 das Gewicht $= \frac{1}{2}$ liefert, oder ausführlicher:

mittlerer Fehler von x_1 ist $m_1 = \pm m$

„ „ „ x_2 „ $m_2 = + m \pm m = m\sqrt{2}$

also $m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = \frac{1}{2}$$

Der Mittelwert aus (1) und (2) ist also mit Rücksicht auf diese Gewichte:

$$x = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times [180° - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}} \tag{3}$$

Wenn man hierin den Dreiecks-Widerspruch w einführt:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = w \tag{4}$$

$$\text{also } 180° - (\beta + \gamma) = \alpha - w$$

so giebt die Einsetzung in (3):

$$x = \frac{2\alpha + (\alpha - w)}{3} = \alpha - \frac{w}{3} \tag{5}$$

Dasselbe gilt auch für die beiden anderen Winkel des Dreiecks, welche mit y und z bezeichnet sein mögen, d. h.:

$$x = \alpha - \frac{w}{3}$$

$$y = \beta - \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma - \frac{w}{3}$$

$$\text{Summe: } x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - w$$

d. h. der Widerspruch w wird auf die drei Winkel gleich verteilt.

Wenn wir auch noch die mittleren Fehler berechnen wollen, so müssen wir festhalten, dass bei der gewählten Behandlungsweise wir in (1) und (2) es mit *zwei* Beobachtungen einer Unbekannten x zu thun haben.

Die Verbesserung v_1 der ersten Beobachtung x_1 nach (1) ist:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

und die Verbesserung v_2 der zweiten Beobachtung x_2 nach (2) ist:

$$v_2 = +\frac{w}{3} + \frac{w}{3} = \frac{2w}{3} \tag{7}$$

der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird (nach der Formel (12) § 8. S. 27):

$$m = \pm\sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2 - 1}} = \pm\sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2w}{3}\right)^2} = \pm\frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Da dem Winkel α vor der Ausgleichung das Gewicht 1 zugeteilt war, (ebenso wie auch den Winkeln β und γ), so ist dieser Wert m zugleich der mittlere Fehler

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

eines Winkels *vor* der Ausgleichung. *Nach* der Ausgleichung erhält der verbesserte Winkelwert x (ebenso wie auch y und z) ein grösseres Gewicht, nämlich die Summe $p_1 + p_2 = \frac{3}{2}$, und damit wird der mittlere zu fürchtende Fehler des Winkels x (oder auch y oder z) *nach* der Ausgleichung (nach der Formel (11) § 8. S. 27):

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w}{3}\sqrt{2} \tag{9}$$

Der mittlere Fehler nach (8), $m = \pm \frac{w}{\sqrt{3}}$, lässt sich sehr anschaulich unmittelbar deuten: der Schlussfehler w ist nämlich die unregelmässige Zusammenwirkung dreier Fehler $\pm m$, also:

$$\pm m \pm m \pm m = \pm w$$

woraus: $$m^2 + m^2 + m^2 = w^2$$

was mit (8) übereinstimmt.

Der mittlere Fehler m vor der Ausgleichung und der mittlere Fehler M nach der Ausgleichung veranschaulichen durch ihr Verhältnis den durch die Ausgleichung erzielten Genauigkeitsgewinn. Nach (8) und (9) ist:

$$M : m = \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 = 0{,}816 : 1 \tag{10}$$

Der mittlere Fehler hat infolge der Ausgleichung im Verhältnis rund 0,8 : 1 abgenommen, also die Genauigkeit hat in dem Verhältnis 1 : 0,8 zugenommen.

Oder man kann auch sagen: durch die Ausgleichung der drei Winkel in einem Dreieck ist eine Genauigkeitssteigerung von 20 % für den einzelnen Winkel erreicht worden.

Das vorstehende Beispiel, welches zur Einführung in die Theorie der Gewichte sich gut eignet, kann auch noch so ausgedehnt werden, dass die drei gemessenen Winkel nicht wie vorher gleichgewichtig, sondern selbst mit ungleichen Gewichten beobachtet sind.

Wir wollen diesen Fall auch noch durchführen:

Es seien gemessen die 3 Winkel $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ (11)

mit den Gewichten $p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma$ (12)

der Dreieckswiderspruch ist $\alpha + \beta + \gamma - 180° = w$ (13)

Ist m der mittlere Gewichtseinheitsfehler, so sind die mittleren Winkelfehler, entsprechend den Gewichten (12) vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} \qquad m_\beta = \frac{m}{\sqrt{p_\beta}} \qquad m_\gamma = \frac{m}{\sqrt{p_\gamma}} \tag{14}$$

also: $$m_\alpha^2 = m^2 \left(\frac{1}{p_\alpha}\right) \qquad m_\beta^2 + m_\gamma^2 = m^2 \left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right) \tag{15}$$

Bezeichnet man nun mit p_1 das Gewicht des gemessenen Winkels α und mit p_2 das Gewicht der Summe der zwei anderen Winkel $\beta + \gamma$, so wird nach (15), da die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler sind:

$$p_1 = p_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}} \qquad p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}} \tag{16}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zur Abkürzung setzen wir die Summe

$$\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}=\left[\frac{1}{p}\right],\text{ und damit giebt (16):}$$

$$p_1+p_2=\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)} \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen in Bezug auf die Gewichte haben wir nun ähnlich wie bei (3):

$$x=\frac{p_1\,\alpha+p_2\,[180°-(\beta+\gamma)]}{p_1+p_2}=\frac{p_1\,\alpha+p_2\,(\alpha-w)}{p_1+p_2}$$

$$x=\alpha-\frac{p_2}{p_1+p_2}\,w$$

Setzt man hier (16) und (17) ein, so wird:

$$x=\alpha-\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w \tag{18}$$

Da für die beiden anderen Winkel ähnliche Gleichungen gelten, hat man den Satz, dass der Widerspruch w auf die drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ umgekehrt proportional den Gewichten oder proportional den Quadraten der mittleren Fehler verteilt wird.

Man kann nun auch ähnliche Formeln wie (8) und (9), welche bei gleichen Gewichten gelten, für ungleiche Gewichte entwickeln. Indem wir diese Entwicklung als Übungsbeispiel anheim geben, schreiben wir davon nur die Ergebnisse:

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler $m=\dfrac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}$ (19)

Mittlerer Fehler des Winkels α vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha=\frac{m}{\sqrt{p_\alpha}}=w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{20}$$

Mittlerer Fehler des Winkels α bezw. x nach der Ausgleichung:

$$M_\alpha=w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{21}$$

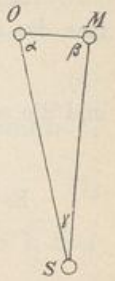
Auch ein Zahlenbeispiel für ein Dreieck mit drei ungleichgewichtigen Winkeln möge hier eine Stelle finden, welches wir in den „Astr. Nachr., 75. Band 1870“ S. 293 aus Badischen und Hessischen Winkeln verschiedenster Herkunft zusammengebracht haben, mit der Bemerkung, dass solche Gewichtsunterscheidungen praktisch immer misslich sind, während für ein formelles Rechenbeispiel sich das vorgeführte wohl eignet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

In dem Dreieck Oggersheim—Mannheim—Speyer, welches in Fig. 2. dargestellt ist, hat man

	Gemessene Winkel	Gewichte
$\alpha =$	72° 16′ 44,86″	$p\alpha = 27$
$\beta =$	90 1 56,46	$p\beta = 42$
$\gamma =$	17 41 17,43	$p_\gamma = 65$
Summe: $\alpha+\beta+\gamma =$	179° 59′ 58,75″	
soll	180° 0′ 0,29″	
Widerspruch: $w =$	−1,54″	

Fig. 2.



Gewichts-Reciproken: $\frac{1}{p_\alpha} = 0{,}037$, $\frac{1}{p_\beta} = 0{,}024$, $\frac{1}{p_\gamma} = 0{,}015$

$$\left[\frac{1}{p}\right] = 0{,}076$$

Winkelverbesserungen: $v_\alpha = \frac{0{,}037}{0{,}076}\,1{,}54'' = +0{,}75''$ $v_\beta = +0{,}49''$ $v_\gamma = +0{,}30''$

Gemessen	Verbesserungen	Ausgeglichen
72° 16′ 44,86″	+0,75″	72° 16′ 45,61″
90 1 56,46	+0,49	90 1 56,95
17 41 17,43	+0,30	17 41 17,73
179° 59′ 58,75″	+1,54″	180° 0′ 0,29″

Nach (19) bestimmt man den mittleren Fehler für die Gewichtseinheit:

$$m = \pm 5{,}59''$$

und nach (21) berechnet man die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel, und hat damit das Schlussergebnis:

$$\begin{aligned} \alpha &= 72° 16' 45{,}61'' \pm 0{,}77'' \\ \beta &= 90° 1' 56{,}95'' \pm 0{,}72'' \\ \gamma &= 17° 41' 17{,}73'' \pm 0{,}61'' \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise, wie hier mit der Aufgabe der Dreieckswinkelausgleichung geschehen ist, können noch manche andere Aufgaben, welche beim ersten Anblick eine Ausgleichung mit mehreren Unbekannten zu verlangen scheinen, auf die Bestimmung *einer* Unbekannten durch das arithmetische Mittel zurückgeführt werden, jedenfalls kann eine Ausgleichung mit *einer* Summenprobe für mehrere unmittelbar gemessene Grössen ganz nach dem vorhergehenden Muster einer Summenprobe für drei Elemente behandelt werden.

In ähnlicher Weise kann auch jede Ausgleichung mit *einer* streng zu erfüllenden Bedingungsgleichung, auf den Fall des arithmetischen Mittels zurückgeführt werden.

§ 11. Beobachtungs-Differenzen.

Wenn man eine Messung zweifach macht, z. B. eine Gerade hin und her misst, oder eine Nivellierung hin und her macht u. s. w., so kann man auf je zwei solcher Messungen die Sätze vom arithmetischen Mittel anwenden, wie wir schon in § 9. S. 29 gethan haben; und man kann immer, wenn von Beobachtungs-Differenzen die Rede ist, die beiden in Betracht kommenden Messungen selbständig vorführen; indessen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gestatten die Beobachtungs-Differenzen auch eine sehr nützliche allgemeinere Betrachtung, zu deren Einleitung jedoch nochmals an das arithmetische Mittel angebunden werden soll:

Sind l_1 und l_2 beide Messungsergebnisse mit der Differenz $l_1 - l_2 = d$, so hat man das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

und die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = x - l_1 = -\frac{d}{2} \quad \text{und} \quad v_2 = x - l_2 = +\frac{d}{2}$$

Es ist also der mittlere Fehler einer Messung nach (10) § 7. S. 21 mit $n = 2$:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels nach (11) § 7. S. 22.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{d}{2} \tag{2}$$

Wir merken uns hievon insbesondere die Gleichung (1), nämlich $d = m\sqrt{2}$, d. h. die zu erwartende Differenz zweier Messungen ist gleich dem $\sqrt{2}$ fachen des mittleren Fehlers einer Messung.

Nach Klarstellung dieser sehr einfachen Verhältnisse gehen wir einen Schritt weiter, indem wir mehrere solcher Wiederholungsmessungen zusammen nehmen. Man habe z. B. verschiedene Linien, jede hin und her, oder verschiedene Nivellierungsstrecken, jede für sich hin und her, gemessen und in jedem dieser Fälle eine Differenz d erhalten. Wir wollen aber dabei zunächst annehmen, die verschiedenen Längen oder Nivellementsstrecken u. s. w. seien nahezu *gleich* lang, oder allgemeiner, die Differenzen d gehören zu Messungen von lauter gleichen Gewichten, dann kann man aus einer Anzahl r solcher Differenzen eine *mittlere Differenz* berechnen nach der Formel:

$$D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots d_r^2}{r}$$

$$\text{oder} \quad D^2 = \frac{[d^2]}{r} \quad , \quad D = \sqrt{\frac{[d^2]}{r}} \tag{3}$$

Der Nenner r ist hier streng richtig und nicht etwa durch $r - 1$ zu ersetzen, wie bei (10) § 7., denn die Differenzen d haben den Charakter *wahrer* Fehler und nicht bloss scheinbarer Fehler.

Aus (1), (2) und (3) zusammen folgt nun auch, indem man die mittlere Differenz D an Stelle der einzelnen Differenz d von (1) und (2) setzt:

Mittlerer Fehler einer Messung $$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2r}} \tag{4}$$

Mittlerer Fehler einer Doppel-Messung $$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{r}} \tag{5}$$

Wenn nun aber Differenzen $d_1\, d_2 \ldots d_3$ vorliegen, welche zu *ungleich*gewichtigen Messungen gehören, z. B. wenn d_1 zu einem Hin- und Her-Nivellement der Strecke s_1, dagegen d_2 zu s_2 u. s. w. gehört, allgemein wenn d_1 zu einer Doppelmessung vom Gewichte p_1, dagegen d_2 zu einer Doppelmessung vom Gewichte p_2

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

u. s. w. gehört, so darf man auch die mittlere Differenz D nicht mehr nach (3) berechnen, sondern man hat dann die mittlere Differenz D für das Gewicht 1 nach Analogie von (12) § 8. S. 27 zu berechnen, jedoch mit dem Nenner r wie in (3):

$$D^2 = \frac{p_1 d_1^2 + p_2 d_2^2 + \ldots p_n d_r^2}{r}$$

$$D^2 = \frac{[p\,d^2]}{r} \quad , \quad D = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{r}} \tag{6}$$

Also ist auch der mittlere Fehler m einer einzelnen Messung vom Gewichte 1:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{2\,r}} \tag{7}$$

und der mittlere Fehler m eines Mittels aus zwei Messungen vom Gewichte 1, oder der mittlere Fehler einer Doppelmessung vom Gewichte 1:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[p\,d^2]}{r}} \tag{8}$$

Als eine der wichtigsten Anwendungen dieser letzteren Formeln wollen wir Wiederholungsmessungen von Längen, oder Hin- und Her-Nivellierungen nehmen. Alle diese Messungen haben mittlere Fehler, welche mit den Quadratwurzeln der Entfernungen s wachsen, folglich sind die Gewichte umgekehrt proportional den $(\sqrt{s})^2$, d. h. umgekehrt proportional den s zu setzen, und damit werden (6), (7) und (8):

$$D^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \ldots \frac{d_n^2}{s_n}\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2\,r}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \tag{9}$$

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \tag{10}$$

Als Beispiel hiezu nehmen wir einen Teil eines Eisenbahn-Nivellements (das in unserm Band II. 1893, S. 442 näher beschrieben ist).

	Nivellierung				Entfernung	
Punkt	I	II	I—II $= d$	d^2	s	$\frac{d^2}{s}$
(1)						
	$-0{,}1853^m$	$-0{,}1859^m$	$+0{,}6^{mm}$	0,36	$0{,}72^{km}$	0,50
(2)						
	$+1{,}6258$	$+1{,}6262$	$-0{,}4$	0,16	0,42	0,38
(3)						
	$+1{,}4329$	$+1{,}4323$	$+0{,}6$	0,36	0,47	0,77
(4)						
	$+0{,}5106$	$+0{,}5094$	$+1{,}2$	1,44	0,48	3,00
(5)						
	$-0{,}0073$	$-0{,}0049$	$-2{,}4$	5,76	0,51	11,30
(6)						
$r = 5$	$+3{,}5693$	$+3{,}5679$	$+2{,}4$		2,60	15,95
	$-0{,}1926$	$-0{,}1908$	$-2{,}8$			
	$+3{,}3767$	$+3{,}3771$	$-0{,}4$			

Hieraus hat man den mittleren Fehler eines Doppelnivellements von 1 Kilometer:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15{,}95}{5}} = \pm 1{,}79^{mm} \tag{11}$$

und den mittleren Fehler eines einfachen Nivellements von 1 Kilometer:

$$m = M\sqrt{2} = \pm 2{,}53^{mm} \tag{12}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eine solche Genauigkeitsbestimmung ist mehr oder weniger zuverlässig, je nachdem man mehr oder weniger Vergleichsstrecken zur Verfügung hat, dagegen auf die Längen der Strecken kommt es dabei nicht an, sondern nur auf deren Anzahl. (Allerdings *ganz kleine* Strecken, z. B. unter 100m, werden aus mancherlei Gründen nicht vollberechtigt mitzählen.)

Wir wollen die Formeln (9) und (10) auch noch auf eine Längenmessung anwenden und zwar auf das klassische Beispiel der Bessel schen Gradmessung in Ostpreussen, welches an sich schon interessant ist, uns auch noch Veranlassung zu einer Bemerkung über die Entstehung der Differenzenrechnung geben wird.

Bessel hat bei seiner Gradmessung in Ostpreussen eine Basis in zwei Teilen je zweifach gemessen, nämlich:

	1. Teil:	2. Teil:	Gesamtmittel	(13)
1. Messung	441,1852m	1381,1571m	1822,3447m	
2. Messung	441,1839m	1381,1632m		
Differenzen	$d_1 = +1{,}3^{mm}$	$d_2 = -6{,}1^{mm}$		

Indem man nun die Differenzen d in Millimetern, die Entfernungen in Kilometern zählt, also $s_1 = 0{,}441$ und $s_2 = 1{,}381$, wobei $r = 2$ ist, hat man nach (9) das mittlere Fehlerquadrat einer Messung der Längeneinheit:

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right) \tag{14}$$

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}3^2}{0{,}441} + \frac{6{,}1^2}{1{,}381}\right) = 7{,}70 \qquad m = \pm 2{,}78^{mm} \text{ für 1 Kilom.} \tag{14a}$$

Dieses ist der mittlere Fehler *einer* Messung der Längeneinheit von 1 Kilometer. Der mittlere Fehler eines Mittels aus je *zwei* zusammengehörigen (Hin- und Her)-Messungen einer Länge von 1 Kilometer d. h. der mittlere Fehler einer Doppelmessung von 1^{km} wird nach (10):

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}78}{\sqrt{2}} = \pm 1{,}96^{mm} \text{ (für 1 Kilom.)} \tag{15}$$

Endlich kann man aber auch den mittleren Fehler des Gesamtmittels $s_1 + s_2 = 1822{,}3447^m$ rechnen; es ist nämlich dessen Quadrat:

$$\left.\begin{aligned} M'^2 = M^2(s_1+s_2) &= \frac{1}{8}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right)(s_1+s_2) \\ \text{oder } M' &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2 + \frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

während in der Gradmessung in Ostpreussen S. 55 statt dessen angegeben ist:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2 + \frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2} \tag{15a}$$

(Vergleiche hiezu die kleingedruckten Anmerkungen im Nachfolgenden S. 40.)

Die Ausrechnung nach (15) giebt:

$$M' = M\sqrt{s_1+s_2} = 1{,}96\sqrt{1{,}822} = \pm 2{,}65^{mm} \tag{15b}$$

Man wird also nun aus (13) und (15b) das Schlussergebnis bilden:

$$\text{Basislänge} = 1822{,}3447^m \pm 0{,}0027^m \tag{16}$$

Endlich bietet die Differenzentheorie noch die Möglichkeit eines zweiten sehr anschaulichen Beweises des Satzes, dass man bei der Genauigkeitsberechnung aus

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dem arithmetischen Mittel die Quadratsumme $[v^2]$ nicht durch n, sondern durch $n-1$ dividieren muss, d. h. des Satzes (10) §. 7. S. 21.

Wenn eine Unbekannte n mal beobachtet ist, so kann man zur Gewinnung eines Urteils über die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung die einzelnen Ergebnisse *unter sich* vergleichen, und zwar kann man die n Beobachtungen zu $n\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Differenzen kombinieren. Bedeuten l_1 und l_2 die zwei ersten Beobachtungen, so ist deren Differenz $d = l_2 - l_1$, oder wenn man die scheinbaren Fehler $v_1 = x - l_1$ und $v_2 = x - l_2$ vorführt, so ist auch $d = (x - v_2) - (x - v_1) = v_1 - v_2$.

Die sämtlichen so zu bildenden $n\frac{n-1}{2}$ Differenzen sind folgende:

$$\begin{array}{lll} v_1 - v_2 & & \\ v_1 - v_3 & v_2 - v_3 & \\ v_1 - v_4 & v_2 - v_4 & v_3 - v_4 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_1 - v_n & v_2 - v_n & v_3 - v_n \ \ldots\ v_{n-1} - v_n \end{array}$$

Diese Differenzen sind nun allerdings nicht unabhängig, und man hat deswegen nicht das Recht, sie wie unabhängige Beobachtungsfehler zu behandeln, allein sie sind wenigstens gleichartig und gestatten deswegen die Bildung eines Mittelwertes. Ihre Quadratsumme wird, da jedes einzelne v^2 sich $(n-1)$ mal findet:

$$[d^2] = (n-1)\,[v^2] - 2\,[v_i\,v_k] \tag{17}$$

wenn $[v_i\,v_k]$ die Summe aller bei der Quadrierung der Differenzen auftretenden Produkte bedeutet.

Um diese unbekannte Summe $[v_i\,v_k]$ wieder zu eliminieren, benützt man die identische Gleichung:

$$(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n)^2 = [v]^2 = [v^2] + 2\,[v_i\,v_k]. \tag{18}$$

(17) und (18) geben zusammen:

$$[d^2] = (n-1)\,[v^2] + [v^2] - [v]^2$$

Die scheinbaren Fehler v geben aber die algebraische Summe $[v] = 0$

$$\text{also} \qquad [d^2] = n\,[v^2] \tag{19}$$

Die Anzahl der Differenzen d ist $= \frac{n-1}{2}$, also die mittlere Differenz D (je zweier Messungen):

$$D = \sqrt{\frac{2\,[d^2]}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{2\,[v^2]}{n-1}} \tag{20}$$

und der mittlere Fehler einer Messung:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{21}$$

dieses ist in Übereinstimmung mit (10) § 7. S. 21.

Über die Entstehung der Rechnung mit Beobachtungs-Differenzen schreibt *Czuber* in „Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891", S. 174: „Der Gedanke, zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe statt der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom arithmetischen Mittel, ihre Abweichungen unter einander, mit anderen Worten, statt der scheinbaren Fehler die Beobachtungs-*Differenzen* zu verwenden, ist von *Jordan* 1869 ausgegangen, und von *Andrae* und *Helmert* weiter ausgebildet worden. Wohl unabhängig von Jordan hat *Bréger* 1881 die Anwendung der Beobachtungs-Differenzen zur Bestimmung der Präcision einer Beobachtungsreihe vorgeschlagen,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

(Comptes rendus 93, 1881, S. 1119—1121, sur les différences successives des observations) und die Richtigkeit der Grundgleichung (4) (s. oben S. 36) auch experimentell geprüft."

Zu diesem Berichte von Czuber wollen wir noch einige Erläuterungen aus eigenen Erfahrungen geben: Die Differenzenrechnung entstand als Vorbereitung der längeren Erörterungen, welche in den zwei ersten Bänden der „Zeitschrift für Vermessungswesen, 1872—1873" geführt worden sind. Es handelte sich um Berechnung mittlerer Längenmessungsfehler aus Reihen von Doppelmessungen. Es ist nämlich die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Messung der Längeneinheit aus den Differenzen einer Anzahl von Doppelmessungen verschiedener Längen früher grossenteils nicht richtig ausgeführt worden, und es hatte zuerst *Dienger* in „Grunerts Archiv 31. Teil, 1858", S. 225, auf den allgemein hier begangenen Fehler aufmerksam gemacht (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1872", S. 19).

Auf eine Unrichtigkeit, welche sogar *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen", S. 54—55 bei der Berechnung des mittleren Fehlers seiner Basismessung dadurch beging, dass er die Quadratsumme zweier Differenzen nicht mit 2, sondern mit $2-1=1$ dividierte, war ich 1869 aufmerksam geworden und legte mir die Sache am besten zurecht durch Einführung der Beobachtungs-*Differenzen* als selbständiger Fehler-Elemente, was dann weiter ausgeführt wurde in einer Abhandlung „Über die Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten" in „Astr. Nachr., 74. Band 1869", S. 209—226, wo auf S. 226 der erwähnte Fehler, $2-1$ statt 2, in der Gradmessung in Ostpreussen S. 54 betrachtet und richtig gestellt wird. Bessel rechnet nämlich nicht so wie wir im vorstehenden (14) — (16) S. 38 richtig angaben, sondern er rechnet $m^2=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1^2}{s_1}+\frac{d_2^2}{s_2}\right)$ u. s. w., wodurch m und alles folgende zu gross erhalten wird, nämlich $\sqrt{2}$ mal so gross, als der richtige Wert, wie wir schon oben bei (15) und (15 a) S. 38 bemerkt haben.

Gleich darauf kam Andrae auf S. 283—284 der „Astr. Nachrichten" 74. Band mit einer kurzen dänisch geschriebenen Entgegnung auf meine Formeln von S. 209—226, darauf bezüglich, dass die einfache Beziehung zwischen der Quadratsumme $[d^2]$ aller Differenzen und der Quadratsumme $[v^2]$ der scheinbaren Fehler, nämlich $[d^2]=n[v^2]$ mir entgangen war, d. h. die Andrae'sche dänische Entwicklung giebt das, was wir im vorstehenden in (17)—(21) S. 39 mitgeteilt haben. Weiter folgte in dieser Sache „Astr. Nachr., 79. Band, 1872", S. 219—222 und S. 257—272.

Im Anschluss an das Vorhergehende wurden auch noch veröffentlicht in den Astr. Nachr., 80. Band (1872), S. 67—70, Zachariae, 80. Band, S. 189—190 Jordan, dann 81. Band, 1873, S. 49—52 Helmert, S. 51—56 Jordan, S. 225—267 Zachariae und 88. Band 1876, S. 127—131; Helmert.

Da es den Fernerstehenden schwer ist, aus all' jenen Controversen den wirklichen Gang heute noch herauszufinden, wollen wir jenen Gang kurz so angeben: Meine erste Abhandlung von 1869 hatte nur den Mangel, dass die einfache Beziehung $[d^2]=n[v^2]$ nicht gefunden war, was alsbald Andrae verbessernd nachholte. Dann brachte aber Zachariae 1872 eine *andere* Streitfrage herein, indem er („Astr. Nachr., 80. Band", S. 68) nach der dänischen Gradmessung den Differenzen bei Längenmessungen verschiedene Gewichte bei der Fehlerberechnung zuteilte, je nachdem die Differenzen zu langen oder kurzen Strecken s gehören, d. h. nicht bloss insofern die $\frac{d^2}{s}$ auf die Einheit s zu reducieren sind, sondern er giebt einen $\frac{d^2}{s}$ selbst wieder nachher das Gewicht s von der Annahme ausgehend, dass eine Differenz d aus langen Strecken mehr zur Genauigkeitsermittlung beitrage als ein d aus kurzen Strecken; das mittlere Differenzquadrat für die Längeneinheit wäre hiernach:

$$D^2=\frac{s_1\frac{d_1^2}{s_1}+s_2\frac{d_2^2}{s_2}}{s_1+s_2}=\frac{d_1^2+d_2^2}{s_1+s_2}$$

Diese Anschauung hat etwas Verführerisches, allein sie ist doch nicht die richtige, wie Helmert in „Astr. Nachr., 81. Band", S. 49—52 zuerst scharf bewiesen hat. (Darauf bezieht sich die Bemerkung, welche wir oben bei (12) S. 38 über die Längen der Nivellierstrecken gemacht haben.)

Wenn also nun heute jeder Landmesser oder Wasser-Nivelleur seine Nivellements nach der Formel (10) S. 37, nämlich $M=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$, in Hinsicht auf mittlere Fehler berechnet, so wird er dieselbe wohl als selbstverständlich hinnehmen, während doch diese Formel den langen und polemischen Weg von 1869—1873 durchlaufen musste, welchen wir in den vorstehenden Citaten geschildert haben. —

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 12. Allgemeines Ausgleichungsprinzip.

Das arithmetische Mittel genügt nur zur Ausgleichung von Beobachtungen *einer* Unbekannten. Wenn zur Bestimmung *mehrerer* Unbekannter Beobachtungen in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so muss ein allgemeineres Ausgleichungsprinzip gesucht werden. Alle Ausgleichungsaufgaben werden sich auf eine Grundaufgabe zurückführen lassen, nämlich:

Es liegen folgende n Gleichungen vor:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} 0 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ 0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ 0 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{Anzahl} = u$$

Die Grössen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ sind durch Beobachtungen erhalten worden, $x\ y\ z \ldots$ sind Unbekannte, welche mit den Beobachtungen l in Beziehungen stehen. Die Coefficienten $a\ b\ c \ldots$ der diese Beziehungen ausdrückenden Gleichungen (1) sind fehlerfrei gegeben.

Die Anzahl n der Beobachtungen und der Gleichungen (1) soll immer grösser sein als die Anzahl u der darin vorkommenden Unbekannten, d. h.:

$$n > u \quad (2)$$

Es wird daher im allgemeinen nicht möglich sein, ein System von Unbekannten $x\ y\ z$ zu finden, welches *allen* Gleichungen (1) Genüge leistet. In diesen Gleichungen werden Widersprüche auftreten, welche wir mit $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_n$ bezeichnen; und damit gehen die Gleichungen (1) über in die folgenden neuen Gleichungen, denen wir den Namen Fehlergleichungen geben:

Fehlergleichungen

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = a_n x + b_n y \pm c_n z + \ldots + l_n \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\text{Anzahl} = u$$

Man kann nur verlangen, dass von den n Widersprüchen v eine Anzahl u verschwindet, man muss also notgedrungen auf die Bedingung, dass *alle* v gleich Null werden, verzichten, und sich mit einem System $x\ y\ z \ldots$ begnügen, für welches die v im allgemeinen *nicht* gleich Null werden.

Die Aufgabe, ein solches System zu finden, ist ohne weitere Bedingung eine unbestimmte; eine solche weitere Bedingung ist insofern vorhanden, als die Widersprüche v in ihrer Gesamtheit möglichst klein sein sollen, so dass den Gleichungen (1) möglichst wenig Zwang angethan wird.

Die allseitig befriedigende mathematische Formulierung dieser Bedingung des möglichst Anpassens, oder des kleinsten Zwangs lautet:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es soll die **Quadrat-Summe** der Widersprüche v möglichst klein sein, oder in einer Formel:

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \text{Minimum} \qquad (4)$$

Diese einfache Bedingung gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungen l, zu welchen die Verbesserungen v gehören, a priori *gleich* genau zu achten sind. Ist dieses nicht der Fall, und kommen den Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ a priori die mittleren zu fürchtenden Fehler $m_1\ m_2\ m_3 \ldots m_n$ zu, so gilt statt (4) die geänderte Bedingung:

$$\left[\frac{v^2}{m_2}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \qquad (5)$$

Oder indem man unter Gewichten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ solche Zahlen versteht, welche den Quadraten $m_1^2\ m_2^2\ m_3^2 \ldots m_n^2$ umgekehrt proportional sind, kann man statt (5) auch schreiben:

$$[p\,v^2] = p_1\,v_1^2 + p_2\,v_2^2 + p_3\,v_3^2 + \ldots p_n\,v_n^2 = \text{Minimum} \qquad (5\,a)$$

Dieses Prinzip der kleinsten Quadratsumme $[v^2]$ bezw. $[p\,v^2]$ ist ebenso willkürlich wie der Begriff des mittleren Fehlers selbst, wie wir schon beim mittleren Fehler § 4. S. 14 bemerkt haben. Die Nützlichkeit des Quadratsummenprinzips erweist sich aber am besten aus seinen Folgerungen, indem auf dieses Prinzip die ganze heutige Methode der kleinsten Quadrate gegründet werden konnte.

Ehe wir weiteren Gebrauch von dem Prinzip der Gleichung (4), bzw. (5) oder (5 a) machen, überzeugen wir uns, dass dieses Prinzip im Einklang mit dem schon früher behandelten arithmetischen Mittel ist.

Man habe eine Grösse x wiederholt beobachtet

mit den Ergebnissen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$
und mit den Gewichten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$

Der Hypothese, es sei x der wahrscheinlichste Wert, entsprechen die wahrscheinlichsten Verbesserungen v der Beobachtungen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots \qquad v_n = x - l_n$$

Nach (5 a) soll sein:

$$p_1\,(x - l_1)^2 + p_2\,(x - l_2)^2 + p_3\,(x - l_3)^2 + \ldots = \text{Minimum}$$

woraus durch Differentiieren nach der Veränderlichen x erhalten wird:

$$2\,p_1\,(x - l_1) + 2\,p_2\,(x - l_2) + 2\,p_3\,(x - l_3) + \ldots = 0$$

also mit Auflösung nach x:

$$x = \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2 + p_3\,l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots} = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

in Übereinstimmung mit (4) § 8. S. 25

Man kann auch noch in anderer Weise das arithmetische Mittel als besonderen Fall unserer allgemeineren Ausgleichungsaufgabe nachweisen:

Zur Bestimmung der unbekannten Grösse x sollen die Beobachtungen $l_1\,l_2\,l_3 \ldots$ gemacht werden, wobei die Beziehnungen bestehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,x + l_1 &= 0 \\ a_2\,x + l_2 &= 0 \\ a_3\,x + l_3 &= 0 \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es ist also x niemals unmittelbar beobachtet, man kann aber x in den Beobachtungen l mehrfach ausdrücken, nämlich:

$$1)\ x = -\frac{l_1}{a_1} \qquad 2)\ x = -\frac{l_2}{a_2} \qquad 3)\ x = -\frac{l_3}{a_3} \text{ u. s. w.} \tag{7}$$

Es sollen nun die Gewichte der ursprünglichen Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ alle gleich, nämlich $= 1$ sein, und m sei der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1, dann sind die mittleren Fehler der verschiedenen in (7) enthaltenen Bestimmungen von x bzw.:

$$\frac{m}{a_1} \qquad \frac{m}{a_2} \qquad \frac{m}{a_3} \ldots \tag{8}$$

folglich die Gewichte der Werte x umgekehrt proportional den Quadraten hievon, d. h.:

$$\text{Gewichte:} \qquad a_1^2 \qquad a_2^2 \qquad a_3^2 \ldots \tag{9}$$

Nachdem die Gewichte (9) ermittelt sind, erhält man den wahrscheinlichsten Wert von x aus (7) und (9), nach dem Prinzip der Gleichung (4) § 8. S. 25:

$$x = \frac{-a_1^2\frac{l_1}{a_1} - a_2^2\frac{l_2}{a_2} - a_3^2\frac{l_3}{a_3} - \ldots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots}$$

$$x = -\frac{a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots}{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots}$$

$$x = -\frac{[a\ l]}{[a\,a]} \tag{10}$$

Diese Gleichung wird im folgenden § 13. bestätigt werden, indem die erste Gleichung (3) S. 45 daselbst mit $y = 0$ geben wird:

$$[a\,a]\,x + [a\,l] = 0$$

Nachdem hiernach das allgemeine Ausgleichungsprinzip $[v^2] =$ Minimum in Übereinstimmung mit dem arithmetischen Mittel befindlich, und dadurch um so mehr Vertrauen verdienend erkannt worden ist, wollen wir die Sache hier noch so weit verfolgen, dass die Ermittlung der Unbekannten $x,\ y,\ z \ldots$ klargestellt wird.

Angenommen man habe nur *drei* Elemente $x,\ y,\ z$ mit mehr als drei Fehlergleichungen, alle mit gleichen Gewichten, so heisse eine einzelne dieser Fehlergleichungen:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l \tag{11}$$

Also ist das zugehörige Quadrat:

$$\left.\begin{aligned} v^2 = a^2x^2 &+ 2\,a\,b\,x\,y + 2\,a\,c\,x\,z + 2\,a\,l\,x \\ &+ b^2y^2 \quad + 2\,b\,c\,y\,z + 2\,b\,l\,y \\ &\qquad + c^2z^2 \quad + 2\,c\,l\,z \\ &\qquad\qquad + l^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die entsprechende Quadratsumme wird, wenn wie üblich, $a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots = [aa]$, und $a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots = [a\,b]$ u. s. w. bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a\,a]\,x^2 &+ 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x \\ &+ \quad [b\,b]\,y^2 \quad + 2\,[b\,c]\,y\,z + 2\,[b\,l]\,y \\ &\qquad\quad + \quad [c\,c]\,z^2 \quad + 2\,[c\,l]\,z \\ &\qquad\qquad\quad + \quad [l\,l] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach dem Quadratsummen-Minimums-Prinzip muss werden:

$$\frac{\partial [v^2]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial [v^2]}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial [v^2]}{\partial z} = 0$$

Dieses ausgeführt giebt:

$$\begin{aligned} 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,b]\,y + 2\,[a\,c]\,z + 2\,[a\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,b]\,x + 2\,[b\,b]\,y + 2\,[b\,c]\,z + 2\,[b\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,c]\,x + 2\,[b\,c]\,y + 2\,[c\,c]\,z + 2\,[c\,l] &= 0 \end{aligned}$$

Da der Faktor 2 überall weggelassen werden kann, erhalten wir daraus 3 Gleichungen, welche Normalgleichungen heissen.

Normalgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die ursprünglich gegebenen Fehlergleichungen (3) und die Normalgleichungen (14) stellen das ganze Ausgleichungsverfahren vor. Man hat offenbar ebensoviele Normalgleichungen als Unbekannte. Im besonderen Falle (14) hat man 3 Unbekannte x, y, z und 3 Normalgleichungen; bei u Unbekannten wie in (3) angedeutet ist, wird man auch u Normalgleichungen bekommen, die linear sind, also durch Auflösung, nach irgend welchem Verfahren, zur Auffindung der n Unbekannten führen müssen.

Die im Vorstehenden (11)—(14) behandelte Aufgabe führt (nach Gerling) den Namen *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen*, indem die Beobachtungen l angestellt sind als Vermittlung, um zu den Unbekannten x, y, z zu gelangen.

Anmerkungen.

Die Quadratsumme $[v^2]$ wird häufig $[vv]$ geschrieben und dann auch $[p\,v^2] = [p\,v\,v]$, was offenbar gleich berechtigt ist, ebenso wie $a^2 = a\,a$ u. s. w. Wegen des Anschlusses an $[a\,b]$, $[a\,c]$ u. s. w. passt es sich natürlich auch $[a\,a]$ und nicht $[a^2]$ zu schreiben, sowie $[v\,v]$, während das einzeln stehende $[v^2]$ natürlicher ist.

Die Benennung „Fehlergleichung" für eine Gleichung von der Art (3) S. 41 oder (11) S. 43 rührt von Helmert in dessen „Ausgleichungsrechnung" her. Die rechte Seite unserer Fehlergleichung (11) S. 43, d. h. der Ausdruck $a\,x + b\,y + c\,z + l$ kann, nach Schreiber, „*Fehlerausdruck*" genannt werden.

Auch zur Buchstabenbezeichnung wollen wir einige Bemerkungen machen: Die übrig bleibenden (scheinbaren) Fehler der Ausgleichungen mit v zu bezeichnen, ist seit Gauss, Gerling und Encke allgemein gebräuchlich und bei der Preussischen Landesaufnahme und im Geodätischen Institute beibehalten. Statt v findet man häufig auch das Zeichen δ, welches wir in den beiden ersten Auflagen dieses Werkes (bzw. „Taschenbuch der praktischen Geometrie") anwandten, aber dann fallen liessen zu Gunsten des am meisten gebräuchlichen v.

Die Fehlergleichung $v = a\,x + b\,y + c\,z + l$ kommt in dieser Form schon in Art. 20 der „theoria combinationis" vor. Dagegen Encke schreibt stets $v = a\,x + b\,y + c\,z + n$, bezeichnet also das Absolutglied mit n, was uns aber nicht passt, weil n neuerdings mehr als Zeichen für eine Anzahl gebraucht wird (bei (3) bedeutet n die Anzahl der Fehlergleichungen).

Das Absolutglied l einer Fehlergleichung hat den Charakter einer Beobachtung, welche aber hier *negativ* auftritt, wie schon aus (7) zu ersehen ist, und später bei Betrachtung von Näherungswerten (in § 14.) noch deutlicher sich zeigen wird. Schreiben wir eine Fehlergleichung in die Form:

$$(-l + v) = a\,x + b\,y + c\,z$$

so erscheint $a\,x + b\,y + c\,z$ als Funktion der Unbekannten x, y, z, dann $-l$ als Beobachtungsergebnis für diese Funktion und v als Verbesserung der Beobachtung $(-l)$. Der Umstand, dass in der althergebrachten Form $v = a\,x + b\,y + c\,z + l$ das Absolutglied l eine *negative* Beobachtung vorstellt,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

scheint Veranlassung gewesen zu sein, das Absolutglied selbst negativ zu schreiben. So hat Helmert in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1872" für die Fehlergleichungen die Form:

$$\lambda = -l + ax + by + cz$$

also wie erwähnt $-l$ statt $+l$ und dazu λ statt v. Auch die Bezeichnung f für das Absolutglied der Fehlergleichung kommt vor, und führt dann zu der Benennung Fehlerglied. Man könnte dasselbe einen Näherungswert für den scheinbaren Fehler v nennen, nach seiner innersten Bedeutung hat aber das Absolutglied, mag man es mit l oder mit f bezeichnen, den Charakter einer Beobachtung und nicht eines Fehlers. In unserem System bezieht sich f stets auf eine Funktion von Messungen oder ausgeglichenen Elementen, und die linearen Fehlergleichungen schreiben wir stets in der zuerst 1821 von Gauss angewendeten, jetzt am weitesten verbreiteten Form:

$$v = ax + by + cz + l.$$

§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten.

Wir beginnen mit dem besonderen Falle von nur *zwei* Unbekannten und haben für dieses langsame Vorgehen zwei Gründe: Erstens gestalten sich bei nur zwei Unbekannten alle Entwicklungen viel einfacher und übersichtlicher als wenn man gleich mit beliebig vielen Unbekannten beginnt und zweitens kommt der besondere Fall zweier Unbekannter x und y so oft vor, namentlich bei Ausgleichungen mit Coordinaten x, y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu behandeln.

Die Anzahl der Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots\ l_n$ sei $= n$ und man habe folgende n Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + l_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + l_n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ein einzelnes v giebt quadriert:

$$\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2\,a\,b\,x\,y + 2\,a\,l\,x \\ &+ b^2 y^2 + 2\,b\,l\,y \\ &+ l^2 \end{aligned}$$

Denkt man sich alle einzelnen v so quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a\,a]\,x^2 &+ 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,l]\,x \\ &+ [b\,b]\,y^2 + 2\,[b\,l]\,y \\ &+ [l\,l] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Unser Quadrat-Minimums-Prinzip verlangt:

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,y} = 0$$

Dieses giebt:

$$\begin{aligned} 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,b]\,y + 2\,[a\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,b]\,x + 2\,[b\,b]\,y + 2\,[b\,l] &= 0 \end{aligned}$$

oder mit Weglassung des gemeinsamen Faktors 2 hat man die zwei

Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Normalgleichungen löst man nach x und y auf, was bei nur *zwei* Unbekannten keinerlei Schwierigkeiten bereiten kann. Man findet:

$$x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) oder (4) enthalten die vollständige Ausgleichungsvorschrift für die vorgelegten Fehlergleichungen (1). In Worten hat man hiernach folgende Anweisung:

Wenn die Coefficienten a, b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen (1) gegeben sind, so bildet man daraus alle Quadrate und Produkte und deren Summen:

$$\begin{aligned} a_1^2 \quad &+ a_2^2 \quad + a_3^2 \quad + \ldots + a_n^2 = [a\,a] \\ a_1\,b_1 &+ a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + \ldots a_n\,b_n = [a\,b] \\ b_1^2 \quad &+ b_2^2 \quad + b_3^2 \quad + \ldots + b_n^2 = [b\,b] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen Summen-Coefficienten bildet man die Normalgleichungen (3) oder sofort deren Auflösungen (4).

Man kann die Normalgleichungen (3) auch in dieser abgekürzten Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} [a\,v] &= 0 \\ [b\,v] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3 a}$$

denn es ist nach (1):

$$[a\,v] = a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots$$

was in weiterer Ausführung giebt:

$$[a\,v] = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l]$$

Diese Formen (3 a) entsprechen der Gleichung $[v] = 0$ beim arithmetischen Mittel. S. 20.

Wir nehmen hiezu sofort ein Zahlenbeispiel:

In den „Württembergischen Naturwissenschaftlichen Jahresheften" Jahrgang XXIV. (1868) S. 260 sind von Professor *Schoder* die Meereshöhen h und die 12jährigen Barometermittel B von 9 meteorologischen Stationen mitgeteilt, nämlich:

	h	B
	m	mm
1. Bruchsal	120,2	751,18
2. Cannstatt	225,1	742,37
3. Stuttgart	270,6	738,50
4. Calw	347,6	731,27
5. Friedrichshafen . .	406,7	726,99
6. Heidenheim . . .	492,4	718,16
7. Isny	708,1	700,48
8. Freudenstadt . . .	733,5	697,64
9. Schopfloch . . .	768,9	695,23

(5)

Wir wollen annehmen, die Theorie der barometrischen Höhenmessung sei uns ganz unbekannt, wir bemerken aber, dass bei wachsenden Höhen h die Barometerstände B ziemlich gesetzmässig abnehmen; und um das Gesetz dieser Abnahme zu untersuchen, beginnen wir damit, die Barometerstände B als Funktion der Höhen h graphisch darzustellen, wie Fig. 1 zeigt (S. 47).

Für viele Zwecke wird es nun genügen, durch die erhaltenen Punkte eine Gerade oder eine stetige Kurve möglichst anschliessend durchzulegen, und die Ordinaten der Ausgleichungs-Kurve als ausgeglichene Werte anzunehmen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auch wenn man eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vornehmen will, ist ein solches Auftragen vor Beginn der Rechnung immer rätlich, ganz besonders, wenn die Beziehung der Veränderlichen theoretisch unklar ist; die

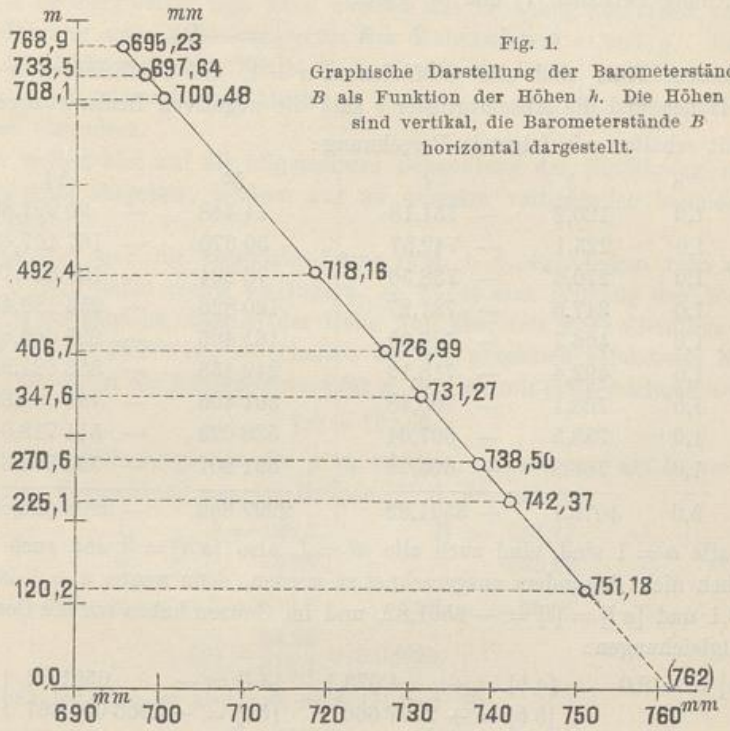


Fig. 1.
Graphische Darstellung der Barometerstände B als Funktion der Höhen h. Die Höhen h sind vertikal, die Barometerstände B horizontal dargestellt.

graphische Darstellung hat den Zweck, die Art der Abhängigkeit zu veranschaulichen, unter Umständen die Form der Ausgleichungs-Funktion festzustellen, grobe Beobachtungsfehler aufzufinden und Näherungswerte der Unbekannten zu ermitteln.

Der Anblick unserer Figur lässt eine lineare Funktion zwischen h und B annehmbar erscheinen, d. h. wir setzen:

$$B = x + h\,y \tag{6}$$

Irgend 2 von den 9 Beobachtungen (5) würden hinreichen, die 2 Unbekannten x und y der Funktion (6) zu bestimmen. Um aber allen 9 Beobachtungen möglichst gerecht zu werden, müssen wir nach den oben entwickelten Gleichungen (1)—(4) verfahren, und haben zuerst die Fehlergleichungen zu bilden. Hiebei sollen die unter (5) gegebenen Höhen h als fehlerfrei anzunehmen sein, dagegen die Barometerstände B als fehlerhaft beobachtet, so dass alle auftretenden Widersprüche den Fehlern der B zur Last zu legen sind.

Jede der 9 Beobachtungen giebt eine Gleichung von der Form (6); die entsprechenden 9 Gleichungen werden aber im allgemeinen nicht stimmen, weshalb jedem B eine Verbesserung v zugeteilt werden muss, also statt (6) wird werden

$$B + v = x + h\,y$$

$$\text{oder} \quad v = x + h\,y - B \tag{7}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses (7) ist bereits die Form der Fehlergleichungen in unserem besonderen Fall, und zur Vergleichung haben wir die allgemeine Fehlergleichungsform (1):

$$v = a\,x + b\,y + l \tag{8}$$

Die Vergleichung zwischen (7) und (8) giebt

$$a = 1 \qquad b = h \qquad l = -B \tag{9}$$

d. h. in unserem Falle sind alle Coefficienten $a = 1$, die Coefficienten b sind die gegebenen Höhen und die Absolutglieder l sind die negativen Beobachtungen B.

Damit erhalten wir folgende Berechnung:

Num.	a	b	l	b^2	$b\,l$
1.	1,0	120,2	— 751,18	14 448	— 90 291,836
2.	1,0	225,1	— 742,37	50 670	— 167 107,487
3.	1,0	270,6	— 738,50	73 224	— 199 838,100
4.	1,0	347,6	— 731,27	120 826	— 254 189,452
5.	1,0	406,7	— 726,99	165 405	— 295 666,833
6.	1,0	492,4	— 718,16	242 458	— 353 621,984
7.	1,0	708,1	— 700,48	501 406	— 496 009,888
8.	1,0	733,5	— 697,64	538 022	— 511 718,940
9.	1,0	768,9	— 695,23	591 207	— 534 562,347
	9,0	4073,1	— 6501,82	2297 666	— 2903 006,867

Da alle $a = 1$ sind, sind auch alle $a^2 = 1$, also $[a\,a] = 9$ und auch $[a\,b]$ und $[a\,l]$ brauchen nicht besonders ausgerechnet zu werden, denn wegen $a = 1$ ist $[a\,b] = [b] = 4073{,}1$ und $[a\,l] = [l] = -6501{,}82$, und im Ganzen haben wir die Coefficienten der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} [a\,a] = +\,9{,}0 & [a\,b] = +\quad 4\,073{,}1 & [a\,l] = -\quad 6501{,}82 \\ & [b\,b] = +\,2297\,666 & [b\,l] = -\,2903\,006{,}867 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Setzt man diese Coefficienten in (4), so giebt die Ausrechnung:

$$[a\,a]\,[b\,b] = +\,20678\,994{,}00$$
$$[a\,b]\,[a\,b] = +\,16590\,143{,}61$$
$$[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] = +\,4088\,850{,}39$$

$$[b\,b]\,[a\,l] = -\,14\,939\,010\,752{,}12 \qquad [a\,a]\,[b\,l] = -\,26\,127\,061{,}803$$
$$[a\,b]\,[b\,l] = -\,11\,824\,237\,811{,}70 \qquad [a\,b]\,[a\,l] = -\,26\,482\,563{,}042$$
$$[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l] = -\,3\,114\,772\,940{,}42 \qquad [a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l] = +\,355\,501{,}239$$

Die Unbekannten selbst werden:

$$x = -\frac{-\,3\,114\,772\,940}{+\quad 4\,088\,850} = +\,761{,}77$$

$$y = -\frac{+\quad 355\,501}{+\quad 4\,088\,850} = -\,0{,}08695$$

Die Ausgleichungsfunktion (6) heisst also:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \tag{11}$$

oder nach h aufgelöst:

$$h = 11{,}50\,(761{,}77 - B)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 14. Einführung von Näherungswerten bei zwei Unbekannten.

Wir haben die Ausrechnung des Zahlenbeispiels in vorstehendem § 13., welche sich zuerst dargeboten hat, nicht zur Nachahmung, sondern sozusagen als abschreckendes Beispiel hierhergesetzt; man kann nämlich die Rechnung wesentlich vereinfachen durch Einführung von *Näherungswerten* der Unbekannten x und y. Ebenso wie man bei dem arithmetischen Mittel § 7. S. 22 die Grade und Minuten (35° 26′) nicht mit in die Summierung hineinzog, kann man auch in unserem Falle erste Näherungen absondern.

Wir wollen hier auf die allgemeinere Behandlung der Einführung von Näherungswerten nicht eingehen, sondern nur an unserem vorliegenden besonderen Falle die Sache zeigen:

Betrachtet man die Barometer-Kurve (Fig. 1. S. 47), indem man sie bis zur Höhe $h = 0$ nach unten rechts verlängert, so findet man beiläufig den Wert 762^{mm}, und da es ja bekannt ist, dass in der Höhe Null über dem Meer allerdings der Barometerstand etwa = 760^{mm} ist, so behalten wir den graphisch gefundenen Näherungswert 762. Dieses ist ein Näherungswert für x, den wir mit (x) bezeichnen wollen, also

$$(x) = 762{,}00 \tag{1}$$

Um auch einen Näherungswert für y zu erhalten, nimmt man am besten die erste und die letzte Beobachtung aus der Gruppe (5) S. 46, nämlich

1.	$h = 120{,}2$	$B = 751{,}18$
9.	$768{,}9$	$695{,}23$
Differenzen:	$\Delta h = 648{,}7$	$\Delta B = -55{,}95$

$$(y) = \frac{55{,}95}{648{,}7} = 0{,}08625 \tag{2}$$

Die Näherungsfunktion ist also nun nach (1) und (2):

$$\text{Näherung} \qquad B = 762{,}00 - 0{,}08625\, h \tag{3}$$

Gelegentlich ist hiezu zu bemerken: Auf welchem Wege man die ersten Näherungen herbekommt, ist gleichgültig, sehr oft hat man sie von anderwärts, von früheren vorläufigen Berechnungen u. s. w. Unter allen Umständen kann man sich dadurch brauchbare Näherungen verschaffen, dass man, bei 2 Unbekannten, 2 möglichst verschiedene Beobachtungen auswählt und die ihnen entsprechenden Fehlergleichungen mit $v = 0$ auflöst.

Die Näherungen (x) und (y) müssen nun noch verbessert werden, was durch Zufügen von Verbesserungen geschehen soll, welche bzw. δx und $\delta y'$ heissen sollen, wir schreiben dabei nicht δy sondern $\delta y'$, weil δy für eine andere Sache (nachher bei (7) S. 50) noch vorbehalten bleibt. Also

$$x = (x) + \delta x \qquad y = (y) + \delta y' \tag{4}$$

Dem entspricht in Zahlen:

$$\text{Es } \textit{soll} \text{ sein:} \qquad B = (762 + \delta x) - (0{,}08625 + \delta y')\, h \tag{5}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind die Gleichungen (5) im allgemeinen nicht erfüllt, weil die B beobachtete Werte vorstellen. Es muss jedem B eine Verbesserung v zugeteilt werden, d. h. im Gegensatz zu (5) hat man:

$$\text{Es } \textit{ist}: \qquad B + v = (762 + \delta x) - (0{,}08625 + \delta y')\, h$$

$$\text{Das giebt die Fehlergleichung:} \quad v = \delta x - h\, \delta y' + (762 - 0{,}08625\, h) - B \tag{6}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Indessen kommt noch eine Kleinigkeit in Betracht: Bei der Annahme (6) werden die Coefficienten von δx und $\delta y'$ sehr *ungleich*. Die Coefficienten von δx sind nämlich alle $= 1$ und die Coefficienten von $\delta y'$ sind $= h$, von 120 bis 769, d. h. viel grösser als die Coefficienten von δx. Eine solche Ungleichheit ist aber formell sehr störend, wie jeder Rechenversuch sofort zeigen wird; man kann aber immer die Coefficienten nahezu gleich machen durch Einführung neuer Unbekannten, nämlich statt (6):

$$v = \delta x - \frac{h}{100}(100\,\delta y') + (762 - 0{,}08625\,h) - B$$

oder zur Abkürzung $$100\,\delta y' = \delta y \tag{7}$$

giebt: $$v = \delta x - \frac{h}{100}\,\delta y + (762 - 0{,}08625\,h) - B \tag{8}$$

Das ist eine nun genügend zugerichtete Fehlergleichung von der allgemeinen Form

$$\left.\begin{aligned} v &= a\,\delta x + b\,\delta y + l \\ \text{wobei} \qquad a &= 1 \qquad b = -\frac{h}{100} \\ l &= (762 - 0{,}08625\,h) - B \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Zur Veranschaulichung der Bedeutung von l wollen wir noch ein neues Zeichen (B) einführen, nämlich:

$$l = (B) - B \qquad (B) = 762 - 0{,}08625\,h \tag{10}$$

(B) ist nämlich derjenige Wert der Beobachtungsgrösse B, welchen B annehmen würde, wenn die Näherungswerte 762 und 0,08625 streng gälten. In Hinsicht auf das Vorzeichen merken wir ein- für allemal:

$$l = (B) - B = \text{Näherung} - \text{Beobachtung} \tag{11}$$

Nach den Formeln (11), (10) und (9) wird folgendes berechnet:

h	(B)	B	l	a	b	b^2	l^2	bl
120,2	751,63	751,18	+ 0,45	+ 1,0	— 1,20	1,44	0,20	— 0,54
225,1	742,59	742,37	+ 0,22	+ 1,0	— 2,25	5,06	0,05	— 0,50
270,6	738,66	738,50	+ 0,16	+ 1,0	— 2,71	7,34	0,03	— 0,43
347,6	732,02	731,27	+ 0,75	+ 1,0	— 3,48	12,11	0,56	— 2,61
406,7	726,92	726,99	— 0,07	+ 1,0	— 4,07	16,56	0,00	+ 0,28
492,4	719,53	718,16	+ 1,37	+ 1,0	— 4,92	24,21	1,88	— 6,74
708,1	700,93	700,48	+ 0,45	+ 1,0	— 7,08	50,13	0,20	— 3,19
733,5	698,74	697,64	+ 1,10	+ 1,0	— 7,34	53,88	1,21	— 8,07
768,9	695,68	695,23	+ 0,45	+ 1,0	— 7,69	59,14	0,20	— 3,46
			+ 4,88	+ 9,0	— 40,74	229,87	4,33	— 25,26

$$[a\,a] = + 9{,}00 \qquad [a\,b] = - 40{,}74 \qquad [b\,b] = + 229{,}87$$

$$\left.\begin{aligned} [a\,l] &= + 4{,}88 \\ [b\,l] &= - 25{,}26 \\ [l\,l] &= + 4{,}33 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Summe $[l\,l]$ haben wir hier gelegentlich mitberechnet, obgleich sie nach der bisherigen Entwicklung noch nicht nötig erscheint.

Nun rechnet man wieder wie früher:

$$\delta x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} = -\frac{1121{,}7 - 1029{,}1}{2068{,}8 - 1659{,}7} = -\frac{92{,}6}{409{,}1} = -0{,}226$$

$$\delta y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} = -\frac{-227{,}34 + 198{,}81}{2068{,}8 - 1659{,}7} = +\frac{28{,}53}{409{,}1} = +0{,}06974$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das so gefundene δy ist nur eine Hilfs-Unbekannte, die eigentliche Verbesserung $\delta y'$ ist nach (7) gleich dem hundertsten Teile von δy, d. h.

$$\delta y' = \frac{\delta y}{100} = + 0{,}000697$$

Nun hat man nach (1) und (2) die Näherungen, und soeben berechnet die Verbesserungen, also zusammen:

Näherungen	$(x) = 762{,}00$	$(y) = 0{,}086\,250$
Verbesserungen	$\delta x = - 0{,}23$	$\delta y' = + 0{,}000\,697$
Auflösungen	$x = 761{,}77$	$y = 0{,}086\,947$ (13)

Damit ist die ausgeglichene Funktion:

$$B = x - y\,h = 761{,}77 - 0{,}086\,947\,h \qquad (14)$$

Dieses stimmt hinreichend überein mit dem früheren (11) § 13. S. 48. Wir haben also auf einem zweiten bequemeren Wege das Ergebnis des vorigen § 13 wieder erhalten, und wenn eine kleine Abweichung in y zu Tage tritt, indem der neue Coefficient $y = 0{,}086947$ giebt gegen 0,08695 der früheren Rechnung, so werden wir, ohne im einzelnen weiter nachzuforschen, dem neuen Ergebnis 0,086947 den Vorzug geben weil es, trotz geringerer Ziffermenge in der Rechnung, schärfer erhalten werden muss.

Wenn man nach (14) für die gegebenen Höhen h die einzelnen B ausrechnet, und sie mit den beobachteten B vergleicht, so erhält man folgendes:

	h	B beobachtet	B nach (14) ausgeglichen	v	v^2
1.	120,2^m	751,18^{mm}	751,32^{mm}	+ 0,14^{mm}	0,0196
2.	225,1	742,37	742,20	— 0,17	0,0289
3.	270,6	738,50	738,24	— 0,26	0,0676
4.	347,6	731,27	731,55	+ 0,28	0,0784
5.	406,7	726,99	726,41	— 0,58	0,3364
6.	492,4	718,16	718,96	+ 0,80	0,6400
7.	708,1	700,48	700,21	— 0,27	0,0729
8.	733,5	697,64	598,00	+ 0,36	0,1296
9.	768,9	695,23	594,92	— 0,31	0,0961
					$1{,}4695 = [v^2]$ (15)

Diese Summe $[v^2]$ wird zur Berechnung des mittleren Fehlers gebraucht.

Wenn die v wahre Fehler wären, so würde man einfach rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} = \sqrt{\frac{1{,}4695}{9}} = \pm 0{,}404^{mm} \ (?) \qquad (16)$$

Dieses ist aber aus demselben Grunde nicht richtig, aus welchem auch die erste Berechnung (3) S. 15 nicht richtig war, nämlich weil die v nicht wahre Fehler, sondern nur scheinbare Fehler sind. Die schärfere Berechnung des mittleren Fehlers m wird in dem späteren § 18. gelehrt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 15. *Gauss* sche Elimination und Fehlerquadratsumme für zwei Unbekannte.

Statt der unmittelbaren Auflösung der Normalgleichungen, welche in (4) § 13. S. 46 angegeben ist, empfiehlt sich in den meisten Fällen die von *Gauss* angegebene allmähliche Eliminierung mit einer eigentümlichen übersichtlichen Bezeichnungsart.

Wir nehmen die Normalgleichungen (3) § 13. S. 45 nochmals vor:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \tag{1}$$

$$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0 \tag{2}$$

Wir multiplizieren die erste Normalgleichung (1) mit $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ und addieren sie zur zweiten, wodurch x wegfällt, und folgende Gleichung übrig bleibt:

$$\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) y + \left([b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\right) = 0 \tag{3}$$

Dieses giebt Veranlassung, abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, nämlich:

$$[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \qquad [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] = [b\,l\,.\,1] \tag{4}$$

damit wird (3):

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1] = 0 \qquad y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \tag{5}$$

Macht man die Elimination in umgekehrter Folge, so hat man:

$$[a\,a] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[a\,b] = [a\,a\,.\,1] \qquad [a\,l] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[b\,l] = [a\,l\,.\,1] \tag{6}$$

$$[a\,a\,.\,1]\,x + [a\,l\,.\,1] = 0 \qquad x = -\frac{[a\,l\,.\,1]}{[a\,a\,.\,1]} \tag{7}$$

Die Klammern $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,l\,.\,1]$ u. s. w. sind symbolische Bezeichnungen von ähnlicher Art, wie auch z. B. die Determinanten-Bezeichnung.

Um sich den Bau unserer Klammer-Coefficienten einzuprägen, merke man sich zunächst, dass jeder solche Wert = Null wird, sobald man die symbolische Bezeichnung algebraisch auffasst, z. B.

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = b\,b - \frac{a\,b}{a\,a}\,a\,b = b\,b - \frac{b}{a}\,a\,b = b\,b - b\,b = 0 \tag{8}$$

Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler.

Auch die Quadratsumme $[v\,v]$ der übrig bleibenden (scheinbaren) Fehler v kann man durch einen ähnlichen gebauten Ausdruck darstellen wie $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w.

Nach (2) § 13. S. 45 ist diese Summe zunächst:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,l]\,x \\ + [b\,b]\,y^2 + 2\,[b\,l]\,y \\ + [l\,l]\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hiemit lässt sich die Normalgleichung (1) in innige Beziehung bringen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l])^2 = [a\,a]^2\,x^2 + 2\,[a\,a]\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,a]\,[a\,l]\,x \\ + [a\,b]^2\,y^2 \quad + 2\,[a\,b]\,[a\,l]\,y \\ + [a\,l]^2\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und wenn man allerseits mit $[a\,a]$ dividiert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} &= [a\,a]\,x^2+2\,[a\,b]\,x\,y \quad +2\,[a\,l]\,x\\ &+\frac{[a\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]}\,y^2+2\,\frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}\,y\\ &+\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Wenn man dieses von (9) abzieht, so erhält man:

$$[v\,v]-\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}=\left([b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]\right)y^2+2\left([b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right)y$$
$$+\left([l\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right)$$

In der neuen Schreibweise mit $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. giebt dieses:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v]-\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} &= [b\,b\,.\,1]\,y^2+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ &+\ [l\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Eine Umformung von gleicher Art kann man nochmals machen, nämlich wegen (5)

$$([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2=[b\,b\,.\,1]^2y^2+2\,[b\,b\,.\,1]\,[b\,l\,.\,1]\,y$$
$$+\ [b\,l\,.\,1]^2$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]} &= [b\,b\,.\,1]\,y^2+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ &+\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Dieses (13) wieder gliederweise von (12) abgezogen giebt:

$$[v\,v]-\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}-\frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]}=[l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1] \qquad (14)$$

Schreibt man vollends $[l\,l\,.\,2]$ für die letzten Teile von (14), so ist nun das ursprüngliche $[v\,v]$ von (9) auf folgende Form gebracht:

$$[v\,v]=\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]}+\frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]}+[l\,l\,.\,2] \qquad (15)$$

Nach (1) und (5) sind aber die beiden quadratischen Glieder = Null, es bleibt also übrig:

$$[v\,v]=[l\,l\,.\,2] \qquad (16)$$

Die neu eingeführten Glieder $[l\,l\,.\,1]$ und $[l\,l\,.\,2]$, welche zur Elimination selbst nicht nötig waren, berechnet man im Anschluss an die Elimination.

Wir wollen den geschlossenen Ausdruck $[l\,l\,.\,2]$ auch nochmals auseinander ziehen, nämlich:

$$[l\,l\,.\,2]=[l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]$$

und $$[l\,l\,.\,1]=[l\,l]\ -\ \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$$

Dann wird (16):

$$[v\,v]=[l\,l]-\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}\ -\ \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (17)$$

Die abgekürzten Bezeichnungen $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1]$, $[l\,l\,.\,1]$ u. s. w. mit der entsprechenden Elimination, sind zuerst von Gauss eingeführt worden im Jahre 1810 durch die Abhandlung „*Dis-*

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

quisitio de elementis ellipticis Palladis etc." Die Zeichen sind daselbst geschrieben $[b\,b\,,1]$ $[b\,c\,,1]$ u. s. w., während jetzt gewöhnlich $[b\,b\,.1]$ geschrieben wird, von manchen auch $[b\,b_1]$. Abgesehen von diesen kleinen Abänderungen haben sich diese classischen Bezeichnungen seit 80 Jahren in allen namhaften Schriften über Methode der kleinsten Quadrate eingebürgert und werden als sozusagen geheiligte Bezeichnungen festgehalten. Der Versuch, diese glücklicherweise nun feststehenden Zeichen durch andere zu ersetzen, wäre als unglücklich und auf die Dauer nicht haltbar zu bezeichnen.

§ 16. Mittlerer Gewichts-Einheits-Fehler bei zwei Unbekannten.

Aus der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$, mit welcher wir uns soeben beschäftigt haben, kann man auch den mittleren Fehler einer Beobachtung berechnen (bzw. den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichten $= 1$). In erster Näherung kann man schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}} \quad (?) \tag{1}$$

Indessen ist diese Formel deswegen nicht genügend, weil die v nicht wahre Fehler, sondern nur scheinbare Fehler sind, wie schon am Schluss von § 14. S. 51 betrachtet worden ist.

Wir müssen die Formel (1) in ähnlicher Weise abändern, wie schon beim arithmetischen Mittel bei (10) § 7. S. 21 geschehen ist, wo der Nenner n in $n-1$ (für *eine* Unbekannte x) umgewandelt wurde.

Wir werden wieder zu unterscheiden haben:

Ausgleichungs-Ergebnisse	$x\ y$,	Wahre Unbekannte	$X\ Y$
scheinbare Fehler	$v_1\ v_2\ v_3 \ldots$,	Wahre Fehler	$\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$

Dann bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= a\,x + b\,y + l \\ \varepsilon &= a\,X + b\,Y + l \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Also Differenz: $v - \varepsilon = a\,(x - X) + b\,(y - Y)$

oder $$v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + \varepsilon \tag{3}$$

Dieses hat wieder dieselbe Form wie die früheren Fehlergleichungen $v = a\,x + b\,y + l$, und wegen $[a\,v] = 0$ und $[b\,v] = 0$ kann man daraus auch eine Art von Normalgleichungen bilden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} [a\,v] &= [a\,a]\,(x - X) + [a\,b]\,(y - Y) + [a\,\varepsilon] = 0 \\ [b\,v] &= [a\,b]\,(x - X) + [b\,b]\,(y - Y) + [b\,\varepsilon] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Auch die Summe $[v\,v]$ kann man in ähnlicher Form wie früher bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,(x - X)^2 &+ 2\,[a\,b]\,(x - X)\,(y - Y) + 2\,[a\,\varepsilon]\,(x - X) \\ &+ [b\,b]\,(y - Y)^2 \quad + 2\,[b\,\varepsilon]\,(y - Y) \\ &+ [\varepsilon\,\varepsilon] \end{aligned}$$

und damit lässt sich auch dieselbe Umformung machen wie bei dem früheren $[v\,v]$ in (17) § 15. S. 53, nämlich:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.1]^2}{[b\,b\,.1]} \tag{5}$$

Man sieht hieraus, dass $[v\,v]$ kleiner als $[\varepsilon\,\varepsilon]$ ist, und es handelt sich darum, die Differenz zwischen $[v\,v]$ und $[\varepsilon\,\varepsilon]$, d. h. die zwei Schlussglieder von (5), so genau zu bestimmen, als es bei der Unbekanntheit der wahren Fehler ε möglich ist, d. h.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wir gehen darauf aus, die *Mittel*werte der zwei letzten Glieder in (5) zu bestimmen. Zunächst haben wir:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + a_3\,\varepsilon_3 + \ldots)^2$$
$$= a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + a_3^2\,\varepsilon_3^2 + \ldots + 2\,a_1\,a_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \ldots \quad (6)$$

An Stelle der Quadrate ε_1^2 , $\varepsilon_2^2 \ldots$ setzen wir deren gemeinsamen Mittelwert m^2, und die Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ u. s. w. müssen wegen des unregelmässigen Zeichenwechsels $\pm\,\varepsilon$ im Mittel verschwinden, folglich giebt (6):

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots)\,m^2 + 0$$
$$[a\,\varepsilon]^2 = [a\,a]\,m^2 \text{ und } \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = m^2 \quad (7)$$

In gleicher Weise können wir auch das letzte Glied von (5) behandeln, nämlich:

$$[b\,\varepsilon\,.\,1] = [b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,\varepsilon]$$
$$= (b_1\,\varepsilon_1 + b_2\,\varepsilon_2 + \ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,(a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \ldots)$$
$$= \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)\,\varepsilon_1 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_2\right)\varepsilon_2 + \ldots$$
$$[b\,\varepsilon\,.\,1]^2 = \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_2\right)^2 \varepsilon_2^2 + \ldots$$
$$+ 2\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_2\right)\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \ldots$$

Hievon soll der Mittelwert mit Rücksicht auf die verschiedenen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots$ gebildet werden, und dabei macht man wieder dieselben Überlegungen, wie bei (6), dass nämlich der Mittelwert der verschiedenen *Quadrate* ε_1^2 , $\varepsilon_2^2 \ldots$ allgemein $= m^2$ zu setzen ist und dass der Mittelwert der *Produkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ verschwindet wegen der unregelmässig schwankenden Vorzeichen $\pm$ der einzelnen ε. Man findet also aus dem vorhergehenden:

$$[b\,\varepsilon\,.\,1]^2 = \left((b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1)^2 + (b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_2)^2 + \ldots\right) m^2$$
$$\frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{m^2} = \left((b_1^2 - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,a_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right) + \left(b_2^2 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,a_2^2 - 2\,a_2\,b_2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right) + \ldots$$
$$= (b_1^2 + b_2^2 + \ldots) + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots) - 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots)$$
$$= [b\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,[a\,a] - 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$$
$$\frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{m^2} = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \quad (8)$$

Setzt man dieses (8) nebst (7) in (5), so erhält man:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - m^2 - m^2$$
$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - 2\,m^2$$

Nun ist $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} = m^2$ die wahre Bestimmung von m^2, was mit dem vorhergehenden zusammengenommen giebt:

$$[v\,v] = n\,m^2 - 2\,m^2$$

also:
$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-2} \qquad m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} \quad (9)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses ist die richtige Formel statt der zweifelhaften Formel (1). Die Formel (9) erinnert in ihrem Bau an die frühere Formel (10) § 7. S. 21 für das arithmetische Mittel. Ebenso wie für *eine* Unbekannte beim arithmetischen Mittel der Nenner n in $n-1$ überging, muss nun bei *zwei* Unbekannten x und y der Nenner $n-2$ werden.

Man kann wohl vermuten, dass das nun so weiter gehen wird, dass bei 3 Unbekannten x, y, z der Nenner $n-3$ und allgemein bei u Unbekannten der Nenner $n-n$ entstehen wird; aber ehe wir dieses bewiesen haben werden, ist es noch nicht gültig.

Die Unterscheidung wahrer Fehler ε und scheinbarer Fehler v bei der Berechnung des mittleren Fehlers ist eine der feinsten Betrachtungen der M. d. kl. Q., eine echte Blüte des Gaussschen Ingeniums, während manch Anderer als Gauss sich wohl dabei beruhigt hätte, dass die v immerhin Näherungswerte der ε sind. Der allgemeine Satz, dessen besonderen Fall für zwei Unbekannte wir soeben behandelt haben, wurde zuerst von Gauss in art. 38 der „theoria combinationis" (vom Jahre 1823) entwickelt. In einem Lehrbuche diese Sache anschaulich vorzutragen und zu beweisen ist nicht leicht. Schon Gerling begnügte sich in seiner „Ausgleichungs-Rechnung der praktischen Geometrie", Hamburg 1843, S. 39 und S. 132 mit einer allgemeinen Plausibelmachung. Neuere Verfasser von Lehrbüchern haben häufig den Satz wenigstens für $n-1$ bewiesen, und haben dann nach Analogie summarisch weiter geschlossen, dass für zwei Unbekannte $n-2$, für drei Unbekannte $n-3$ u. s. w. zu setzen sei. — Ganz unzulässig aber ist es, wie in neuester Zeit geschehen, den Satz $m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u}$ als „nicht streng zu beweisender *Grundsatz*" an die Spitzen der Betrachtungen zu stellen. Mit demselben Rechte könnte man den Pythagoräischen Fehlerfortpflanzungssatz (6) S. 16 als unbewiesenen Grundsatz an die Spitze stellen, und durch solches Verfahren der M. d. kl. Q. den mathematischen Boden entziehen. —

§ 17. Mittlerer Fehler der ausgeglichenen x und y.

Mit dem, was wir in § 13.—16. gelehrt haben, kann man bereits kleine Ausgleichungen machen, und in vielen Fällen geschieht nichts weiteres, (und im Sinne allmählicher Erlernung der ganzen Theorie möchte es sich auch empfehlen, unn sofort das Zahlenbeispiel von § 14. nochmals vorzunehmen, und entsprechend § 15. und § 16. weiter zu führen).

Indessen ebenso wie beim arithmetischen Mittel der mittlere Fehler des Mittels selbst, d. h. des ausgeglichenen x bestimmt werden musste, verlangt nun auch die Weiterführung unserer Ausgleichung mit zwei Unbekannten noch die Berechnung der mittleren Fehler der ausgeglichenen x und y.

Um dazu zu gelangen, nehmen wir wieder unser allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz (10) § 5. S. 17 vor, und nehmen an, es hängen x und y mit gemessenen Grössen l durch folgende lineare Gleichungen zusammen:

$$x = \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots \quad + \alpha_n l_n \tag{1}$$
$$y = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \ldots \quad + \beta_n l_n \tag{2}$$

Wenn dabei m der mittlere Fehler eines einzelnen l ist, so sind nach dem citierten Fehlerfortpflanzungsgesetze die mittleren Fehlerquadrate von x und y:

$$m_x^2 = \alpha_1^2 m^2 + \alpha_2^2 m^2 + \ldots \quad = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots) m^2 = [\alpha\,\alpha]\, m^2 \tag{3}$$
$$m_y^2 = \beta_1^2 m^2 + \beta_2^2 m^2 + \ldots \quad = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots) m^2 = [\beta\,\beta]\, m^2 \tag{4}$$

oder in Gewichtsform, wenn zu dem mittleren Fehler m das Gewicht 1 gehört:

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\,\alpha]} \qquad p_y = \frac{1}{[\beta\,\beta]} \tag{5}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses gilt zunächst für beliebige Werte α und β; wir wollen nun aber unter y die Unbekannte verstehen, welche aus der Auflösung unserer Normalgleichungen hervorgeht, nämlich nach (5) § 15. S. 52:

$$y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \tag{6}$$

Um diese Gleichung (6) mit (2) in Übereinstimmung zu bringen, müssen wir den Zähler von (6) so auflösen, bis alle darin vorkommenden $l_1\,l_2\ldots$ einzeln dastehen; wir entwickeln daher:

$$\begin{aligned}[b\,l\,.\,1] &= [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \\ &= (b_1\,l_1 + b_2\,l_2\ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + \ldots) \\ &= \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right) l_1 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right) l_2 + \ldots\end{aligned}$$

Dieses in (6) berücksichtigt giebt:

$$y = -\frac{b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1}{[b\,b\,.\,1]}\,l_1 - \frac{b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2}{[b\,b\,.\,1]}\,l_2 - \ldots$$

Die Vergleichung mit (2) zeigt, dass die β folgende Bedeutungen haben:

$$\beta_1 = -\frac{b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1}{[b\,b\,.\,1]} \quad , \quad \beta_2 = -\frac{b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2}{[b\,b\,.\,1]}\ldots \tag{7}$$

also:
$$\beta_1^2 = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left(b_1^2 - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\,b_1 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_1^2\right)$$

ebenso auch:
$$\beta_2^2 = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left(b_2^2 - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\,b_2 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_2^2\right)$$

. . . . . .

Summe
$$[\beta^2] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b^2] - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}[a^2]\right)$$

oder mit $[b^2] = [b\,b]$, $[a^2] = [a\,a]$ u. s. w.:

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}[b\,b\,.\,1]$$

also
$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} \text{ oder } p_y = [b\,b\,.\,1] \tag{8}$$

Dieses gilt für die Unbekannte y und entsprechend hat man für x, indem man nur überall b und a vertauscht:

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} \qquad p_x = [a\,a\,.\,1] \tag{9}$$

Die Quadratsummen $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$ nennt man Gewichts-Coefficienten. Damit hat man auch die mittleren Fehler von y und von x, für den Gewichtseinheitsfehler m:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{m}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}} \tag{10}$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{m}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}} \tag{11}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

m selbst wird hiezu nach (9) § 16. S. 75 und (16) § 15. S. 53 bestimmt, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} = \sqrt{\frac{[l\,l.2]}{n-2}} \tag{12}$$

Coefficienten-Determinante. Wenn man die Determinante der Normalgleichungs-Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. einführt, nämlich:

$$[a\,a]\;[b\,b] - [a\,b]\;[a\,b] = D \tag{13}$$

so kann man, wie sich durch Auflösen sofort zeigt, auch folgende Formen herstellen:

$$[b\,b\,.\,1] = \frac{D}{[a\,a]} \quad , \quad [a\,a\,.\,1] = \frac{D}{[b\,b]} \tag{14}$$

Damit ist alles zur Fehlerbestimmung von x und y selbst nötige gefunden. Wir werden aber später finden, dass es auch noch eine Aufgabe giebt, welche im bisherigen nicht inbegriffen ist, nämlich Bestimmung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen x und y.

Es ist nicht rätlich, sich damit zu beschäftigen, ehe die mittleren Fehler von x und y selbst nach den vorstehenden Formeln (9) und (10) völlig verstanden und auch durch Zahlenbeispiele eingeübt sind, jedoch des Zusammenhangs wegen wollen wir doch noch die Formeln für $[a\,\beta]$ u. s. w. angeben. Man braucht nämlich später (in § 24.) nicht nur die Quadratsummen $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, sondern auch die Produktsumme $[\alpha\,\beta]$ der Coefficienten α und β von (1) und (2).

Ein einzelner Wert β_1 oder α_1 giebt sich nach (7), mit Anwendung von D nach (14):

$$\beta_1 = -\frac{[a\,a]}{D}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right) \qquad \alpha_1 = -\frac{[b\,b]}{D}\left(a_1 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}b_1\right)$$

$$\alpha_1\,\beta_1 = +\frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,b_1 - [a\,b]\,a_1\right)\left([b\,b]\,a_1 - [a\,b]\,b_1\right)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,[b\,b]\,a_1\,b_1 - [a\,a]\,[a\,b]\,b_1\,b_1 - [a\,b]\,[b\,b]\,a_1\,a_1 + [a\,b]\,[a\,b]\,a_1\,b_1\right)$$

dann die Summe aller solcher Produkte:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,[b\,b]\,[a\,b] - [a\,a]\,[a\,b]\,[b\,b] - [a\,b]\,[b\,b]\,[a\,a] + [a\,b]\,[a\,b]\,[a\,b]\right)$$

Die 2 ersten Glieder heben sich auf, und wenn man wieder die Bedeutung von D berücksichtigt, so erhält man:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{-[a\,b]}{D} = \frac{-[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{15}$$

und wegen der Analogie mit $[b\,b\,.\,1]$ wollen wir noch einführen:

$$[a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}[b\,b] = [a\,b\,.\,1] \tag{16}$$

wodurch wird:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} \tag{17}$$

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\,\alpha] &= \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} = \frac{[b\,b]}{D} = \frac{1}{p_x} & [\alpha\,\beta] &= \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} = \frac{-[a\,b]}{D} \\ & & [\beta\,\beta] &= \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} = \frac{[a\,a]}{D} = \frac{1}{p_y} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$(m_x)^2 = \frac{m^2}{p_x} = [\alpha\,\alpha]\,m^2 = \frac{[b\,b]}{D}\,m^2 \qquad (m_y)^2 = \frac{m^2}{p_y} = [\beta\,\beta]\,m^2 = \frac{[a\,a]}{D}\,m^2 \tag{19}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \tag{20}$$

Dieser Coefficienten-Determinante D entspricht auch eine Gewichts-Coefficienten-Determinante:

$$\Delta = [\alpha\,\alpha]\,[\beta\,\beta] - [\alpha\,\beta]\,[\alpha\,\beta] \tag{21}$$

und es besteht zwischen beiden die Beziehung:

$$D\,\Delta = 1 \tag{22}$$

Wir wiederholen hiezu aber die Bemerkung, dass man all das letzte, von (13) bis (22) für die nächsten Aufgaben *nicht* braucht.

§ 18. Coefficienten-Berechnung und Summen-Proben.

Obgleich durch die vorhergehenden § 13.—17. die Ausgleichung mit zwei Unbekannten x und y vollständig klargelegt ist, wollen wir doch vor Beginn eines Zahlenbeispiels noch einige Bemerkungen machen über die Ausrechnung und Versicherung der Quadratsummen und Produktsummen $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w.

Die Ausrechnung der Quadrate $a\,a$ und der Produkte $a\,b$ u. s. w. kann, je nachdem die Zahlen einfach oder mit vielen Stellen angegeben sind, verschieden geschehen. Es sind hiezu die mechanischen Rechenhilfsmittel zu erwähnen, welche wir in unserem II. Bande, 4. Aufl., S. 118—134 beschrieben haben: Rechenschieber, Rechenscheibe, Rechenmaschinen u. s. w.

Die Quadrate bildet man jedenfalls mit einer Quadrattafel, wie eine solche z. B. auf S. [2]—[6] unseres Anhangs mit 3stelligem Argument gegeben ist. Für grössere Genauigkeit (welche aber bei guter Vorbereitung der Rechenform selten nötig ist) hat man ausführlichere Quadrattafeln als Beigaben zahlreicher Logarithmentafeln und anderer Tabellenwerke.

Die Produkte $a\,b$ u. s. w. kann man direkt ausmultiplizieren, wie in den Beispielen S. 48 und S. 50 mit $[b\,l]$ geschehen ist. Bei mehrstelligen Zahlen kann man sich einer Produktentafel bedienen, deren zur Zeit zwei vorhanden sind, nämlich:

Dr. *A. L. Crelle*s Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, mit einem Vorworte von Bremiker. 5. Ausgabe, Berlin 1880.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte, entworfen und bearbeitet von Dr. *H. Zimmermann*, Regierungsrat. Berlin 1889.

Crelle giebt alle Produkte von 3- und 3 stelligen Faktoren, Zimmermann giebt die Produkte aus 3- und 2 stelligen Faktoren.

Es giebt aber auch ein sehr gutes Verfahren, die Produkte mit der Quadrattafel zu bestimmen. Es ist nämlich:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b \text{ oder } a\,b = \frac{(a+b)^2 - (a^2+b^2)}{2}$$

woraus man findet:

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)^2] - ([a\,a] + [b\,b])}{2} \tag{1}$$

und da man $[a\,a]$ sowie $[b\,b]$ ohnehin braucht, so ist nur noch $[(a+b)^2]$ d. h. die Summe der Quadrate $(a+b)^2$ auszurechnen.

Statt $(a+b)^2$ kann man auch $(a-b)^2$ benützen in dieser Weise:

$$[a\,b] = \frac{[(a-b)^2] + [a\,a] + [b\,b]}{2} \tag{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir wollen dieses Verfahren an einem Beispiele zeigen, welches zu § 14. und § 19. gehört:

b	l	bl	b^2	l^2	$(b+l)$	$(b+l)^2$
1,20	0,45	+ 0,54	1,44	0,20	1,65	2,72
2,25	0,22	0,50	5,06	0,05	2,47	6,10
2,71	0,16	0,43	7,34	0,03	2,87	8,24
3,48	0,75	2,61	12,11	0,56	4,23	17,89
4,07	— 0,07	— 0,28	16,56	0,00	4,00	16,00
4,92	1,37	6,74	24,21	1,88	6,29	39,56
7,08	0,45	3,19	50,13	0,20	7,53	56,70
7,34	1,10	8,07	53,88	1,21	8,44	71,23
7,69	0,45	3,46	59,14	0,20	8,14	66,26
40,74	4,88	+25,54 — 0,28	229,87	4,33	45,62	284,70
45,62		+ 25,26	= $[b\,b]$	= $[l\,l]$		— 234,20
		= $[b\,l]$	$[b\,b]+[l\,l]=234{,}20$			$2\,[b\,l] = +50{,}50$
						$[b\,l] = +25{,}25$

Wir haben also $[b\,l]$ unmittelbar $= +25{,}26$ und auf dem Wege über $(b+l)^2$ und $[b\,b]$ und $[l\,l]$ mittelbar $[b\,l] = +25{,}25$ gefunden, was hinreichend zusammen stimmt. Damit ist nicht nur $[b\,l]$ selbst, sondern es sind auch $[b\,b]$ und $[l\,l]$ versichert

Man kann solche Proben in den verschiedensten Verbindungen machen; man kann z. B. $[a\,a]$ und $[b\,b]$ nebst $[a\,b]$ durch $[(a+b)^2]$ kontrollieren und dann noch die Produktsumme der $(a+b)\,l$ bilden, wodurch auch noch $[a\,l]$ und $[b\,l]$ versichert sind.

Man kann auch noch in anderer Weise ein Produkt durch Quadrate bestimmen, nach der Gleichung

$$a\,b = \frac{1}{4}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2$$

Hiernach ist berechnet: Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200000 u. s. w. von *Joseph Plater*, Wien 1887, besprochen von Hammer in der Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 485—486. Für Multiplikation vielstelliger Zahlen kann diese Tafel von Nutzen sein (nachdem man sich in der Anordnung mit den 3 *letzten* Stellen als Überschrift zurecht gefunden hat), für Produkte kleiner Faktoren, wie sie in der M. d. kl. Q. meist vorkommen, lohnt sich die Tafel der Viertelquadrate kaum.

Summenproben. Man kann die Berechnung der Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w. auch durch Summen kontrollieren, welche immer über die ganze Reihe a, b, l sich erstrecken.

Bei nur *zwei* Elementen x, y, bzw. a, b tritt der grosse Vorteil solcher Summenproben noch nicht so deutlich hervor, wie bei vielen Unbekannten, wo die Probesummen durch die ganze Rechnung, namentlich auch in der Elimination von Linie zu Linie wirksam, ausgezeichnete Dienste leisten. Indessen müssen wir, um das Verfahren allmählich einzuüben, auch schon bei zwei Unbekannten den ganzen Probesummenapparat kennen lernen. Dabei ist es bequem, nicht die Summen selbst sondern die *negativen* Summen in Rechnung zu nehmen, so dass immer alles auf Null ausgehen muss, d. h. wir setzen:

$$a_1 + b_1 + l_1 + s_1 = 0$$
$$a_2 + b_2 + l_2 + s_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dann ist auch:

$$[a\,a] + [a\,b] + [a\,l] + [a\,s] = 0$$
$$[a\,b] + [b\,b] + [b\,l] + [b\,s] = 0$$
$$[a\,l] + [b\,l] + [l\,l] + [l\,s] = 0$$
$$[a\,s] + [b\,s] + [l\,s] + [s\,s] = 0$$

Dieses wollen wir durch Linien in folgender Weise andeuten:

$$\begin{array}{r} \underline{[a\,a] \mid [a\,b] \mid [a\,l] \mid [a\,s]} \\ \underline{\mid [b\,b] \mid [b\,l] \mid [b\,s]} \\ \underline{\mid [l\,l] \mid [l\,s]} \\ \mid [s\,s] \end{array}$$

Man bekommt also ein Coefficienten-System, wie wenn statt 2 Unbekannten deren 3 vorhanden wären. Dem entsprechend rechnet man auch weiter nicht nur $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,l\,.\,1]$, sondern auch $[b\,s\,.\,1]$, $[l\,s\,.\,1]$ u. s. w, d. h.:

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] \quad \Big| \quad [b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \quad \Big| \quad [b\,s\,.\,1] = [b\,s] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s]$$
$$[l\,l\,.\,1] = [l\,l] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l] \quad \Big| \quad [l\,s\,.\,1] = [l\,s] - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s]$$
$$\Big| \quad [s\,s\,.\,1] = [s\,s] - \frac{[a\,s]}{[a\,a]}[a\,s]$$

Hiemit hat man wieder Proben, nämlich:

$$\begin{array}{r} \underline{[b\,b\,.\,1] \mid [b\,l\,.\,1] \mid [b\,s\,.\,1]} \\ \underline{\mid [l\,l\,.\,1] \mid [l\,s\,.\,1]} \\ \mid [s\,s\,.\,1] \end{array}$$

Die Richtigkeit der hierdurch angedeuteten Probegleichungen lässt sich leicht einsehen, z. B.:

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$$
$$[b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$$
$$0 = [a\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,a]$$

$$[b\,b\,.\,1] + [b\,l\,.\,1] = -[b\,s] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(-[a\,s]) = -[b\,s\,.\,1]$$

$$[b\,b\,.\,1] + [b\,l\,.\,1] + [b\,s\,.\,1] = 0$$
und ebenso: $[b\,l\,.\,1] + [l\,l\,.\,1] + [l\,s\,.\,1] = 0$
„ „ $[b\,s\,.\,1] + [l\,s\,.\,1] + [s\,s\,.\,1] = 0$

So geht es auch noch weiter:

$$[l\,l\,.\,2] = [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \quad \Big| \quad [l\,s\,.\,2] = [l\,s\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1]$$
$$\Big| \quad [s\,s\,.\,2] = [s\,s\,.\,1] - \frac{[b\,s\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1]$$

Die hiebei giltigen Proben sind angedeutet durch:

$$\begin{array}{r} \underline{[l\,l\,.\,2 \mid [l\,s\,.\,2]} \\ \mid [s\,s\,.\,2] \end{array}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

d. h. diese 3 letzten Glieder müssen einander gleich werden, wie sich in ähnlicher Weise, wie oben bei den Coefficienten [... 1], leicht nachweisen lässt.

Nun kommt noch die wichtige Probe, dass $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$ werden muss, indem $[v\,v]$ durch Quadrieren der einzelnen auszurechnenden v bestimmt wird.

Die mitgeteilten sehr zahlreichen Proben sind bei einiger Übung, wenn nur 2 Unbekannte vorhanden sind, teilweise überflüssig, und man kann sich hier, so weit die Elimination in Frage kommt, wohl mit der Probe begnügen, dass $[l\,l\,.\,2]$, dessen Bestimmung bei y *und* bei x vorkommt, hiebei übereinstimmend erhalten werden muss. Oft wird man die *quadratischen* Schlussglieder $[s\,s]$, $[s\,s\,.\,1]$, $[s\,s\,.\,2]$ weglassen können; wir haben diese letzten Probeglieder mehr der Symmetrie der Formeln wegen als wegen des praktischen Bedürfnisses aufgenommen.

Andererseits kann wohl auch ein Rechner, der seiner Sache sonst sicher ist, sich mit der *einen* Probe begnügen:

$$\begin{aligned} [s\,s] = [a\,a] + 2\,[a\,b] + 2\,[a\,l] \quad &\text{oder} \quad = [a\,a] + [a\,b] + [a\,l] \\ + \;[b\,b] + 2\,[b\,l] \quad &\quad + [a\,b] + [b\,b] + [b\,l] \\ + \;[l\,l] \quad &\quad + [a\,l] + [b\,l] + [l\,l] \end{aligned}$$

Wenn alle diese Proben stimmen, so kann man mit einer an absolute Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die Fehlerlosigkeit der Rechnung behaupten.

Unsere Zahlenbeispiele von § 13. und § 14. hatten die Eigentümlichkeit, dass alle Coefficienten $a = 1$ sind. Dieser Fall kommt häufig vor und erleichtert die Ausrechnung der Summen-Coefficienten sehr, denn es ist dann, bei n Beobachtungen,

$$[a\,a] = n \qquad [a\,b] = [b] \qquad [a\,l] = [l]$$

und nur $[b\,b]$, $[b\,l]$ und $[l\,l]$ müssen besonders berechnet werden, wozu dann kaum Summenglieder s zu nehmen sind, während die Elimination wohl mit Summengliedern gemacht werden kann.

§ 19. Eliminations-Beispiel mit 2 Unbekannten.

Wir nehmen das Beispiel von § 14., welches wir dort nach gewöhnlichen algebraischen Methoden behandelt haben, nochmals vor.

Das Coefficienten-System von S. 50 nebst Summengliedern ist:

	a	b	l	s	
a	+ 9,00	− 40,74	+ 4,88	+ 26,86	
b		+ 229,87	− 25,26	− 163,87	(1)
l			+ 4,33	+ 16,05	

Indem wir vorerst unentschieden lassen, ob man die Werte $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$, $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]$ u. s. w. unmittelbar oder mit dem Rechenschieber oder mit Logarithmen oder sonst wie ausrechnen will, erhalten wir die folgende Anordnung, wobei man vorerst annehmen mag, dass die *klein gedruckten Zahlen* nötigenfalls auf einem Nebenblatt berechnet worden sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

				Probe
$[a\,a] = +9{,}00$	$[a\,b] = -\ 40{,}74$	$[a\,l] = +\ 4{,}88$	$[a\,s] = +\ 26{,}86$	0,00
	$[b\,b] = +\ 229{,}87$	$[b\,l] = -\ 25{,}26$	$[b\,s] = -\ 163{,}87$	0,00
	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = -\ 184{,}42$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] = +\ 22{,}09$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s] = +\ 121{,}58$	
		$[l\,l] = +\ 4{,}33$	$[l\,s] = +\ 16{,}05$	0,00
		$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l] = -\ 2{,}65$	$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s] = -\ 14{,}56$	
$[b\,b\,.\,1] = +\ 45{,}45$	$[b\,l\,.\,1] = -\ 3{,}17$		$[b\,s\,.\,1] = -\ 42{,}29$	−0,01
	$[l\,l\,.\,1] = +\ 1{,}68$		$[l\,s\,.\,1] = +\ 1{,}49$	0,00
	$-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] = -\ 0{,}22$		$-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1] = -\ 2{,}95$	
	$[l\,l\,.\,2] = +\ 1{,}46$		$[l\,s\,.\,2] = -\ 1{,}46$	0,00

$$y = -\frac{-\ 3{,}17}{+\ 45{,}45} = +\ 0{,}06975 \qquad p_y = 45{,}45 \qquad [v\,v] = 1{,}46 \tag{2}$$

Für die umgekehrte Rechnung, nämlich Elimination von y und Bestimmung von x nebst p_x, schreiben wir nur noch die Zahlen, und zwar mit einer Stelle weniger als vorher:

b	a	l	s	Probe
+ 229,9	− 40,7	− 25,3	− 163,9	0,0
	+ 9,0	+ 4,9	+ 26,8	0,0
	− 7,2	− 4,5	− 29,0	
		+ 4,3	+ 16,1	0,0
		− 2,8	− 18,0	
	+ 1,8	+ 0,4	− 2,2	0,0
		+ 1,5	− 1,9	0,0
		− 0,1	+ 0,5	
		+ 1,4	− 1,4	0,0

$$x = -\frac{+\ 0{,}4}{+\ 1{,}8} = -\ 0{,}22 \quad (\text{genauer} = -\ 0{,}226) \qquad p_x = 1{,}8 \qquad [v\,v] = 1{,}4 \tag{3}$$

Wenn es sich um eine Rechnung mit so wenigen Stellen wie hier handelt, so macht man die Rechnung am besten mit dem *Rechenschieber*. Man stellt für die erste Linie den Quotienten $\frac{40{,}7}{229{,}9}$ ein, und multipliziert damit der Reihe nach:

40,7 25,3 163,9, d. h. man liest mit *einer* Einstellung die drei Produkte ab:

$$\frac{40{,}7}{229{,}9}\,40{,}7 = 7{,}2 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,25{,}3 = 4{,}5 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,163{,}9 = 29{,}0$$

Um die Vorzeichen − oder + der Grössen $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w. richtig anzusetzen, kann man in jedem einzelnen Falle die verschiedenen einwirkenden + und − abzählen; man gelangt aber bald zu einer übersichtlichen mechanischen Regel, die wir an der Hand des vorstehenden Beispiels bilden wollen:

a)	+	−	+	+
b)		+	−	−
		$b\,.\,1$) −	+	+
l)			+	+
			$l\,.\,1$) −	−

1) Die Vorzeichen einer Linie $b.1)$ oder $l.1)$ haben jedenfalls dieselbe Folge wie die darüberstehenden Vorzeichen der ersten Linie $a)$.

2) Die Vorzeichen einer Linie $b.1)$ oder $l.1)$ beginnen immer mit —, daraus folgt:

3) Wenn über $b.1)$ in der Linie $a)$ das Zeichen — steht, so gehen die Vorzeichen von $a)$ unmittelbar nach $b.1)$ über; wenn dagegen über $b.1)$ in der Linie $a)$ das Zeichen + steht, so gehen die Vorzeichen von $a)$ sämtlich umgekehrt nach $b.1)$ über.

Wir wollen diese Regel an einem Beispiel mit 5 Elementen weiter veranschaulichen:

+	+	—	+	—
	+	—	—	+
	—	+	—	+
		+	—	—
		—	+	—
			+	—
			—	+

Um nun alles zusammenzustellen, was die Elimination S. 63 für den Endzweck geliefert hat, nehmen wir aus (2) und (3):

$$\begin{array}{llll} y = +0{,}06975 & & x = -0{,}22 & \text{genauer} = -0{,}226 \\ p_y = \quad 45{,}45 & & p_x = \quad 1{,}8 & \text{genauer} = \quad 1{,}78 \\ [l\,l.2] = [v\,v] = 1{,}46 & & [l\,l.2] = [v\,v] = 1{,}4 & \end{array} \qquad (4)$$

Das hier angegebene $x = -0{,}22$ und $p_x = 1{,}8$ sind mit dem Rechenschieber und bei Beschränkung auf die allermindeste Stellenzahl erhalten; rechnet man ein klein wenig schärfer, so erhält man $x = -0{,}226$ und $p = 1{,}78$, womit wir weiter rechnen wollen.

Die Schlusssumme $[l\,l.2] = 1{,}46$ muss mit der unmittelbaren Ausrechnung der v und der v^2 nach (15) § 14. S. 51 stimmen, was mit $[v^2] = 1{,}4695$ genügend der Fall ist; und nachdem diese wichtige Probe stimmt, hat man den mittleren Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \sqrt{\frac{1{,}47}{7}} = \pm 0{,}46^{mm} \qquad (5)$$

Dann:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{0{,}46}{\sqrt{45{,}45}} = \pm 0{,}06797 \quad , \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{0{,}46}{\sqrt{1{,}78}} = \pm 0{,}34 \qquad (6)$$

also $y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797$ $\qquad$ $x = -0{,}23 \pm 0{,}34$

$$\frac{y}{100} = +0{,}000697 \pm 0{,}000680$$

Diese $\frac{y}{100}$ und x haben diesesmal dieselbe Bedeutung, wie früher δ_y und δ_x in (13) § 14. S. 51 und wir haben daher nun wie dort:

Näherung	$(y) = 0{,}086\,250$	
Verbesserung	$+\,0{,}000\,697 \pm 0{,}000\,680$	
Ausgeglichen	$0{,}086\,947 \pm 0{,}000\,680$	(7)

Ebenso auch

Näherung	$(x) = 762{,}00^{mm}$	
Verbesserung	$-\quad 0{,}23 \quad \pm 0{,}34^{mm}$	
Ausgeglichen	$761{,}77^{mm} \pm 0{,}34^{mm}$	(8)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die ausgeglichene Funktion ist also nun:

$$\left.\begin{aligned} B = {} & 761{,}77^{mm} - 0{,}086\,947\,h \\ & \pm 0{,}34^{mm} \pm 0{,}000\,680 \\ & \text{mit } m = \pm 0{,}46^{mm} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Man hat also wieder dieselbe Ausgleichungsfunktion wie früher (14) § 14. S. 51, jedoch hat die neue Rechnung den Vorzug, dass sie die Unsicherheit der erlangten Formel zu schätzen gestattet. Z. B. ist 761,77 für $h = 0$ der für jene Gegend (Württemberg) giltige mittlere Jahresbarometerstand auf den Meeresspiegel reduziert, und dieser Wert wurde mit einem mittleren Fehler von $\pm 0{,}34^{mm}$ erhalten. Ähnlich wissen wir nun von dem Coefficienten 0,086 947, dass er auf etwa 1 : 128 oder rund 1 % seines Wertes annähernd bestimmt wurde.

§ 20. Eliminations-Rechnung mit Logarithmen.

Bei nur zwei Unbekannten x und y reicht die Elimination mit dem Rechenschieber fast immer aus, indessen, wenn die Coefficienten mehrstellig sind, überhaupt wenn man genauer zu rechnen veranlasst ist, wird man zur logarithmischen Rechnung

Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen mit Schiebe-Zettel.

	$a]$	$b]$	$l]$	$s]$	Proben.
$[a$	+ 9,00	− 40,74	+ 4,88	+ 26,86	0,00
$log\,[a$	0.95424	1.61002	0.68842	1.42911	
$log\left(\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\right.$		2.26580	1.34420	2.08489	
$log\left(\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\right.$			0.42260	1.16329	
$[b$		+ 229,87	− 25,26	− 163,87	0,00
$-\left(\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\right.$		− 184,42	+ 22,09	+ 121,58	
$[l$			+ 4,33	+ 16,05	0,00
$-\left(\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\right.$			− 2,65	− 14,56	
		$b\,.\,1]$	$l\,.\,1]$	$s\,.\,1]$	
$y = -\frac{-3{,}17}{+45{,}45}$	$[b$	+ 45,45	− 3,17	− 42,29	− 0,01
$= +\,0{,}06975$	$log\,[b$	1.65753	0.50106	1.62624	
	$log\left(\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\right.$		9.34459	0.46977	
	$[l$		+ 1,68	+ 1,49	0,00
	$-\left(\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\right.$		− 0,22	− 2,95	
			$l\,.\,2]$	$s\,.\,2]$	
		$[l$	+ 1,46	− 1,46	0,00
Zettel a.	$log\frac{1}{[a\,a]}$ 9.04576	$log\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ 0.65578	$log\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ 9.73418		
Zettel b.		$log\frac{1}{[b\,b\,.\,1]}$ 8.34246	$log\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}$ 8.84353		

$8{,}84353 = log\,y$
$0{,}06975 = y$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

übergehen, welche bei nur zwei Unbekannten auch wohl selbstverständlich ist, indem man eben den Formeln von § 15. S. 52 schlechthin folgt, z. B. $[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$, wozu man $log\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ zuerst bestimmt, das man mehrfach braucht, u. s. w.

Indessen wenn man einmal sich entschliesst, logarithmisch zu rechnen, so empfiehlt es sich, ein festes liniertes Schema anzulegen und dabei kann man die fortgesetzten Additionen der Logarithmen mit *Schiebe-Zetteln* machen und dadurch viele Schreibereien ersparen, wie aus vorstehender Tabelle zu ersehen ist.

Die Rechnung nach diesem Schema S. 65 nimmt folgenden Verlauf:

Die vorher berechneten Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. werden an die durch die Zeilen- und Spaltenbezeichnung bestimmten Stellen geschrieben, z. B. die Zeile $[b$ und die Spalte $l]$ bestimmen durch ihr Zusammentreffen die Stelle für $[b\,l] = -25{,}26$.

Nach diesem werden die 4 Logarithmen in eine Linie gesetzt:

$log\,[a\,a] = 0.95424$ $log\,[a\,b] = 1.61002$ $log\,[a\,l] = 0.68842$ $log\,[a\,s] = 1.42911$

Die weitere logarithmische Rechnung geschieht mit Hilfe von *Zetteln* (Papierstreifen), welche unten auf S. 65 angegeben sind. Man kann das, was die *zwei* Zettel *a.* und *b.* enthalten, natürlich praktisch wohl auch auf *einen* Papierstreifen schreiben, in der Beschreibung reden wir jedoch von *zwei* getrennten Zetteln.

Zettel *a.* wird so erhalten: Man legt einen Papierstreifen über die Linie $log\,[a$ und schreibt über 0.95424 die dekadische Ergänzung 9.04576. Dieses ist $log\,\frac{1}{[a\,a]}$ und wird zur Berechnung von $log\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ und von $log\,\frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ gebraucht. Hiezu schiebt man den Zettel um eine Spalte nach rechts, so dass 9.04576 über 1.61002 kommt, die Summe beider 0.65578 schreibt man auf den Zettel rechts. Der Zettel wird abermals um eine Spalte nach rechts geschoben und giebt 9.04576 über 0.68842, zusammen 9.73418.

Damit ist der Zettel *a.* an sich fertig, und kann zur Berechnung von $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$ $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]$ u. s. w. gebraucht werden. Zu diesem Zweck kommt der Zettel wieder in die Normallage und liefert durch allmähliches Schieben nach rechts, indem 0.65578 nach abwärts addiert wird, folgendes:

(Zettel)	0.65578	0.65578	0.65578
	1.61002	0.68842	1.42911
	2.26580	1.34420	2.08489

in ähnlicher Weise wird auch vollends erhalten:

(Zettel)	9.73418	9.73418
	0.68842	1.42911
	0.42260	1.16329

Zu den so erhaltenen 5 Logarithmen schlägt man die Nummeri auf, und setzt dieselben in die vorbereiteten Stellen darunter:

− 184,42	+ 22,09	+ 121,58
	− 2,65	− 14,56

Die Vorzeichen — oder + bestimmt man hiebei nach der auf S. 63—64 bereits angegebenen Regel.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Addiert man diese Beträge algebraisch zu den darüberstehenden Coefficienten $[b\,b] = +\,229{,}87$ u. s. w., so erhält man:

$$[b\,b\,.\,1] = +\,45{,}45 \qquad [b\,l\,.\,1] = -\,3{,}17 \qquad [b\,s\,.\,1] = -\,42{,}29$$
$$[l\,l\,.\,1] = +\,1{,}68 \qquad [l\,s\,.\,1] = +\,1{,}49$$

Zu diesem erstmals reduzierten System gehört nun der zweite Zettel b.

Verfährt man mit diesem ebenso wie vorher mit dem Zettel a., so ist die Elimination vollendet, und auf dem Zettel b. selbst hat man:

$$log\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = log\,y \text{ (abgesehen vom Vorzeichen).}$$

Um auch x zu erhalten, kann man zwar in gewöhnlicher Weise das erhaltene y in eine der Normalgleichungen

$$+\ 9{,}00\,x - 40{,}74\,y + 4{,}88 = 0$$
$$-\,40{,}74\,x + 229{,}87\,y - 25{,}26 = 0$$

einsetzen, und erhält damit $x = -\,0{,}226$. Wenn man aber auch das Gewicht von x haben will, so stellt man die ganze Elimination um, so dass y die erste und x die zweite Unbekannte wird, wie schon auf S. 63 angegeben ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll} x = -\,0{,}226 & [l\,l\,.\,2] = 1{,}46 & y = +\,0{,}06975 \\ [a\,a\,.\,1] = +\,1{,}78 & & [b\,b\,.\,1] = +\,45{,}45 \end{array}\right\} \quad (5)$$

$[l\,l\,.\,2] = 1{,}46$ stimmt genügend mit dem schon früher (am Schluss von § 14. (13) S. 51) berechneten $[v\,v] = 1{,}4695$, man hat also jetzt den mittleren Gewichtseinheitsfehler

$$m = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \pm\,0{,}46^{mm} \quad (6)$$

und damit auch die mittleren Fehler von x und y:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{1{,}78}} = \pm\,0{,}34^{mm} \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{45{,}45}} = \pm\,0{,}06797$$
$$x = -\,0{,}23^{mm} \pm 0{,}34^{mm} \qquad y = +\,0{,}06975 \pm 0{,}06797$$

Dieses ist also das Ergebnis der reinen Elimination; die Weiterverwertung der gewonnenen y und x ist dann ebenso wie schon am Schluss des vorigen § 19. S. 64—65 gezeigt worden ist.

§ 21. Ungleiche Gewichte.

Bisher wurde angenommen, dass alle Beobachtungen l von vornherein gleich genau seien. Wenn dieses nicht der Fall ist, haben die einzelnen l verschiedene Gewichte. Wir wollen annehmen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Beobachtungen} & l_1 & l_2 & l_3 \ldots l_n \\ \text{mit Gewichten} & p_1 & p_2 & p_3 \ldots p_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Fehlergleichungen seien dieselben wie früher:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & = p_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 & = p_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n & = p_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dann hat man nicht mehr $[v\,v]$ zu einem Minimum zu machen, sondern:

$$[p\,v\,v] = \text{Minimum} \quad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses giebt die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}[p\,a\,a]\,x + [p\,a\,b]\,y + [p\,a\,l] = 0\\ [p\,a\,b]\,x + [p\,b\,b]\,y + [p\,b\,l] = 0\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (3) § 13. S. 45 nur dadurch, dass in jeder Klammer p zugesetzt ist; eine weitere Änderung gegen früher tritt nicht ein. Auch bei der Elimination tritt z. B. $[p\,b\,b\,.\,1]$ an die Stelle von $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-2}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[p\,l\,l\,.\,2]}{n-2}} \quad (5)$$

Dieser Fehler m gehört im allgemeinen zu keiner wirklichen Beobachtung, sondern zu einer fingierten Beobachtung, welche das Gewicht $p = 1$ hat.

Wenn die Gewichtswurzeln $\sqrt{p}$ bequeme Zahlen sind, so ist es oft nützlich, statt geradezu $[p\,a\,a]$, $[p\,a\,b]$ u. s. w. auszurechnen, so zu verfahren:

Man multipliziert alle Coefficienten a , b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen mit $\sqrt{p}$, und denkt sich die Fehlergleichungen (2) nun so geschrieben:

$$\left.\begin{aligned}v_1\sqrt{p_1} &= a_1\sqrt{p_1} + b_1\sqrt{p_1} + l_1\sqrt{p_1}\\ v_2\sqrt{p_2} &= a_2\sqrt{p_2} + b_2\sqrt{p_2} + l_2\sqrt{p_2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

dann giebt die Quadrierung von selbst die Summe $[p\,v\,v]$ nach (3) und die Normalgleichungen (4).

Man kann diese Sache auch so auffassen: Mögen die Summen direkt nach (4) oder nach (6) entstanden sein; man kann immer dem *Zeichen* $[a\,a]$ die Bedeutung unterlegen:

$$p_1\,a_1^2 + p_2\,a_2^2 + p_3\,a_3^2 + \ldots \quad = [a\,a] \quad \text{u. s. w.} \quad (7)$$

und damit gelten alle bisherigen Formeln auch für ungleiche Gewichte.

Die Coefficienten α , β in § 17. erhalten hiebei auch veränderte Bedeutungen, nämlich entsprechend (1) S. 56 haben wir nun:

$$x = \frac{\alpha_1}{\sqrt{p_1}}(l_1\sqrt{p_1}) + \frac{\alpha_2}{\sqrt{p_2}}(l_2\sqrt{p_2}) + \ldots \quad (8)$$

$$\frac{1}{p_x} = \left[\frac{\alpha\,\alpha}{p}\right] \quad , \quad \frac{1}{p_y} = \left[\frac{\beta\,\beta}{p}\right] \quad (9)$$

Die Weiterrechnung nach § 17. führt aber abermals auf die Formel:

$$p_y = [p\,b\,b\,.\,1], \quad (10)$$

so dass man also überall sich nicht weiter um die Gewichte zu kümmern hat, sobald die Summen-Coefficienten entweder nach (4) unmittelbar oder nach (6) berechnet vorliegen.

Damit ist bereits alles zur Ausgleichung mit ungleichen Gewichten Erforderliche behandelt, wir wollen aber noch einige Bemerkungen zufügen (welche zunächst auch übergangen werden können).

Mittlere Fehler a priori angenommen.

Wenn die Genauigkeitsverhältnisse der Beobachtungen und der Fehlergleichungen geradezu durch mittlere Fehler (nach Schätzung a priori oder sonst wie) angenommen sind, so sind die Gewichte p den Quadraten dieser mittleren Fehler umgekehrt pro-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

portional zu nehmen, und die Rechnung ist nach den Formeln (1) bis (5), oder (6) bis (10) zu führen; indessen kann man die Formeln auch so schreiben, dass nicht von Gewichten p, sondern nur von mittleren Fehlern m die Rede ist, und diese mehr anschauliche Form empfiehlt sich in vielen Fällen. Wir haben so:

Fehlergleichungen:	Mittlere Fehler der l *vor* der Ausgleichung:
$v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1$	$\pm m_1$
$v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2$	$\pm m_2$
. . . . .	. . .
$v_n = a_n x + b_n y + l_n$	$\pm m_n$

(11)

Ausgleichungsprinzip:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \tag{12}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{a\,a}{m\,m}\right] x + \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{a\,l}{m\,m}\right] = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] x + \left[\frac{b\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{b\,l}{m\,m}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler *nach* der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{l\,l}{m\,m}\,.\,2\right]} \tag{14}$$

Die mittleren Fehler der Werte von l *nach* der Ausgleichung sind bzw.:

$$m_1' = \frac{m}{1} m_1 \;,\quad m_2' = \frac{m}{1} m_2 \ldots m_n' = \frac{m}{1} m_n \tag{15}$$

Wenn die $m_1\ m_2 \ldots m_n$ schon *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so wird $m = 1$ und $m_1' = m_1\quad m_2' = m_2$ u. s. w.

Um zu einer weiteren Betrachtung in Bezug auf Gewichte zu gelangen, gehen wir von dem einfachen Fall aus, dass eine Fehlergleichung das Gewicht 2 und alle anderen das Gewicht 1 haben, also etwa:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \qquad p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \qquad p = 1 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \qquad p = 2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

dann ist die erste Normalgleichung:

$$(a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2)\, x + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2\, a_3 b_3)\, y + (a_1 l_1 + a_2 l_2 + 2\, a_3 l_3) = 0$$

Dasselbe würde man auch erhalten, wenn man die dritte Fehlergleichung doppelt einsetzte, und dann mit folgendem System weiter rechnete:

$$\left.\begin{aligned} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \qquad p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \qquad p = 1 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \qquad p = 1 \\ v_4 = a_3 x + b_3 y + l_3 \qquad p = 1 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Aus beiden Systemen (16) und (17) erhält man dieselben Unbekannten $x\ y$ mit denselben Gewichten und derselben Summe $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man aber die mittleren Fehler berechnet, so darf man bei (17) *nicht* 4 Gleichungen in Rechnung bringen, sondern nur 3, d. h. es ist:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{3-2} \text{ und } \textit{nicht} = \frac{[v\,v]}{4-2} \tag{17 a}$$

Wenn umgekehrt die Gleichungen (17) den Beobachtungen entsprechen, so darf man zwar zur Ausgleichung selbst statt (17) ein System von der Form (16) anwenden, bei der Fehlerberechnung ist aber die ursprüngliche Zahl der Fehlergleichungen, d. h. der Beobachtungen, massgebend.

Wenn 2 Fehlergleichungen mit gleichen Coefficienten $a, b \ldots$, aber mit ungleichen Absolutgliedern l, und mit ungleichen Gewichten vorliegen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_1 \qquad \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 &= a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_2 \qquad \text{„} \quad = p_2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

so geben diese nach gewöhnlichem Verfahren folgende Beiträge zu den Coefficienten der Normalgleichungen:

$$p_1 a^2 + p_2 a^2 = (p_1 + p_2) a^2 \;,\; (p_1 + p_2) a b \ldots p_1 a l_1 + p_2 a l_2 = a (p_1 l_1 + p_2 l_2) \tag{19}$$

Beitrag zu dem Fehlerquadrat-Gliede: $(p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2)$ (20)

Wir wollen nun statt der *zwei* Gleichungen (18) die *eine* folgende schreiben:

$$v' = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2}{p_1 + p_2} \;,\quad \text{Gewicht} = p_1 + p_2 \tag{18'}$$

Diese *eine* Gleichung giebt zu den Normalgleichungen folgende Beiträge:

$$(p_1 + p_2) a^2 \quad , \quad (p_1 + p_2) a b \ldots \qquad a (p_1 l_1 + p_2 l_2) \tag{19'}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \qquad \frac{(p_1 l_1 + p_2 l_2)^2}{p_1 + p_2} \tag{20'}$$

Die Coefficienten (19) und (19′) sind identisch, dagegen die Beiträge zur Quadratsumme $[p\,l\,l]$ sind in (20) und in (20′) nicht identisch, und nur wenn $l_1 = l_2$ ist, geht (20′) in (20) über.

Dieses Resultat heisst in Worten: Man kann zwei Fehlergleichungen von der Form (18), d. h. mit gleichen Coefficienten aber ungleichen Absolutgliedern, durch *eine* Gleichung (18′) ersetzen, soweit es sich nur um die Unbekannten $x\,y\,z \ldots$ selbst und um deren Gewichte handelt, dagegen für die Berechnung mittlerer Fehler giebt die Gleichung (18′) keinen richtigen Ersatz der zwei ursprünglichen Gleichungen, sondern nur eine etwa näherungsweise zulässige Genauigkeitsbestimmung. In dem Nenner des mittleren Fehlerquadrats muss aber jedenfalls die Gleichung (18′) als *zwei* Gleichungen zählen.

§ 22. Nicht lineare Funktionen.

Wenn die Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten nicht durch lineare Gleichungen dargestellt sind, so kann man dennoch die Ausgleichung auf lineare Fehlergleichungen zurückführen in folgender Weise:

Man habe die Beobachtungen

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \ldots L_n$$

welche mit den Unbekannten X und Y in folgenden Beziehungen stehen:

Es *soll* sein:

$$\left.\begin{aligned} F_1(X, Y) - L_1 &= 0 \\ F_2(X, Y) - L_2 &= 0 \\ F_3(X, Y) - L_3 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(X, Y) - L_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, und es gelten statt derselben die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= F_1(X, Y) - L_1 \\ v_2 &= F_2(X, Y) - L_2 \\ v_3 &= F_3(X, Y) - L_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= F_n(X, Y) - L_n \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Schreibt man diese Gleichungen in die Form:

$$F(X, Y) - (L + v) = 0 \quad (3)$$

so ergiebt die Vergleichung mit (1), dass v eine Verbesserung der Beobachtung L ist, welche den Widerspruch in der betreffenden Gleichung zum Verschwinden bringt. (Vgl. die kleingedruckte Anmerkung am Schlusse von § 12. S. 44—45.) Wenn X und Y die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind, so sind die Werte v die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Beobachtungen L, oder, um alle Fragen der Wahrscheinlichkeit zu vermeiden, nennt man v die „übrigbleibenden Fehler" der Ausgleichung, oder die „*scheinbaren*" Fehler.

Versteht man unter (X) und (Y) Näherungswerte von X und Y, und unter x und y deren Verbesserungen, also

$$X = (X) + x \qquad Y = (Y) + y \quad (4)$$

so kann man mit Hilfe des Taylorschen Satzes unter Beschränkung auf die ersten Potenzen von x und y die Funktion F so entwickeln:

$$F(X, Y) = F\big((X) + x, (Y) + y\big)$$

$$F(X, Y) = F\big((X), (Y)\big) + \frac{\partial F}{\partial X} x + \frac{\partial F}{\partial Y} y$$

und damit gehen die Gleichungen (2) über in:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + l_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + l_n \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

wobei die Coefficienten a, b und die Absolutglieder l folgende Bedeutung haben:

$$a = \frac{\partial F}{\partial X} \qquad b = \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (6)$$

$$l = F\big((X), (Y)\big) - L \quad \text{oder} \quad l = (L) - L \quad (7)$$

(L) ist ganz allgemein derjenige Wert, welchen eine Beobachtung L annehmen würde, wenn die Näherungen (X), (Y) giltig wären.

Schreibt man (7) in die Form:

$$F\big((X), (Y)\big) - (L + l) = 0 \quad \text{oder} \quad (L) - (L + l) = 0 \quad (8)$$

und vergleicht man dieses mit (1), so ergiebt sich, dass die l in Bezug auf das *Vorzeichen*, mit den v gleichartig sind. Sachlich betrachtet hat aber das Absolutglied l den Charakter einer Beobachtung, ebenso wie L, denn (L) in (8) ist eine fehlerfreie Rechnungsgrösse. Formell betrachtet ist auch l diejenige Verbesserung, welche an einer Beobachtung L angebracht werden müsste, wenn die Näherungswerte (X), (Y) statt X, Y angenommen würden.

Die Gleichungen (5) treten an die Stelle der ursprünglichen Fehlergleichungen (2); diese Gleichungen (5) sind selbst Fehlergleichungen in Bezug auf die neuen Unbekannten x, y und in Bezug auf die Werte l, welche an Stelle der Beobachtungen L treten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 23. Ausgleichung von Barometerständen.

Zu einem Zahlenbeispiel der Ausgleichung mit nicht linearen Funktionen nehmen wir die Barometermessungen von § 13. S. 46 nochmals vor, nämlich:

	h	B
	m	mm
1. Bruchsal	120,2	751,18
2. Cannstatt . . .	225,1	742,37
3. Stuttgart . . .	270,6	738,50
4. Calw	347,6	731,27
5. Friedrichshafen .	406,7	726,99
6. Heidenheim . . .	492,4	718,16
7. Isny	708,1	700,48
8. Freudenstadt . .	733,5	697,64
9. Schopfloch . . .	768,9	695,23

(1)

Wir stellen uns die Aufgabe: Es soll zwischen den Höhen h und den Barometerständen B eine Beziehung hergestellt werden von der Form:

$$h = Y \log \frac{X}{B} \tag{2}$$

wobei die trigonometrisch bestimmten Meereshöhen h als fehlerfrei, die Barometerstände B als gleich genaue Beobachtungen behandelt werden.

Es handelt sich zuerst um Bestimmung von Näherungswerten (X) und (Y). Hiezu schreiben wir (2) in die Form:

$$\log X - \log B = \frac{h}{Y}$$

und wenden diese Gleichung auf die erste und auf die letzte Beobachtung an, dieses giebt:

$$\log (X) - \log 751{,}18 = \frac{120{,}2}{(Y)}$$

$$\log (X) - \log 695{,}23 = \frac{768{,}9}{(Y)}$$

Diese zwei Gleichungen kann man nach (X) und (Y) auflösen, und man findet:

$$(X) = 762{,}03 \qquad (Y) = 19298 \tag{3}$$

Um zu der allgemeinen Form der Gleichungen (1) S. 70 zu gelangen, hat man die Gleichung (2) nach (B) aufzulösen. Dieses giebt:

$$\frac{h}{Y} = \log \frac{X}{B} \quad , \quad \frac{X}{B} = 10^{\frac{h}{Y}} \quad , \quad \frac{B}{X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \quad , \quad B - X\,10^{-\frac{h}{Y}} = 0$$

d. h. die in den allgemeinen Formeln S. 70 mit $F(X, Y)$ bezeichnete Funktion ist in unserem Falle: $F(X, Y) = X\,10^{-\frac{h}{Y}}$,

und damit berechnet man nach Anleitung von (6) und (7) S. 71:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial\left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \\ b &= \frac{\partial\left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial Y} = X\,10^{-\frac{h}{Y}}\,\frac{h}{Y^2}\,\frac{1}{M} \\ l &= (X)\,10^{-\frac{h}{(Y)}} - B \quad \text{oder} \quad = (B) - B \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Bei der Ausrechnung von a und b ist überall (X) und (Y) an Stelle von X und Y zu setzen. Die Ausrechnung der Formeln (4) macht man am besten in logarithmischer Form, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} log\, a &= -\frac{h}{(Y)} \quad \text{oder } log\frac{1}{a} = \frac{h}{(Y)} \\ log\, b &= -\frac{h}{(Y)} + log\frac{(X)\,h}{M(Y)^2} = log\, a + log\frac{(X)\,h}{(Y)^2\,M} \\ log\,(l+B) &= log\,(X) - \frac{h}{(Y)} = log\,(X) + log\, a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man hier die Zahlenwerte nach (1) und (3) ein, so erhält man:

Nr.	a	b	l
1	+ 0,986	+ 0,00056	0,00
2	+ 0,973	+ 0,00103	— 0,53
3	+ 0,968	+ 0,00123	— 0,68
4	+ 0,959	+ 0,00157	— 0,20
5	+ 0,953	+ 0,00182	— 1,06
6	+ 0,943	+ 0,00219	+ 0,38
7	+ 0,919	+ 0,00307	— 0,20
8	+ 0,916	+ 0,09317	+ 0,53
9	+ 0,912	+ 0,00331	0,00

Der Umstand, dass der erste und der letzte Wert l Null werden, ist nicht zufällig; es kommt dieses daher, dass die erste und die letzte Beobachtung B zur Bestimmung der Näherungswerte benützt wurden. Wenn die Näherungswerte gar keiner der Beobachtungen streng genügen, so wird auch kein Wert $l = 0$ werden.

Die Fehlergleichungen würden also jetzt sein:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}00056\,y' + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}00103\,y' - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die zweite Unbekannte wurde hier y' genannt, weil wir dieselbe nochmals ändern wollen. Die Coefficienten sind nämlich noch zu ungleich, was bei der numerischen Rechnung unbequem ist. Wir wollen daher statt der Fehlergleichungen (6) lieber folgende schreiben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}056\left(\frac{y'}{100}\right) + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}103\left(\frac{y'}{100}\right) - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

d. h. wir führen statt y' die neue Unbekannte ein:

$$\frac{y'}{100} = y \qquad (\text{also } y' = 100\,y) \tag{8}$$

wobei y' die Korrektion des Näherungswertes (Y) und y die aus den Normalgleichungen zu bestimmende Unbekannte ist. Damit erhält man folgende Tafel der Coefficienten, nebst Summen s, wobei:

$$a + b + l + s = 0 \tag{9}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nr.	a	b	l	s
1	+ 0,986	+ 0,056	0,000	— 1,042
2	+ 0,973	+ 0,103	— 0,530	— 0,546
3	+ 0,968	+ 0,123	— 0,680	— 0,411
4	+ 0,959	+ 0,157	— 0,200	— 0,916
5	+ 0,953	+ 0,182	— 1,060	— 0,075
6	+ 0,943	+ 0,219	+ 0,380	— 1,542
7	+ 0,919	+ 0,307	— 0,200	— 1,026
8	+ 0,916	+ 0,317	+ 0,530	— 1,763
9	+ 0,912	+ 0,331	0,000	— 1,243
Summen	+ 8,529	+ 1,795	— 1,760	— 8,564

Die Ausrechnung der Summen-Coefficienten $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. wollen wir mit der Quadrattafel machen nach dem Verfahren von § 18. S. 60.

Bei nur 2 Unbekannten hat man dabei auch eine Erleichterung insofern, als $a+s$ $b+s$ $l+s$ nicht besonders zu berechnen sind, denn wegen (9) ist:

$$(a+s) = -(b+l) \qquad (b+s) = -(a+l) \qquad (l+s) = -(a+b)$$

a	b	l	s	$a+b$ $=-(l+s)$	$a+l$ $=-(b+s)$	$b+l$ $=-(a+s)$	Proben:	
+ 0,986	+ 0,056	0,000	— 1,042	+ 1,042	+ 0,986	+ 0,056	+ 8,529	+ 8,529
+ 0,973	+ 0,103	— 0,530	— 0,546	+ 1,076	+ 0,443	— 0,427	+ 1,795	+ 1,795
+ 0,968	+ 0,123	— 0,680	— 0,411	+ 1,091	+ 0,288	— 0,557	— 1,760	+10,324
+ 0,959	+ 0,157	— 0,200	— 0,916	+ 1,116	+ 0,759	— 0,043	— 8,564	+ 8,529
+ 0,953	+ 0,182	— 1,060	— 0,075	+ 1,135	— 0,107	— 0,878	0,000	— 1,760
+ 0,943	+ 0,219	+ 0,380	— 1,542	+ 1,162	+ 1,323	+ 0,599		+ 6,769
+ 0,919	+ 0,307	— 0,200	— 1,026	+ 1,226	+ 0,719	+ 0,107		
+ 0,916	+ 0,317	+ 0,530	— 1,763	+ 1,233	+ 1,446	+ 0,847		+ 1,795
+ 0,912	+ 0,331	0,000	— 1,243	+ 1,243	+ 0,912	+ 0,331		— 1,760
								+ 0,035
+ 8,529	+ 1,795	— 1,760	— 8,564	+10,324	+ 6,769	+ 0,035		

a^2	b^2	l^2	s^2	$(a+b)^2$ $=(l+s)^2$	$(a+l)^2$ $=(b+s)^2$	$(b+l)^2$ $=(a+s)^2$
0,9722	0,0031	0,0000	1,0858	1,0858	0,9722	0,0031
0,9467	0,0106	0,2809	0,2981	1,1578	0,1962	0,1823
0,9370	0,0151	0,4624	0,1689	1,1903	0,0829	0,3102
0,9197	0,0246	0,0400	0,8391	1,2455	0,5761	0,0018
0,9082	0,0331	1,1236	0,0056	1,2882	0,0114	0,7709
0,8892	0,0475	0,1444	2,3778	1,3502	1,7503	0,3588
0,8446	0,0942	0,0400	1,0527	1,5031	0,5170	0,0114
0,8391	0,1005	0,2809	3,1082	1,5203	2,0909	0,7174
0,8317	0,1096	0,0000	1,5450	1,5450	0,8317	0,1096
8,0884	0,4383	2,3722	10,4812	11,8862	7,0287	2,4655

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$[a\,a] =$	8,0884	$[a\,a] =$	8,0884	$[a\,a] =$	8,0884
$[b\,b] =$	0,4383	$[l\,l] =$	2,3722	$[s\,s] =$	10,4812
	$-$ 8,5267		$-$ 10,4606		$-$ 18,5696
	$+$ 11,8862		$+$ 7,0287		$+$ 2,4655
	$+$ 3,3595		$-$ 3,4319		$-$ 16,1041
$[a\,b] = +$	1,6798	$[a\,l] = -$	1,7160	$[a\,s] = -$	8,0520
		$[b\,b] =$	0,4383	$[b\,b] =$	0,4383
		$[l\,l] =$	2,3722	$[s\,s] =$	10,4812
			$-$ 2,8105		$-$ 10,9195
			$+$ 2,4655		$+$ 7,0287
			$-$ 0,3450		$-$ 3,8908
		$[b\,l] = -$	0,1725	$[b\,s] = -$	1,9454
				$[l\,l] =$	2,3722
				$[s\,s]$	10,4812
					$-$ 12,8534
					$+$ 11,8862
					$-$ 0,9672
				$[l\,s]$	$-$ 0,4836

Diese Rechnungen sind ausführlicher, und auch genauer behandelt, als für den unmittelbaren Zweck unseres Beispiels nötig wäre; indessen soll durch diese ausführliche Behandlung das Verfahren überhaupt nach allen Beziehungen klar gemacht werden.

Diese Coefficienten stellt man in üblicher Weise zusammen:

	a	b	l	s	Probe
a	$+$ 8,0884	$+$ 1,6798	$-$ 1,7160	$-$ 8,0520	$+$ 2
b		$+$ 0,4383	$-$ 0,1725	$-$ 1,9454	$+$ 2
l			$+$ 2,3722	$-$ 0,4836	$+$ 1
s				$+$ 10,4812	$+$ 2

Ausführlich geschrieben heisst z. B. die dritte Probe:

$$-1{,}7160 - 0{,}1725 + 2{,}3722 - 0{,}4836 = +0{,}0001$$

Die bei den Proben bleibenden Reste $+2$ $+2$ $+1$ $+2$ rühren lediglich von Abrundungen her, und bleiben auf sich beruhen.

Löst man nun die Normalgleichungen nach dem Muster von § 20. S. 65 logarithmisch auf, so bekommt man:

	a	b	l	s	Probe
Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen nach dem Muster S. 65.	$+$ 8,088	$+$ 1,680	$-$ 1,716	$-$ 8,052	0,000
	0.90784	0.22531	0.23452	0.90590	
		9.54278	9.55199	0.22337	
			9.56120	0.23258	
		$+$ 0,438	$-$ 0,172	$-$ 1,946	0,000
		$-$ 0,349	$+$ 0,356	$+$ 1,673	
			$+$ 2,372	$-$ 0,484	0,000
			$-$ 0,364	$-$ 1,708	
$y = -\frac{0{,}184}{0{,}089} = -2{,}07$		$+$ 0,089	$+$ 0,184	$-$ 0,273	0,000
		8.94939	9.26482	9.43616	
			9.58025	9.75159	
			$+$ 2,008	$-$ 2,192	0,000
			$-$ 0,380	$+$ 0,564	
			$+$ 1,628	$-$ 1,628	0,000

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun stellt man die Coefficienten so um:

b	a	l	s
+ 0,438	+ 1,680	— 0,172	— 1,946
	+ 8,088	— 1,716	— 8,052
		+ 2,372	— 0,484

Die Weiterrechnung giebt dann:

$$x = -\frac{-1{,}056}{+1{,}644} = +0{,}642$$

+ 1,644	— 1,056	— 0,588
	+ 2,304	— 1,248
	— 1,626	+ 1,626

Man hat also jetzt im ganzen:

$$x = +0{,}642 \qquad [v\,v] = [l\,l\,.\,2] \qquad y = -2{,}07$$
$$p_x = 1{,}644 \qquad = 1{,}627 \qquad p_y = 0{,}089$$

$$m = \sqrt{\frac{1{,}627}{9-2}} = \pm 0{,}48$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm 0{,}38 \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm 1{,}62$$

also $x = +0{,}64 \pm 0{,}38$ $\qquad y = -2{,}07 \pm 1{,}62$

$y' = -207 \pm 162$

Näherungen $(X) = 762{,}03$ $\qquad (Y) = 19298$

Resultate $X = 762{,}67 \pm 0{,}38$ $\qquad Y = 19091 \pm 162$ (11)

Also die gesuchte Formel:

$$h = 19091\ log\frac{762{,}67}{B} \qquad \text{oder} \qquad log\,B = log\,762{,}67 - \frac{h}{19091} \tag{12}$$

Um die Fehlerverteilung zu untersuchen und um zugleich eine durchgreifende Rechenprobe zu erhalten, berechnen wir nach der Formel (12) aus den gegebenen Meereshöhen h die Barometerstände B, und vergleichen dieselben mit den Beobachtungen:

Nr.	Meereshöhe h	Barometerstand B ausgeglichen	Barometerstand B beobachtet	v	v^2
1	120,2	751,69	751,18	+ 0,51	0,2601
2	225,1	742,24	742,37	— 0,13	0,0169
3	270,6	738,18	738,50	— 0,32	0,1024
4	347,6	731,36	731,27	+ 0,09	0,0081
5	406,7	726,16	726,99	— 0,83	0,6889
6	492,4	718,69	718,16	+ 0,53	0,2809
7	708,1	700,24	700,48	— 0,24	0,0576
8	733,5	698,10	697,64	+ 0,46	0,2116
9	768,9	695,12	695,23	— 0,11	0,0121
					$1{,}6386 = [vv]$

Die hieraus erhaltene Summe $[v\,v] = 1{,}6386$ stimmt genügend mit dem aus der Elimination erhaltenen Wert $[l\,l\,.\,2] = 1{,}628$ oder $1{,}626$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Man kann nun diese nach dem logarithmischen Gesetz gemachte Ausgleichung mit der früheren, nach linearem Gesetz gemachten Ausgleichung vergleichen. Nach (15) § 14. S. 51 gab die frühere Ausgleichung die Quadratsumme der übrig bleibenden scheinbaren Fehler $[v\,v] = 1{,}4695$, also etwas *kleiner* als die neue Ausgleichung mit 1,6386.

Die übrig bleibende Summe $[v\,v]$ betrachtet man in solchen Fällen als Kriterium der Güte der angewendeten Funktion, und in diesem Falle erscheint also die lineare Funktion *besser* als die theoretische logarithmische Funktion, was jedenfalls nicht der Fall ist, und nur durch Zufall erklärt werden kann.

Als sachliches Resultat heben wir hervor: Der auf den Meeresspiegel reduzierte mittlere Barometerstand in Württemberg ist:

$$B_0 = 762{,}7^{mm} \pm 0{,}4^{mm}.$$

Eine weitergehende Interpolations-Ausgleichung dieser Art wurde von uns in der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie 1880, S. 162—167 veröffentlicht.

26 badische und württembergische Stationen zwischen 111m und 1009m Höhe gaben die Formel:

$$h = 18517\, log \frac{762{,}56}{B}(1 + 0{,}003665\, t)$$

wo t die mittlere Jahrestemperatur ist. Hiebei ist:

$$B_0 = 762{,}56^{mm} \pm 0{,}10^{mm}.$$

§ 24. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen x und y.

Schon am Schlusse von § 17. S. 58, als von den Gewichten und mittleren Fehlern der ausgeglichenen x und y die Rede war, mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, haben wir die Bemerkung gemacht, dass es auch noch einen ähnlichen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ giebt, welcher dann gebraucht wird, wenn es sich um eine *Funktion* der ausgeglichenen x und y handelt.

Indem wir dem Leser anheimgeben, mit dieser nicht dringlichen Sache sofort sich bekannt zu machen, müssen wir doch der Vollständigkeit wegen das Funktions-Gewicht für 2 Elemente auch noch hier erledigen, ehe wir zu beliebig vielen Unbekannten übergehen.

Jedenfalls wollen wir schon vor Beginn der Formel-Entwicklung vor einem Irrtum warnen, der leicht vorkommen kann, nämlich die mittleren Fehler m_x und m_y, welche nach § 17. berechnet wurden, als *unabhängig* weiter zu behandeln, was nicht zulässig ist.

Oft hat es weniger Interesse, die Genauigkeit der Unbekannten x und y selbst zu kennen, als die Genauigkeit einer Funktion derselben; wir nehmen die lineare Funktion:

$$F = f_1 x + f_2 y \qquad (1)$$

Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, als ob man den mittleren Fehler von F kurzweg aus den mittleren Fehlern von x und y berechnen könnte nach der Formel (10) § 5. S. 17:

$$M^2 = (f_1 m_x)^2 + (f_2 m_y)^2 \quad (?) \qquad (2)$$

Allein dieses ist nicht richtig, weil die x und y durchaus *nicht* unabhängige Beobachtungen mit den ebenfalls unabhängigen mittleren Fehlern m_x und m_y sind, vielmehr hängen x und y von *denselben* Messungen $l_1\, l_2 \ldots l_n$ ab. Wenn z. B. zufällig die Fehler aller l positiv wären, so würden nach (1) und (2) § 17. S. 56 auch die Fehler von x *und* von y beide positiv.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Setzen wir zunächst bestimmte Fehler Δl_1 Δl_2 . . . der l voraus, so folgen daraus die bestimmten Fehler Δ_x und Δ_y nach (1) und (2) § 17. S. 56:

$$\Delta x = \alpha_1 \Delta l_1 + \alpha_2 \Delta l_2 + \alpha_3 \Delta l_3 + \dots \quad (3)$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta l_1 + \beta_2 \Delta l_2 + \beta_3 \Delta l_3 + \dots \quad (4)$$

und daraus folgt ferner der bestimmte Fehler von F nach (1):

$$\Delta F = f_1 \Delta x + f_2 \Delta y \quad (5)$$

Wenn man dieses quadriert und die Mittelwerte der Quadrate bildet, so wird, wenn n malige Wiederholung angenommen wird:

$$\frac{[\Delta F \Delta F]}{n} = f_1^2 \frac{[\Delta x \Delta x]}{n} + f_2^2 \frac{[\Delta y \Delta y]}{n} + 2 f_1 f_2 \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} \quad (6)$$

und hier ist der Mittelwert $\frac{[\Delta x \Delta y]}{n}$ nicht gleich Null, denn es ist nach (3) und (4):

$$\left.\begin{aligned} \Delta x \Delta y = \alpha_1 \beta_1 (\Delta l_1)^2 + \alpha_2 \beta_2 (\Delta l_2)^2 + \alpha_3 \beta_3 (\Delta l_3)^2 + \dots \\ + \alpha_1 \beta_2 \Delta l_1 \Delta l_2 + \alpha_2 \beta_1 \Delta l_2 \Delta l_1 + \alpha_1 \beta_3 \Delta l_1 \Delta l_3 + \dots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Hier werden die Mittelwerte der in der *zweiten* Linie stehenden Produkte allerdings = Null, weil die *verschiedenen* (mit ungleichen Nummern $_1$ und $_2$ u. s. w. bezeichneten) Δl unter sich unabhängig sind. Es bleibt also nur die erste Linie von (7) weiter zu betrachten, und diese giebt den Mittelwert:

$$\frac{[\Delta x \Delta y]}{n} = [\alpha \beta] m^2 \quad (8)$$

Die übrigen in (6) auftretenden, quadratischen Mittelwerte haben bereits bekannte Bedeutungen, nämlich:

$$\frac{[\Delta x \Delta x]}{n} = m_x^2 = [\alpha \alpha] m^2 \quad \text{und} \quad \frac{[\Delta y \Delta y]}{n} = m_y^2 = [\beta \beta] m^2$$

Setzt man dieses nebst (8) in (6) ein, so wird:

$$\frac{[\Delta F \Delta F]}{n} = M^2 = m^2 \left\{ f_1^2 [\alpha \alpha] + f_2^2 [\beta \beta] + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] \right\} \quad (9)$$

oder auch: $$M^2 = (f_1 m_x)^2 + (f_2 m_y)^2 + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] m^2 \quad (10)$$

Würde man also die unrichtige Formel (2) angewendet haben, so würde das Glied $2 f_1 f_2 [\alpha \beta] m^2$ in (10), welches die Zusammenwirkung der beiden Fehler m_x und m_y ausdrückt, verloren gegangen sein.

Statt (9) kann man auch schreiben (wegen (18) § 17. S. 58):

$$M^2 = m^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[a\,a\,.\,1]} + 2 \frac{f_1 f_2}{[a\,b\,.\,1]} + \frac{f_2^2}{[b\,b\,.\,1]} \right\} \quad (11)$$

Die Gleichung (9) kann man ausserdem noch in eine andere Gestalt bringen mit Benützung der Beziehungen, welche am Schluss von § 17. S. 58 zusammengestellt sind, nämlich:

$$[\alpha \alpha] = \frac{[b\,b]}{D} \qquad [\beta \beta] = \frac{[a\,a]}{D} \qquad [\alpha \beta] = \frac{-[a\,b]}{D}$$

damit wird (9): $$\frac{M^2}{m^2} = \frac{1}{P} = \frac{1}{D} \left\{ f_1^2 [b\,b] + f_2^2 [a\,a] - 2 f_1 f_2 [a\,b] \right\} \quad (12)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und dieses kann auch noch so umgeformt werden:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2 \,.\, 1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{13}$$

wobei

$$[f_2 \,.\, 1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} f_1. \tag{14}$$

Beispiel eines Funktions-Gewichtes.

Um auch eine Anwendung der vorstehenden Formeln zu haben, müssen wir vor allem den Coefficienten $[a\,b\,.\,1] = \frac{1}{[\alpha\,\beta]}$ berechnen, wozu die Formel (16) § 17. S. 58 dient:

$$[a\,b\,.\,1] = [a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}[b\,b] \quad \text{oder} \quad = [a\,b] - \frac{[b\,b]}{[a\,b]}[a\,a]$$

Wir haben dieses zweifach geschrieben, weil diese beiden Formen sich den Eliminationen von x und von y anschliessen.

Um dieses deutlich zu zeigen, setzen wir die Anfänge jener Eliminationen von § 19. S. 62 und S. 63 nochmals her, und fügen die Berechnung von $[a\,b\,.\,1]$ beidemale bei:

	$a]$	$b]$	$l]$
$[a$	+ 9,0	− 40,7	+ 4,9
$[b$	− 40,7	+ 229,9	− 25,3
	+ 50,8	− 184,4	+ 22,1
	+ 10,1	+ 45,5	− 3,2
	$= [a\,b\,.\,1]$	$[b\,b\,.\,1]$	

	$b]$	$a]$	$l]$
$[b$	+ 229,9	− 40,7	− 25,3
$[a$	− 40,7	+ 9,0	+ 4,9
	+ 50,8	− 7,2	− 4,5
	+ 10,1	+ 1,8	+ 0,4
	$= [b\,a\,.\,1]$	$[a\,a\,.\,1]$	

Es soll nun für die Höhe $h = 1000^m$ der mittlere Barometerstand B und dessen mittlerer Fehler, bzw. Gewicht, berechnet werden. Es handelt sich also um die Funktion:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \quad \text{oder} \quad = 761{,}77 - 8{,}695\left(\frac{h}{100}\right)$$

mit $h = 1000$:

$$B = 761{,}77 - 10 \times 8{,}695 = X - 10\,Y = 674{,}82 \tag{15}$$

Dieses entspricht der Funktion (1):

$$F = f_1\,x + f_2\,y \quad \text{d. h.} \quad f_1 = 1 \quad f_2 = -10.$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers M der Funktion (1) haben wir oben die Formel (11) gefunden, welche mit Einsetzung aller Zahlenwerte giebt:

$$M^2 = 0{,}46^2 \left\{\frac{1}{1{,}8} - \frac{20}{10{,}1} + \frac{100}{45{,}5}\right\} = 0{,}46^2 \times 0{,}77$$

$$M = \pm 0{,}40^{mm}$$

also

$$B_{1000} = 674{,}82^{mm} \pm 0{,}40^{mm}$$

Das heisst also: In der Höhe 1000^m über dem Meere wird, nach der Beobachtungsweise (1) § 23. S. 72, ein Jahres-Mittel-Barometerstand $= 674{,}82^{mm}$ zu erwarten sein, und zwar kann man das aus den vorhandenen Beobachtungen schliessen mit einem mittleren zu fürchtenden Fehler von $\pm 0{,}40^{mm}$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 25. Übergang zu beliebig vielen Unbekannten.

Wir haben in § 13. bis § 24. die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit *zwei* Unbekannten besonders behandelt, weil dieser Fall sich sehr übersichtlich darstellen liess, und weil es für das erste Erlernen der M. d. kl. Q. nützlich ist, nicht sofort in die weitschweifigen allgemeinen Formeln für beliebig viele Unbekannte einzugehen. Zudem kommt der Fall *zweier* Beobachtungen so oft vor, z. B. bei trigonometrischen Punktbestimmungen, mit Coordinaten x und y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu erledigen.

Man kann sogar von den Formeln für zwei Unbekannte einige Analogieschlüsse auf die Formeln für mehr Unbekannte sich erlauben; z. B. nachdem nachgewiesen ist, dass bei zwei Unbekannten x und y das Gewicht $p_y = [b\,b\,.\,1]$ ist, kann man wohl *vermuten*, dass bei drei Unbekannten $x\ y\ z$ gelten wird $p_z = [c\,c\,.\,2]$ u. s. w.

Auch bei der Fehlerformel mit dem Nenner $n-2$ (§ 16. S. 56) haben wir schon den Analogieschluss beigefügt, dass bei u Unbekannten der Nenner $n-u$ zu erwarten sein werde, doch war das noch kein Beweis für beliebige Anzahl u.

Wir gehen nun von dem besonderen Falle zweier Unbekannter x und y zu dem allgemeinen Fall beliebig vieler Unbekannter $x\ y\ z\ \ldots$ über, und überzeugen uns sofort, dass Alles, was früher über die Einführung von Näherungswerten (§ 14.), über den allgemeinen Gang der Gauss'schen Elimination mit $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ . . . (§ 15.), Coefficienten-Berechnung und Summenproben (§ 18.), über ungleiche Gewichte und nicht lineare Funktionen (§ 21.—22.) u. A. gesagt wurde, nicht bloss für zwei, sondern für beliebig viele Unbekannte gilt.

Z. B. bei vier Unbekannten $x\ y\ z\ t$ hat man folgenden Rechnungsgang:

Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + l_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Normalgleichungen ausführlich geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,d]\,t + [c\,l] &= 0 \\ [a\,d]\,x + [b\,d]\,y + [c\,d]\,z + [d\,d]\,t + [d\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Da hier alle nicht quadratischen Coefficienten $[a\,b]$ $[a\,c]$ . . . *doppelt* vorkommen, pflegt man, um diese nicht doppelt schreiben zu müssen, die folgende Abkürzung anzuwenden, wobei man die in der Diagonale stehenden quadratischen Glieder *unterstreicht* und dann die Wiederholungen der $[a\,b]$ $[a\,c]$ . . . einfach weglässt.

Normalgleichungen abgekürzt geschrieben, nebst $[l\,l]$:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,d]\,t + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[d\,d]}\,t + [d\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Reduzierte Normalgleichungen abgekürzt geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \text{1. Reduktion:}\quad \underline{[b\,b\,.\,1]}\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,d\,.\,1]\,t + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,z + [c\,d\,.\,1]\,t + [c\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[d\,d\,.\,1]}\,t + [d\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,1]} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{2. Reduktion:}\quad \underline{[c\,c\,.\,2]}\,z + [c\,d\,.\,2]\,t + [c\,l\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[d\,d\,.\,2]}\,t + [d\,l\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,2]} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{3. Reduktion:}\quad [d\,d\,.\,3]\,t + [d\,l\,.\,3] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,3]} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$\text{4. Reduktion:}\quad \underline{[l\,l\,.\,4]} \quad (7)$$

Der Bau des Eliminations-Coefficienten lässt sich leicht dem Gedächtnis einprägen, wenn man ausser den unmittelbar in die Augen fallenden noch folgende Eigenschaften merkt:

1) Jeder Klammer-Coefficient wird $= 0$, wenn man die symbolischen Zeichen algebraisch auffasst, z. B.:

$$[b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l] = b\,l - \frac{a\,b\,a\,l}{a\,a} = b\,l - b\,l = 0$$

2) Wenn 1, 2, 3 . . . in der Klammer steht, so steht im Nenner des Subtrahenden bzw. $[a\,a]$, $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ . . .

Um ein Zahlenbeispiel zu haben, wollen wir folgendes Gleichungssystem auflösen:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{459\,x} - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 &= 0 \\ +\underline{464\,y} + 408\,z - 269\,t + 695 &= 0 \\ +\underline{676\,z} - 331\,t + 653 &= 0 \\ +\underline{469\,t} - 283 &= 0 \\ +\underline{1129} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die Auflösung mit dem Rechenschieber zeigt nachfolgende Tabelle S. 82, welche ähnliche Anordnung hat wie die Tabelle für 2 Unbekannte x y § 19. S. 63. In den 2 letzten Spalten sind die Summenglieder und die Proben angegeben.

Die Anfangsgleichungen aller Gruppen, zusammengenommen, nennt man vollständig reduzierte Normalgleichungen oder Endgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A &= [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ B' &= [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,d\,.\,1]\,t + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ C'' &= [c\,c\,.\,2]\,z + [c\,d\,.\,2]\,t + [c\,l\,.\,2] = 0 \\ D''' &= [d\,d\,.\,3]\,t + [d\,l\,.\,3] = 0 \\ & [l\,l\,.\,4] = [v\,v] \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Dieses sind wirkliche Gleichungen, deren jede immer eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende, während (3) oder (8) mit den Unterstreichungen nur Abkürzungen der Gleichungen (2) sind, deren jede noch *alle* Unbekannten enthält.

Das Zahlenbeispiel auf S. 82 giebt folgende Endgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} +459\,x - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 &= 0 \\ +256\,y + 146\,z - 105\,t + 354 &= 0 \\ +263\,z - 64\,t + 21 &= 0 \\ +281\,t + 137 &= 0 \\ 11 &= [v\,v] \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z u. s. w. Kurz, man kann durch Rückwärtssubstituieren allmählich alle Unbekannten in der Aufeinanderfolge $t\ z\ y\ x$ finden.

Auflösung eines Systems von 4 Normalgleichungen:

	a	b	c	d	l	s	Probe
A	+ 459	− 308	− 389	+ 244	− 507	+ 501	0
		+ 464	+ 408	− 269	+ 695	− 990	0
		− 208	− 262	+ 164	− 341	+ 337	
			+ 676	− 331	+ 653	−1017	0
			− 330	+ 207	− 430	+ 425	
				+ 469	− 283	+ 170	0
				− 130	+ 270	− 267	
					+1129	−1687	0
					− 560	+ 554	
	B'	+ 256	+ 146	− 105	+ 354	− 653	− 2
			+ 346	− 124	+ 223	− 592	− 1
			− 83	+ 60	− 202	+ 373	
				+ 339	− 13	− 97	0
				− 43	+ 145	− 268	
					+ 569	−1133	0
					− 490	− 902	
		C''	+ 263	− 64	+ 21	− 219	+ 1
				+ 296	+ 132	− 365	− 1
				− 15	+ 5	− 53	
					+ 79	− 231	+ 1
					− 2	+ 17	
$t = -\frac{+137}{+281} = -0{,}488$				D'''	+ 281	+ 137	− 418	0
						+ 77	− 214	0
						− 66	+ 203	
						+ 11	− 11	

Die Ausrechnung der Abzüge − 208 − 262 + 164 u. s. w. ist mit dem Rechenschieber gemacht.

Man stellt dabei zuerst den Quotienten $\frac{308}{459}$ ein, und liest mit dieser *einzigen* Einstellung der Reihe nach ab:

$$\frac{308}{459}308 = 208\ ,\ \frac{308}{459}389 = 262\ ,\ \frac{308}{459}244 = 164\ ,\ \frac{308}{459}507 = 341\ ,\ \frac{308}{459}501 = 337$$

Dann in der zweiten Linie, mit *einer* Einstellung:

$$\frac{389}{459}389 = 330\ ,\ \frac{389}{459}244 = 207\ ,\ \frac{389}{459}507 = 430\ ,\ \frac{389}{459}501 = 425$$

Diese Ergebnisse 208, 262 u. s. w. werden mit richtigen Vorzeichen d. h. nach den Regeln von § 19. S. 63—64 unter 464, 408 u. s. w. eingesetzt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Eliminationen und die damit verwandten Berechnungen sind, wie die meisten kleineren Zahlenrechnungen in diesem Buche, lediglich mit dem Rechenschieber gemacht, und dagegen wird sachlich nichts einzuwenden sein. Dagegen entstehen formelle Übelstände, wenn man solche Berechnungen durch den Druck veröffentlicht.

Z. B. heisst oben der erste Subtrahend — 208, während der genauere Wert — 207 ist, denn die genaue Ausrechnung ist $-\frac{308}{459}\,308 = -206{,}7$. Der Fehler 208 statt 207 bleibt in dem Schlussresultat unschädlich.

Da es unsere Absicht war, in diesem Buche die Anwendung des Rechenschiebers praktisch zu zeigen, mussten wir *wirkliche* Rechnungen dieser Art vorführen, und nicht etwa solche, welche *nachher* logarithmisch verbessert sind. Es war notwendig, unverfälschte Originalrechnungen mitzuteilen, und dabei kleine formelle Widersprüche zu dulden, welche bei logarithmischen Rechnungen in einem Druckwerke nicht zulässig wären, deshalb haben wir auch den Fehler 208 statt 207 von der früheren Auflage auch wieder stehen gelassen.

§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen.

Im Anschluss an die reduzierten Normalgleichungen können wir auch reduzierte Fehlergleichungen bilden, welche zu manchen Zwecken sehr nützlich sind.

Mit Beschränkung auf 3 Unbekannte $x\ y\ z$ haben wir die allgemeine Form einer Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l \tag{1}$$

und hiezu die erste Normalgleichung:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \tag{2}$$

woraus

$$x = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z - \frac{[a\,l]}{[a\,a]} \tag{3}$$

Dieses x setzen wir in (1) und haben:

$$v = \left(b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a\right) y + \left(c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a\right) z + \left(l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a\right) \tag{4}$$

oder

$$v = \qquad b'\,y + \qquad c'\,z + \qquad l' \tag{5}$$

wobei

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \tag{6}$$

(4) oder (5) nennen wir eine „reduzierte Fehlergleichung“, und $b'\ c'\ l'$ nach (6) können wir reduzierte Coefficienten nennen.

Man kann sich leicht überzeugen, dass folgendes richtig ist:

$$\left.\begin{array}{lll} [b'\,b'] = [b\,b\,.\,1] & [b'\,c'] = [b\,c\,.\,1] & [b'\,l'] = [b\,l\,.\,1] \\ & [c'\,c'] = [c\,c\,.\,1] & [c'\,l'] = [c\,l\,.\,1] \\ & & [l'\,l'] = [l\,l\,.\,1] \end{array}\right\} \tag{7}$$

denn es ist z. B.:

$$b_1' = b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1 \qquad b_1'^2 = b_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,a_1^2$$

$$[b'\,b'] = [b\,b] - 2\,[a\,b]\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,[a\,a]$$

$$[b'\,b'] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \text{ u. s. w.}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun kann man die Fehlergleichung (5) nochmals reduzieren. Nimmt man nämlich die erste reduzierte Normalgleichung zur Hand:

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \quad \text{oder} \quad [b'\,b']\,y + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0$$

und bestimmt daraus: $$y = -\frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,z - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}$$

und setzt man dieses in (5), so wird:

$$v = \left(c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,b'\right) z + \left(l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b'\right) \tag{8}$$

$$v = c'\,z + l'' \tag{9}$$

wobei $$c'' = c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,l' \qquad l'' = l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' \tag{10}$$

und es gelten die ähnlich wie (7) leicht nachzuweisenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}[c''\,c''] &= [c\,c\,.\,2] \qquad [c''\,l''] = [c\,l\,.\,2]\\ &\qquad\quad [l''\,l''] = [l\,l\,.\,2]\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

So kann man auch fortfahren, bis man hat:

$$v = l''' = l' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c'' \tag{12}$$

oder mit Zurückgehen auf (10) und (6):

$$v = l''' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c''$$

Wir haben also nun bewiesen, dass alle Eliminations-Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1]$ . . . $[c\,l\,.\,2]$ u. s. w. nicht bloss der Form nach, sondern in Wirklichkeit Quadratsummen und Produktsummen sind, deren Elemente b', c' . . . c'' u. s. w. angegeben werden können.

Insbesondere sind die $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ . . . *Quadrat*summen, und daher stets positiv.

§ 27. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ und mittlerer Fehler m.

Die Entwicklung von $[v\,v]$, welche in § 15. (9) bis (15) S. 52—53, für 2 Unbekannte gemacht wurde, lässt sich allgemein weiter führen:

Für 3 Elemente $x\ y\ z$ haben wir:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] = [a\,a]\,x^2 &+ 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x\\ &+ [b\,b]\,y^2 + 2\,[b\,c]\,y\,z + 2\,[b\,l]\,y\\ &\qquad + [c\,c]\,z^2 + 2\,[c\,l]\,z\\ &\qquad\quad + [l\,l]\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Mit dieser Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ kann man die linken Seiten $A\ B'\ C''$ . . . der Endgleichungen (9) § 25. S. 81 in innige Beziehungen bringen. Zunächst hat man:

$$A = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] \tag{2}$$

also $$\begin{aligned}\frac{A\,A}{[a\,a]} = [a\,a]\,x^2 &+ 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x\\ &+ \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\,y^2 + 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c]\,y\,z + 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,y\\ &\qquad + \frac{[a\,c]^2}{[a\,a]}\,z^2 + 2\,\frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,z\\ &\qquad\quad + \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}\end{aligned}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieser Ausdruck lässt sich Glied für Glied von der Summe $[v\,v]$ in (1) subtrahieren; dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v]-\frac{A\,A}{[a\,a]} &= [b\,b\,.\,1]\,y^2+2\,[b\,c\,.\,1]\,y\,z+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ &+\ [c\,c\,.\,1]\,z^2+2\,[c\,l\,.\,1]\,z\\ &+\ [l\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Genau in derselben Weise kann man mit der zweiten Endgleichung fortfahren:

$$B' = [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]} &= [b\,b\,.\,1]\,y^2+2\,[b\,c\,.\,1]\,y\,z+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ &+\ \frac{[b\,c\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}\,z^2+2\,\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\,z\\ &+\ \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\end{aligned}$$

Dieses kann man wieder Glied für Glied von (3) abziehen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v]-\frac{A\,A}{[a\,a]}-\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]} &= [c\,c\,.\,2]\,z^2+2\,[c\,l\,.\,2]\,z\\ &+\ [l\,l\,.\,2]\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens giebt:

$$C'' = [c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{C''C''}{[c\,c\,.\,2]} &= [c\,c\,.\,2]\,z^2+2\,[c\,l\,.\,2]\,z\\ &+\ \frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}\,[c\,l\,.\,2]\end{aligned}$$

Wenn man auch dieses noch, Glied für Glied, von (5) abzieht, so erhält man:

$$[v\,v]-\frac{A\,A}{[a\,a]}-\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]}-\frac{C''\,C''}{[c\,c\,.\,2]} = [l\,l\,.\,3] \tag{7}$$

Nun sind aber die $A\,B'\,C''$ nach (2), (4) und (6), d. h. die linken Seiten der Endgleichungen (9) § 25. S. 82 sämtlich *Null*, und (7) wird sehr einfach:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,3] \tag{7a}$$

Wenn man dieses Restglied $[l\,l\,.\,3]$ wieder in seine Teile zerlegt, so hat man:

$$[l\,l\,.\,3] = [l\,l\,.\,2]-\frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}\,[c\,l\,.\,2]$$

$$[l\,l\,.\,2] = [l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]$$

$$[l\,l\,.\,1] = [l\,l]-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$$

folglich:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,3] = [l\,l]-\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}-\frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}-\frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{8}$$

Am Schluss von § 26. wurde gezeigt, dass alle Nenner $[a\,a]$ $[b\,b\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. positiv sind; man sieht also aus (8) deutlich, wie die Summe $[l\,l]$ allmählich abnimmt.

Aus $[v\,v]$ berechnet man auch den mittleren Fehler m einer einzelnen Beob-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

achtung (vom Gewicht 1). Wenn v die wahren Beobachtungsfehler wären, so würde man bei n Fehlergleichungen haben:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n} \quad (?) \tag{9}$$

dagegen bekommt man aus den wahren Beobachtungsfehlern ε richtig:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} \tag{10}$$

Bezeichnet man die wahren Unbekannten mit $X\ Y\ Z$, so hat man:

$$\begin{aligned} v &= a\,x + b\,y + c\,z + l \\ \varepsilon &= a\,X + b\,Y + c\,Z + l \\ \text{Differenz}\quad v &= a\,(x - X) + b\,(y - Y) + c\,(z - Z) + \varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Gleichung hat wieder die Form einer Fehlergleichung, und würde in der Form $[a\,v] = 0\quad [b\,v] = 0$ auch Normalgleichungen von der früheren Form geben; man kann daher auf die Gleichung (11) auch alle mit den Fehlergleichungen vorgenommenen Umformungen anwenden, insbesondere ist nach (8):

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,\varepsilon\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{12}$$

und mit den reduzierten Coefficienten $b'\ c''$ von § 26:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b'\,\varepsilon']}{[b'\,b']} - \frac{[c''\,\varepsilon'']}{[c''\,c'']} \tag{13}$$

wobei die $\varepsilon'\ \varepsilon''\ \ldots$ folgende Bedeutungen haben:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a \qquad \varepsilon'' = \varepsilon' - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,b' = \varepsilon' - \frac{[b'\,\varepsilon']}{[b'\,b']}\,b' \tag{14}$$

Aus (13) erkennt man, wegen der quadratischen Gestalt der Glieder, dass $[\varepsilon\,\varepsilon]$ jedenfalls grösser als $[v\,v]$ ist. Die Differenz $[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v]$ ist selbst eine Funktion der ε, also in aller Strenge niemals zu bestimmen; man kann aber wenigstens die Mittelwerte bestimmen, gegen welche die Glieder von (13) konvergieren. Wir betrachten zuerst:

$$\begin{aligned} [a\,\varepsilon]^2 &= (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + a_3\,\varepsilon_3 + \ldots)^2 \\ &= a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + a_3^2\,\varepsilon_3^2 + \ldots \\ &\quad + 2\,a_1\,a_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 2\,a_1\,a_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Der Mittelwert der Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_3$ u. s. w. verschwindet wegen der gleichwahrscheinlichen Zeichen $+$ und $-$ und der Mittelwert der Quadrate ε_1^2, ε_2^2 . . . ist $= m^2$ zu setzen. Es ist also als Mittelwert der Funktion (15) zu nehmen:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)\,m^2 = [a\,a]\,m^2$$

und

$$\frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = m^2 \tag{16}$$

Gehen wir zu dem zweiten Gliede von (13) über, so ist zuerst zu zeigen, dass der Mittelwert von $[b'\,\varepsilon']$ auch gleich dem Mittelwert von $[b'\,\varepsilon]$ ist, denn nach der ersten Gleichung von (14) ist:

$$[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,[a\,b']$$

Hier ist aber über das Vorzeichen von $[a\,\varepsilon]$ gar nichts bekannt, es ist also im Mittel $[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon]$, folglich nach denselben Schlüssen wie bei (15) und (16):

$$\frac{[b'\,\varepsilon']^2}{[b'\,b']} = \frac{[b'\,\varepsilon]^2}{[b'\,b']} = m^2$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Schlussfolge geht beliebig weiter; wir haben daher aus (13):

$$[v\,v] - [\varepsilon\,\varepsilon] = -m^2 - m^2 - m^2 \quad \text{oder} \quad [\varepsilon\,\varepsilon] = [v\,v] + 3\,m^2 \tag{17}$$

Der strenge Wert des mittleren Fehlerquadrats ist nach (10):

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}$$

und dieses giebt in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung (17):

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-3} \tag{18}$$

Dieses gilt für 3 Unbekannte, da wir der Kürze wegen nur 3 Symbole $x\ y\ z$ geschrieben haben; die Betrachtung gilt aber allgemein, und giebt daher für n Fehlergleichungen mit u Unbekannten:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u} \tag{19}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (9).

Anhang zu § 27.

Ähnliche Entwicklungen wie die vorstehende Entwicklung von $[v\,v]$ kommen in der M. d. kl. Q. mehrfach vor; wir bilden deshalb aus dieser Entwicklung einen allgemeinen Satz, indem in (1) und (7) S. 85 alle $l = 0$ gesetzt werden, und dann (1) und (7) einander gleich gesetzt werden. Wenn man hiebei die Bedeutungen von A nach (2), B' nach (4), und C'' nach (6) berücksichtigt, so geben (1) und (7):

$$\left\{\begin{array}{l} [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z \\ \qquad + \ [b\,b]\,y^2 \ + 2\,[b\,c]\,y\,z \\ \qquad\qquad + \ [c\,c]\,z^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z)^2}{[a\,a]} \\ \qquad + \dfrac{([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z)^2}{[b\,b\,.\,1]} \\ \qquad\qquad + \dfrac{([c\,c\,.\,2]\,z)^2}{[c\,c\,.\,2]} \end{array}\right\} \tag{20}$$

Dieses ist eine algebraische Identität, welche mit der Bedingung Quadratsumme $[v\,v]$ = Minimum in gar keiner Beziehung besteht. Es ist hier nur vorausgesetzt, dass die Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. nach dem allgemeinen Gesetz der Elimination gebildet sind.

§ 28. Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . .

Nach dem Bisherigen haben wir, mit Beschränkung auf $n = 4$, $u = 3$, folgendes: Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl } n = 4 \left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + l_3 \\ \underbrace{v_4 = a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z + l_4}_{\text{Anzahl } u = 3} \end{array}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0\\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] &= 0\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$[c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \quad (4)$$

Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned}\underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0\\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0\\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] &= 0\\ \underline{[l\,l]}\end{aligned}\right\} \quad (2^*)$$

Reduzierte Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned}\underline{[b\,b\,.\,1]}\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0\\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,z + [c\,l\,.\,1] &= 0\\ \underline{[l\,l\,.\,1]}\end{aligned}\right\} \quad (3^*)$$

$$\left.\begin{aligned}\underline{[c\,c\,.\,2]}\,z + [c\,l\,.\,2] &= 0\\ \underline{[l\,l\,.\,2]}\end{aligned}\right\} \quad (4^*)$$

$$[l\,l\,.\,3] \quad (5)$$

Die Bedeutung der Eliminations-Coefficienten setzen wir nochmals ausführlich her:

$$\left.\begin{aligned}[bb.1] &= [bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] \quad [bc.1] = [bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] \quad [bl.1] = [bl] - \frac{[ab]}{[aa]}[al]\\ [cc.1] &= [cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] \quad [cl.1] = [cl] - \frac{[ac]}{[aa]}[al]\\ & \qquad\qquad [ll.1] = [ll] - \frac{[al]}{[aa]}[al]\end{aligned}\right\} \quad (3^{**})$$

$$\left.\begin{aligned}[cc.2] &= [cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] \quad [cl.2] = [cl.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1]\\ & \qquad\qquad [ll.2] = [ll.1] - \frac{[cl.1]}{[cc.1]}[cl.1]\end{aligned}\right\} \quad (4^{**})$$

$$\left.[ll.3] = [ll.2] - \frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2]\right\} \quad (5^{**})$$

Nun wollen wir die Normalgleichungen (2) so aufgelöst denken, dass $x\ y\ z$ sich als lineare Funktionen der l zeigen, oder da es auf die Vorzeichen nicht ankommt, können wir auch $-x$, $-y$, $-z$ als lineare Funktionen der l darstellen:

$$\left.\begin{aligned}-x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4\\ -y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4\\ -z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Hievon betrachten wir zuerst die dritte Gleichung, nämlich diejenige für z und wenden darauf das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz von (9) und (11) S. 17 an, nämlich indem der mittlere Fehler der l mit m und der mittlere Fehler von z mit m_z bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}m_z^2 &= \gamma_1^2 m^2 + \gamma_2^2 m^2 + \gamma_3^2 m^2 + \gamma_4^2 m^2\\ m_z^2 &= (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2)\, m^2 = [\gamma\gamma]\, m^2\end{aligned} \quad (7)$$

oder dasselbe in Gewichtsform:

$$\frac{1}{p_z} = [\gamma\gamma] \quad (8)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun muss man andererseits auch z aus den Normalgleichungen (2) bestimmen, durch Elimination von x und y, was wir nach dem Verfahren der unbestimmten Coefficienten thun wollen, d. h. wir multiplizieren die Gleichungen (2) mit den zunächst noch unbestimmt gelassenen Coefficienten Q_1 , Q_2 , Q_3, wodurch wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} Q_1\,[a\,a]\,x + Q_1\,[a\,b]\,y + Q_1\,[a\,c]\,z + Q_1\,[a\,l] &= 0 \\ Q_2\,[a\,b]\,x + Q_2\,[b\,b]\,y + Q_2\,[b\,c]\,z + Q_2\,[b\,l] &= 0 \\ Q_3\,[a\,c]\,x + Q_3\,[b\,c]\,y + Q_3\,[c\,c]\,z + Q_3\,[c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Wenn man diese 3 Gleichungen addiert, so sollen x und y verschwinden und z soll den Coefficienten $= 1$ erhalten, d. h. es wird über die Coefficienten $Q_1\ Q_2\ Q_3$ so verfügt, dass wird:

$$\left.\begin{aligned} Q_1\,[a\,a] + Q_2\,[a\,b] + Q_3\,[a\,c] &= 0 \\ Q_1\,[a\,b] + Q_2\,[b\,b] + Q_3\,[b\,c] &= 0 \\ Q_1\,[a\,c] + Q_2\,[b\,c] + Q_3\,[c\,c] &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Damit giebt die Addition der 3 Gleichungen (9):

$$z + Q_1\,[a\,l] + Q_2\,[b\,l] + Q_3\,[c\,l] = 0 \tag{11}$$

Dieses wird mit der ursprünglichen Annahme, d. h. mit der dritten Gleichung von (6) verglichen, und dazu ist nötig, dass wir die Klammern $[a\,l]$, $[b\,l]$, $[c\,l]$ in (11) auflösen und alles nach $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ ordnen, d. h.:

$$\begin{aligned} z &+ Q_1\,(a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + a_3\,l_3 + a_4\,l_4) \\ &+ Q_2\,(b_1\,l_1 + b_2\,l_2 + b_3\,l_3 + b_4\,l_4) \\ &+ Q_3\,(c_1\,l_1 + c_2\,l_2 + c_3\,l_3 + c_4\,l_4) = 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} z + (Q_1\,a_1 + Q_2\,b_1 + Q_3\,c_1)\,l_1 + (Q_1\,a_2 + Q_2\,b_2 + Q_3\,c_2)\,l_2 \\ + (Q_1\,a_3 + Q_2\,b_3 + Q_3\,c_3)\,l_3 + (Q_1\,a_4 + Q_2\,b_4 + Q_3\,c_4)\,l_4 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Zur Vergleichung setzen wir die dritte Gleichung von (6) her, nämlich:

$$z + \gamma_1\,l_1 + \gamma_2\,l_2 + \gamma_3\,l_3 + \gamma_4\,l_4 = 0$$

Dieses mit (12) verglichen giebt:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= Q_1\,a_1 + Q_2\,b_1 + Q_3\,c_1 \\ \gamma_2 &= Q_1\,a_2 + Q_2\,b_2 + Q_3\,c_2 \\ \gamma_3 &= Q_1\,a_3 + Q_2\,b_3 + Q_3\,c_3 \\ \gamma_4 &= Q_1\,a_4 + Q_2\,b_4 + Q_3\,c_4 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ und berücksichtigt (10), so erhält man:

$$[a\,\gamma] = [a\,a]\,Q_1 + [a\,b]\,Q_2 + [a\,c]\,Q_3 = 0 \tag{14 a}$$

Macht man dasselbe auch mit b und mit c, so bekommt man auch:

$$[b\,\gamma] = [a\,b]\,Q_1 + [b\,b]\,Q_2 + [b\,c]\,Q_3 = 0 \tag{14 b}$$

$$[c\,\gamma] = [a\,c]\,Q_1 + [b\,c]\,Q_2 + [c\,c]\,Q_3 = 1 \tag{14 c}$$

Diese 3 Gleichungen $[a\,\gamma] = 0$, $[b\,\gamma] = 0$, $[c\,\gamma] = 1$ sind erhalten worden bei der Elimination von x und y, d. h. bei der Bestimmung von z; würde man die Elimination umstellen (wobei auch wieder andere Coefficienten Q aufträten), so würde man analoge Gleichungen erhalten und die Gesamtheit aller solcher Formeln ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{[a\,\alpha] = 1} & [b\,\alpha] = 0 & [c\,\alpha] = 0 \\ [a\,\beta] = 0 & \underline{[b\,\beta] = 1} & [c\,\beta] = 0 \\ [a\,\gamma] = 0 & [b\,\gamma] = 0 & \underline{[c\,\gamma] = 1} \end{array}\right\} \tag{15}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir gehen einen Schritt weiter, und multiplizieren die Gleichungen (13) der Reihe nach mit $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$, das giebt:

$$[\alpha\,\gamma] = Q_1\,[a\,\alpha] + Q_2\,[b\,\alpha] + Q_3\,[c\,\alpha]$$

d. h. wegen (15): $$[\alpha\,\gamma] = Q_1 \qquad (16\,a)$$

Auf ähnlichem Wege, nämlich, wenn man die Gleichungen (13) mit $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4$ und dann auch noch mit $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4$ multipliziert und addiert, erhält man auch:

$$[\beta\,\gamma] = Q_2 \qquad [\gamma\,\gamma] = Q_3 \qquad (16\,b \text{ u. } 16\,c)$$

Setzt man diese (16) in (11), so erhält man:

$$-z = [\alpha\,\gamma]\,[a\,l] + [\beta\,\gamma]\,[b\,l] + [\gamma\,\gamma]\,[c\,l] \qquad (17)$$

Setzt man diese (16) auch in (10), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ [a\,b]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,b]\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] + [c\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Bei diesen Gleichungen (17) und (18) ist die dritte Unbekannte z bevorzugt; durch cyklische Vertauschung erhält man aus (17) und (18) das vollständige System:

Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} -x &= [\alpha\,\alpha]\,[a\,l] + [\alpha\,\beta]\,[b\,l] + [\alpha\,\gamma]\,[c\,l] \\ -y &= [\alpha\,\beta]\,[a\,l] + [\beta\,\beta]\,[b\,l] + [\beta\,\gamma]\,[c\,l] \\ -z &= [\alpha\,\gamma]\,[a\,l] + [\beta\,\gamma]\,[b\,l] + [\gamma\,\gamma]\,[c\,l] \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Gewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] &= 1 \qquad [a\,a]\,[\alpha\,\beta] + [a\,b]\,[\beta\,\beta] + [a\,c]\,[\beta\,\gamma] = 0 \\ [a\,b]\,[\alpha\,\alpha] + [b\,b]\,[\alpha\,\beta] + [b\,c]\,[\alpha\,\gamma] &= 0 \qquad [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [b\,b]\,[\beta\,\beta] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] = 1 \\ [a\,c]\,[\alpha\,\alpha] + [b\,c]\,[\alpha\,\beta] + [c\,c]\,[\alpha\,\gamma] &= 0 \qquad [a\,c]\,[\alpha\,\beta] + [b\,c]\,[\beta\,\beta] + [c\,c]\,[\beta\,\gamma] = 0 \\ [a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ [a\,b]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,b]\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] + [c\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Durch Auflösung der Gewichtsgleichungen (20) kann man alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. bestimmen, und zwar die nichtquadratischen, z. B. $[\alpha\,\beta]$ $[\beta\,\gamma]$ u. s. w. je doppelt, was als Rechenprobe dient.

Setzt man die so erhaltenen Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in (19), so hat man die sogenannte „unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen", d. h. die Entwicklung der $x\ y\ z$ als lineare Funktionen der Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ $[c\,l]$.

Die Gewichtsgleichungen (20) haben dieselben Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. wie die ursprünglichen Normalgleichungen (2); die Auflösung der Gewichtsgleichungen schliesst sich daher auch der Auflösung (2*) (3*) (4*) an.

Hiebei sind an Stelle der früheren $[a\,l]$, $[b\,l]$, $[c\,l]$ nun entweder -1 oder 0 getreten, und man wird bald finden, dass auch alle folgenden $[b\,l\,.\,1]$, $[c\,l\,.\,1]$, $[c\,l\,.\,2]$ nur -1 oder 0 werden können, z. B. die dritte Gruppe von (20) geht in Hinsicht auf die Absolutglieder dadurch aus (2*) hervor, dass man setzt

$$[a\,l] = 0 \qquad [b\,l] = 0 \qquad [c\,l] = -1$$

damit wird nach (3**) S. 88:

$$[b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l] = 0 - 0 = 0$$

$$[c\,l\,.\,1] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l] = -1 - 0 = -1$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auf diesem Wege bekommt man für die dritte Gruppe von (20) folgendes System, welches (3*) und (4*) S. 88 entspricht:

$$\left.\begin{aligned}\underline{[a\,a]\,[\alpha\,\gamma]} + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0\\ \underline{[b\,b]\,[\beta\,\gamma]} + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0\\ \underline{[c\,c]\,[\gamma\,\gamma]} &= 1\end{aligned}\right\} \quad (21\,a)$$

$$\left.\begin{aligned}\underline{[b\,b\,.\,1]\,[\beta\,\gamma]} + [b\,c\,.\,1]\,[\gamma\,\gamma] &= 0\\ \underline{[c\,c\,.\,1]\,[\gamma\,\gamma]} &= 1\end{aligned}\right\} \quad (21\,b)$$

$$[c\,c\,.\,2]\,[\gamma\,\gamma] = 1 \quad (21\,c)$$

Wir nehmen diese Schlussgleichung von (21 c) zusammen mit (8) und haben:

$$p_z = \frac{1}{[\gamma\,\gamma]} = [c\,c\,.\,2] \quad (22)$$

Dieses ist die Verallgemeinerung des Satzes, den wir in der Form $p_y = [b\,b\,.\,1]$ für 2 Unbekannte bereits in (8) § 17. S. 57 gehabt haben.

Da unsere Betrachtung zwar mit *drei* Elementen $x\ y\ z$ geführt, aber dem Gedanken nach nicht an *drei* gebunden ist, heisst dieser Satz nach (22) allgemein:

Wenn man die Normalgleichungen nach der Gauss'schen Methode allmählich reduziert, d. h. $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. bildet, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, so ist in dieser letzten Gleichung der Coefficient der Unbekannten zugleich das Gewicht der Unbekannten.

Diese Gewichtsbestimmungsmethode ist sehr gebräuchlich.

Um zur unabhängigen Bestimmung der Gewichte aller Unbekannten nach dieser Methode zu gelangen, muss man die Elimination wenigstens einmal vollständig umkehren, also etwa zuerst mit der Ordnung $x\ y\ z$ die Unbekannte z und p_z bestimmen, dann mit der Ordnung $z\ y\ x$ die Bestimmung von x und p_x vornehmen, worauf y nebst p_y sich findet durch Umstellung, entweder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von x geblieben sind, oder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von z sich ergeben haben.

Man kann jedesmal hiebei auch einen nicht quadratischen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. gelegentlich mitbestimmen, denn wenn z. B. x eliminiert ist, so dass man hat:

$$\begin{aligned}\underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0\\ \underline{[c\,c\,.\,1]\,z} + [c\,l\,.\,1] &= 0\end{aligned}$$

so kann man auch rechnen:

$$[b\,c\,.\,2] = [b\,c\,.\,1] - \frac{[b\,b\,.\,1]\,[c\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]} = \frac{1}{[\beta\,\gamma]} \quad (23)$$

Man beweist dieses gerade so, wie (22) bewiesen wurde, d. h. man betrachtet $[\beta\,\gamma]$ als denjenigen speziellen Wert von z, welcher in (19) entsteht, wenn $[a\,l] = 0$, $[b\,l] = -1$ und $[c\,l] = 0$ gesetzt wird.

Man könnte in dieser Weise durch mehrfaches Umstellen der Eliminationsordnung alle Gewichts-Coefficienten nach und nach finden, und bei nur 2 oder 3 Unbekannten macht sich unter Umständen das ganz bequem.

Bei 2 Unbekannten ist überhaupt alles einfach, wie in dem Beispiel § 20. S. 65 gezeigt ist.

Bei 3 Unbekannten kann man so verfahren:

1) $a\ \ b\ \ c$ / $b\ \ c$ / c — giebt z und $[\gamma\,\gamma]$ nebst $[\beta\,\gamma]$.

2) $c\ \ b\ \ a$ / $b\ \ a$ / a — giebt x und $[\alpha\,\alpha]$ nebst $[\alpha\,\beta]$.

Nun muss man jedenfalls noch einmal umstellen, um y und $[\beta\,\beta]$ zu erhalten; also:

3) $c\ \ b$ / b — giebt y und $[\beta\,\beta]$ nebst $[\beta\,\gamma]$.

oder

4) $a\ \ b$ / b — giebt y und $[\beta\,\beta]$ nebst $[\alpha\,\beta]$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Da man mit 1) , 2) und 3) bereits alle Unbekannten und deren Gewichte hat, kann man statt noch 4) zu bilden, für den letzten noch fehlenden Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ auch die erste der Gleichungen (20) selbst zu Hilfe nehmen.

Bei mehr als 3 Unbekannten ist aber das Verfahren der Gleichung (23) höchstens dann zu empfehlen, wenn man nur *einzelne* der Coefficienten $[\beta\,\gamma]$ etc. braucht, nach denen man dann die Eliminationsordnung einrichten kann. Braucht man alle Gewichts-Coefficienten, (was z. B. bei der Bessel'schen Triangulationsausgleichung der Fall ist), so kann man nicht ohne die allgemeinen Gewichtsgleichungen (20) bzw. (21) auskommen, deren gemeinsame Auflösung wir in § 33. besonders behandeln werden.

§ 29. Gewicht einer Funktion der $x\ y\ z$ nach der Ausgleichung.

Wir betrachten die lineare Funktion:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z \tag{1}$$

Das Gewicht von F kann man aus den *Einzel*gewichten der gemeinsam ausgeglichenen Elemente $x\ y\ z$ nicht unmittelbar bestimmen, weil die Gewichte der $x\ y\ z$ nicht unabhängig sind, man muss vielmehr, wie im Fall von § 17., auf die Beobachtungen selbst zurückgreifen, und F als Funktion derselben darstellen.

Wir benützen wieder die Gleichungen (6) § 28. S. 88:

$$\left.\begin{aligned} -x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Setzt man diese Werte in (1), so erhält man:

$$-F = \left\{\begin{aligned} &+(f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)\, l_1 \\ &+(f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)\, l_2 \\ &+(f_1\alpha_3 + f_2\beta_3 + f_3\gamma_3)\, l_3 \\ &+(f_1\alpha_4 + f_2\beta_4 + f_3\gamma_4)\, l_4 \end{aligned}\right\}$$

Da die l bei Gewichtsberechnungen als unmittelbare Beobachtungen gelten, erhält man das Gewicht P nach dem allgemeinen Gesetze der Fehlerfortpflanzung, ebenso wie bei (7) und (8) des vorhergehenden § 28. S. 88:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} &(f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)^2 \\ &+(f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

oder mit Ausführung der Quadrate:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} &f_1 f_1 [\alpha\,\alpha] + 2 f_1 f_2 [\alpha\,\beta] + 2 f_1 f_3 [\alpha\,\gamma] \\ &\qquad + f_2 f_2 [\beta\,\beta] + 2 f_2 f_3 [\beta\,\gamma] \\ &\qquad\qquad + f_3 f_3 [\gamma\,\gamma] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Gleichung (3) kann man auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} &= f_1 (f_1 [\alpha\,\alpha] + f_2 [\alpha\,\beta] + f_3 [\alpha\,\gamma]) \\ &+ f_2 (f_1 [\alpha\,\beta] + f_2 [\beta\,\beta] + f_3 [\beta\,\gamma]) \\ &+ f_3 (f_1 [\alpha\,\gamma] + f_2 [\beta\,\gamma] + f_3 [\gamma\,\gamma]) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit Ordnung nach Vertikal-Reihen und mit Zusammenfassung der Coefficienten von $f_1\ f_2\ f_3$:

$$\frac{1}{P} = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 = [q\,f] \tag{5}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wo $q_1\ q_2\ q_3$ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= [\alpha\,\alpha]\,f_1 + [\alpha\,\beta]\,f_2 + [\alpha\,\gamma]\,f_3 \\ q_2 &= [\alpha\,\beta]\,f_1 + [\beta\,\beta]\,f_2 + [\beta\,\gamma]\,f_3 \\ q_3 &= [\alpha\,\gamma]\,f_1 + [\beta\,\gamma]\,f_2 + [\gamma\,\gamma]\,f_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Nun wird sich zeigen, dass die Gleichung besteht:

$$[a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 = f_1 \tag{7}$$

denn die Ausführung dieser Funktion nach (6) giebt:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 = {} & ([a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [a\,c]\,[\alpha\,\gamma])\,f_1 \\ & ([a\,a]\,[\alpha\,\beta] + [a\,b]\,[\beta\,\beta] + [a\,c]\,[\beta\,\gamma])\,f_2 \\ & ([a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma])\,f_3 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die hier auftretenden Coefficienten $([a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + \ldots)$ sind aber teils $= 1$, teils $= 0$, wie im vorigen § 28. (20) S. 90 gezeigt wurde. Die Entwicklung (8) giebt also in der That die sehr einfache Beziehung (7), und indem wir dieselbe Betrachtung auch auf f_2 und f_3 ausdehnen, haben wir entsprechend (7) das ganze System:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 &= f_1 \\ [a\,b]\,q_1 + [b\,b]\,q_2 + [b\,c]\,q_3 &= f_2 \\ [a\,c]\,q_1 + [b\,c]\,q_2 + [c\,c]\,q_3 &= f_3 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Das sind Gleichungen von derselben Form, wie die ursprünglichen Normalgleichungen, man kann sie daher auch ebenso wie jene weiter behandeln:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]}\,q_1 + [a\,b]\,q_2 \quad + [a\,c]\,q_3 \quad - f_1 &= 0 \\ \underline{[b\,b]}\,q_2 \quad + [b\,c]\,q_3 \quad - f_2 &= 0 \\ \underline{[c\,c]}\,q_3 \quad - f_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{[b\,b\,.\,1]}\,q_2 + [b\,c\,.\,1]\,q_3 - [f_2\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,q_3 - [f_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10b}$$

$$[c\,c\,.\,2]\,q_3 - [f_3\,.\,2] = 0 \tag{10c}$$

Die Schlussglieder haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} [f_2\,.\,1] &= f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,f_1 \qquad [f_3\,.\,1] = f_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,f_1 \\ & [f_3\,.\,2] = [f_3\,.\,1] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[f_2\,.\,1] \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Diese Schlussglieder kann man der gewöhnlichen Elimination (2*) bis (5) § 28. S. 88 anhängen.

Denkt man sich aus den Gleichungen (9) und (10) die $q_1\ q_2\ q_3$ numerisch bestimmt, und in (5) eingesetzt, so hat man den gesuchten Wert $\frac{1}{P}$.

Hieran schliesst sich aber ein noch einfacheres Verfahren an: Man setze die durch (9) bestimmten $f_1\ f_2\ f_3$ in (5), und erhält damit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = [a\,a]\,q_1^2 + 2\,[a\,b]\,q_1\,q_2 + 2\,[a\,c]\,q_1\,q_3 \\ + \quad [b\,b]\,q_2^2 \quad + 2\,[b\,c]\,q_2\,q_3 \\ + \quad [c\,c]\,q_3^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auf diesen Ausdruck (12) kann man die allgemeine Entwicklung (20) § 27. S. 87 anwenden, nämlich:

$$\frac{1}{P} = \frac{([a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3)^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,q_2 + [b\,c\,.\,1]\,q_3)^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{([c\,c\,.\,2]\,q_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung von (10 a), (10 b), (10 c) giebt dieses:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{13}$$

Dieses ist theoretisch die übersichtlichste Formel für das Funktionsgewicht.

Ob man im einzelnen Falle numerisch hiernach, d. h. nach (10 a), (10 b), (10 c) und (13) rechnen will, oder ob man die ursprünglichen Formeln (3) oder (5) anwenden will, wird von den Umständen abhängen.

§ 30. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Eine weiter abschweifende und daher zunächst zu übergehende Betrachtung bezieht sich noch auf das Gewicht einer Funktion von Funktionen der ausgeglichenen x, y, z. Später bei der Fehler-Ellipse kann davon Gebrauch gemacht werden.

Man habe zwei Funktionen:

$$X = f_1\,x + f_2\,y + f_3\,z \qquad Y = f_1'\,x + f_2'\,y + f_3'\,z \tag{1}$$

Diese zwei Funktionen sollen nach dem vorigen § 29. (13) (s. oben) behandelt worden sein, und haben folgende Gewichte erhalten:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \qquad \frac{1}{P_y} = \frac{f_1'^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2'\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3'\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} \tag{2}$$

Nun stellt man noch eine Funktion von X und von Y auf:

$$(F) = r\,X + r'\,Y \tag{3}$$

deren Gewicht ebenfalls bestimmt werden soll.

Hiezu hat man jedenfalls den Weg, dass man vermöge (1) und (3), (F) in x und y ausdrückt und eine Funktion der x und y herstellt, nämlich:

$$(F) = (r\,f_1 + r'\,f_1')\,x + (r\,f_2 + r'\,f_2')\,y + (r\,f_3 + r'\,f_3')\,z \tag{4}$$

Das Gewicht dieser Funktion von x, y und z ist bestimmt durch:

$$\frac{1}{(P)} = \frac{(r\,f_1 + r'\,f_1')^2}{[a\,a]} + \frac{[(r\,f_2 + r'\,f_2')\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[(r\,f_3 + r'\,f_3')\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Ausser diesem unmittelbar sich darbietenden Wege zur Berechnung des Gewichtes (P) der Funktion (3) giebt es aber noch einen zweiten Weg durch Vermittlung der Gewichte P_x und P_y, welche man nach (2) schon hat.

Wir betrachten die Bestandteile von (2) und (5) nach dem Entstehungsgesetz (11) § 29. S. 93:

$$f_1 = f_1 \qquad f_1' = f_1'$$

$$[f_2\,.\,1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}f_1 \qquad [f_2'\,.\,1] = f_2' - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}f_1'$$

$$[f_3\,.\,2] = f_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}f_1 - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[f_2\,.\,1] \qquad [f_3'\,.\,2] = f_3' - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}f_1' - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[f_2\,.\,1]$$

$$r\,f_1 + r'\,f_1' = r\,f_1 + r_1'\,f_1'$$

$$[(r\,f_2 + r'\,f_2')\,.\,1] = (r\,f_2 + r'\,f_2') - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(r\,f_1 + r'\,f_1')$$

$$[(r\,f_3 + r'\,f_3')\,.\,2] = (r\,f_3 + r'\,f_3') - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}(r\,f_2 + r'\,f_2') - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[(r\,f_2 + r'\,f_2')\,.\,1]$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Man hat also die sehr einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} r f_1 + r' f_1' \qquad\quad = r f_1 + r' f_1' \\ [(r f_2 + r' f_2') \,.\, 1] = r\,[f_2 \,.\, 1] + r'\,[f_2' \,.\, 1] \\ [(r f_3 + r' f_3') \,.\, 2] = r\,[f_3 \,.\, 2] + r'\,[f_3' \,.\, 2] \end{array}\right\} \tag{6}$$

Setzt man dieses in (5) ein und quadriert, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{(P)} = r^2 \left\{ \dfrac{f_1^2}{[a\,a]} + \dfrac{[f_2' \,.\, 1]^2}{[b\,b \,.\, 1]} + \dfrac{[f_3' \,.\, 2]^2}{[c\,c \,.\, 2]} \right\} \\ \quad + r'^2 \left\{ \dfrac{f_1^2}{[a\,a]} + \dfrac{[f_2' \,.\, 1]^2}{[b\,b \,.\, 1]} + \dfrac{[f_3' \,.\, 2]^2}{[c\,c \,.\, 2]} \right\} \\ \quad + 2\,r\,r' \left\{ \dfrac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \dfrac{[f_2 \,.\, 1]\,[f_2' \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]} + \dfrac{[f_3 \,.\, 2]\,[f_3' \,.\, 2]}{[c\,c \,.\, 2]} \right\} \end{array}\right\} \tag{7}$$

oder:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + r'^2 \frac{1}{P_y} + 2\,r\,r' \frac{1}{P_{xy}} \tag{8}$$

Dabei haben $\frac{1}{P_x}$ und $\frac{1}{P_y}$ die bereits in (2) angegebenen Bedeutungen, und $\frac{1}{P_{xy}}$ lässt sich aus (7) leicht ableiten:

$$\frac{1}{P_{xy}} = \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 \,.\, 1]\,[f_2' \,.\, 1]}{[b\,b \,.\, 1]} + \frac{[f_3 \,.\, 2]\,[f_3' \,.\, 2]}{[c\,c \,.\, 2]} \tag{9}$$

In Worten kann man dieses so ausdrücken:

Wenn für zwei Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in den Formeln (2) bestimmt sind, und wenn es sich dann abermals um eine Funktion (F) von den Funktionen X und Y handelt, so braucht man das Gewicht (P) von (F) nicht von Neuem zu berechnen, sondern man kann es nach (9) und (8) aus den schon berechneten Gewichten P_x und P_y ableiten.

Wir werden bei der Fehlerellipse von diesem Satze Gebrauch machen, und zwar mit der Vereinfachung:

$$(F) = X + Y, \text{ d. h. } r = r' = 1. \tag{10}$$

Hiefür kann man das vorstehende in folgende Regel fassen:

Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{P_x} = [\alpha\,\alpha] = \dfrac{A_0 A_0}{[a\,a]} + \dfrac{A_1 A_1}{[b\,b \,.\, 1]} + \dfrac{A_2 A_2}{[c\,c \,.\, 2]} + \cdots \\ \dfrac{1}{P_y} = [\beta\,\beta] = \dfrac{B_0 B_0}{[a\,a]} + \dfrac{B_1 B_1}{[b\,b \,.\, 1]} + \dfrac{B_2 B_2}{[c\,c \,.\, 2]} + \cdots \\ \text{dann berechnet man:} \quad [\alpha\,\beta] = \dfrac{A_0 B_0}{[a\,a]} + \dfrac{A_1 B_1}{[b\,b \,.\, 1]} + \dfrac{A_2 B_2}{[c\,c \,.\, 2]} + \cdots \end{array}\right\} \tag{11}$$

und damit ist: $\dfrac{1}{(P)} = [\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] + 2\,[\alpha\,\beta]$.

§ 31. Partielle Elimination.

Auch die Theorie der partiellen Elimination ist nicht ein wesentlicher Bestandteil unseres Entwicklungsganges, die partielle Elimination mag aber später von Nutzen sein.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zunächst wollen wir die Entwicklungen von § 26. zum Teil wiederholen und zusammenfassen:

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = a_n x + b_n y + c_n z + l_n \end{array} \right\} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Anzahl} = u.} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\text{Anzahl} = u \left\{ \begin{array}{r} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Erstmals reduzierte Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{Anzahl} \\ = u - 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underline{[b\,b\,.\,1]}\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,z + [c\,l\,.\,1] = 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,1]} \end{array} \right. \text{ oder } \left. \begin{array}{r} \underline{[b'\,b']}\,y + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0 \\ \underline{[c'\,c']}\,z + [c'\,l'] = 0 \\ \underline{[l'\,l']} \end{array} \right\} \tag{3}$$

Hiebei ist:

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \tag{4}$$

Auf das System (3) kann man auch dadurch kommen, dass man n reduzierte (fingierte) Fehlergleichungen schreibt:

Reduzierte Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = b_1'\,y + c_1'\,z + l_1' \\ v_2 = b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = b_n'\,y + c_n'\,z + l_n \end{array} \right\} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{Anzahl} = u - 1} \tag{5}$$

Alles dieses in Worte gefasst, giebt den Satz:

Wenn man statt der n Fehlergleichungen (1) die n reduzierten Fehlergleichungen (5) anschreibt, und aus denselben mit gleichen Gewichten wie bei (1), in üblicher Weise Normalgleichungen (3) bildet, so erhält man daraus dieselben Unbekannten y und z, und auch alle Gewichte und mittleren Fehler gerade so wie aus den ursprünglichen Fehlergleichungen (1). Man muss jedoch bei der Berechnung des mittleren Fehlerquadrats

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n - u} \tag{6}$$

im Nenner $n - u$ in der Zahl u der Unbekannten das zuerst eliminierte x mitzählen, oder man darf in (6) nicht etwa den Nenner $= n - (u - 1)$ nach (5) nehmen.

Man kann aus dem Vorstehenden auch noch folgenden, allgemein gültigen Satz ableiten:

Wenn man eine Unbekannte x bereits in den Fehlergleichungen, mit Hilfe der Beziehungen (4) eliminiert, und damit reduzierte Fehlergleichungen (5) aufstellt, so

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

bekommt man daraus *dasselbe* Normalgleichungssystem (3), welches man auf dem gewöhnlichen Weg durch Elimination von x aus den Normalgleichungen erhalten haben würde.

Wir betrachten noch folgenden Fall:

Fehlergleichungen:	*Normalgleichungen:*	
$v_1 = c_1 z \ldots + a_1 x + b_1 y + l_1$	$\underline{[c\,c]}\,z + [c\,a]\,x + [c\,b]\,y + [c\,l] = 0$	
$v_2 = c_2 z \ldots + a_2 x + b_2 y + l_2$	$\underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0$	(7)
. . . . .	$\underline{[b\,b]}\,y + [b\,l] = 0$	
$v_n = c_n z \ldots + a_n x + b_n y + l_n$	$\underline{[l\,l]}$	

Eine zweite Gruppe von Beobachtungen gebe:

$v_{n+1} = \ldots d_{n+1} t + a_{n+1} x + b_{n+1} y + l_{n+1}$	$\underline{(d\,d)}\,t + (d\,a)\,x + (d\,b)\,y + (d\,l) = 0$	
$v_{n+2} = \ldots d_{n+2} t + a_{n+2} x + b_{n+2} y + l_{n+2}$	$\underline{(a\,a)}\,x + (a\,b)\,y + (a\,l) = 0$	(8)
. . . . .	$\underline{(b\,b)}\,y + (b\,l) = 0$	
	$\underline{(l\,l)}$	

Die Unbekannten x und y kommen in beiden Gruppen vor, dagegen z nur in der ersten, t nur in der zweiten Gruppe.

Nun soll z aus den Normalgleichungen von (7), und t aus den Normalgleichungen von (8) eliminiert werden. Dieses giebt:

$$\text{aus (7):} \qquad [a\,a\,.\,1]\,x + [a\,b\,.\,1]\,y + [a\,l\,.\,1] = 0 \tag{9}$$

. . . . . .

$$\text{aus (8):} \qquad (a\,a\,.\,1)\,x + (a\,b\,.\,1)\,y + (a\,l\,.\,1) = 0 \tag{10}$$

. . . . . .

Diese beiden Gleichungen nehmen wir so zusammen:

$$([a\,a\,.\,1] + (a\,a\,.\,1))\,x + ([a\,b\,.\,1] + (a\,b\,.\,1))\,y + ([a\,l\,.\,1] + (a\,l\,.\,1)) = 0 \tag{11}$$

. . . . . .

Dieses ist genau dieselbe erste Normalgleichung, welche man bekommen haben würde, wenn man aus allen Fehlergleichungen von (7) und (8) *zusammen* genommen Normalgleichungen gebildet und daraus z und t eliminiert hätte.

Um dieses zu beweisen, bilden wir das Gesamtnormalgleichungssystem für die Fehlergleichungen (7) und (8) unmittelbar:

$$\begin{aligned}
&\underline{[c\,c]}\,z \ldots + [c\,a]\,x + [c\,b]\,y + [c\,l] = 0\\
&(d\,d)\,t + (d\,a)\,x + (d\,b)\,y + (d\,l) = 0\\
&([a\,a] + (a\,a))\,x + ([a\,b] + (a\,b))\,y + ([a\,l] + (a\,l)) = 0\\
&\qquad\qquad \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}$$

erstmals reduziert:

$$\left((d\,d) - \frac{0}{[c\,c]}\,0\right)t + \left((d\,a) - \frac{0}{[c\,c]}\,[c\,a]\right)x + \ldots$$

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}\,[c\,a]\right)x + \ldots$$

nochmals reduziert:

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}\,[c\,a] - \frac{(d\,a)}{(d\,d)}\,(d\,a)\right)x + \ldots \tag{12}$$

Der Coefficient von x in (11) enthält in der That dieselben Bestandteile wie der Coefficient von x in (12), und da es mit allen anderen Coefficienten sich ähnlich verhält, so ist damit der bei (11) ausgesprochene Satz bewiesen.

Nun kann man auch noch einen Schritt weiter gehen, und mittelst des bei (5) bewiesenen Satzes über reduzierte Fehlergleichungen zu dem Schluss kommen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn einzelne Unbekannte z und t wie bei (7) und (8) nur in einem *Teil* der Fehlergleichungen vorkommen, so darf man für diese Partialgruppen von Fehlergleichungen reduzierte Fehlergleichungen von der Form (5) bilden und dann mit der Gesamtheit aller reduzierten Fehlergleichungen weiterrechnen, wie wenn es Originalfehlergleichungen wären.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers sind jedoch die anfänglich eliminierten Unbekannten (z und t) in der Zahl u aller Unbekannten mitzuzählen.

§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder.

Die allmähliche Elimination, welche wir in § 25. durch die Gleichungen (4)—(7) S. 81 und durch das Zahlenbeispiel S. 82 gelehrt haben, reicht immer aus, und da man dabei Schritt für Schritt Summenproben hat, ist jenes Verfahren sehr gut. Indessen, nach Erlangung einer gewissen Übung im Ausrechnen der $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. kann man auch die Elimination mehr auf einmal machen, wie wir nun zeigen wollen:

Wir haben in § 25. S. 81 angenommen, dass die Endgleichungen von den Normalgleichungen durch Vermittlung der allmählich reduzierten Gleichungen (4) (5) (6) S. 81 erlangt werden. Obgleich alle hiebei vorkommenden Beträge von der Form $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$ u. s. w. jedenfalls ausgerechnet werden müssen, kann man doch wenigstens das allmähliche Zusammensetzen dieser Beträge ersparen und durch eine Gesamtsummierung ersetzen, so dass von den Gleichungen (4) und (5) § 25. S. 81 immer nur die erste jeder Gruppe gebildet wird.

In gleicher Weise, wie $[l\,l\,.\,3]$ in (8) § 27. S. 85 in seine Bestandteile rückwärts zerlegt wurde, kann man dieses mit allen anderen Coefficienten thun, so zeigt z. B. ein Blick auf (4**) und (5**) § 28. S. 88:

$$[c\,l\,.\,2] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \qquad (1)$$

und nach diesem Beispiel ist folgendes Schema für 4 Unbekannte gebildet:

A	$[a\,a]$	$[a\,b]$	$[a\,c]$	$[a\,d]$	$[a\,l]$
	a_2	$[b\,b]$	$[b\,c]$	$[b\,d]$	$[b\,l]$
	α_1	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$
	B'	$[b\,b\,.\,1]$	$[b\,c\,.\,1]$	$[b\,d\,.\,1]$	$[b\,l\,.\,1]$
		a_3	$[c\,c]$	$[c\,d]$	$[c\,l]$
		α_2	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l]$
		β_1	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
		C''	$[c\,c\,.\,2]$	$[c\,d\,.\,2]$	$[c\,l\,.\,2]$
			a_4	$[d\,d]$	$[d\,l]$
			α_3	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,l]$
			β_2	$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
			γ_1	$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,d\,.\,2]$	$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,l\,.\,2]$
			D'''	$[d\,d\,.\,3]$	$[d\,l\,.\,3]$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach diesem Schema ist im Folgenden das Zahlenbeispiel von § 25. S. 82 von 4 Gleichungen, nebst Summenproben und Fehlersummengliedern $[l\,l]$ u. s. w. nochmals behandelt, und zwar sind alle Beträge $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w. mit dem Rechenschieber berechnet, so dass keine Zahl mehr zu schreiben war, als hier hergesetzt ist.

	$\frac{x}{a}$	$\frac{y}{b}$	$\frac{z}{c}$	$\frac{t}{d}$	l	s	Probe
A	+ 459	− 308	− 389	+ 244	− 507	+ 501	
		+ 464	+ 408	− 269	+ 695	− 990	
		− 208	− 262	+ 164	− 341	+ 337	
	B'	+ 256	+ 146	− 105	+ 354	− 653	− 2
			+ 676	− 331	+ 653	−1017	
			− 330	+ 207	− 430	+ 425	
			− 83	+ 60	− 202	+ 373	
		C''	+ 263	− 64	+ 21	− 219	+ 1
				+ 469	− 283	+ 170	
				− 130	+ 270	− 267	
				− 43	+ 145	− 268	
				− 15	+ 5	− 53	
$t = -\frac{+137}{+281} = -0{,}486$			D'''	+ 281	+ 137	− 418	0
					+1129	−1687	
					− 560	+ 554	
					− 490	+ 902	
					− 2	+ 17	
					− 66	+ 203	
					+ 11	− 11	0

Die zwischen Horizontallinien stehenden Zahlen geben das Endgleichungssystem (10) § 25. S. 81.

Ob durch die vorstehende Eliminations-Anordnung ein rechnerischer Gewinn im Vergleich mit § 25. S. 82 erzielt wird, kommt namentlich auf die Zahl der Unbekannten an. Bei wenigen Unbekannten ist es nicht der Fall, dagegen bei zahlreichen Unbekannten ist diese Anordnung nützlich, wenn die Additionen mit wechselnden Zeichen bequem eingerichtet werden.

Diese Anordnung ist bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch (mit Logarithmen), jedoch durchaus mit Subtraktion in Form von dekadischen Ergänzungen, so dass der Schluss obiger Tabelle so geschrieben wird:

+ 1129	× 8313
× 9440	554
× 9510	902
× 9998	17
× 9934	203
40011	× 9989
= 11	= −11

Das kleine schiefe Kreuz × ist dabei Zeichen für dekadische Ergänzung, zum Beispiel: × 8313 = 8313 − 10000 = − 1687.

(Anmerkung. Die obenstehende Elimination, ebenso wie S. 82, ist nur mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht, weshalb die letzte Stelle nicht überall scharf ist.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 33. Gemeinsame Bestimmung aller Unbekannten $x\ y\ z\ \ldots$ und aller Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w.

Im Anschluss an das Vorhergehende haben wir noch ein, für gewöhnliche Zwecke nicht erforderliches, Verfahren gebildet, nach welchem *alle* Unbekannte $x\ y\ z\ldots$ auf *ein*mal erhalten werden.

Wir nehmen die Endgleichungen (9) § 25. S. 81 nochmals vor:

Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rl} A &= [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ B' &= [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,d\,.\,1]\,t + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ C'' &= [c\,c\,.\,2]\,z + [c\,d\,.\,2]\,t + [c\,l\,.\,2] = 0 \\ D''' &= [d\,d\,.\,3]\,t + [d\,l\,.\,3] = 0 \\ & [l\,l\,.\,4] = [v\,v] \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z, und so fort aus der 2ten und 1ten Gleichung auch y und x. Dieses ist ein Verfahren, welches numerisch häufig angewendet wird.

Nun kann man aber die fragliche Rückwärtssubstitution auch allgemein algebraisch ausführen, worauf sich ein übersichtliches Schema zur numerischen Rechnung gründen lassen wird.

Wenn man ausser den bereits bei (1) vorkommenden Klammern $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. noch einige andere ähnlich gebaute Coefficienten einführt, welche wir im Folgenden durch *runde* Klammern $(a\,c\,.\,1)$ u. s. w. von den früheren unterscheiden wollen, so bekommt man folgendes Gleichungssystem, von dessen Richtigkeit man sich am besten rückwärts dadurch überzeugt, dass man die Ausdrücke (3) in (2) einsetzt, und die Resultate mit (1) vergleicht.

$$\left.\begin{array}{rl} -[a\,a]\,x &= [a\,l] - \dfrac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2}[a\,c\,.\,1] - \dfrac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]}(a\,d\,.\,2) \\ -[b\,b\,.\,1]\,y &= [b\,l\,.\,1] - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[b\,c\,.\,1] - \dfrac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]}(b\,d\,.\,2) \\ -[c\,c\,.\,2]\,z &= [c\,l\,.\,2] - \dfrac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]}[c\,d\,.\,2] \\ -[d\,d\,.\,3]\,t &= [d\,l\,.\,3] \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dabei haben die neu eingeführten, durch runde Klammern unterschiedenen Coefficienten folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{array}{l} (a\,c\,.\,1) = [a\,c] - \dfrac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] \\ (a\,d\,.\,1) = [a\,d] - \dfrac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] \\ (a\,l\,.\,1) = [a\,l] - \dfrac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} (a\,d\,.\,2) = (a\,d\,.\,1) - \dfrac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}(a\,c\,.\,1)\ ,\quad (b\,d\,.\,2) = [b\,d\,.\,1] - \dfrac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[b\,c\,.\,1] \\ (a\,l\,.\,2) = (a\,l\,.\,1) - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}(a\,c\,.\,1)\ ,\quad (b\,l\,.\,2) = [b\,l\,.\,1] - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[b\,c\,.\,1] \end{array}\right\} \quad (4)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir fahren nun noch weiter fort, und setzen:

$$(al.3)=(al.2)-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}(ad.2),\ (bl.3)=(bl.2)-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}(bd.2),\ (cl.3)=[cl.2]-\frac{[dl.3]}{[dd.3]}[cd.2] \quad (5)$$

und damit kann man $x\ y\ z\ t$ kurz so ausdrücken:

$$x=-\frac{(al.3)}{[aa]} \qquad y=-\frac{(bl.3)}{[bb.1]} \qquad z=-\frac{(cl.3)}{[cc.2]} \qquad t=-\frac{[dl.3]}{[dd.3]} \quad (6)$$

Es würde wenig Wert haben, alle diese Formeln aufzustellen, wenn es nicht ein einfaches Schema gäbe, nach welchem dieselben mechanisch ausgerechnet werden können. Dieses ist aber der Fall, wie folgendes zeigt:

$[aa]_3$	$[ab]_0$	$[ac]_0$	$[ad]_0$	$[al]_0$						
	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$						
A		$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$						
			$[dd]$	$[dl]$						
				$[ll]$						
	$[bb.1]_3$	$[bc.1]_1$	$[bd.1]_1$	$[bl.1]_1$	$[ab]_0$					
B		$[cc.1]$	$[cd.1]$	$[cl.1]$	$[ac]_0$	B'				
			$[dd.1]$	$[dl.1]$	$[ad]_0$					
				$[ll.1]$	$[al]_0$					
		$[cc.2]_3$	$[cd.2]_2$	$[cl.2]_2$	$(ac.1)$	$[bc.1]_1$				
	C		$[dd.2]$	$[dl.2]$	$(ad.1)$	$[bd.1]_1$	C'			
				$[ll.2]$	$(al.1)$	$[bl.1]_1$				
			$[dd.3]_3$	$[dl.3]_3$	$(ad.2)$	$(bd.2)$	$[cd.2]_2$	D'		
	D			$[ll.3]$	$(al.2)$	$(bl.2)$	$[cl.2]_2$			
			L	$[ll.4]$	$(al.3)$	$(bl.3)$	$(cl.3)$	$[dl.3]_3$ Zähler	L'	
					$[aa]_3$	$[bb.1]_3$	$[cc.2]_3$	$[dd.3]_3$ Nenner		
					$-x$	$-y$	$-z$	$-t$ Quotient		

(7)

Folgendes ist der Gang der Rechnung:

1. Die Abteilung A wird mit den gegebenen Coefficienten ausgefüllt.
2. Die ganze Abteilung B wird in üblicher Weise berechnet nach der Regel:
   $[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$ u. s. w.
3. Man füllt die Abteilung B' aus durch Heruntersetzen der mit $_0$ bezeichneten Grössen von A.
4. Man berechnet C und die erste Columne von C' wieder ganz nach der alten Regel, welcher sich auch die drei neuen Grössen nach den früher angegebenen Formeln (3) anschliessen.
5. Man ergänzt die Abteilung C' durch Heruntersetzen der mit $_1$ bezeichneten Klammern von B.
6. Man bildet D nebst den zwei ersten Columnen von D' wieder nach der alten Regel, welche für $[ll.3]$ sowie $(al.2)$ u. s. w. *gemeinsam* ist [vgl. (4)].
7. Man setzt wieder die $[\ldots]_2$ von C nach D' hinunter.
8. L und die Zähler in L' werden wieder nach der alten Regel [s. o. (5)] gebildet.
9. Die Nenner $[\ldots]_3$ werden von $A\ B\ C\ D$ nach L' hinuntergesetzt.
10. Die Quotientenbildung in L ergiebt die Unbekannten nach den Formeln (6).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zahlenbeispiel mit 3 Unbekannten.

$$\left.\begin{array}{rrrrr} +\underline{17{,}50\,x} & -6{,}50\,y & -6{,}50\,z & -2{,}14 & =0 \\ & +\underline{17{,}50\,y} & -6{,}50\,z & -13{,}96 & =0 \\ & & +\underline{20{,}50\,z} & +5{,}40 & =0 \\ & & & +\underline{100{,}34} & \end{array}\right\} \quad (8)$$

a	b	c	l			
+ 17,50	− 6,50	− 6,50	− 2,14			
	+ 17,50	− 6,50	− 13,96			
	− 2,41	− 2,41	− 0,79			
		+ 20,50	+ 5,40			
		− 2,41	− 0,79			
			+100,34			
			− 0,26			
	+ 15,09	− 8,91	− 14,75	− 6,50*		
		+ 18,09	+ 4,61	− 6,50*		
		− 5,26	− 8,71	− 3,84		
			+100,08	− 2,14*		
			− 14,42	− 6,35		
		+ 12,83	− 4,10	− 10,34	− 8,91*	
			+ 85,66	− 8,49	− 14,75*	
			− 1,31	− 3,30	− 2,85	
			+ 84,35	− 11,79	− 17,60	− 4,10*
			= [v v]	− 17,50*	− 15,09*	− 12,83* neg.Nenner
				+ 0,67	+ 1,17	+ 0,32
				= x	= y	= z

(9)

Die Subtrahenden von der Form $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$ u. s. w. sind hier zur Unterscheidung mit *kleineren* Zahlen gedruckt; dieselben sind durchaus mit dem Rechenschieber berechnet.

Alle von links nach rechts hinüber gesetzten Zahlen sind rechts mit * bezeichnet.

Wenn es sich nun weiter darum handelt, auch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. zu bestimmen, so hat man nach (20) § 28. S. 90 an Stelle der Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ $[c\,l]$ die Werte − 1 0 0 zu setzen u. s. w., und die Elimination in den hierauf bezüglichen Teilen zu wiederholen, d. h. wir bekommen folgendes:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

a	b	c				
+ 17,50	— 6,50	— 6,50	— 1,00			
	+ 17,50	— 6,50	0,00			
	— 2,41	— 2,41	— 0,37			
		+ 20,50	0,00			
		— 2,41	— 0,37			
	+ 15,09	— 8,91	— 0,37	— 6,50*		
		+ 18,09	— 0,37	— 6,50*		
		— 5,26	— 0,22	— 3,84		
				— 1,00*		
				— 0,16		
		+ 12,83	— 0,59	— 10,34	— 8,91*	
				— 1,16	— 0,37*	
				— 0,48	— 0,41	
				— 1,64	— 0,78	— 0,59*
				— 17,50*	— 15,09*	— 12,83
				+ 0,094	+ 0,052	+ 0,046
				$= [\alpha\,\alpha]$	$= [\alpha\,\beta]$	$= [\alpha\,\gamma]$ (10)

b	c				
+ 15,09	— 8,91	— 1,00			
	+ 18,09	0,00			
	— 5,26	— 0,59			
	+ 12,83	— 0,59	— 8,91*		
			— 1,00*		
			— 0,41		
			— 1,41	— 0,59*	
			— 15,09	— 12,83	
			+ 0,093	+ 0,046	
			$= [\beta\,\beta]$	$= [\beta\,\gamma]$	(11)

c			
+ 12,83	— 1,00	— 1,00*	
		— 12,83*	
		+ 0,078	
		$= [\gamma\,\gamma]$	(12)

Anmerkung zur 4ten Spalte: Statt der Absolutglieder — 1,00 , — 1,00 , — 1,00 kann man auch — 10,00 , — 10,00 , — 10,00 schreiben, und dann bekommt man die 10fachen Werte von $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. Eine solche Maassänderung ist oft für die Schärfe der Rechnung nützlich.

Wir haben das Schema konsequent bis zu $[\gamma\,\gamma]$ fortgesetzt, obgleich die Reci-

proke von $[\gamma\gamma]$, nämlich 12,83, in der Form $[cc.2]$, schon in der Berechnung von $x\ y\ z$ bei (9) enthalten ist.

Damit haben wir *Alles* erhalten, was aus den Normalgleichungen (8) für irgend welche Ausgleichungszwecke überhaupt abzuleiten ist, nämlich in Zusammenstellung:

$$x = +0{,}67 \qquad y = +1{,}17 \qquad z = +0{,}32 \qquad [vv] = 84{,}34 \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{lll} [\alpha\alpha] = +0{,}094 & [\alpha\beta] = +0{,}052 & [\alpha\gamma] = +0{,}046 \\ & [\beta\beta] = +0{,}093 & [\beta\gamma] = +0{,}046 \\ & & [\gamma\gamma] = +0{,}078 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Beispiel mit 6 Unbekannten.

Um das im Vorstehenden beschriebene Verfahren auch noch an einem grösseren Beispiele zu erproben, haben wir 6 Normalgleichungen genommen, welche aus unserer 2. Auflage, 1877, S. 53—64 herstammen (Stationsausgleichung auf Kandel mit 7 Strahlen und 16 Winkeln), nämlich, ausführlich geschrieben:

	a	b	c	d	e	f	l
a	$+\underline{18\,x_1} + 13\,x_2 +$	$8\,x_3 +$	$8\,x_4 +$	$6\,x_5 +$	$5\,x_6 -$	$91{,}8 = 0$	
b	$+\overline{13\,x_1} + \underline{29\,x_2} +$	$12\,x_3 +$	$11\,x_4 +$	$7\,x_5 +$	$5\,x_6 -$	$95{,}4 = 0$	
c	$+\ 8\,x_1 + \overline{12\,x_2} +$	$\underline{27\,x_3} +$	$22\,x_4 +$	$12\,x_5 +$	$5\,x_6 -$	$118{,}9 = 0$	
d	$+\ 8\,x_1 + 11\,x_2 +$	$\overline{22\,x_3} +$	$\underline{31\,x_4} +$	$18\,x_5 +$	$5\,x_6 -$	$168{,}4 = 0$	
e	$+\ 6\,x_1 +\ 7\,x_2 +$	$12\,x_3 +$	$\overline{18\,x_4} +$	$\underline{22\,x_5} +$	$5\,x_6 -$	$139{,}4 = 0$	
f	$+\ 5\,x_1 +\ 5\,x_2 +$	$5\,x_3 +$	$5\,x_4 +$	$5\,x_5 +$	$\underline{8\,x_6} -$	$75{,}5 = 0$	
						$+\underline{1856{,}1} = [ll]$	

Diese 6 Gleichungen finden sich in der Tabelle auf S. 105 nach den 6 Unbekannten $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$ aufgelöst und dazu noch das Quadratsummen-Glied $[ll.6] = 499 = [vv]$ bestimmt.

Die Elimination von S. 105 ist mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht (nur ausnahmsweise, wenn bei den Gliedern mit l grössere Zahlen auftraten, ist mit anderen Mitteln ein wenig nachgeholfen). Es ist nicht *eine* Zahl oder Ziffer mehr erforderlich gewesen, als auf S. 105 geschrieben ist, und die Subtraktionen z. B. $29{,}0 - 9{,}4 = 19{,}6$ konnten alle leicht im Kopfe gemacht werden.

Es ist auch jede einzelne Linie durch eine Summenprobe versichert, deren Stimmen in der äussersten Spalte rechts ausgesetzt ist. Allerdings muss das Glied mit s am Schlusse jeder Linie rechts selbst durch eine kleine Nebenrechnung eingesetzt werden, wobei jedesmal das mit * bezeichnete von links oben herunter gesetzte Glied zum vorhergehenden Summengliede negativ zuzunehmen ist, z. B. $-19{,}0$ ist entstanden aus

$$(+18{,}4\ {}_{-24{,}4}) - 13{,}0^* = -\ 6{,}0 - 13{,}0 = -19{,}0$$

oder

$$(+32{,}9\ {}_{-15{,}0}) -\ 8{,}0^* = \ \ 17{,}9 -\ 8{,}0 = +\ 9{,}9$$

und *dann* erst kommt die gewöhnliche Quersummenprobe

$$+6{,}2 + 23{,}4 + 18{,}4 + 9{,}3 + 2{,}8 - 78{,}1 + 8{,}0 + 9{,}9 = -0{,}1.$$

Dieses $-0{,}1$, welches 0,0 sein sollte, ist in der letzten Spalte rechts hinausgesetzt um zu zeigen, wie die Linie gestimmt hat. Diese Probestimmungsglieder wachsen nach unten immer mehr an, schliesslich bis 0,5, was aus dem allmählichen Häufen der unvermeidlichen Abrundungsunsicherheiten zu erklären ist. Übrigens kann man bei der Rechnung selbst immer auch einen Blick auf diese Stimmungsglieder werfen und einen Teil davon dem Gliede s zulegen, was in unserem Falle geschehen ist,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

	a	b	c	d	e	f	l	$-s$	Probe
a	+ 18,0	+ 13,0	+ 8,0	+ 8,0	+ 6,0	+ 5,0	− 91,8	+ 33,8	0,0
		+ 29,0	+ 12,0	+ 11,0	+ 7,0	+ 5,0	− 95,4	+ 18,4	0,0
		− 9,4	− 5,8	− 5,8	− 4,3	− 3,6	+ 66,3	− 24,4	
			+ 27,0	+ 22,0	+ 12,0	+ 5,0	− 118,9	+ 32,9	0,0
			− 3,6	− 3,6	− 2,7	− 2,2	+ 40,8	− 15,0	
				+ 31,0	+ 18,0	+ 5,0	− 168,4	+ 73,4	0,0
				− 3,6	− 2,7	− 2,2	+ 40,8	− 15,0	
					+ 22,0	+ 5,0	− 139,4	+ 69,4	0,0
					− 2,0	− 1,7	+ 30,6	− 11,3	
						+ 8,0	− 75,5	+ 42,5	0,0
						− 1,4	+ 25,5	− 9,4	
							+1856,1	−1166,7	0,0
							− 468,2	+ 172,4	
b	+ 19,6	+ 6,2	+ 5,2	+ 2,7	+ 1,4	− 29,1	+ 13,0*	− 19,0	0,0
		+ 23,4	+ 18,4	+ 9,3	+ 2,8	− 78,1	+ 8,0*	+ 9,9	− 0,1
		− 2,0	− 1,6	− 0,9	− 0,4	+ 9,2	− 4,1	+ 6,1	
			+ 27,4	+ 15,3	+ 2,8	−127,6	+ 8,0*	+ 50,4	− 0,1
			− 1,4	− 0,7	− 0,4	+ 7,7	− 3,4	+ 5,0	
				+ 20,0	+ 3,3	−108,8	+ 6,0*	+ 52,1	− 0,1
				− 0,4	− 0,2	+ 4,0	− 1,8	+ 2,6	
					+ 6,6	− 50,0	+ 5,0*	+ 28,1	0,0
					− 0,1	+ 2,1	− 0,9	+ 1.4	
						+1387,9	− 91,8*	−902,5	0,0
						− 43,2	+ 19,3	− 28,2	
c	+ 21,4	+ 16,8	+ 8,4	+ 2,4	− 68,9	+ 3,9	+ 6,2*	+ 9,8	− 0,1
		+ 26,0	+ 14,6	+ 2,4	− 119,9	+ 4,6	+ 5,2*	+ 50,2	− 0,1
		− 13,2	− 6,6	− 1,9	+ 54,1	− 3,1	− 4,9	− 7,7	
			+ 19,6	+ 3,1	− 104,8	+ 4,2	+ 2,7*	+ 52,0	− 0,2
			− 3,3	− 0,9	+ 27,0	− 1,5	− 2,4	− 3,8	
				+ 6,5	− 47,9	+ 4,1	+ 1,4*	+ 28,1	+ 0,1
				− 0,3	+ 7,7	− 0,4	− 0,7	− 1,1	
					+1344,7	− 72,5	− 29.1*	−901,6	0,0
					− 221,8	+ 12,5	+ 20,0	+ 31,6	
d	+ 12,8	+ 8,0	+ 0,5	− 65,8	+ 1,5	+ 0,3	+ 16,8*	+ 25,7	− 0,2
		+ 16,3	+ 2,2	− 77.8	+ 2,7	+ 0,3	+ 8,4*	+ 39,8	− 0,1
		− 5,0	− 0,3	+ 41,2	− 0,9	− 0,2	− 10,5	− 16,1	
			+ 6,2	− 40,2	+ 3,7	+ 0,7	+ 2,4*	+ 24,6	+ 0,1
			− 0,0	+ 2,6	− 0,1	− 0,0	− 0,7	− 1,0	
				+1122,9	− 60,0	− 9,1	− 68,9*	−801,1	0,0
				− 338,3	+ 7,7	+ 1,5	+ 86,4	+ 133,0	
e	+ 11,3	+ 1,9	− 36,6	+ 1,8	+ 0,1	− 2,1	+ 8,0*	+ 15,8	+ 0,2
		+ 6,2	− 37,6	+ 3,6	+ 0,7	+ 1,7	+ 0,5*	+ 23,2	+ 0,2
		− 0,3	+ 6,2	− 0,3	− 0,0	+ 0,4	− 1,3	− 2,6	
			+784,6	− 52,3	− 7,6	+ 17,5	− 65,8*	−602,3	− 0,1
			− 118,5	+ 5,8	+ 0,3	− 6,8	+ 25,9	+ 50,5	
	+ 5,9	− 31,4	+ 3,3	+ 0,7	+ 2,1	− 0,8	+ 1,9*	+ 18,7	+ 0,4
		+666,1	− 46,5	− 7,3	+ 10,7	− 39,9	− 36,6*	−515,2	− 0,1
		− 167,1	+ 17,5	+ 3,7	+ 11,2	− 4,2	+ 10,1	+ 97,0	
l	+ 499,0	− 29,0	− 3,6	+ 21,9	− 44,1	− 26,5	− 31,4*	− 386,8	− 0,5
	= $[ll.6]$	+ 18,0	+ 19,6*	+ 21,4*	+ 12,8*	+ 11,3*	+ 5,9*		
		+ 1,6	+ 0,2	− 1,0	+ 3,4	+ 2,3	+ 5,3		
		= x_1	= x_2	= x_3	= x_4	= x_5	= x_6		

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und beim etwaigen Nachrechnen zu beachten ist, indem dadurch die Gesamt-Stimmung noch etwas verbessert worden ist. Offenbar muss, wer ein solches Schema wie S. 105 anwenden will, dasselbe langsam mit dem Rechenschieber in der Hand verfolgen und erst, wenn er den ganzen Gang mechanisch eingeübt hat, ein neues eigenes Beispiel vornehmen.

§ 34. Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Normalgleichungen.

Zu den Nebenbetrachtungen, welche sich an die Haupttheorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen noch anschliessen lassen, gehört auch die Frage, ob die Normalgleichungen überhaupt immer eine Auflösung geben werden?

In praktischen Fällen wird man schon aus der Natur der Aufgabe selbst wissen, ob eine Auflösung im gewöhnlichen Sinn möglich ist oder nicht, z. B. wenn ein Punkt in der Ebene bestimmt wird durch den Schnitt mehrerer Geraden, welche in einem einzelnen Falle zufällig alle nahezu parallel werden, so sagt schon der Anblick der Figur, dass keine gute bzw. überhaupt keine Lösung von einer Ausgleichung zu erwarten sein wird.

In diesem und ähnlichem Sinne ist die nachfolgende Untersuchung zu verstehen.

Wir betrachten zuerst den besonderen Fall, dass die Anzahl der Fehlergleichungen *gleich* der Anzahl der Unbekannten ist, und nehmen nur 2 Elemente an:

Fehlergleichungen:	*Normalgleichungen:*	
$v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1$	$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0$	(1)
$v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2$	$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0$	
Reduzierte Normalgleichung:	$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1] = 0$	(2)

$$\text{Fehlerquadratsumme:}\quad [v\,v] = [l\,l\,.\,2] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{3}$$

In diesem einfachen Falle ist aber:

$$[a\,a] = a_1^2 + a_2^2 \qquad [a\,b] = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad [a\,l] = a_1 l_1 + a_2 l_2$$
$$[b\,b] = b_1^2 + b_2^2 \qquad [b\,l] = b_1 l_1 + b_2 l_2$$
$$[l\,l] = l_1^2 + l_2^2$$

Setzt man dieses in (2) ein, so erhält man nach kurzer Um-Ordnung:

$$[b\,b\,.\,1] = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} \qquad [b\,l\,.\,1] = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 l_2 - a_2 l_1)}{a_1^2 + a_2^2} \tag{4}$$

$$\text{folglich wird}\qquad y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = -\frac{(a_1 l_2 - a_2 l_1)}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \tag{5}$$

Das ist *derselbe* Wert y, den man auch unmittelbar aus den Fehlergleichungen mit $v_1 = 0$ und $v_2 = 0$ erhalten würde. Die Normalgleichungen bilden also hier einen Umweg, den man aber unter Umständen deswegen betritt, weil dabei das Gewicht von y , $p_y = [b\,b\,.\,1]$ erhalten wird, welches die Fehlergleichungen an und für sich nicht geben würden.

Gehen wir nun weiter zu der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ nach (3), so zeigt sich bald, dass diese gleich Null wird, denn die Ausrechnung giebt:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] = l_1^2 + l_2^2 - \frac{(a_1 l_1 + a_2 l_2)^2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{(a_1 l_2 - a_2 l_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} = 0 \tag{6}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wollte man ferner einen mittleren Gewichtseinheitsfehler berechnen, so würde man erhalten:

$$m^2 = \frac{[l\,l\,.\,2]}{2-2} = \frac{0}{0} \tag{7}$$

Denken wir uns, zur Veranschaulichung, unter den 2 Fehlergleichungen etwa 2 lineare Bestimmungen eines Punktes mit den Coordinaten x und y, so erhalten die Resultate (4) bis (7) folgende Deutungen:

Bei 2 Strahlen ist eine Ausgleichung zur Punktbestimmung nicht nötig, wenn man aber trotzdem die Ausgleichungsformeln anwendet, so geben sie denselben Schnittpunkt x y, den man auch ohne Ausgleichung erhalten hätte, mit bestimmten Gewichten $p_y = [b\,b\,.\,1]$ und $p_x = [a\,a\,.\,1]$, aber ohne einen bestimmten mittleren Gewichtseinheitsfehler m.

Hat man aber die Kenntnis eines solchen Wertes m von irgend anderwärts, so kann man auch mittlere Coordinatenfehler berechnen:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}}$$

Unmöglich wird die Bestimmung von y und x dann, wenn die Coefficienten $a_1\,b_1$ $a_2\,b_2$ in (1) gleiches Verhältnis haben:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \text{also} \quad a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0 \tag{8}$$

d. h. wenn die betreffenden Strahlen parallel werden.

Dagegen wird die Bestimmung von x und y wieder möglich, wenn zu zweien Fehlergleichungen mit konstantem Verhältnis $b : a$ eine dritte mit anderem Verhältnis $b_3 : a_3$ hinzutritt, oder allgemein, wenn bei beliebig vielen Fehlergleichungen, mit 2 Unbekannten, wenigstens 2 Fehlergleichungen sind, deren Coefficientenverhältnisse $b : a$ *nicht* gleich sind. Denn wenn *alle* Verhältnisse $b : a$ einander gleich wären, so würde auch $\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = \frac{b}{a}$, also:

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b] - \frac{b}{a}[a\,b] = [b\,b] - [b\,b] = 0.$$

Bei nur 2 Unbekannten x und y lassen sich alle diese Verhältnisse leicht überblicken; für irgend welche Zahl von Unbekannten hat schon *Gauss* in der „Theoria combinationis" art. 23. Betrachtungen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung angestellt.

In neuerer Zeit ist diese Frage durch die Determinantentheorie theoretisch noch klarer gemacht worden in folgender Weise:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Normalgleichungen eine und nur eine Auflösung zulassen, besteht darin, dass die aus den Coefficienten der in diesen Gleichungen vorkommenden Unbekannten zusammengesetzte Determinante von Null verschieden sei.

Diese Determinante entsteht aus dem System der Coefficienten der Unbekannten in den Fehlergleichungen durch Komposition mit sich selbst. Sie ist daher gleich (nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten) der Summe der Quadrate derjenigen Determinanten, welche man erhält, indem man aus dem System der Fehlergleichungen auf alle möglichen verschiedenen Weisen jedesmal so viel Gleichungen herausgreift, als Unbekannte zu bestimmen sind, und die Coefficienten der Unbekannten

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

in den herausgegriffenen Gleichungen zu einer Determinante zusammenstellt. Ist von diesen letzteren Determinanten auch nur eine von Null verschieden, so ist die Determinante der Coefficienten der Unbekannten in den Normalgleichungen ebenfalls von Null verschieden.

Das System der Normalgleichungen hat daher jedesmal dann eine und nur eine Lösung, wenn sich aus den Fehlergleichungen auch nur eine einzige Gruppe von Gleichnngen absondern lässt, welche eben so viele Gleichungen enthält, als Unbekannte vorhanden sind, und die Eigenschaft hat, eine und nur eine Lösung zu besitzen.

§ 35. Determinantenformeln für 3 Elemente.

(Ohne Zusammenhang mit unserem allgemeinen Entwicklungsgang.)

Man kann bei 3 Elementen $x\ y\ z$ immer noch die Auflösungsformeln für $x\ y\ z$ und die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in einigermassen geschlossener Form angeben, ähnlich wie bei 2 Unbekannten, namentlich wenn man *Determinanten* anwendet, welche selbst ja auch bei 3 Elementen noch übersichtliche Ausrechnung gestatten.

Praktische Bedeutung haben die nachfolgenden Formeln kaum, denn die numerische Auswertung der Unbekannten und ihrer Gewichte geschieht immer am besten auf dem Wege der allmählichen Elimination.

Wenn folgende Fehlergleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= a_n x + b_n y + c_n z + l_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

so sind die zugehörigen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Durch allmähliche Elimination findet man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$[c\,c\,.\,2]\,\varepsilon + [c\,l\,.\,2] = 0 \tag{4}$$

Andererseits kann man die Determinantentheorie anwenden:

$$\left.\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} &= \begin{aligned} &+ [a\,a]\,[b\,b]\,[c\,c] - [a\,c]\,[b\,b]\,[a\,c] \\ &+ [a\,b]\,[b\,c]\,[a\,c] - [a\,a]\,[b\,c]\,[b\,c] \\ &+ [a\,c]\,[a\,b]\,[b\,c] - [a\,b]\,[a\,b]\,[c\,c] \end{aligned} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Analog sei:

$$\left.\begin{aligned} D_x = \begin{vmatrix} [a\,l] & [a\,b] & [a\,c] \\ [b\,l] & [b\,b] & [b\,c] \\ [c\,l] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,l] & [b\,c] \\ [a\,c] & [c\,l] & [c\,c] \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,l] \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dann werden x y und z so bestimmt:

$$x = -\frac{D_x}{D} \qquad y = -\frac{D_y}{D} \qquad z = -\frac{D_z}{D} \tag{7}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zwischen (4) und (5) und (6) bestehen einfache Beziehungen, es ist nämlich:

$$[c\,c\,.\,2] = \frac{D}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad [c\,l\,.\,2] = \frac{D_z}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{8}$$

wo der Nenner $[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$ die schon früher in § 17. benützte Coefficienten-Determinante zweiter Ordnung ist.

$[c\,c\,.\,2]$ ist zugleich die Reciproke des Gewichts-Coefficienten $[\gamma\,\gamma]$. Alle Gewichts-Coefficienten lassen sich ähnlich darstellen:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{[bb]\,[cc] - [bc]\,[bc]}{D} & [\alpha\beta] &= -\frac{[ab]\,[cc] - [ac]\,[bc]}{D} & [\alpha\gamma] &= -\frac{[ac]\,[bb] - [ab]\,[bc]}{D} \\ & & [\beta\beta] &= \frac{[aa]\,[cc] - [ac]\,[ac]}{D} & [\beta\gamma] &= -\frac{[bc]\,[aa] - [ab]\,[ac]}{D} \\ & & & & [\gamma\gamma] &= \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{D} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Auch die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler, $[l\,l\,.\,2]$, kann man dreifach durch Determinanten darstellen:

$$[l\,l\,.\,2] = \frac{\begin{vmatrix} [l\,l] & [l\,b] & [l\,c] \\ [l\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [l\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [b\,b] & [b\,c] \\ [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,l] & [l\,l] & [l\,c] \\ [a\,c] & [l\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,c] \\ [a\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,l] & [b\,l] & [l\,l] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] \\ [a\,b] & [b\,b] \end{vmatrix}} \tag{10}$$

Die Richtigkeit aller vorstehenden Formeln kann man sofort einsehen, wenn man die Determinanten zweiten und dritten Grades in bekannter Weise entwickelt. Über die Gültigkeit analoger Formeln für mehr als 3 Elemente verweisen wir auf *Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 1. Teil S. 253 u. ff., und entnehmen von dort auch noch, dass die Coefficienten-Determinante D ausser der ursprünglichen Form (5) noch folgende andere leicht zu begründende Formen hat:

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & [b\,c\,.\,1] \\ 0 & [b\,c\,.\,1] & [c\,c\,.\,1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & [b\,c\,.\,1] \\ 0 & 0 & [c\,c\,.\,2] \end{vmatrix} = [a\,a]\,.\,[b\,b\,.\,1]\,.\,[c\,c\,.\,2]$$

Auch für die Gewichts-Coefficienten bestehen noch manche andere Formen:

$$[\gamma\,\gamma] = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & 0 \\ [a\,b] & [b\,b] & 0 \\ [a\,c] & [b\,c] & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & 0 \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & 0 \\ 0 & [b\,c\,.\,1] & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{[a\,a]\begin{vmatrix} [b\,b\,.\,1] & 0 \\ [b\,c\,.\,1] & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

Die erste dieser 3 Formen giebt aufgelöst daselbe wie (9).

Man kann solche Formeln vielleicht gelegentlich als Rechenproben benützen.

Die Determinanten sind symbolische Bezeichnungen, ähnlich wie unsere $[bb\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w., und so lange diese besonders der Methode der kleinsten Quadrate angepasste Symbolik ausreicht, ist kein Grund vorhanden, eine andere, für numerische Berechnung weniger geeignete Symbolik anzuwenden.

Die Benützung allgemeiner Determinantensätze zu Betrachtungen von solcher Art wie am Schluss von § 34. ist dagegen sehr nützlich.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 36. Interpolationsausgleichung einer periodischen Erscheinung.

Nachdem wir nun die allgemeine Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen erledigt haben, mag es am Platze sein, zum Abschluss dieser Theorie ein Anwendungs-Beispiel vorzunehmen und hier einzuschalten, welches nicht wie fast alle unsere späteren sonstigen Anwendungen geodätischer Natur ist.

Wir betrachten eine Ausgleichung von Beobachtungen, welche ihrer Natur nach einen *periodischen* Verlauf haben, wie z. B. meteorologische Beobachtungen, Pegelbeobachtungen am Meeresufer u. s. w.

Als periodische Funktion nehmen wir die folgende:

$$F = (F) + r_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + r_2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + r_3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots \quad (1)$$

wobei φ unabhängige Veränderliche, etwa der Zeit entsprechend, ist. Die Konstanten $r_0\ r_1\ r_2\ r_3 \ldots \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ sollen so bestimmt werden, dass die Funktionswerte sich gegebenen Beobachtungen möglichst gut anschliessen, d. h. dass die Quadratsumme der Abweichungen der Funktionswerte F von den Beobachtungen ein Minimum werde.

Zum Zweck der Ausgleichung muss man die Funktion (1) in Bezug auf die zu ermittelnden Unbekannten linear machen, und zwar geschieht dieses einfach durch Auflösung:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \varphi) &= \sin\alpha_1 \cos\varphi + \cos\alpha_1 \sin\varphi \\ \sin(\alpha_2 + 2\varphi) &= \sin\alpha_2 \cos 2\varphi + \cos\alpha_2 \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \sin\alpha_1 = y_1 & r_1 \cos\alpha_1 = x_1 \\ r_2 \sin\alpha_2 = y_2 & r_2 \cos\alpha_2 = x_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (2)$$

und damit nimmt die Funktion (1) folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l} F = (F) + y_1 \cos\varphi + y_2 \cos 2\varphi + y_3 \cos 3\varphi + \ldots \\ \qquad + x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + x_3 \sin 3\varphi + \ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

Man führt also statt der Unbekannten r und α die neuen Unbekannten y und x ein, und wenn diese ermittelt sind, kann man jederzeit wieder zu r und α zurückkehren, indem man die Gleichungen (2) nach den Unbekannten r und α auflöst.

Wir setzen folgende Beobachtungen voraus:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Amplitude } \varphi = & 0 & i & 2i & 3i \ldots & (n-1)i \\ \text{Beobachtung} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \ldots & F_{n-1} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dabei ist i das Intervall der Amplitude φ, und zwar sollen die Beobachtungen sich gleichförmig auf *eine* Periode verteilen, d. h.

$$n\,i = 360°. \quad (5)$$

Man bildet nun aus (3) die den n Beobachtungen F entsprechenden n Fehlergleichungrn, deren allgemeine Form diese ist:

$$v = (F) + y_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi + y_2 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots - F \quad (6)$$

Die n Fehlergleichungen gehen hieraus hervor, wenn man für φ der Reihe nach die Werte $0\ ,\ i\ ,\ 2i \ldots$ und für F entsprechend die Werte $F_0\ F_1\ F_2 \ldots$ einsetzt. Wir bilden die Tabelle der Coefficienten der Fehlergleichungen, und um die Bezeichnungen festzusetzen, schreiben wir zu (6) noch die entsprechende Gleichung:

$$v = a\,(F) + b\,y_1 + c\,x_1 + d\,y_3 + e\,x_2 + \ldots + l \quad (7)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Tabelle der Coefficienten $a\ b\ c\ \ldots$ und der Absolutglieder l ist:

a	b	c	d	e	$\ldots$	l
$+1$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\ldots$	$-F_0$
$+1$	$\cos i$	$\sin i$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$(3i)$	$-F_1$
$+1$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$(6i)$	$-F_2$
$+1$	$\cos 3i$	$\sin 3i$	$\cos 6i$	$\sin 6i$	$(9i)$	$-F_3$
$+1$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$\cos 8i$	$\sin 8i$	$\ldots$	$-F_4$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

(8)

Wenn man nun die Summen-Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ $\ldots$ bildet, so bemerkt man bald, dass dieselben wegen der symmetrischen Anordnung der Beobachtungen höchst einfach werden. Die Coefficienten sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{llll} [a\,a]=n & [a\,b]=0 & [a\,c]=0 & [a\,d]=0 \quad [a\,e]=0 \\ & [b\,b]=\frac{n}{2} & [b\,c]=0 & [b\,d]=0 \quad [b\,e]=0 \\ & & [c\,c]=\frac{n}{2} & [c\,d]=0 \quad [c\,e]=0 \\ & & & [d\,d]=\frac{n}{2} \quad [d\,e]=0 \\ & & & [e\,e]=\frac{n}{2} \end{array}\right\} \quad (9)$$

Die Begründung dieser Formeln kann durch eine geometrische Betrachtung nach nebenstehender Fig. geschehen: Die Gleichung (5), $n\,i = 360°$, entspricht der Konstruktion eines regelmässigen Vielecks von n Seiten, dessen Projektionen auf 2 Achsen sind:

Projektion auf x:

$$s + s\cos i + s\cos 2i + s\cos 3i + \ldots$$

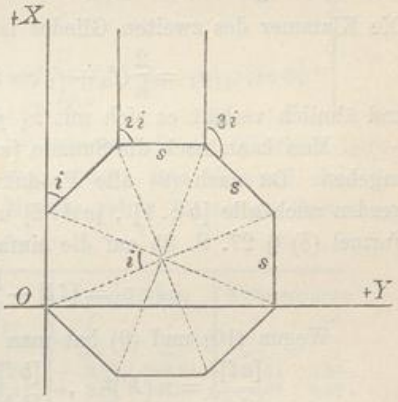
Projektion auf y:

$$0 + s\sin i + s\sin 2i + s\sin 3i + \ldots$$

Die Projektionen eines geschlossenen Vielecks auf 2 Achsen sind aber algebraisch = Null, es sind daher durch diese Projektionen die beiden Gleichungen der Gruppe (9) bewiesen:

$$[a\,b] = 0 \text{ und } [a\,c] = 0.$$

Geometrische Darstellung der Gleichungen $[a\,b]=0$ und $[a\,c]=0$



Ganz ebenso verhält es sich mit den übrigen Produktsummen $[a\,d] = 0$, $[a\,e = 0$ u. s. w., denn hier handelt es sich nur um *mehrfaches* Durchlaufen von Polygonen mit Centriwinkeln $2i$, $3i$ u. s. w., und ähnlich verhält es sich auch mit $[b\,c]$, $[b\,d]$ u. s. w.; man überzeugt sich, dass jedem Glied *sin* (...) *cos* (...) immer ein Glied gegenübersteht von der Form *sin* (... $\pm 180°$) *cos* (...). Bei den Quadratsummen $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. findet man immer Gruppierung $\sin^2(\ldots) + \cos^2(\ldots)$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Indem wir hiernach die Coefficienten (9) als erledigt betrachten, gehen wir zur Auflösung der Normalgleichungen über, welche sind:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,y_0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad &+ [a\,l] = 0 \\ [b\,b]\,y_1 \;.\;.\;.\;.\;. \quad &+ [b\,l] = 0 \\ [c\,c]\,x_1 \quad &+ [c\,l] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9a}$$

Jede Normalgleichung enthält also nur *eine* Unbekannte, und Elimination ist gar nicht nötig. Indem wir nun auch die Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ . . . nach (8) bilden, erhalten wir folgende Auflösung der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} n\,(F) &= -\,[a\,l] = [F] \\ \frac{n}{2}\,y_1 &= -\,[b\,l] = (F_0 + F_1\,cos\,i + F_2\,cos\,2\,i + F_3\,cos\,3\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2}\,x_1 &= -\,[c\,l] = (\ldots \quad F_1\,sin\,i + F_2\,sin\,2\,i + F_3\,sin\,3\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2}\,y_2 &= -\,[d\,l] = (F_0 + F_1\,cos\,2\,i + F_2\,cos\,4\,i + F_3\,cos\,6\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2}\,x_2 &= -\,[e\,l] = (\ldots \quad F_1\,sin\,2\,i + F_2\,sin\,4\,i + F_3\,sin\,6\,i + \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die erste Gleichung $n\,(F) = [F]$ sagt aus, dass (F) das arithmetische Mittel aller Beobachtungen F ist, und es scheint nun passend, alle Beobachtungen von diesem Mittel an zu zählen, und zu setzen:

$$F_0 = (F) + f_0 \quad , \quad F_1 = (F) + f_1 \quad , \quad F_2 = (F) + f_2 \text{ u. s. w.} \tag{11}$$

hiebei ist: $$[f] = 0 \tag{12}$$

Man darf nun auch in (10) überall f statt F schreiben, denn es wird z. B. durch Substitution von (11) in y_1:

$$y_1 = \frac{2}{n}\,(f_0 + f_1\,cos\,i + f_2\,cos\,2\,i + \ldots) + \frac{2}{n}\,(F)\,(1 + cos\,i + cos\,2\,i + \ldots)$$

Die Klammer des zweiten Gliedes ist aber $= [a\,b] = 0$, folglich:

$$y_1 = \frac{2}{n}\,(f_0 + f_1\,cos\,i + f_2\,cos\,2\,i + f_3\,cos\,3\,i + \ldots) \tag{13}$$

und ähnlich verhält es sich mit x_1 y_2 x_2 . . .

Man kann noch die Summe $[v\,v]$ und den mittleren Fehler m einer Beobachtung angeben. Da nach (9) alle Produktsummen $[a\,b]$, $[a\,c]$ . . . gleich Null sind, so werden auch alle $[b\,c\,.\,1]$, $[c\,d\,.\,2]$ u. s. w. gleich Null, und damit reduziert sich die Formel (8) § 27. S. 85 auf die einfache Gestalt:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} \ldots$$

Wegen (10) und (9) hat man hier:

$$\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} = n\,(F)^2 \quad , \quad \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} = \frac{n}{2}\,y_1^2 \quad , \quad \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} = \frac{n}{2}\,x_1^2 \text{ u. s. w.}$$

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}\,(y_1^2 + x_1^2) - \frac{n}{2}\,(y_2^2 + x_2^2) - \ldots \tag{14}$$

Wegen (2) ist $\qquad y_1^2 + x_1^2 = r_1^2 \qquad y_2^2 + x_2^2 = r_2^2 \ldots$

also $$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}\,[r\,r] \tag{15}$$

Das Anfangsglied $[l\,l]$ ist nach (8) zunächst:

$$[l\,l] = [F\,F]$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aus (11) folgt: $[F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2 + 2\,(F)\,[f]$ (16)
oder weil nach (12) $[f] = 0$ ist:

$$[l\,l] = [F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2$$

Dieses in (15) gesetzt giebt: $[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}[r\,r]$ (17)

Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} \qquad (18)$$

wobei u die Anzahl der Konstanten in der Interpolationsformel ist, z. B. in (1) ist $u = 7$; wenn man dagegen schon bei den Gliedern mit $2\,\varphi$ abbricht, wie in (14), so ist $u = 5$.

Wir stellen noch besondere Formeln auf für den häufig vorkommenden Fall $n = 12$, also nach (5), $i = 30°$. In diesem Falle wird nach (13):

$$6\,y_1 = f_0 + f_1\,cos\,30° + f_2\,cos\,60° + f_3\,cos\,90° + f_4\,cos\,120° + f_5\,cos\,150°$$
$$+ f_6\,cos\,180° + f_7\,cos\,210° + f_8\,cos\,240° + f_9\,cos\,270° + f_{10}\,cos\,300° + f_{11}\,cos\,330°$$

Da aber alle hier vorkommenden goniometrischen Funktionen sich auf $sin\,30° = 0{,}5$ und $cos\,30° = 0{,}8660$ reduzieren lassen, so erhält man:

$$6\,y_1 = (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 - f_{10})\,sin\,30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11})\,cos\,30°$$

Alle derartigen Formeln für $n = 12$, entsprechend einer Funktion (1), welche bis $4\,\varphi$ fortgesetzt wird, erhält man aus (10), mit Rücksicht auf die Ersetzung der F durch f, wie bei (13). Die Resultate sind:

$$\left.\begin{aligned}
6\,y_1 &= (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 + f_{10})\,sin\,30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11})\,cos\,30°\\
6\,x_1 &= (f_3 - f_9) + (f_1 + f_5 - f_7 - f_{11})\,sin\,30° + (f_2 + f_4 - f_8 - f_{10})\,cos\,30°\\
6\,y_2 &= (f_0 - f_3 + f_6 - f_9) + (f_1 - f_2 - f_4 + f_5 + f_7 - f_8 - f_{10} + f_{11})\,sin\,30°\\
6\,x_2 &= (f_1 + f_2 - f_4 - f_5 + f_7 + f_8 - f_{10} - f_{11})\,cos\,30°\\
6\,y_3 &= (f_0 - f_2 + f_4 - f_6 + f_8 - f_{10})\\
6\,x_3 &= (f_1 - f_3 + f_5 - f_7 + f_9 - f_{11})\\
6\,y_4 &= (f_0 + f_3 + f_6 + f_9) - (f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 + f_{10} + f_{11})\,sin\,30°\\
6\,x_4 &= (f_1 - f_2 + f_4 - f_5 + f_7 - f_8 + f_{10} - f_{11})\,cos\,30°
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Zu einem Zahlenbeispiel für die Formeln (19) nehmen wir die 6jährigen Barometermittel von 1868—1873 in Kairo (Jordan, Phys. Geogr. und Meteorol. der lib. Wüste S. 144). Diese Mittel für die einzelnen Monate gehen in unsere Rechnung als Beobachtungen F ein, wie folgende Tabelle zeigt:

φ	Monat		Beobachtet F	$f = F-758{,}26$	f^2	Ausgeglichen f'	F'	Widersprüche v	v^2
			mm	mm		mm	mm	mm	
0°	Januar	0.	761,70	+ 3,44	11,83	+ 3,95	762,21	+ 0,51	0,26
30°	Februar	1.	761,74	+ 3,48	12,11	+ 2,80	761,06	− 0,68	0,46
60°	März	2.	757,62	− 0,64	0,41	+ 0,09	758,35	+ 0,73	0,53
90°	April	3.	758,14	− 0,12	0,01	− 0,72	757,54	− 0,60	0,36
120°	Mai	4.	757,15	− 1,11	1,23	− 0,77	757,49	+ 0,34	0,12
150°	Juni	5.	755,75	− 2,51	6,30	− 2,52	755,74	− 0,01	0,00
180°	Juli	6.	754,51	− 3,75	14,06	− 4,00	754,26	− 0,25	0,06
210°	August	7.	754,40	− 3,86	14,90	− 3,46	754,80	+ 0,40	0,16
240°	September	8.	757,10	− 1,16	1,35	− 1,52	756,74	− 0,36	0,13
270°	Oktober	9.	758,90	+ 0,64	0,41	+ 0,84	759,10	+ 0,20	0,04
300°	November	10.	760,51	+ 2,25	5,06	+ 2,27	760,53	+ 0,02	0,00
330°	Dezember	11.	761,61	+ 3,35	11,22	+ 3,08	761,34	− 0,27	0,07
	Mittel (F) =		758,26	+ 13,16 − 13,15	78,89	+ 13,03 − 12,99	758,26	+ 2,20 − 2,17	2,19

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach (19) wird berechnet:

$$6\,y_1 = +\,20{,}561 \qquad 6\,y_2 = -\,0{,}270 \qquad 6\,y_3 = +\,3{,}31 \qquad 6\,y_4 = +\,0{,}11$$
$$6\,x_1 = -\,2{,}479 \qquad 6\,x_2 = -\,3{,}603 \qquad 6\,x_3 = +\,2{,}24 \qquad 6\,x_4 = +\,1{,}49$$

Nach (2) hat man $\quad tang\,\alpha_1 = \dfrac{+\,20{,}561}{-\,2{,}479} \qquad \alpha_1 = 96^\circ\,53'$

$$r_1 = \frac{1}{6}\,\frac{20{,}561}{sin\,\alpha_1} = \frac{1}{6}\,\frac{-\,2{,}479}{cos\,\alpha_1} \qquad r_1 = 3{,}452$$

und in gleicher Weise findet man auch die übrigen α und r, so dass man hat:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 96^\circ\,53' & r_1 &= 3{,}452 \\ \alpha_2 &= 184^\circ\,17' & r_2 &= 0{,}602 \\ \alpha_3 &= 55^\circ\,55' & r_3 &= 0{,}666 \\ \alpha_4 &= 4^\circ\,13' & r_4 &= 0{,}249 \end{aligned}$$

Die Interpolationsformel heisst jetzt:

$$\left.\begin{aligned} f' = {} & 3{,}452\,sin\,(96^\circ\,53' + \varphi) + 0{,}602\,sin\,(184^\circ\,17' + 2\,\varphi) \\ & + 0{,}666\,sin\,(55^\circ\,55' + 3\,\varphi) + 0{,}249\,sin\,(4^\circ\,13' + 4\,\varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

oder die ganze Formel nach (1):

$$F' = 758{,}26 + f'$$

Hiernach sind die ausgeglichenen Werte f' und F' der Tabelle unten auf S. 113 berechnet.

Durch Vergleichung der beobachteten und der ausgeglichenen Funktionswerte F oder f erhält man die Widersprüche v, deren Quadratsumme sich in der vorstehenden Tabelle (S. 113) durch unmittelbare Rechnung $[v\,v] = 2{,}19$ ergiebt. Zur durchgreifenden Kontrolierung der ganzen Ausgleichungsrechnung bestimmt man diese Summe auch noch nach (17):

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 3{,}452 & r_1^2 &= 11{,}916 \\ r_2 &= 0{,}602 & r_2^2 &= 0{,}362 \\ r_3 &= 0{,}666 & r_3^2 &= 0{,}444 \\ r_4 &= 0{,}249 & r_4^2 &= 0{,}062 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} [r\,r] &= 12{,}784 \\ 6\,[r\,r] &= 76{,}704 \end{aligned}$$

$$[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}\,[r\,r] = 78{,}89 - 76{,}70 = 2{,}19$$

was mit der unmittelbaren Ausrechnung von $[v\,v] = 2{,}19$ vollständig stimmt. Endlich hat man noch den mittleren Fehler einer Beobachtung nach (18):

$$m = \sqrt{\frac{2{,}19}{12-9}} = \pm\,0{,}85^{mm} \qquad (21)$$

Wenn man nur bis zu den Gliedern mit $3\,\varphi$ gehen will, so hat man lediglich in (20) das letzte Glied wegzulassen, und umgekehrt, wenn man mit der Übereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung nicht zufrieden ist, und deswegen ein weiteres Glied in die Formel aufnehmen will, so fügt man, mit Beibehaltung aller erstmals erhaltenen Resultate, weitere Glieder bei.

Wie viele Glieder man der Interpolationsformel (1) geben soll, ist natürlich nicht allgemein festzusetzen, man kann nur verlangen, dass der mittlere Fehler (18) nach der Ausgleichung, den Abweichungen, welche die Beobachtungen vor der Ausgleichung unter sich zeigten, möglichst entspreche.

Die hier behandelte Interpolationsrechnung ist zuerst von Bessel in den astr. Nachrichten 6. Band 1828 S. 333—356 behandelt worden: „Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung". Unsere vorstehende Darstellung giebt das Bessel sche Verfahren, nur in etwas mehr anschaulicher Darstellung.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Coefficienten $\sin i \; \sin 2\,i \; \sin 3\,i \ldots \cos i \; \cos 2\,i \; \cos 3\,i \ldots$, welche wir in (19) für $n = 12$ also $i = 30°$ ausgerechnet haben, kann man auch für andere Fälle ein für allemal berechnen, z. B. $n = 73$, $i = 4° 55' 53''$ (5tägige Mittel, $n = 365 : 5$) sind die Logarithmen solcher Coefficienten mitgeteilt in: „Des anomalies de la température observées à Genève par Plantamour, Genf und Basel 1867" S. 20 und 21, wobei jedoch die Amplitude φ anders gezählt ist, so dass die Formeln und die zugehörigen Coefficienten nicht unmittelbar mit den unsrigen übereinstimmen.

Hiezu ist auch zu berichten: Ein graphisches Verfahren zur Herleitung der Coefficienten der Bessel'schen Reihe, von Prof. Dr. *Paul Schreiber* in der Meteorologischen Zeitschrift, Juni 1891, S. 237.

Bedingte Beobachtungen.

Nachdem wir in § 12.—36. die vermittelnden Beobachtungen als unmittelbare Folge des allgemeinen Ausgleichungsprinzips von § 12. vollständig durchgenommen haben, gehen wir über zu einer zweiten Form der Ausgleichungsaufgaben, den *bedingten Beobachtungen*, und zwar wollen wir im nächsten § 37. zuerst zeigen, wie sich die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die bereits bekannte Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen lässt, worauf in § 38, 39 u. ff. die selbständige Lösung der neuen Aufgabe sich anschliessen wird.

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen.

Es wurden n Grössen unmittelbar beobachtet, zwischen denen r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, wobei n grösser als r ist; es sollen die wahrscheinlichsten Werte der n Grössen bestimmt werden.

Ein sehr einfacher Fall dieser Art ist z. B. die Messung von 3 Winkeln $x_1\, x_2\, x_3$ in einem Dreieck, wobei eine Bedingungsgleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0$ besteht (bzw. $180° +$ sphär. Excess), also $n = 3$, $r = 1$.

Wir haben diese Aufgabe bereits in § 10. S. 31—35 auf eine Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel zurückgeführt.

Man kann immer die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, was wir nun zeigen werden.

Wir nehmen an, es seien n unbekannte Grössen $x_1\; x_2\; x_3 \ldots x_n$ zu bestimmen und man habe hiefür die gleich genauen Messungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$ gemacht. Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots + b_n x_n = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_n x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 + \ldots + r_n x_n = 0}_{\text{Anzahl} = n} \end{array} \right\} \qquad (1)$$

Setzt man an Stelle der Unbekannten x die Beobachtungswerte l, so sind die Gleichungen (1) nicht mehr befriedigt, sondern sie geben:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + \ldots + a_n l_n = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + \ldots + b_n l_n = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + \ldots + c_n l_n = w_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_0 + r_1 l_1 + r_2 l_2 + r_3 l_3 + \ldots + r_n l_n = w_n \end{array} \right\} \qquad (2)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es sind an den l solche Korrektionen v anzubringen, dass die Widersprüche w wieder verschwinden, z. B. für die erste Gleichung von (2):

$$a_0 + a_1 (l_1 + v_1) + a_2 (l_2 + v_2) + \ldots + a_n (l_n + v_n) = 0$$

Dieses mit der ersten Gleichung von (1) verglichen, giebt:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0$$

also das ganze System dieser Art:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots + a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots + b_n v_n + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots + r_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + w_n = 0 \end{array} \right\} \tag{3}$$

Hiezu hat man noch die Ausgleichungsbedingung

$$[v\,v] = \text{Minimum.} \tag{4}$$

Für die Anzahl n der Unbekannten und die Anzahl r der Bedingungsgleichungen ist es wesentlich, dass n grösser als r sei, d. h.

$$n > r \tag{6}$$

denn es soll nicht möglich sein, die v schon aus den Gleichungen (3) ohne Benützung von (4) zu bestimmen.

Ausserdem sollen die Bedingungsgleichungen (1) untereinander unabhängig sein, und dasselbe gilt von den abgeleiteten Bedingungsgleichungen (3), welche ebenfalls unter einander unabhängig sein müssen.

Man kann nun die Ausgleichung auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, und zwar dadurch, dass man mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (3) eine beliebige Auswahl von r Unbekannten in den $n - r$ übrigen ausdrückt. Man möge erhalten:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} v_1 = A_1 v_{r+1} + B_1 v_{r+2} + \ldots + H_1 v_n \\ v_2 = A_2 v_{r+1} + B_2 v_{r+2} + \ldots + H_2 v_n \\ \vdots \\ \underbrace{v_r = A_r v_{r+1} + B_r v_{r+2} + \ldots + H_r v_n}_{\text{Anzahl} = n - r} \end{array} \right\} \tag{16}$$

Hiezu schreibt man auch noch die als unabhängig ausgewählten $v_{r+1}\, v_{r+2} \ldots v_n$ selbst:

$$\text{Anzahl} = n - r \left\{ \begin{array}{l} v_{r+1} = v_{r+1} \quad \ldots \quad \ldots \\ v_{r+2} = \ldots \quad v_{r+2} \quad \ldots \\ \vdots \\ \underbrace{v_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots v_n}_{\text{Anzahl} = n - r} \end{array} \right\} \tag{7}$$

Nun stellen (6) und (7) zusammen ein System von $r + (n - r)$ d. h. von n Fehlergleichungen mit $n - r$ unabhängigen Unbekannten vor, welche zusammen nach § 25. u. ff. zu behandeln sind. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler m bestimmt sich hiefür nach (19) § 27. S. 87:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(r + (n - r)) - (n - r)}} = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \tag{8}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ob diese in allgemeinen Gleichungen angedeutete Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an. Wenn die Bedingungsgleichungen einfacher Natur sind, und wenn ihre Anzahl nicht gross ist, so wird dieses Verfahren zu empfehlen sein.

Es war uns zunächst nur darum zu thun, die Verhältnisse im ganzen zu überblicken und zugleich die Fehlerformel (8) zu finden, welche immer gilt, mag man die Ausgleichung durch Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen oder nach der nachher zu behandelnden Korrelaten-Methode ausführen.

Über das *Vorzeichen der Absolutglieder* w, welche nach (1) und (2) die Widersprüche zwischen Beobachtung und Theorie vorstellen, ist noch im allgemeinen zu bemerken, dass dasselbe sich unter allen Umständen nach der Formel bestimmt:

$$\text{Widerspruch } w = \text{Beobachtung} - \text{Theorie}$$

oder

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \tag{9}$$

§ 38. Minimum mit Nebenbedingungen.

Ehe wir zu der zweiten, wichtigsten Behandlung bedingter Beobachtungen übergehen, wollen wir in diesem § eine Einschaltung aus der Analysis machen, welche nicht nur zum allernächsten Gebrauch in § 39., sondern auch später noch in ähnlichen Fällen dienen wird.

Wir betrachten eine Funktion von n Veränderlichen $x, y, z \ldots$:

$$\Omega = F(x, y, z, \ldots) \tag{1}$$

Diese Funktion soll zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, wenn die Veränderlichen $x\ y\ z$ nicht unabhängig, sondern durch folgende streng zu erfüllende „Bedingungsgleichungen" verbunden sind:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= 0 \\ \psi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{Anzahl} = r) \tag{2}$$

Die Anzahl dieser Bedingungsgleichungen sei r, und zwar soll n grösser als r sein.

Aus der Minimumsbedingung folgt, dass das totale Differential von Ω gleich Null werden muss, d. h.

$$d\Omega = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0 \tag{3}$$

Wären keine Bedingungsgleichungen da, so müssten hier die Coefficienten von $dx\ dy\ dz$ einzeln gleich Null gesetzt werden, um den Wert $d\Omega$ allgemein auf Null zu bringen. Ausser der Gleichung (3) bestehen noch folgende n durch Differentiierung der Bedingungsgleichungen (2) gewonnene Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz &= 0 \\ \frac{\partial \psi}{d x} dx + \frac{\partial \psi}{d y} dy + \frac{\partial \psi}{d z} dz &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Mittelst der Gleichungen (4) kann man nun r einzelne von den Differentialen $dx\ dy\ dz$ in den $n - r$ übrigen ausdrücken und in (3) substituieren, worauf die Coefficienten der übrigen $n - r$ Differentiale, welche nun unabhängig sind, einzeln gleich Null gesetzt werden müssen. Statt dessen kann man auch die Elimination von r Differentialen, worauf es im wesentlichen ankommt, nach der Methode der un-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

bestimmten Coefficienten ausführen, d. h. man multipliziert die Gleichungen (4) mit den vorerst unbestimmten Coefficienten $k_1\ k_2\ \ldots\ k_n$ (Korrelaten) und addiert sie dann zu (3), wodurch entsteht:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Anzahl dieser Gleichungen (5) ist gleich der Anzahl der Veränderlichen $x\ y\ z$ in (1), d. h. $= n$; zieht man noch die r Bedingungsgleichungen (2) selbst zu, so hat man die nötigen $n + r$ unabhängigen Gleichungen zur Bestimmung der r Korrelaten und der n Unbekannten $x\ y\ z$. Die Aufgabe ist hiemit im Prinzip gelöst.

Man kann das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung in folgendem Satz aussprechen:

Wenn eine Funktion $\Omega = F\ (x\ y\ z)$ zu einem Minimum gemacht werden soll mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen:

$$\varphi\ (x, y, z) = 0 \qquad \psi\ (x, y, z) = 0$$

so multipliziert man die letzteren mit Korrelaten k_1, k_2 und addiert sie zu der Minimumsgleichung, d. h. man bildet:

$$\Omega' = F\ (x, y, z) + k_1\ \varphi\ (x, y, z) + k_2\ \psi\ (x, y, z)$$

dann wird das Minimum dieser neuen Funktion in Bezug auf $x\ y\ z$ bestimmt, wie wenn die früheren Bedingungsgleichungen nicht da wären.

§ 39. Bedingte Beobachtungen mit Korrelaten.

Den im vorigen § 38. behandelten allgemeinen Satz der Analysis wenden wir nun auf unsere am Anfang von § 37. aufgestellte Aufgabe an.

Wir nehmen die daselbst S. 115 aufgestellten Gleichungen wieder vor, schreiben aber der Übersicht wegen hier überall nur 4 Symbole x_1, x_2, x_3, x_4, wo im allgemeinen Falle deren n stehen, und 3 Gleichungen mit a, b, c statt allgemein r Gleichungen.

Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = 0 \\ c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Setzt man an Stelle der wahrscheinlichsten Werte x die Beobachtungswerte $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$, so sind die Gleichungen (1) nicht befriedigt, sondern man erhält:

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 = w_3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es sind daher an den l solche Verbesserungen anzubringen, dass die Widersprüche w verschwinden, d. h. man setzt:

$$x_1 = l_1 + v_1 \qquad x_2 = l_2 + v_2 \qquad x_3 = l_3 + v_3 \qquad x_4 = l_4 + v_4 \quad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und damit giebt die erste Gleichung (1):

$$a_0 + a_1 (l_1 + v_1) + a_2 (l_2 + v_2) + a_3 (l_3 + v_3) + a_4 (l_4 + v_4) = 0$$

Die Vergleichung mit der ersten Gleichung von (2) giebt die folgende erste Gleichung, welcher wir sogleich die beiden andern zufügen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Allgemein} \\ \text{Anzahl} = r \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 = 0 \\ \underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + w_3 = 0}_{\text{Allgemein Anzahl} = n} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Mit Anwendung der Summenklammern kann man (2) und (4) auch so schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} a_0 + [a\,l] = w_1 & [a\,v] = -w_1 \\ b_0 + [b\,l] = w_2 & [b\,v] = -w_2 \\ c_0 + [c\,l] = w_3 & [c\,v] = -w_3 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Wir bezeichnen die r Gleichungen (4) ebenfalls wieder als Bedingungsgleichungen, denn sie geben die Bedingungen an, welche die v genau erfüllen müssen.

Ausser den Gleichungen (4) hat man zur Bestimmung der v die Grundbedingung:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{Minimum} \quad (6)$$

Um dieses Minimum mit Rücksicht auf die Nebenbedingungen (4) zu erhalten, lehrt uns die Analysis, nach § 38., so zu verfahren:

Wir multiplizieren die Bedingungsgleichungen (4) mit unbestimmten Coefficienten $-2k_1$ $-2k_2$ $-2k_3$ (die in negativer und 2facher Form gewählt sind, weil sich -2 nachher wieder von selbst tilgt), also:

$$\left.\begin{array}{l} -2a_1 k_1 v_1 - 2a_2 k_1 v_2 - 2a_3 k_1 v_3 - 2a_4 k_1 v_4 - 2w_1 k_1 = 0 \\ -2b_1 k_2 v_1 - 2b_2 k_2 v_2 - 2b_3 k_2 v_3 - 2b_4 k_2 v_4 - 2w_2 k_2 = 0 \\ -2c_1 k_3 v_1 - 2c_2 k_3 v_2 - 2c_3 k_3 v_3 - 2c_4 k_3 v_4 - 2w_3 k_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Diese Gleichungen werden zur Minimumsbedingung (6) addiert, und dann wird überall nach v geordnet:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega' = v_1^2 - 2v_1 (a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3) \\ \quad + v_2^2 - 2v_2 (a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3) \\ \quad + v_3^2 - 2v_3 (a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3) \\ \quad + v_4^2 - 2v_4 (a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3) \\ \quad\quad - 2 \quad (w_1 k_1 + w_2 k_2 + w_3 k_3) \end{array}\right\} \quad (8)$$

Das Minimum von Ω' und die hiezu nötige Differentiierung nach $v_1\,v_2\,v_3\,v_4$ giebt:

$$0 = 2v_1 - 2(a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3) \text{ u. s. w.}$$

d. h. im ganzen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \\ v_4 = a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Setzt man diese Ausdrücke wieder in die Bedingungsgleichungen (4) und ordnet nach $k_1\,k_2\,k_3$, so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Gleichungen heissen Normalgleichungen, ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der Bedingungsgleichungen.

Gang der Rechnung. Nachdem die Coefficienten $a\ b\ c$ und die Absolutglieder w der Bedingungsgleichungen (4) bestimmt sind, berechnet man die Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w. der Normalgleichungen (10), löst diese nach $k_1\ k_2\ k_3$ auf, und berechnet dann die Verbesserungen v nach (9).

Die Zufügung der v zu den Beobachtungen l giebt dann endlich die wahrscheinlichsten Werte x der Unbekannten.

Nachdem alle einzelnen v ausgerechnet sind, findet man auch deren Quadratsumme und den *mittleren Fehler einer Beobachtung* (nach (8) § 37. S. 116):

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \tag{11}$$

wo r die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist. (In den obigen Formeln ist überall $r=3$).

§ 40. Ungleiche Gewichte.

Wenn die Beobachtungen ungleiche Gewichte $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$ haben, so tritt an Stelle von $[v\,v]$ = Minimum die neue Bedingung:

$$[p\,v\,v] = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + p_3 v_3^2 + p_4 v_4^2 = \text{Minimum} \tag{1}$$

und wenn man damit die Rechnung weiter führt, so sieht man bald, dass überall an Stelle von $a\ b\ c$ die Werte $\frac{a}{p}\ \frac{b}{p}\ \frac{c}{p}$ treten, und die wichtigsten Systeme (10) und (9) des vorigen § 39. gehen dann über in:

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + w_1 = 0 \\
\left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + w_2 = 0 \\
\left[\frac{a\,c}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + w_3 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= \frac{a_1}{p_1} k_1 + \frac{b_1}{p_1} k_2 + \frac{c_1}{p_1} k_3 \\
v_2 &= \frac{a_2}{p_2} k_1 + \frac{b_2}{p_2} k_2 + \frac{c_2}{p_2} k_3 \\
v_3 &= \frac{a_3}{p_3} k_1 + \frac{b_3}{p_3} k_2 + \frac{c_3}{p_3} k_3 \\
v_4 &= \frac{a_4}{p_4} k_1 + \frac{b_4}{p_4} k_2 + \frac{c_4}{p_4} k_3
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wenn man die Gewichte p nicht überall mitführen will, so kann man alle Coefficienten $a\ b\ c$ von Anfang an bzw. durch $\sqrt{p}$ dividieren, und dann weiter rechnen wie wenn alle Gewichte $= 1$ wären.

Die erste Bedingungsgleichung heisst dann so:

$$\frac{a_1}{\sqrt{p_1}} v_1 \sqrt{p_1} + \frac{a_2}{\sqrt{p_2}} v_2 \sqrt{p_2} + \frac{a_3}{\sqrt{p_3}} v_3 \sqrt{p_3} + \frac{a_4}{\sqrt{p_4}} v_4 \sqrt{p_4} + w_1 = 0$$

oder

$$a_1' v_1' + a_2' v_2' + a_3' v_3' + a_4' v_4' + w_1 = 0$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die erste Normalgleichung:

$$[a'\,a']\,k_1 + [a'\,b']\,k_2 + [a'\,c']\,k_3 + w_1 = 0$$

Die erste Korrektionsgleichung:

$$v_1' = v_1\sqrt{p_1} = a_1'\,k_1 + b_1'\,k_2 + c_1'\,k_3$$

hieraus $$v_1 = \frac{v_1'}{\sqrt{p_1}}$$

$[p\,v\,v]$ giebt sich unmittelbar durch Quadrierung der v', nämlich:

$$[p\,v\,v] = [(\sqrt{p}\,v)^2] = [v'\,v'] \tag{4}$$

Ungleiche Gewichte durch mittlere Fehler a priori.

Wenn die mittleren Fehler $m_1\ m_2\ m_3\ m_4$ a priori geschätzt sind, was oft vorkommt, so kann man die Gewichte geradezu annehmen:

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2} \qquad p_2 = \frac{1}{m_2^2} \qquad p_3 = \frac{1}{m_3^2} \text{ u. s. w.} \tag{5}$$

und damit nehmen die vorstehenden Formeln folgende Formen an:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{6}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots + w_1 &= 0 \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + b_3\,v_3 + \ldots + w_2 &= 0 \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + c_3\,v_3 + \ldots + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Mittlere Fehler: $m_1 \qquad m_2 \qquad m_3 \qquad \ldots$ (8)

Man bildet aus (7) und (8) die neuen Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned} m_1\,a_1 &= a_1' & m_2\,a_2 &= a_2' & m_3\,a_3 &= a_3' \\ m_1\,b_1 &= b_1' & m_2\,b_2 &= b_2' & m_3\,b_3 &= b_3' \\ m_1\,c_1 &= c_1' & m_2\,c_2 &= c_2' & m_3\,c_3 &= c_3' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

dann werden die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [m^2aa]\,k_1 + [m^2ab]\,k_2 + [m^2ac]\,k_3 + w_1 &= 0 \\ [m^2a\,b]\,k_1 + [m^2b\,b]\,k_2 + [m^2b\,c]\,k_3 + w_2 &= 0 \\ [m^2a\,c]\,k_1 + [m^2b\,c]\,k_2 + [m^2c\,c]\,k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ oder: } \left\{\begin{aligned} [a'\,a']\,k_1 + [a'\,b']\,k_2 + [a'\,c']\,k_3 + w_1 &= 0 \\ [a'\,b']\,k_1 + [b'\,b']\,k_2 + [b'\,c']\,k_3 + w_2 &= 0 \\ [a'\,c']\,k_1 + [b'\,c']\,k_2 + [c'\,c']\,k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} v_1' = \frac{v_1}{m_1} &= a_1'\,k_1 + b_1'\,k_1 + c_1'\,k_3 \\ v_2' = \frac{v_2}{m_2} &= a_2'\,k_1 + b_2'\,k_2 + c_2'\,k_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_1 &= v_1'\,m_1 \qquad v_2 = v_2'\,m_2 \qquad v_3 = v_3'\,m_3 \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler nach der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{r}} \text{ oder } = \sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \tag{12}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn die mittleren Fehler $m_1\ m_2\ m_3$ [s. o. bei (8)] *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so muss *nach* der Ausgleichung vermöge (12), $m = 1$ werden.

Die Werte $v_1'\ v_2'\ v_3'\ \ldots$ sind reine Verhältniszahlen, deren mehr oder minder bedeutende Abweichung von 1 einen bequemen Einblick in die Fehlerverteilung und in die Brauchbarkeit der a priori geschätzten $m_1\ m_2\ m_3\ \ldots$ giebt.

Wenn die Ausgleichung nicht das erwartete $m = 1$ giebt, sondern wenn aus der Formel (12) etwa $m = M$ hervorgeht, so ist es angezeigt, alle a priori geschätzten mittleren Fehler im Verhältnis $M : m$ zu ändern.

§ 41. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$.

Die Berechnung des mittleren Gewichtseinheitsfehlers geschieht nach (8) § 37. S. 116, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}} \text{ bzw. } \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{1}$$

Wir werden für die Folge in der Regel nur von der Summe $[v\,v]$ reden, weil im Falle ungleicher Gewichte die Summe $[p\,v\,v]$ nach § 40. leicht an die Stelle von $[v\,v]$ gesetzt werden kann.

Nach Vollendung der Ausgleichung kann man die einzelnen v quadrieren und addieren, und hat damit unmittelbar $[v\,v]$.

Statt $[v\,v]$ aus den einzelnen v zu bilden, kann man, wie auch früher bei vermittelnden Beobachtungen, noch andere Wege einschlagen.

Hiezu nehmen wir vor Allem die Ausdrücke für die einzelnen v nach (9) § 39. S. 119 nochmals vor:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ v_3 &= a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \\ v_4 &= a_4 k_1 + b_4 k_2 + c_4 k_3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Hieraus findet man:

$$\left.\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,k_1 k_1 + 2\,[a\,b]\,k_1 k_2 + 2\,[a\,c]\,k_1 k_3 \\ + \ [b\,b]\,k_2 k_2 + 2\,[b\,c]\,k_2 k_3 \\ + \ [c\,c]\,k_3 k_3 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und vergleicht man dieses mit den Normalgleichungen (10) § 39. S. 119, so hat man sofort:

$$[v\,v] = -k_1 w_1 - k_2 w_2 - k_3 w_3 = -[w\,k] \tag{4}$$

Ausserdem kann man die allgemeine Umformung (20) am Schluss von § 27. S. 87 anwenden, welche für (3) ergiebt:

$$[v\,v] = \frac{([a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3)^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3)^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{([c\,c\,.\,2]\,k_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung der w nach (10) § 39. S. 119 und entsprechend $[w_2\,.\,1]$ u. s. w.:

$$[v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Diese Berechnung kann man ebenso an die Elimination der Normalgleichungen anhängen, wie dieses mit $[v\,v] = [l\,l\,.\,u]$ bei den vermittelnden Beobachtungen ge-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schehen ist, d. h. man fügt den Normalgleichungen das Schlussglied 0 zu, und erhält dann folgendes System der allmählich reduzierten Normalgleichungen:

$$\begin{array}{rrrr}
\underline{[a\,a]\,k_1} + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 & & & \\
\underline{[b\,b]\,k_2} + [b\,c]\,k_3 + w_2 & \underline{[b\,b\,.\,1]\,k_2} + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] & & \\
\underline{[c\,c]\,k_3} + w_3 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_3} + [w_3\,.\,1] & & \\
\underline{0} & \underline{[0\,.\,1]} & & \\
 & \underline{[c\,c\,.\,1]\,k_2} + [w_3\,.\,2] & & \\
 & \underline{[0\,.\,2]} & & \\
 & \underline{[0\,.\,3]} & &
\end{array}$$

Das Schlussglied $[0\,.\,3]$ ist dann $= -[v\,v]$.

§ 42. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Elemente.

Mit der Theorie von § 39. und § 41. kann man bereits die gewöhnlichen Ausgleichungen bedingter Beobachtungen machen, wozu der erste Teil (1)—(8) der Formelzusammenstellung von § 43. gehört. Namentlich für Geodäsie-Studium ist zu raten, nach Betrachtung des ersten Teiles von § 44. (1)—(8) nun sofort zu den Triangulierungsausgleichungen unseres II. Kapitels überzugehen. Indessen der deduktive Gang unserer Gesamt-Theorie führt uns zum Funktions-Gewicht.

Wir betrachten eine Funktion F der ausgeglichenen Beobachtungen x, nämlich:

$$F = f_0 + f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 \tag{1}$$

Die Funktion F (welche z. B. bei einer Triangulierung eine Dreiecksseite vorstellt) kann nicht alle x enthalten, sondern höchstens so viele, als deren unabhängig sind, es muss also immer ein Teil der Coefficienten f gleich Null sein.

Es wird nun darauf ankommen, F als eine Funktion der Beobachtungen l darzustellen, etwa in dieser Form:

$$F = F_0 + F_1\,l_1 + F_2\,l_2 + F_3\,l_3 + F_4\,l_4 \tag{2}$$

und zwar kommen hierin *alle* l vor.

Indem wir die Gewichte der l als gleich, $= 1$, annehmen, erhalten wir aus (2) das Gewicht von F nach dem Gesetz von § 5. durch die Gleichung:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{1} + \frac{F_2^2}{1} + \frac{F_3^2}{1} + \frac{F_4^2}{1} = \left[F\,F\right] \tag{3}$$

Um eine Beziehung zwischen (1) und (2) zu gewinnen, und zwar vor Allem eine Beziehung zwischen x und l, haben wir nach (3) und (9) § 39. S. 119:

$$\left.\begin{array}{ll}
x_1 = l_1 + v_1 & v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\
x_2 = l_2 + v_2 & v_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\
x_3 = l_3 + v_3 & v_3 = a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\
x_4 = l_4 + v_4 & v_4 = a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3
\end{array}\right\} \tag{4}$$

Damit wird (1) zunächst:

$$\left.\begin{array}{l}
F = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \\
\qquad + f_1\,v_1 + f_2\,v_2 + f_3\,v_3 + f_4\,v_4
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Wenn man auch den zweiten Teil (rechts) von (4) berücksichtigt, und alles Gleichartige in Summenklammern fasst, so wird (5):

$$\left.\begin{array}{l}
F = f_0 + [f\,l] \\
\qquad + [a\,f]\,k_1 + [b\,f]\,k_2 + [c\,f]\,k_3
\end{array}\right\} \tag{6}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Korrelaten k müssen eliminiert werden, und dazu dienen die früheren Normalgleichungen (10) § 39. S. 119, welche wir mit Rücksicht auf (5) § 39. S. 119 so schreiben:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1) & [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + [a\,l] + a_0 = 0 \\ r_2) & [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [b\,l] + b_0 = 0 \\ r_3) & [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [c\,l] + c_0 = 0 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Um nun $k_1\ k_2\ k_3$ aus (6) und (7) zu eliminieren, multiplizieren wir die (7) mit vorerst unbestimmt gelassenen neuen Coefficienten $r_1\ r_2\ r_3$, und addieren hiezu (6). Denken wir das ausgeführt, so verfügen wir über die zunächst unbestimmt gelassenen $r_1\ r_2\ r_3$ so, dass die Glieder mit $k_1\ k_2\ k_3$ verschwinden, d. h. wir haben die

Übertragsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,r_1 + [a\,b]\,r_2 + [a\,c]\,r_3 + [a\,f] = 0 \\ [a\,b]\,r_1 + [b\,b]\,r_2 + [b\,c]\,r_3 + [b\,f] = 0 \\ [a\,c]\,r_1 + [b\,c]\,r_2 + [c\,c]\,r_3 + [c\,f] = 0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Weiterführung der angegebenen Operation mit (6) und (7) giebt, nachdem (8) festgestellt ist, vollends:

$$\left.\begin{array}{rl} F = & f_0 + [f\,l] \\ & + (a_0 + [a\,l])\,r_1 + (b_0 + [b\,l])\,r_2 + (c_0 + [c\,l])\,r_3 \end{array}\right\} \quad (9)$$

oder durch Ordnen nach l, wie es (2) verlangt:

$$\left.\begin{array}{rl} F = & f_0 + a_0\,r_1 + b_0\,r_2 + c_0\,r_3 \\ & + (f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + e_1\,r_3)\,l_1 \\ & + (f_2 + a_2\,r_1 + b_2\,r_2 + c_2\,r_3)\,l_2 \\ & + (f_3 + a_3\,r_1 + b_3\,r_2 + c_3\,r_3)\,l_3 \\ & + (f_4 + a_4\,r_1 + b_4\,r_2 + c_4\,r_3)\,l_4 \end{array}\right\} \quad (10)$$

Damit ist erreicht, was in (2) erstrebt wurde, nämlich die Entwicklung von F als lineare Funktion der l, wobei die Coefficienten sind:

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + c_1\,r_3 \\ F_2 = f_2 + a_2\,r_1 + b_2\,r_2 + c_2\,r_3 \\ F_3 = f_3 + a_3\,r_1 + b_3\,r_2 + c_3\,r_3 \\ F_4 = f_4 + a_4\,r_1 + b_4\,r_2 + c_4\,r_3 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Wir haben nun also folgendes Verfahren:

Nachdem die Coefficienten $f_1\ f_2\ f_3\ f_4$ der Funktion (1), deren Gewicht bestimmt werden soll, festgestellt sind, bildet man die Summen $[a\,f]\ [b\,f]\ [c\,f]$, welche als Absolutglieder an die Normalgleichungen angehängt, die Übertragungsgleichungen (8) geben. Diese löst man nach $r_1\ r_2\ r_3$ auf, setzt diese r in (11), und kann damit alle F ausrechnen, deren Quadrierung nach (3) die gesuchte Gewichts-Reciproke giebt.

In einzelnen Fällen mag dieses Verfahren am Platz sein, jedenfalls ist es insofern anschaulich, als es genau dem Wege der Ausgleichung selbst folgt, denn die Übertragungs-Coefficienten r treten an Stelle der Korrelaten k, und die F spielen die Rolle der v.

Indessen sind wir gar nicht genötigt, die einzelnen F auszurechnen, um zu $[F\,F]$ zu gelangen, ebensowenig, als es in § 28. nötig war, die einzelnen $\alpha\ \beta\ \ldots$ aufzufinden, um $[\alpha\,\alpha]\ [\alpha\ \beta]\ \ldots$ zu bestimmen, oder in § 27. die einzelnen v zu haben, um $[v\,v]$ zu erhalten. Genau nach Analogie dieser letzteren Umformung (8) § 27. S. 85 können wir aus (11) und (8) folgendes ableiten:

$$\frac{1}{P} = (F\,F) = [f\,f] - \left\{ \frac{[a\,f]^2}{[a\,a]} + \frac{[b\,f\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[c\,f\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \right\} \quad (12)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ausrechnung hievon wird einfach an die Korrelaten-Elimination angehängt, ebenso wie früher bei (10) § 29. S. 93.

Die Gleichung (12) zeigt deutlich, wie durch den Zutritt der überschüssigen Beobachtungen das Gewicht P gewachsen ist. Es ist nämlich $[ff]$ der reciproke Wert des Gewichtes einer Funktion *nicht* ausgeglichener Beobachtungen, welche zur Berechnung der Funktion gerade hinreichend wären, alle Glieder der Klammer $\{\ldots\}$ sind positiv, es wird also $\frac{1}{P}$ durch den Zutritt dieser Klammer verkleinert, oder P vergrössert.

Wenn die Beobachtungsgewichte *nicht* alle $= 1$ sind, wie bisher angenommen ist, so treten die schon in § 40. erwähnten Änderungen ein, und die Schlussformel wird dann statt (12):

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{FF}{p}\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \left\{ \frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bf}{p}.1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}.1\right]} + \frac{\left[\frac{cf}{p}.2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}.2\right]} \right\} \tag{13}$$

Alles, was die Formel (12) bzw. (13) verlangt, kann man auch in eine mechanische Regel fassen, welche so lautet:

Man fügt zu dem System der Bedingungsgleichungen eine fingierte Gleichung mit den Coefficienten f hinzu, also:

$$\left.\begin{array}{ll} k_1) & a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 \ldots + w_1 = 0 \\ k_2) & b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 \ldots + w_2 = 0 \\ k_3) & c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 \ldots + w_3 = 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Zusatz} & f_1 v_1 + f_2 v_2 + f_3 v_3 + f_4 v_4 \ldots\ldots = 0 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Nun rechnet man gerade so weiter, wie wenn man statt der Absolutglieder w die Coefficienten $[af]$ $[bf]$ . . . $[ff]$ als Schlussglieder hätte:

$$\left.\begin{array}{rl} \underline{[a\,a]\,k_1} + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + \ldots [a\,f] = 0 \\ \underline{[b\,b]\,k_2} + [b\,c]\,k_3 + \ldots [b\,f] = 0 \\ \underline{[c\,c]\,k_3} + \ldots [c\,f] = 0 \\ \ldots\ldots \\ \underline{[f\,f]} \end{array}\right\} \tag{15}$$

Eliminiert man nun allmählich k_1 k_2 k_3, so bleibt ein Schlussglied übrig, welches $= \frac{1}{P}$ nach (12) ist.

Für die Funktion F nach der Ausgleichung kann man noch eine neue Form herstellen, indem man (9) mit (5) § 39. S. 119 verbindet, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{array}{rl} F = & F_0 + f_1\ l_1 + f_2\ l_2 + f_3\ l_3 + f_4\ l_4 \\ & + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \end{array}\right\} \tag{16}$$

$$\text{oder } F = (F) + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \tag{17}$$

$$F = (F) + [r\,w]$$

Wenn also (F) der Funktionswert *vor* der Ausgleichung war, so erhält man F *nach* der Ausgleichung durch Zufügung von $r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3$, d. h. Zufügung solcher Teile, welche verschwinden, bzw. unnötig werden, wenn keine Widersprüche w zu tilgen sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 43. Zusammenstellung der Formeln für Ausgleichung bedingter Beobachtungen.

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Gemessene Grössen} & l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \ldots & l_n \\ \text{Gewichte} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \ldots & p_n \\ \text{Verbesserungen} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \ldots & v_n \\ \text{Resultate} & x_1 = l_1 + v_1 & x_2 = l_2 + v_2 & x_3 = l_3 + v_3 & x_4 = l_4 + v_4 \ldots & x_n = l_n + v_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Unbekannten x:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + \ldots a_n x = 0 \\ b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + \ldots b_n x_n = 0 \\ c_0 + \underbrace{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4 + \ldots c_n x_n}_{\text{Anzahl} = n} = 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Von hier an schreiben wir immer $n = 4$, $r = 3$ und haben damit:

Widersprüche:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4 = w_1 \\ b_0 + b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4 = w_2 \\ c_0 + c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4 = w_3 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Das Vorzeichen der Widersprüche w bestimmt sich durch die Formel:

$$w = \textit{Beobachtung} - \textit{Soll}. \quad (3^*)$$

Bedingungsgleichungen, bezogen auf die Verbesserungen v:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a\,a}{p}\right] k_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_3 + w_1 = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] k_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_3 + w_2 = 0 \\ \left[\frac{a\,c}{p}\right] k_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] k_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] k_3 + w_3 = 0 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Normalgleichungen werden nach k_1 k_2 k_3 aufgelöst, dann werden die v berechnet mittelst der Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 \\ p_2 v_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 \\ p_3 v_3 = a_3 k_1 + b_3 k_2 + c_3 k_3 \end{array}\right\} \quad (6$$

Beim Anschreiben dieser Gleichungen folgt man den Bedingungsgleichungen (4) nach Vertikalreihen.

Indem man die v zu den Beobachtungen l hinzufügt, erhält man die x, nämlich:

$$x_1 = l_1 + v_1 \qquad x_2 = l_2 + v_2 \qquad x_3 = l_3 + v_3 \qquad x_4 = l_4 + v_4 \quad (7)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{r}} \tag{8}$$

Die hiezu nötige Summe $[p\,v\,v]$ kann man unmittelbar aus den einzelnen v berechnen; ausserdem hat man die Kontrolformeln:

$$[p\,v\,v] = -[w\,k] \tag{8*}$$

oder

$$[p\,v\,v] = \frac{w_1^2}{[a\,a]} + \frac{[w_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[w_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{8**}$$

Man betrachtet nun eine Funktion der ausgeglichenen x:

$$F = f_1\,x_1 + f_2\,x_2 + f_3\,x_3 + f_4\,x_4 \tag{9}$$

welche jedoch nicht alle x enthalten kann.

Es soll das Gewicht P dieser Funktion bestimmt werden.

Zu diesem Zweck berechnet man die Summen

$$\left[\frac{a\,f}{p}\right] \qquad \left[\frac{b\,f}{p}\right] \qquad \left[\frac{c\,f}{p}\right] \tag{10}$$

und

$$\left[\frac{f\,f}{p}\right] \tag{11}$$

Zur Weiterrechnung hat man nun zwei Wege, einen praktisch umständlicheren mit den Übertragungs-Coefficienten und einen kürzeren durch Eliminationserweiterung.

Die Methode der Übertragungs-Coefficienten, welche theoretisch übersichtlicher ist, bedarf des Quadratgliedes (11) nicht, sondern bildet aus den ursprünglichen Coefficienten der Normalgleichungen (5) und den neu berechneten Coefficienten (10) die Übertragungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left[\frac{a\,a}{p}\right] r_1 + \left[\frac{a\,b}{p}\right] r_2 + \left[\frac{a\,c}{p}\right] r_3 + \left[\frac{a\,f}{p}\right] &= 0 \\
\left[\frac{a\,b}{p}\right] r_1 + \left[\frac{b\,b}{p}\right] r_2 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] r_3 + \left[\frac{b\,f}{p}\right] &= 0 \\
\left[\frac{a\,c}{p}\right] r_1 + \left[\frac{b\,c}{p}\right] r_2 + \left[\frac{c\,c}{p}\right] r_3 + \left[\frac{c\,f}{p}\right] &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Diese Gleichungen werden nach $r_1\ r_2\ r_3$ aufgelöst, und dann folgt nach Analogie der v in (6):

$$\left.\begin{aligned}
F_1 &= f_1 + a_1\,r_1 + b_1\,r_2 + c_1\,r_3 \\
F_2 &= f_2 + a_2\,r_1 + b_2\,r_2 + c_2\,r_3 \\
F_3 &= f_3 + a_3\,r_1 + b_3\,r_2 + c_3\,r_3 \\
F_4 &= f_4 + a_4\,r_1 + b_4\,r_2 + c_4\,r_3
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Aus diesen einzelnen F bildet man:

$$\frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} + \frac{F_4^2}{p_4} = \left[\frac{F\,F}{p}\right] = \frac{1}{P} \tag{14}$$

damit hat man die Reciproke des gesuchten Gewichtes P, und den mittleren Fehler M der betrachteten Funktion F:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} \tag{15}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Bei dem zweiten oben erwähnten Berechnungsgang hängt man die Glieder (10) und (11) an die Elimination der Normalgleichungen an, und bildet der Reihe nach folgende Systeme:

$$\left.\begin{array}{llllll} \left[\frac{a\,a}{p}\right] & \left[\frac{a\,b}{p}\right] & \left[\frac{a\,c}{p}\right] & \left[\frac{a\,f}{p}\right] & & \\ & \left[\frac{b\,b}{p}\right] & \left[\frac{b\,c}{p}\right] & \left[\frac{b\,f}{p}\right] & \left[\frac{b\,b}{p}.1\right] & \left[\frac{b\,c}{p}.1\right] \quad \left[\frac{b\,f}{p}\right. \\ & & \left[\frac{c\,c}{p}\right] & \left[\frac{c\,f}{p}\right] & \left[\frac{c\,c}{p}.1\right] & \left[\frac{c\,f}{p}.1\right] \quad \left[\frac{c\,c}{p}.2\right] \quad \left[\frac{c}{p}.2\right] \\ & & & \left[\frac{f\,f}{p}\right] & \left[\frac{f\,f}{p}.1\right] & \left[\frac{f\,f}{p}.2\right] \\ & & & & & \left[\frac{f\,f}{p}.3\right] = \left[\frac{F\,F}{p}\right] = \frac{1}{P} \end{array}\right\} \quad (16)$$

Alle Glieder, in welchen f nicht vorkommt, sind hiebei dieselben, wie die schon bei der Elimination der k aus (5) gebrauchten. Wenn man nach diesem Schema verfährt, so thut man nichts anderes, als was die Formel (13) § 42. S. 124 vorschreibt.

Wenn die Gewichte p in der Form von mittleren Fehlern a priori gegeben sind, so kommen die Formen (5) bis (12) § 40. S. 121 in Anwendung.

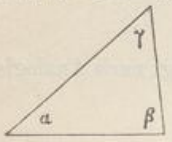
Den Funktionswert F nach der Ausgleichung rechnet man wohl immer unmittelbar nach (9), indem man die ausgeglichenen x einsetzt; indessen besteht hiefür auch die Formel (16) oder (17) von § 42. S. 125:

$$F = F_0 + f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 + f_4 l_4 + r_1 w_1 + r_2 w_2 + r_3 w_3 \quad (17)$$

§ 44. Ausgleichung der 3 Winkel eines ebenen Dreiecks.

Als einfaches Beispiel zur Erläuterung der im vorigen § 43. zusammengestellten Formeln nehmen wir die Ausgleichung der Winkel eines ebenen Dreiecks (welche in § 10. S. 31—35 bereits nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels behandelt worden ist).

$\alpha+\beta+\gamma-180°=w.$



Die Nummern der Gleichungen entsprechen denen des vorigen §. 43.

Gemessene Winkel	l_1	l_2	l_3	
Gewichte . . .	1	1	1	(1)
Verbesserungen .	v_1	v_2	v_3	
Resultate . . .	$x_1 = l_1 + v_1$	$x_2 = l_2 + v_2$	$x_3 = l_3 + v_3$	

Bedingungsgleichung, bezogen auf die x:

$$-180° + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (2)$$

Widerspruch:

$$-180° + l_1 + l_2 + l_3 = w \quad (3)$$

Bedingungsgleichung, bezogen auf die v:

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0 \quad (4)$$

Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

$$a_1 = +1 \qquad a_2 = +1 \qquad a_3 = +1 \quad \text{und} \quad w_1 = w$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Coefficienten der Normalgleichungen:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = 3 \qquad \left[\frac{a\,b}{p}\right] = 0 \qquad \left[\frac{a\,c}{p}\right] = 0 \ldots$$

Normalgleichung: $3k + w = 0$

Auflösung der Normalgleichung:

$$k = -\frac{w}{3} \tag{5}$$

Verbesserungen:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \qquad v_2 = -\frac{w}{3} \qquad v_3 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

Ausgeglichene Dreieckswinkel:

$$x_1 = l_1 - \frac{w}{3} \qquad x_2 = l_2 - \frac{w}{3} \qquad x_3 = l_3 - \frac{w}{3} \tag{7}$$

Mittlerer Fehler einer Messung vom Gewicht 1, d. h. eines gemessenen Winkels vor der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{1}} = \frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Die Funktion, deren Gewicht bestimmt werden soll, sei:

$$F = x_1$$

d. h. es soll das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels bestimmt werden; es sind also die Funktions-Coefficienten sehr einfach:

$$f_1 = 1 \qquad f_2 = 0 \qquad f_3 = 0 \tag{9}$$

$$\left[\frac{a\,f}{p}\right] = 3 \qquad \left[\frac{b\,f}{p}\right] = 0 \qquad \left[\frac{c\,f}{p}\right] = 0 \tag{10}$$

Die Übertragungsgleichung wird:

$$3r + 1 = 0$$

Die Auflösung der Übertragungsgleichung giebt also sehr einfach:

$$r = -\frac{1}{3} \tag{12}$$

Auch die Berechnung der F wird in unserem Falle sehr kurz:

$$F_1 = +\frac{2}{3} \qquad F_2 = -\frac{1}{3} \qquad F_3 = -\frac{1}{3} \tag{13}$$

$$\left[\frac{F\,F}{p}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \tag{14}$$

$$M = \frac{w}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{w}{3}\sqrt{2.} \tag{15}$$

Nun hätte man aber die Funktion F auch auf *anderem* Wege berechnen können, nämlich x_1 auf dem Umwege über x_2 und x_3 ist:

womit:

$$x_1 = F = 180° - x_2 - x_3$$
$$f_1 = 0 \qquad f_2 = -1 \qquad f_3 = -1 \tag{9*}$$

$$3r - 2 = 0 \qquad r = +\frac{2}{3} \tag{12*}$$

$$F_1 = +\frac{2}{3} \qquad F_2 = -\frac{1}{3} \qquad F_3 = -\frac{1}{3} \tag{13*}$$

Diese F_1 F_2 F_3 sind also dieselben, wie im ersten Fall bei (13), obgleich die Funktion F selbst eine andere geworden ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach dem zweiten Verfahren der Gewichtsberechnung haben wir mit Anwendung auf (9) zuerst das Glied zu berechnen:

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = 1^2 + 0^2 + 0^2 \tag{11}$$

Die Formel (13) § 42. S. 125 reduziert sich in unserem Falle, da nur *eine* Bedingungsgleichung da ist, auf:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\cdot 1\right] = \left[\frac{ff}{p}\right] - \frac{\left[\frac{af}{p}\right]}{\left[\frac{aa}{p}\right]}\left[\frac{af}{p}\right] \\ \text{Dieses giebt mit den Coefficienten von (5) und von (10):} \\ \left[\frac{ff}{p}\cdot 1\right] = 1 - \frac{1}{3}1 = \frac{2}{3} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Dieses stimmt überein mit (14), worauf auch M ebenso wie bei (15) sich ergiebt.

§ 45. Partielle Ausgleichung.

In Ausnahmsfällen kann es nützlich sein, die Bedingungsgleichungen einer Ausgleichung nicht alle gemeinsam zu erfüllen, sondern etwa einen Teil derselben zuerst für sich zu behandeln, und die Erfüllung der übrigen Gleichungen durch eine zweite Ausgleichung zu bewirken.

Wir nehmen einen Fall mit 3 Gleichungen und 4 Beobachtungen. Die Verbesserungen, deren Quadratsumme $[\delta\,\delta]$ = Minimum werden soll, seien $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4$.

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,\delta_1 + a_2\,\delta_2 + a_3\,\delta_3 + a_4\,\delta_4 + w_1 = 0 \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + b_4\,\delta_4 + w_2 = 0 \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + c_4\,\delta_4 + w_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 = 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 = 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] = 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Korrektionsformeln:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \\ \delta_2 = a_2\,k_1 + b_2\,k_2 + c_2\,k_3 \\ \delta_3 = a_3\,k_1 + b_3\,k_2 + c_3\,k_3 \\ \delta_4 = a_4\,k_1 + b_4\,k_2 + c_4\,k_3 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dieses ist der normale Rechnungsgang der vollständigen Ausgleichung, ohne Trennung der Bedingungsgleichungen.

Wir wollen aber nun annehmen, man sei aus irgend einem Grunde veranlasst, die erste Bedingungsgleichung zuerst für sich zu behandeln.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Mit einer Korrelate k_1' giebt die erste Bedingungsgleichung die eine Normalgleichung:

$$[a\,a]\,k_1' + w_1 = 0 \qquad k_1' = -\frac{1}{[a\,a]}\,w_1 \tag{5}$$

und die entsprechenden Korrektionen, welche wir, zum Unterschied von den vollständigen Korrektionen δ, mit u bezeichnen wollen, sind:

$$u_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 \qquad u_2 = -\frac{a_2}{[a\,a]}\,w_1 \qquad u_3 = -\frac{a_3}{[a\,a]}\,w_1 \qquad u_4 = -\frac{a_4}{[a\,a]}\,w_1 \tag{6}$$

Wir führen sogleich auch die zweiten Korrektionen v ein, so dass ist:

$$\delta_1 = u_1 + v_1 \qquad \delta_2 = u_2 + v_2 \qquad \delta_3 = u_3 + v_3 \qquad \delta_4 = u_4 + v_4 \tag{7}$$

Setzt man diese Ausdrücke (6) und (7) in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (1), so entstehen neue Bedingungsgleichungen, welche sich nur noch auf die v beziehen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + a_4\,v_4 + 0 &= 0 \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + b_3\,v_3 + b_4\,v_4 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + c_3\,v_3 + c_4\,v_4 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die Ausrechnung mit den u nach (6) giebt hiebei:

$$\left.\begin{aligned} [w_2\,.\,1] &= w_2 - b_1\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 - b_2\frac{a_2}{[a\,a]}\,w_1 - \ldots = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,w_1 \\ [w_3\,.\,1] &= w_3 - c_1\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 - c_2\frac{a_2}{[a\,a]}\,w_1 - \ldots = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,w_2 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

d. h. diese Glieder sind dieselben, wie in (3).

Das System (8) für sich allein behandelt würde folgende Ausgleicnung geben:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1'' + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + 0 &= 0 \\ [a\,b]\,k_1'' + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [a\,c]\,k_1'' + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{10*}$$

k_2 und k_3 sind dieselben Korrelaten wie in (3), dagegen ist k_1'' gegen früher geändert. Die Weiterrechnung giebt nach (8) für v_1:

$$v_1 = a_1\,k_1'' + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{11}$$

Hiezu nehmen wir nach (6) und (4):

$$u_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 \tag{12}$$

$$\delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{13}$$

(11) und (12) zusammen geben:

$$u_1 + v_1 = a_1\,(k_1'' - \frac{1}{[a\,a]}\,w_1) + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{14}$$

Die Vergleichung von (2) und (10) giebt aber:

$$[a\,a]\,k_1 + w_1 = [a\,a]\,k_1''$$

und damit geht (14) in (13) über:

$$u_1 + v_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 = \delta_1 \tag{15}$$

Dasselbe gilt auch für $\delta_2\ \delta_3\ \delta_4$, und wir haben nun folgenden Satz:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man eine Bedingungsgleichung $a.$ von (1) zuerst für sich behandelt, und daraus erste Verbesserungen u ableitet, und wenn man dann die erstmals verbesserten Beobachtungen, wie wenn sie Originalmessungen wären, nochmals mit Rücksicht auf alle Bedingungsgleichungen ausgleicht, so bekommt man dieselben Schlusswerte, wie wenn man alle Gleichungen zusammen in *einer* Ausgleichung behandelt hätte.

Dieser Satz gilt für beliebig viele Gleichungen in beliebigen Trennungen.

In dieser Form kann dieser Satz (suppl. theoriae combinationis art. 18. und 19.) z. B. auf Triangulierungen angewendet werden, indem man die leicht erfüllbaren Winkelsummengleichungen zuerst für sich behandelt (vgl. *Nell*, Schleiermachers Methode der Winkelausgleichung in einem Dreiecksnetz, Zeitschr. f. Verm. 1881, S. 1 u. ff.).

Eine Verfeinerung der partiellen Ausgleichung kann man noch erzielen durch Einführung *reduzierter Bedingungsgleichungen*, zu welchen wir nun übergehen.

Wir schreiben zunächst willkürlich:

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b_1'\,v_1 + b_2'\,v_2 + b_3'\,v_3 + b_4'\,v_4 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ c_1'\,v_1 + c_2'\,v_2 + c_3'\,v_3 + c_4'\,v_4 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Dabei sind die Coefficienten b' c' dieselben Werte, welche wir schon in § 26. als Coefficienten der reduzierten Fehlergleichungen kennen gelernt haben, nämlich:

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \tag{17}$$

$$[b'\,b'] = [b\,b\,.\,1] \qquad [b'\,c'] = [b\,c\,.\,1] \qquad [c'\,c'] = [c\,c\,.\,1]$$

Die Absolutglieder von (16) sind dieselben wie in (3) und (10), nämlich:

$$[w_2\,.\,1] = w_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,w_1 \qquad [w_3\,.\,1] = w_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,w_1 \tag{18}$$

Die reduzierten Bedingungsgleichungen (16) geben daher dasselbe Normalgleichungssystem (3), das wir früher schon als System reduzierter Normalgleichungen kennen gelernt haben.

Denkt man sich dieses System nach k_2 und k_3 aufgelöst, und rechnet ganz formell mit den reduzierten Bedingungsgleichungen (16) weiter, so erhält man:

$$v_1 = b_1'\,k_2 + c_1'\,k_3\ ,\ v_2 = b_2'\,k_2 + c_2'\,k_3\ ,\ v_3 = b_3'\,k_2 + c_3'\,k_3\ ,\ v_4 = b_4'\,k_2 + c_4'\,k_3 \tag{19}$$

und wir behaupten nun, dass diese v mit den schon oben bei (6) gegebenen u zusammen, *dieselben* Korrektionen δ geben, welche man bei der ungetrennten Ausgleichung nach (4) erhalten würde. Um dieses zu beweisen, betrachten wir den ersten Wert δ_1 von (4):

$$\delta_1 = a_1\,k_1 + b_1\,k_2 + c_1\,k_3 \tag{20}$$

k_1 soll durch die erste Normalgleichung von (2) eliminiert werden, nämlich:

$$k_1 = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,k_2 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,k_3 - \frac{1}{[a\,a]}\,w_1$$

Dieses in (20) gesetzt giebt, nach w k_2 k_3 geordnet,

$$\delta_1 = -\frac{a_1}{[a\,a]}\,w_1 + \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right)k_2 + \left(c_1 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a_1\right)k_3 \tag{21}$$

Das erste Glied hievon ist $= u_1$ nach (6), und das übrige stimmt mit (19), es ist also in Übereinstimmung mit (7):

$$\delta_1 = u_1 + v_1 \quad \text{und ebenso} \quad \delta_2\ ,\ \delta_3\ ,\ \delta_4 \tag{22}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir haben also jetzt bewiesen, dass die erste Bedingungsgleichung a von (1) mit den Korrektionen u, und die zwei *reduzierten* Gleichungen (16) mit den Korrektionen v dasselbe leisten, wie die Gesamtausgleichung von (1).

Wir wollen das gefundene Ergebnis noch für den einfachen Fall zurechtlegen, dass alle Coefficienten $a = 1$ sind. (Anwendung auf Polygon-Züge.)

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n + w_1 &= 0 \\ b_1\,\delta_1 + b_2\,\delta_2 + b_3\,\delta_3 + \ldots + b_n\,\delta_n + w_2 &= 0 \\ c_1\,\delta_1 + c_2\,\delta_2 + c_3\,\delta_3 + \ldots + c_n\,\delta_n + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Die erste Gleichung allein giebt:

$$\text{erste Korrektionen} \quad u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u_n = -\frac{w_1}{n} \quad (24)$$

Reduzierte Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} b_1'\,v_1 + b_2'\,v_2 + b_3'\,v_3 + \ldots + b_n'\,v_n + w_2' &= 0 \\ c_1'\,v_1 + c_2'\,v_2 + c_3'\,v_3 + \ldots + c_n'\,v_n + w_3' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

wobei

$$b_1' = b_1 - \frac{[b]}{n} \qquad b_2' = b_2 - \frac{[b]}{n}\ldots \qquad w_2' = w_2 - \frac{[b]}{n}\,w_1$$

$$c_1' = c_1 - \frac{[c]}{n} \qquad c_2' = c_2 - \frac{[c]}{n}\ldots \qquad w_3' = w_3 - \frac{[c]}{n}\,w_1$$

Probe: $[b'] = 0 \qquad [c'] = 0$

Die zwei Gleichungen (25) werden wie Originalgleichungen mit gleichgewichtigen v weiter behandelt, und geben die zweiten Korrektionen v.

§ 46. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Als sehr selten anzuwendenden Fall betrachten wir die Aufgabe, dass man für 2 Funktionen die Gewichte berechnet habe und daraus auch das Gewicht einer neuen Funktion dieser Funktionen bestimmen will.

Der wichtigste Fall dieser Art besteht darin, dass man die Coordinaten X und Y und die Coordinatengewichte P_x und P_y eines Triangulierungspunktes berechnet hat, und damit irgend eine weitere Genauigkeitsfrage, z. B. Lage und Grösse einer Fehler-Ellipse, oder Distanz und Azimut beantworten will.

Die 2 ursprünglich betrachteten Funktionen seien:

$$X = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 + \ldots \qquad Y = f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 \quad (1)$$

und die zugehörigen Funktionsgewichte seien nach § 42. berechnet:

$$\frac{1}{P_x} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]} - \frac{[bf.1]^2}{[bb.1]} - \ldots \qquad \frac{1}{P_y} = [f'f'] - \frac{[af']^2}{[aa]} - \frac{[bf'.1]^2}{[bb.1]} - \ldots \quad (2)$$

Nun handelt es sich um eine neue Funktion:

$$(F) = r\,X + r'\,Y \quad (3)$$

Diese Funktion kann man sich vermöge (1) als Funktion der x dargestellt denken:

$$(F) = (r f_1 + r' f_1')\,x_1 + (r f_2 + r' f_2')\,x_2 + (r f_3 + r' f_3')\,x_3 + \ldots \quad (4)$$

und dann wird das Gewicht (P) hievon nach derselben Regel bestimmt wie (2), nämlich:

$$\frac{1}{(P)} = [(rf + r'f')^2] - \frac{[arf + ar'f']^2}{[aa]} - \frac{[(brf + br'f').1]^2}{[bb.1]} - \ldots \quad (5)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun ist die Summe

$$[(r f + r' f')^2] = [r^2 f^2 + 2 r r' f f' + r'^2 f'^2]$$
$$= r^2 [f f] + 2 r r' [f f'] + r'^2 [f'^2] \tag{6}$$

Dasselbe Bildungsgesetz gilt auch unmittelbar für das zweite Glied von (5), und dieses Gesetz gilt auch für alle folgenden Glieder von (5), wie man ebenso beweist, wie früher für vermittelnde Beobachtungen § 30.

Wir wollen dieses nur für [... 1] näher ausführen:

$$[b f . 1] = [b f] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f] \qquad [b f' . 1] = [b f'] - \frac{[a b]}{[a a]} [a f']$$

$$[(b r f + b r' f') . 1] = [b r f + b r' f'] - \frac{[a b]}{[a a]} [a r f + a r' f']$$

$$[(b r f + b r' f') . 1] = r [b f . 1] + r' [b f' . 1]$$

Dieses entspricht völlig der zweiten Gleichung der Gruppe (6) § 30., und auch alles Übrige gestaltet sich wie dort. Wir haben also die allgemeine Regel:

Wenn für 2 Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in folgender Form entwickelt sind:

$$\frac{1}{P_x} = [f f] - \left\{ \frac{[a f]^2}{[a a]} + \frac{[b f . 1]^2}{[b b . 1]} + \frac{[c f . 2]^2}{[c c . 2]} + \dots \right\} \tag{7}$$

$$\frac{1}{P_y} = [f' f'] - \left\{ \frac{[a f']^2}{[a a]} + \frac{[b f' . 1]^2}{[b b . 1]} + \frac{[c f' . 2]^2}{[c c . 2]} + \dots \right\} \tag{8}$$

so bestimmt man für eine Funktion:

$$(F) = r X + r' Y \tag{9}$$

das Gewicht (P) so: Man berechnet zuerst:

$$\frac{1}{P_{xy}} = [f f'] - \left\{ \frac{[a f] [a f']}{[a a]} + \frac{[b f . 1] [b f' . 1]}{[b b . 1]} + \frac{[c f . 2] [c f' . 2]}{[c c . 2]} + \dots \right\} \tag{10}$$

und dann ist:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + 2 r r' \frac{1}{P_{xy}} + r'^2 \frac{1}{P_y} \tag{11}$$

Wenn $r = r' = 1$ ist, so bekommt man eine ähnliche Regel wie am Schluss von § 30. S. 95, nämlich: Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x} = [\alpha\alpha] &= A A - \left\{ \frac{A_0 A_0}{[a a]} + \frac{A_1 A_1}{[b b . 1]} + \frac{A_2 A_2}{[c c . 1]} + \dots \right\} \\ \frac{1}{P_y} = [\beta\beta] &= B B - \left\{ \frac{B_0 B_0}{[a a]} + \frac{B_1 B_1}{[b b . 1]} + \frac{B_2 B_2}{[c c . 2]} + \dots \right\} \\ \text{dann berechnet man } [\alpha\beta] &= A B - \left\{ \frac{A_0 B_0}{[a a]} + \frac{A_1 B_1}{[b b . 1]} + \frac{A_2 B_2}{[c c . 2]} + \dots \right\} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

und damit ist:

$$\frac{1}{(P)} = [\alpha\alpha] + [\beta\beta] + 2 [\alpha\beta].$$

§ 47. Verschiedene Nebenbetrachtungen.

Die Bedingungen, welchen die Ausgleichung streng genügen soll, können in sehr verschiedenen Formen ausgedrückt werden, und die Bedingungsgleichungen dürfen mehrfach umgeformt werden, wenn nur das, was sie ausdrücken, sachlich erhalten bleibt.

Man darf also die Bedingungsgleichungen mit beliebigen Zahlen multiplizieren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

oder dividieren (was man bei *Fehler*gleichungen nicht darf, ohne die Gewichtsverhältnisse zu verändern); man darf z. B. auch aus 2 Bedingungsgleichungen a und b mit beliebigen Faktoren $m\ n$, $m'\ n'$, 2 neue Gleichungen $m\,a + n\,b$, $m'\,a + n'\,b$ bilden, und diese an Stelle der ersten benützen.

Bei all diesen Umformungen bleiben aber doch die Hauptresultate, nämlich die Verbesserungen v der Beobachtungen l, immer dieselben, denn die Aufgabe, $[v\,v]$ zu einem Minimum zu machen mit gewissen Nebenbedingungen, ist sachlich eine eindeutig bestimmte, und kann deswegen durch die algebraische *Form* der Auflösung nicht beeinflusst werden.

Eine weitere Frage betrifft die *Unabhängigkeit und Vollständigkeit* der Bedingungsgleichungen.

Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir die Gleichungen (4) und (10) von § 39. S. 119 nochmals vor:

Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + a_4\,v_4 + w_1 &= 0 \\ b_1\,v_1 + b_2\,v_2 + b_3\,v_3 + b_4\,v_4 + w_2 &= 0 \\ c_1\,v_1 + c_2\,v_2 + c_3\,v_3 + c_4\,v_4 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,k_1 + [a\,b]\,k_2 + [a\,c]\,k_3 + w_1 &= 0 \\ [a\,b]\,k_1 + [b\,b]\,k_2 + [b\,c]\,k_3 + w_2 &= 0 \\ [a\,c]\,k_1 + [b\,c]\,k_2 + [c\,c]\,k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wir haben bis jetzt angenommen, dass die Bedingungsgleichungen (1) unter sich unabhängig sind, d. h. dass keine in den übrigen enthalten ist. Wir wollen nun aber untersuchen, was für Folgen entstehen, wenn dieses nicht mehr der Fall ist, und setzen hiezu:

$$c_1 = \alpha\,a_1 + \beta\,b_1 \qquad c_2 = \alpha\,a_2 + \beta\,b_2 \ldots \qquad w_3 = \alpha\,w_1 + \beta\,w_2 \quad (3)$$

Dann werden auch die Coefficienten der Normalgleichungen nicht mehr unabhängig, nämlich es wird:

$$\left.\begin{aligned} [a\,c] &= \alpha^2\,[a\,a] + \beta\,[a\,b] \quad , \quad [b\,c] = \alpha\,[a\,b] + \beta\,[b\,b] \quad , \quad w_3 = \alpha\,w_1 + \beta\,w_2 \\ [c\,c] &= \alpha^2\,[a\,a] + \beta^2\,[b\,b] + 2\,\alpha\,\beta\,[a\,b] \qquad \text{oder} \qquad = \alpha\,[a\,c] + \beta\,[b\,c] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Die Determinantentheorie zeigt in kurzen Sätzen, dass dann die Unbekannten k sich nicht mehr bestimmen lassen, sondern in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erhalten werden.

Wir werden dieses auch mit unseren Symbolen $[b\,b\,.\,1]$ $[b\,c\,.\,1]$ u. s. w. verfolgen.

Die reduzierten Normalgleichungen nach (2) sind:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + [b\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,k_2 + [c\,c\,.\,1]\,k_3 + [w_3\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Hiebei ist wegen (4):

$$[b\,c\,.\,1] = [b\,c] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c] = \alpha\,[a\,b] + \beta\,[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,(\alpha\,[a\,a] + \beta\,[a\,b])$$

$$[b\,c\,.\,1] = \beta\,([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]) = \beta\,[b\,b\,.\,1]$$

Ähnlich findet sich $[c\,c\,.\,1] = \beta^2\,[b\,b\,.\,1]$ und $[w_3\,.\,1] = \beta\,[w_2\,.\,1]$, das System (5) heisst also:

$$\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,k_2 + \beta\,[b\,b\,.\,1]\,k_3 + [w_2\,.\,1] &= 0 \\ \beta\,[b\,b\,.\,1]\,k_2 + \beta^2\,[b\,b\,.\,1]\,k_3 + \beta\,[w_2\,.\,1] &= 0 \end{aligned}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Elimination von k_2 führt auf:

$$[c\,c\,.\,2]\,k_3 + [w_3\,.\,2] = 0$$

und zwar ist:

$$[c\,c\,.\,2] = \beta^2\,[b\,b\,.\,1] - \frac{\beta\,[b\,b\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,\beta\,[b\,b\,.\,1] = 0$$

$$[w_3\,.\,2] = \beta\,[w_2\,.\,1] - \frac{\beta\,[b\,b\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[w_2\,.\,1] = 0$$

also:

$$-k_3 = \frac{[w_3\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} = \frac{0}{0} \qquad (6)$$

Dasselbe gilt auch von den beiden anderen Unbekannten k_1 und k_2.

Der betrachtete Fall ist praktisch nicht unwichtig, weil es zuweilen vorkommt, dass *aus Versehen* eine Bedingungsgleichung angesetzt wird, welche in den übrigen bereits enthalten ist. Wenn z. B. in einer Nivellementsausgleichung ausser den einzelnen Polygonschlüssen auch noch der Schluss des Gesamtumfangspolygons als Bedingung angesetzt würde, so wäre das nichts anderes als die Summe der übrigen Bedingungsgleichungen, folglich nicht unabhängig.

Ob die Unbestimmtheit (6) sich in der Zahlenrechnung immer deutlich ausspricht, ist zweifelhaft; es kann wegen der Abrundungsfehler vorkommen, dass z. B. nicht genau $k = \frac{0{,}000}{0{,}000}$ entsteht,

$$\text{sondern etwa } k = \frac{0{,}002}{0{,}001} = 2$$

und wenn damit die Rechnung weiter geführt würde, so müsste etwas Widersinniges entstehen.

Ausser dem Falle nicht unabhängiger Bedingungsgleichungen, welchen wir hiemit erledigt haben, ist auch der Fall zu betrachten, dass eine Bedingungsgleichung *falsch* angesetzt, oder ganz weggelassen wird. Das hat an der Bildung und Auflösung der Normalgleichungen nichts Auffälliges zur Folge, äussert sich aber am Schlusse der ganzen Ausgleichung, nach Ausrechnung der Verbesserungen v, sehr unangenehm darin, dass die falsch angesetzte oder die vergessene Bedingungsgleichung nicht erfüllt ist.

Nach Diesem kann man noch die *Übereinstimmung verschiedener Funktionsformen und ihrer Gewichte nach der Ausgleichung* untersuchen:

Wir wollen hiebei die Ausgleichung eines Dreiecksnetzes mit Winkelmessungen als anschauliches Beispiel benützen. Die Funktion F, von welcher in § 42. die Rede war, sei eine Dreiecksseite, welche aus der Basis auf verschiedenen Wegen berechnet werden kann.

Vor der Ausgleichung werden diese verschiedenen Berechnungswege auch verschiedene Werte F ergeben, *nach* der Ausgleichung aber müssen alle Wege auf denselben Wert F führen. Man hat:

vor der Ausgleichung $(F) = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4$ (7)

nach der Ausgleichung $F = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4$ (8)

und hiefür kann man auch eine andere, sehr anschauliche Form finden, nämlich nach (18) § 42. S. 125:

$$\left.\begin{aligned} F = f_0 + f_1\,l_1 + f_2\,l_2 + f_3\,l_3 + f_4\,l_4 \\ + \quad r_1\,w_1 + r_2\,w_2 + r_3\,w_3 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

d. h. man kann den ausgeglichenen Wert der Funktion F nicht bloss mittelst der ausgeglichenen Werte x berechnen, sondern auch mittelst der Beobachtungswerte l selbst, indem man in letzterem Falle noch die Ergänzungsglieder $r_1 w_1$, $r_2 w_2$, $r_3 w_3$ zufügt. Wären alle w gleich Null, d. h. wären alle Bedingungsgleichungen durch die Beobachtungen l selbst befriedigt, so wäre keine Ausgleichung nötig, die x würden den l gleich zu nehmen sein, und die Formeln (7) und (9) würden in Folge des Wegfalls der w identisch.

Die Funktion F kann man auf verschiedenen Wegen aus den ausgeglichenen Werten x berechnen. Angenommen, man hätte statt (8) die Form gewählt:

$$F = f_0' + f_1' x_1 + f_2' x_2 + f_3' x_3 + f_4' x_4 \qquad (10)$$

wobei solche Glieder, welche in (8) fehlen, vorkommen, und umgekehrt Glieder, welche in (8) sich finden, nicht vorhanden sein werden; dann müssten aber doch die Formeln (8) und (10) *denselben* Wert F geben, denn (8) und (10) können nur in Beziehung stehen durch irgend welche Bedingungsgleichungen zwischen den x; solche Gleichungen sind aber nach der Ausgleichung alle streng erfüllt.

Man kann weiter fragen, ob die beiden verschiedenen Formen (8) und (10) derselben Funktion F nach der Ausgleichung auch auf gleiches Gewicht P führen.

Allerdings werden bei verschiedenen Annahmen der f auch die Coefficienten $[af]$ $[bf]$ u. s. w., und damit auch die Übertragungs-Coefficienten r verschieden, dagegen in der Formel (2) § 42. S. 123, nämlich:

$$F = F_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3 + F_4 l_4 \qquad (11)$$

werden die Coefficienten F_1 F_2 F_3 F_4 wieder immer dieselben, denn es handelt sich hier um eine Funktion *aller* Beobachtungen l, und diese Funktion kann von der *Form*, in welcher sie ursprünglich als Funktion einzelner x auftrat, ebensowenig beeinflusst sein, als die Ausgleichungsresultate v von der *Form* beeinflusst sind, in welcher die Bedingungsgleichungen in die Ausgleichung eingehen.

In dem kleinen Beispiel von § 44., Ausgleichung der 3 Winkel eines Dreiecks, finden wir dieses bestätigt:

Die erste Funktionsform giebt S. 129:	Die zweite Funktionsform giebt S. 129:
(9) $F = x_1$	(9*) $F = 180° - x_2 - x_3$
$f_1 = 1 \quad f_2 = 0 \quad f_3 = 0$	$f_1 = 0 \quad f_2 = -1 \quad f_3 = -1$
(12) $r = -\frac{1}{3}$	(12*) $r = +\frac{2}{3}$
(13) $F_1 = +\frac{2}{3}$, $F_2 = -\frac{1}{3}$, $F_3 = -\frac{1}{3}$	(13*) $F_1 = +\frac{2}{3}$, $F_2 = -\frac{1}{3}$, $F_3 = -\frac{1}{3}$

Ein *formeller* Beweis, dass die Coefficienten F in (11) unabhängig von der ersten Form der Funktion sind, ist nicht leicht zu führen; ein formeller Beweis ist aber auch kaum nötig, wenn man einsieht, dass sachlich die ausgeglichene Funktion F, indem sie nach (11) als eine Funktion aller Originalmessungen l sich darstellt, nur *einen* mittleren Fehler haben kann.

Wir betrachten noch das totale Differential von (11):

$$dF = F_1 dl_1 + F_2 dl_2 + F_3 dl_3 + F_4 dl_4 \qquad (12)$$

$F_1 dl_1$ stellt die Änderung der Funktion F vor, welche erzeugt wird, wenn man nur die Beobachtung l_1 um dl_1 ändert, und mit Beibehaltung aller anderen Beobachtungen l das ganze Ausgleichungsverfahren wiederholt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Überhaupt zeigen die einzelnen Glieder von (12), welchen Beitrag jeder Beobachtungsfehler dl zu dem Funktionsfehler dF liefert. Dieser Beitrag ist von der *Form* der Funktionsberechnung unabhängig.

§ 48. Günstigste Gewichts-Verteilung.

Der Schreibersche Satz.

Zum Abschluss der Ausgleichung bedingter Beobachtungen behandeln wir einen von General *Schreiber* gefundenen Satz in Bezug auf die Gewichtsverteilung bei bedingten Beobachtungen. Da dieser Satz bei trigonometrischen Ausgleichungen (Göttinger Basisnetz) gefunden wurde, und bei trigonometrischen Netzen seine Hauptanwendung findet, sprechen wir, im Interesse der Anschaulichkeit, den Satz selbst in trigonometrischer Anwendung aus:

> Wenn in einem Dreiecksnetz mit Bedingungs-Gleichungen *eine* Seite mit möglichst grossem Gewicht P bei konstanter Summe $[p]$ der Winkelmessungs-Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ bestimmt werden soll, so ist unter den hierzu möglichen Verteilungen der Gewichte $p_1, p_2 \ldots$ jedenfalls eine Verteilung, in welcher nur so viele Gewichte p wirklich vorkommen, als die Zahl der zur Bestimmung jener einen Seite unumgänglich nötigen Winkel (oder Richtungen u. s. w.) beträgt, während die übrigen Gewichte p alle $=$ Null zu setzen sind.

Der allgemeine Satz behandelt an Stelle einer Dreiecksseite irgend eine Funktion der ausgeglichenen Beobachtungen.

Das allereinfachste Beispiel hiefür besteht im arithmetischen Mittel mit ungleichen Gewichten.

Man habe n unabhängige Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ mit den Gewichten $p_1, p_2 \ldots p_n$. Die Messungen $l_1, l_2 \ldots l_n$ stehen mit einer Unbekannten x in folgenden Beziehungen:

$$x - a_1 l_1 = 0 \qquad x - a_2 l_2 = 0 \ldots \qquad x - a_n l_n = 0,$$

dann hat man zur Bestimmung von x die Gleichung:

$$x = \frac{[p\,a\,l]}{[p\,a\,a]} \tag{1}$$

und das Gewicht von x ist:

$$P = [p\,a\,a] = p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 + \ldots p_n a_n^2.$$

Fragt man nach dem Maximum von P in Hinsicht auf die Gewichte p und auf die Gewichts-*Verteilung* bei konstanter Summe $[p]$, so sieht man ohne weiteres ein, dass P am grössten wird, wenn man von allen Coefficienten $a_1, a_2 \ldots a_n$ den *grössten* auswählt, ihm das Gewicht $[p]$ zuteilt und alle anderen $p = Null$ setzt. Ist z. B. der erste Wert a_1 der grösste, so wird hiernach:

$$P = [p]\,a_1^2 \tag{2}$$

Man wird also *nur* diejenige Messung l machen, welche in günstigster Weise zur Bestimmung von x führt, und alle anderen l gar nicht messen.

(Dieses gilt natürlich nicht für den Fall, dass man zur Vermeidung einseitiger Fehler doch die anderen l auch misst. Von solchen praktischen Nebenrücksichten soll hier und bei der folgenden Aufgabe nicht die Rede sein.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ehe wir zu dem allgemeinen Satze übergehen, wollen wir noch ein einfaches Beispiel mit *einer* Bedingungsgleichung und 3 Beobachtungen vornehmen. Nach der Formel-Zusammenstellung von § 43. haben wir dafür folgende Gleichungen:

Bedingungsgleichung:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + w = 0 \tag{3}$$

Funktion:

$$F = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 \tag{4}$$

Übertragungs-Gleichung:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] r + \left[\frac{a\,f}{p}\right] = 0 \tag{5}$$

Gewichts-Coefficienten nach der Ausgleichung:

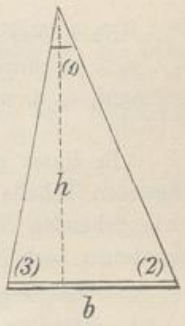
$$F_1 = f_1 + a_1 r_1 \quad , \quad F_2 = f_2 + a_2 r_2 \quad , \quad F_3 = f_3 + a_3 r_3 \tag{6}$$

Das Funktions-Gewicht nach der Ausgleichung P ist bestimmt durch:

$$\frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \frac{F_3^2}{p_3} \tag{7}$$

Diese Formeln (3)—(7), welche für eine Ausgleichung mit *einer* Bedingungsgleichung gelten, wenden wir auf ein Beispiel an:

Fig. 1.



In nebenstehender Fig. 1. handelt es sich um die Bestimmung der Höhe h eines Dreiecks, in welchem die Basis b und drei Winkel (1) (2) (3) gemessen sind. Es besteht eine Bedingungs-Gleichung entsprechend der Gleichung (3):

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$$

also: $a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 1 \quad , \quad a_3 = 1$

Die Funktion F ist in diesem Falle:

$$h = \frac{b}{sin\,(1)}\, sin\,(2)\, sin\,(3)$$

Um diese Funktion linear zu machen, brauchen wir:

$$\frac{d\,h}{d\,(1)} = b\, sin\,(2)\, sin\,(3)\left(\frac{-\,cos\,(1)}{sin^2\,(1)}\right) = -\,h\, cotg\,(1)$$

ebenso $$\frac{d\,h}{d\,(2)} = +\,h\, cotg\,(2) \text{ und } \frac{d\,h}{d\,(3)} = +\,h\, cotg\,(3)$$

Für das Maximum der Funktion, auf das es uns hier ankommt, kann man alles Konstante bei Seite lassen, und als lineare Funktion F in dem Sinne der Gleichung (4) können wir daher nehmen:

$$F = -\,cotg\,(1)\, x_1 + cotg\,(2)\, x_2 + cotg\,(3)\, x_3$$

Also wenn wir zur Abkürzung $cotg\,(1) = c_1$ u. s. w. schreiben, haben wir:

$$f_1 = -\,c_1 \qquad f_2 = +\,c_2 \qquad f_3 = +\,c_3 \tag{8}$$

Die allgemeine Gleichung (5) giebt hiemit:

$$\left[\frac{1}{p}\right] r + \left(-\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \frac{c_3}{p_3}\right) = 0$$

Auflösung:

$$r = \frac{\dfrac{c_1}{p_1} - \dfrac{c_2}{p_2} - \dfrac{c_3}{p_3}}{\left[\dfrac{1}{p}\right]} \tag{9}$$

Also nach (6): $$F_1 = -\,c_1 + r \qquad F_2 = c_2 + r \qquad F_3 = c_3 + r \tag{10}$$

und nach (7): $$\frac{1}{P} = \frac{(-\,c_1 + r)^2}{p_1} + \frac{(c_2 + r)^2}{p_2} + \frac{(c_3 + r)^2}{p_3} \tag{11}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses kann mit (9) und (10) noch auf manche andere Formen gebracht werden, welche nachher bei (15) und (16) mitgeteilt werden. Die unmittelbar erhaltenen Formeln (9), (10), (11) genügen für unseren nächsten Zweck.

Es handelt sich darum, die Funktion (11) zu einem Minimum zu machen mit der Nebenbedingung:

$$[p] = p_1 + p_2 + p_3 = \text{konstant}. \tag{12}$$

Dieses wollen wir durch fortgesetzte Versuche erreichen mit einem Zahlenbeispiele, welches ungefähr der Fig. 1. entspricht, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} (1) = 34° & cotg\,34° = c_1 = 1{,}483 \\ (2) = 68° & cotg\,68° = c_2 = 0{,}404 \\ (3) = 78° & cotg\,78° = c_3 = 0{,}213 \end{array}\right\} \tag{13}$$

In Betreff der Gewichte wollen wir zuerst annehmen $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$, $[p] = 3$, und damit geben die vorstehenden Formeln (9), (10), (11) folgendes:

$$r = 0{,}289 \qquad F_1 = -1{,}194 \qquad F_2 = +0{,}693 \qquad F_3 = +0{,}502$$

$$\frac{1}{P} = 2{,}1578. \quad \text{Absolute Summe } [\pm F] = 2{,}389.$$

Nach diesem haben wir eine *neue* Gewichts-Annahme gemacht, nämlich die p_1 , p_2 , p_3 proportional den F_1, F_2, F_3 und wieder auf die frühere Summe $[p] = 3$ gestimmt, d. h. neue Annahme:

$$p_1 = 1{,}50, \qquad p_2 = 0{,}87 \qquad p_3 = 0{,}63, \qquad [p] = 3{,}00.$$

In dieser Weise haben wir die Rechnung 6 mal wiederholt, wie aus der nachfolgenden Tabelle mit den Nummern 1. 2. 3.... 7. zu ersehen ist; die in der Tabelle vorhergehenden Nummern 0. und 0,5. sind nachher mit neuen willkürlichen Gewichts-Annahmen noch hinzuberechnet worden.

Num.	p_1	p_2	p_3	$[p]$	r	F_1	F_2	F_3	$\left[\frac{FF}{p}\right]$
0.	0,0	1,5	1,5	3,0	1,483	0,000	1,887	1,696	5,292
0,5.	0,5	1,0	1,5	3,0	0,660	−0,823	1,064	0,873	2,995
1.	1,00	1,00	1,00	3,00	0,289	−1,194	+0,693	+0,502	2,158
2.	1,50	0,87	0,63	3,00	0,059	−1,424	+0,463	+0,272	1,715
3.	1,979	0,643	0,378	3,000	−0,0940	−1,577	+0,310	+0,119	1,443
4.	2,358	0,464	0,178	3,000	−0,1756	−1,659	+0,228	+0,037	1,287
5.	2,586	0,356	0,058	3,000	−0,2072	−1,690	+0,197	+0,006	1,214
6.	2,679	0,312	0,009	3,000	−0,2128	−1,696	+0,191	+0,000	1,191
7.	2,696	0,304	0,000	3,000	−0,2130	−1,696	+0,191	+0,000	1,187

Die Reihe 1. bis 7. zeigt ganz schöne Konvergenz, und führt schliesslich zu der günstigsten Gewichts-Verteilung:

$$p_1 = 2{,}696 \qquad p_2 = 0{,}304 \qquad p_3 = 0{,}000 \text{ mit } [p] = 3{,}000 \tag{14}$$

Es wird also $p_3 = 0$, d. h. man soll in diesem Falle den dritten Winkel (3) gar nicht messen.

Wenn wir dieses $p_3 = 0$ in (9) , (10) , (11) einsetzen wollen, so entsteht die formelle Schwierigkeit, dass $r = \frac{0}{0}$ erscheint, es ist deshalb nötig, zuvor (11) in andere Gestalt zu bringen. Man wird sich leicht überzeugen können, dass folgende neue Formen für (11) algebraisch richtig sind:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\frac{1}{P} = \frac{c_1^2}{p_1} + \frac{c_2^2}{p_2} + \frac{c_3^2}{p_3} - \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \left(\frac{c_1}{p_1} - \frac{c_2}{p_2} - \frac{c_3}{p_3}\right)^2 \tag{15}$$

$$\frac{1}{P} = \frac{p_1 (c_3 - c_2)^2 + p_2 (c_1 + c_3)^2 + p_3 (c_1 + c_2)^2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \tag{16}$$

Hier kann man $p_3 = 0$ setzen, wodurch man erhält:

$$\left(\frac{1}{P}\right)_{min} = \frac{1}{P_{max}} = \frac{(c_2 - c_3)^2}{p_2} + \frac{(c_1 + c_3)^2}{p_2} \tag{17}$$

Damit ist unser Zweck, ein einfaches Beispiel der allgemeinen Theorie des Schreiber schen Satzes vorauszuschicken, erreicht, auch haben wir die Formeln (15)—(17) zum Teil deswegen noch zugefügt, weil wir diesen Formeln auch sonst noch in der Geodäsie begegnen werden. —

Nun zur allgemeinen Theorie des Satzes von der günstigsten Gewichts-Verteilung übergehend, benützen wir die allgemeine Formen-Zusammenstellung von § 43. und betrachten dabei n Beobachtungen mit n Gewichten $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$ und q Bedingungsgleichungen.

(Die Anzahl der Bedingungsgleichungen, welche hier $= q$ gesetzt ist, war früher in § 39. S. 119 mit r bezeichnet, was aber nun vermieden wird, wegen der Kollision mit den Übertragungs-Coefficienten r.)

Eine Funktion, die wir der Kürze wegen mit y bezeichnen, soll möglichst klein gemacht werden:

$$y = \frac{1}{P} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} \ldots + \frac{F_n^2}{p_n} = \text{Minimum} \tag{18}$$

wobei die Nebenbedingung besteht:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = [p] \doteq \text{konstant} \tag{19}$$

Die F_1 , F_2 u. s. w. sind Funktionen der p nach den Gleichungen (13) und (12) § 43. S. 127, d. h. die F_1 , $F_2 \ldots$ sind zunächst Funktionen der r und die r selbst sind durch ein Gleichungssystem (12) S. 127 mit den p verbunden.

Indem man nun zunächst y als Funktion der r betrachtet, hat man

$$y = \frac{(f_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3)^2}{p_1} + \frac{(f_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3)^2}{p_2} + \ldots$$

$$\frac{dy}{dr_1} = \frac{2 (f_1 + a_1 r_1 + b_1 r_2 + c_1 r_3)}{p_1} a_1 + \frac{2 (f_2 + a_2 r_1 + b_2 r_2 + c_2 r_3)}{p_2} a_2 + \ldots$$

$$\frac{dy}{dr_1} = 2\left[\frac{af}{p}\right] + 2\left[\frac{aa}{p}\right] r_1 + 2\left[\frac{ab}{p}\right] r_2 + \ldots$$

Dieses ist aber $= 0$ nach (12) S. 127 und ebenso verhält es sich mit den übrigen Ableitungen von y nach r; man hat also zusammen:

$$\frac{dy}{dr_1} = 0 \qquad \frac{dy}{dr_2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{dy}{dr_q} = 0 \tag{20}$$

Nun stellen wir die Ableitungen von (18) nach den Veränderlichen p selbst so dar:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dp_1} &= -\frac{F_1^2}{p_1^2} + \frac{dy}{dr_1}\frac{dr_1}{dp_1} + \frac{dy}{dr_2}\frac{dr_2}{dp_1} + \frac{dy}{dr_3}\frac{dr_3}{dp_1} + \ldots \\ \frac{dy}{dp_2} &= -\frac{F_2^2}{p_2^2} + \frac{dy}{dr_1}\frac{dr_1}{dp_2} + \frac{dy}{dr_2}\frac{dr_2}{dp_2} + \frac{dy}{dr_3}\frac{dr_3}{dp_2} + \ldots \\ &\text{u. s. w. } \frac{dy}{dp_3} \text{ und } \frac{dy}{dp_4} \ldots \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses System geht aber wegen (20) in die einfache Form über:

$$\frac{dy}{dp_1} = -\frac{F_1^2}{p_1^2} \quad , \quad \frac{dy}{dp_2} = -\frac{F_2^2}{p_2^2} \quad , \quad \frac{dy}{dp_3} = -\frac{F_3^2}{p_3^2} \quad , \quad \frac{dy}{dp_n} = -\frac{F_n^2}{p_n^2} \tag{22}$$

Und nun erscheint das totale Differential von (18) in dieser einfachen Form:

$$dy = d\left(\frac{1}{P}\right) = -\left(\frac{F_1^2}{p_1^2}dp_1 + \frac{F_2^2}{p_2^2}dp_2 + \frac{F_n^2}{p_n^2}dp_n\right) \tag{23}$$

Wenn man dieses (23) mit (18) vergleicht, so kann man den darin liegenden gefundenen Satz in Worten so aussprechen: das Differential von y in Bezug auf die Gewichte p wird wegen der Ausgleichung, in Hinsicht auf die F_1 , F_2 , ... F_n, welche thatsächlich Funktionen der p sind, gerade so erhalten, *als ob die* F_1 , $F_2 \ldots$ *von den* p *unabhängig wären.*

Eine Nebenbemerkung ist noch zu machen zu (21) insofern, als möglicherweise einzelne der $\frac{dr}{dp}$ unendlich werden können, so dass $\frac{dy}{dr}\frac{dr}{dp} = 0 \cdot \infty$ erscheint, und nicht ohne weiteres fortgelassen werden kann. Allein die Produkte $\frac{dy}{dr}\frac{dr}{dp}$ werden doch stets gleich Null, denn die $\frac{dy}{dr}$ sind für beliebige Werte von p gleich Null, dagegen die $\frac{dr}{dp}$ sind nicht für beliebige Werte von p unendlich, denn die r sind ja rationale Funktionen der p. Will man einen in unbestimmter Form erscheinenden Wert $\frac{dy}{dr_1}\frac{dr_1}{dp_\alpha}$ finden, so hat man den $p_1\ p_2 \ldots p_n$ kleine Änderungen zu geben, so dass $\frac{dr_1}{dp_\alpha}$ nicht mehr unendlich ist, und nun hat man diese Änderungen Null werden zu lassen und zu untersuchen, welchem Wert sich dabei das Produkt nähert. Da aber der erste Faktor $\frac{dy}{dr}$ für beliebige Werte der p verschwindet, so muss das Produkt immer Null, also auch der Grenzwert Null sein. Der besondere Fall, dass ein $\frac{dr}{dp} = \infty$ wird, tritt z. B. ein bei unserem Beispiel mit Fig. 1. S. 139. Wenn man hier r nach (9) S. 139 als Funktion der p betrachtet, etwa nach p_1 differentiiert, so wird mit $p_1 = 0$ der Wert $\frac{dr}{dp} = \infty$ werden. Trotzdem ist das Produkt $\frac{dy}{dr}\frac{dr}{dp}$ nach der vorstehenden Auseinandersetzung als verschwindend zu betrachten.

Nachdem die wichtige Beziehung (23) erkannt ist, wird alles übrige leicht. Die konstante Gewichtssumme (19) giebt $dp_1 + dp_2 + \ldots + dp_n = 0$ oder

$$dp_n = -dp_1 - dp_2 - dp_3 \ldots$$

und damit wird (23):

$$dy = \left(\frac{F_1^2}{p_1^2} - \frac{F_n^2}{p_n^2}\right)dp_1 - \left(\frac{F_2^2}{p_2^2} - \frac{F_n^2}{p_n^2}\right)dp_2 - \left(\frac{F_3^2}{p_3^2} - \frac{F_n^2}{p_n^2}\right)dp_3 - \ldots$$

und da nun die dp_1 , dp_2 , dp_3 unabhängig sind (nach Einführung von $[dp] = 0$), kann die letzte Gleichung nur dadurch allgemein befriedigt werden, dass die Coefficienten von dp_1 , dp_2 , dp_3 einzeln $= 0$ gesetzt werden; und daraus folgt:

$$\frac{F_1^2}{p_1^2} = \frac{F_2^2}{p_2^2} = \frac{F_3^2}{p_3^2} = \ldots \frac{F_n^2}{p_n^2}$$

oder auch

$$\frac{F_1}{p_1} = \frac{F_2}{p_2} = \ldots = \frac{F_n}{p_n} = k \tag{24}$$

d. h. die F müssen den p proportional sein.

Um das Minimum von y bei konstanter Gewichtssumme $[p]$ weiter zu verfolgen, führen wir für die p neue Bezeichnungen ein:

$$p_1 = x_1^2 \qquad p_2 = x_2^2 \qquad p_3 = x_3^2$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das geschieht, weil die p notwendig positiv sein müssen, und daher sobald sie Null sind, nicht mehr frei verändert werden können. Es besteht also die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2 - c = 0, \text{ wo } c \text{ konstant.}$$

Nach § 38. hat man diese Gleichung mit einer unbestimmten Korrelate λ multipliziert zu der ursprünglichen Funktion y in (18) hinzu zu addieren und dann alles nach $p_1\ p_2 \ldots p_n$ zu differentiieren, wie wenn die p unabhängig wären, worauf endlich alle Ableitungen nach den x einzeln $= 0$ zu setzen sind. Dieses giebt:

$$\frac{d\left(\frac{F_1^2}{x_1^2} + \lambda\, x_1^2\right)}{d\,x_1} = 0 \qquad \frac{d\left(\frac{F_2^2}{x_2^2} + \lambda\, x_2^2\right)}{d\,x_2} = 0 \text{ u. s. w.}$$

$$-2\frac{F_1^2}{x_1^3} + 2\lambda\, x_1 = 0 \qquad -2\frac{F_2^2}{x_2^3} + 2\lambda\, x_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

oder

$$\left(\frac{F_1^2}{p_1^2} - \lambda\right) x_1 = 0 \qquad \left(\frac{F_2^2}{p_2^2} - \lambda\right) x_2 = 0 \text{ u. s. w.} \tag{25}$$

Diese Gleichungen werden erfüllt, wenn entweder $\frac{F_1^2}{p_1^2} = \lambda$ oder $x_1 = 0$ u. s. w. Dieses gilt für jeden Wert $p_1 = x_1^2$ oder $p_2 = x_2^2$ u. s. w.

Zwischen den $\frac{F_1}{p_1}$, $\frac{F_2}{p_2}$ ... bestehen lineare homogene Bedingungsgleichungen, welche nach (12) und (13) § 43. S. 127 für n Elemente $p_1 p_2 \ldots p_n$ und für q Bedingungsgleichungen in diese Form gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned} \frac{F_1}{p_1} a_1 + \frac{F_2}{p_2} a_2 + \ldots \frac{F_n}{p_n} a_n &= 0 \\ \frac{F_1}{p_1} b_1 + \frac{F_2}{p_2} b_2 + \ldots \frac{F_n}{p_n} b_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \frac{F_1}{p_1} q_1 + \frac{F_2}{p_2} q_2 + \ldots \frac{F_n}{p_n} q_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Man kann also von den Gewichten $p_1\ p_2 \ldots p_n$ nur $n - q$ willkürlich annehmen, die übrigen sind dann infolge der Gleichungen (26) auch bestimmt. Es können also (spezielle Fälle ausgenommen), höchstens $n - q$ von den Gleichungen (25), mit $\frac{F^2}{p^2} = \lambda$, erfüllt sein, z. B. für p_1, $p_2 \ldots p_{n-q}$, und folglich muss für die übrigen Werte von p der *zweite* Faktor der Gleichungen (25) gleich Null sein. Es sind also nur $n - q$ Gewichte von Null verschieden, d. h. ebenso viele als zur Bestimmung der Funktion F selbst nötig sind. Da sich für die Grössen $\frac{F_\alpha}{p_\alpha}$ für $\alpha = n - q + 1$ bis $\alpha = n$ aus den Gleichungen (26) endliche Werte ergeben, so müssen auch die entsprechenden F_{n-q+1} bis F_n gleich Null sein. Das Minimum von $\frac{1}{P}$ ergiebt sich:

$$\left(\frac{1}{P}\right)_{min} = \frac{F_1^2}{p_1} + \frac{F_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{F_{n-q}^2}{p_{n-q}} = \lambda\,(p_1 + p_2 + p_{n-q}) = \lambda\, c \tag{27}$$

und da zugleich der absolute Betrag von $F\alpha$ gleich $\sqrt{\lambda}\ p\alpha$ ist für $\alpha = 1, 2 \ldots n-q$, so ist die Summe der absoluten Beträge von F_1, $F_2 \ldots F_n$ gleich $\sqrt{\lambda}\ c$ und demnach die Quadratwurzel aus $\frac{c}{P}$ gleich der Summe der absoluten Beträge F.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die günstigste Gewichtsverteilung kann also gefunden werden, wenn man in den Gleichungen (26) von den Grössen F_1, F_2 ... F_n eine Anzahl q gleich Null setzt und daraus die übrigen F berechnet. Von den $\frac{n.n-1.....n-q+1}{1.2.3...q}$ verschiedenen Fällen hätte man denjenigen auszuwählen, welcher die kleinste Absolutsumme der F liefert und die p, welche den gleichen Index mit den nicht verschwindenden F besitzen, den absoluten Beträgen derselben proportional zu setzen. Der Proportionalitätsfaktor ergiebt sich aus dem vorgeschriebenen Wert von $[p]$.

Was die wirkliche Ausrechnung einer Gewichtsverteilung betrifft, so wird man wohl immer am besten nach Anleitung unseres kleinen Beispiels (8)—(14) S. 139—140 so verfahren, dass man versuchsweise eine Gewichtsverteilung annimmt, die F ausrechnet und mit neuen Gewichten proportional den erstmals erhaltenen F die Rechnung wiederholt; konvergieren einzelne Glieder deutlich gegen Null, so wird man alsbald die betreffenden p völlig = Null setzen u. s. w.

Wenn eine solche Aufgabe an und für sich sachlich betrachtet eine wesentlich ungleiche günstige Gewichtsverteilung vermuten lässt, so wird auch die successive Näherungsrechnung mit den F und p rasch konvergieren, auch werden dann wohl schon *vor* Beginn aller Rechnung Fingerzeige vorhanden sein, in welchem Sinne etwa Gewichtsverstärkungen oder Gewichtsverringerungen bis zur Null, am Platze sein mögen.

Wenn dagegen die Versuchsrechnungen *nicht* konvergieren, so wird man es mit einem Falle zu thun haben, in welchem ungleiche Gewichtsverteilung überhaupt nicht am Platze ist.

Der „Schreiber'sche Satz" über günstigste Gewichtsverteilung ist zuerst von General Schreiber selbst mitgeteilt worden in der „Zeitschr. f. Verm. 1882, S. 129—161", insbesondere S. 141. Jene Abhandlung geht von der Anschauung aus, dass die F Funktionen der r sind und dass dem Maximum des Gewichtes P ein Minimum der absoluten Summe $[\pm F]$ entspricht. Wenn hiernach die einzelnen F bestimmt sind, werden die p proportional dieser F genommen.

Hiezu citieren wir auch „Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 641—649 und 1889, S. 57—59 und endlich 1890, S. 21—24" neuer Beweis des Satzes, von *Runge*, den wir im vorstehenden (18)—(27) mitgeteilt haben.

Früher ist auch eine andere Abhandlung über diesen Gegenstand erschienen: „Über eine Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, von *H. Bruns*, XIII. Band der Abh. d. m. ph. Cl. der Königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Nr. VII, S. 517 bis 563, Leipzig 1886." Diese Abhandlung enthält eine Verallgemeinerung der Schreiber'schen Aufgabe, sie beschäftigt sich nicht bloss mit *einer* Funktion, deren Gewicht ein Maximum werden soll bei konstanter Gewichtssumme $[p]$, sondern mit einem Komplexe von mehreren Funktionen.

§ 49—55. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Die bisher von uns behandelten Ausgleichungsformen, nämlich 1) direkte Beobachtungen mit dem arithmetischen Mittel, 2) vermittelnde Beobachtungen und 3) bedingte Beobachtungen — dieses waren in der Entstehungszeit der M. d. kl. Q. die einzigen behandelten Aufgaben. *Gauss* ging in seinem Hauptwerke der *„theoria combinationis"* 1823—1826 nicht weiter, und Gerling kennt noch 1843 in seinem Lehrbuch nichts weiteres.

Jedoch hatte inzwischen das geodätische Bedürfnis noch eine höhere Ausgleichungsform hervorgebracht: „vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen."

Bessel hat in seiner „Gradmessung in Ostpreussen" 1838 diese Aufgabe zuerst gestellt, in der Hauptsache gelöst und auf Dreiecksnetz-Ausgleichung mit unvollständigen Richtungssätzen angewendet, aber Gewichts- und Fehlerberechnungen nicht dazu gegeben.

Die ganze Aufgabe, Ausgleichung *und Genauigkeitsbestimmungen* für vermittelnde Beobach-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

tungen mit Bedingungsgleichungen scheint zum erstenmale gelöst worden zu sein von *J. Zech* (Einladungsschrift zur Königs-Geburtstagsfeier 1857, Tübingen bei Fues). Dieses war eine theoretische Lösung; die Anwendung der Aufgabe auf Geodäsie wurde bald von den damaligen Geodäten ersten Rangs in Angriff genommen, namentlich von *Andrae* in Kopenhagen, *Hansen* *) in Gotha und in der Entstehungszeit der internationalen Erdmessung, nach 1862, spielte diese Aufgabe eine wichtige Rolle in der damaligen geodätischen (häufig polemischen) Litteratur.

In Preussen hat die fragliche Aufgabe bei der Landesaufnahme etwa von 1870—1880 wichtige Dienste geleistet, weshalb wir die entsprechenden Formeln nachher in § 55. zuziehen werden.

Unsere in den nachfolgenden §§ 49.—53. vorgetragene Behandlung der Aufgabe ist unabhängig von den zitierten Autoritäten nach eigenem Gange entwickelt.

§ 49. Eliminierung der Bedingungsgleichungen.

Eine erste Behandlung der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen besteht darin, dass man die Bedingungsgleichungen eliminiert, und da man auf diesem Wege zugleich den klarsten Einblick in die Bestimmung des mittleren Fehlers gewinnt, stellen wir diese praktisch weniger wichtige Auflösungsform voran:

Man hat n unmittelbare Beobachtungen l, welche mit u Unbekannten $x\ y\ z\ t$ durch n Fehlergleichungen verbunden sind. Ausserdem bestehen zwischen den Unbekannten streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen in der Anzahl r.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t + \ldots + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t + \ldots + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t + \ldots + l_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \underbrace{a_n x + b_n y + c_n z + d_n t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u} + l_n \end{array} \right\} \quad (1)$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z + A_4 t + \ldots = 0 \\ B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z + B_4 t + \ldots = 0 \\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u} \end{array} \right\} \quad 2)$$

Ausgleichungsbedingung:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + \ldots v_n^2 = \text{Minimum} \quad (3)$$

Man kann diese Ausgleichung auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ohne Bedingungsgleichungen zurückführen, indem man mittelst der Bedingungsgleichungen (2) eine Anzahl r der u Unbekannten eliminiert. Dieses geschieht so:

Man kann die Gleichungen (2) so aufgelöst denken:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} x = A_1' z + A_2' t + \ldots \\ y = B_1' z + B_2' t + \ldots \\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} \end{array} \right\} \quad (4)$$

*) Die Hansen schen Abhandlungen „von der Methode der kleinsten Quadrate" haben wir behandelt und kommentiert in Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882, I. S. 53—59.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Setzt man diese Ausdrücke in (1), so soll erhalten werden:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = c_1' z + d_1' t + \ldots l_1' \\ v_2 = c_2' z + d_2' t + \ldots l_2' \\ v_3 = c_3' z + d_3' t + \ldots l_3' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{v_n = c_n' z + d_n' t + \ldots}_{\text{Anzahl} = u - r} l_n' \end{array} \right\} \tag{5}$$

Man hat es also nun mit einer Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zu thun, welche nach den früheren Regeln zu behandeln ist. Nach der Ausgleichung hat man den mittleren Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n - (u - r)}} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{[v\,v]}{(n - u) + r}} \tag{6}$$

Zwischen n , u und r bestehen Beziehungen:

Da die Bedingungsgleichungen (2) streng erfüllt sein müssen, ohne dass dadurch die $x\ y\ z\ t$ völlig bestimmt sein dürfen, so muss sein:

$$u > r \tag{7}$$

und wenn die Gleichungen (5), welche nach der Elimination der r Unbekannten übrig bleiben, noch den Charakter von „Fehlergleichungen“ haben sollen, so muss auch sein:

$$n > u - r \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) wird also der Nenner $n - (u - r)$ stets eine positive Zahl sein.

Wenn nur eine *kleine* Zahl von Bedingungsgleichungen (2) vorliegt, kann dieses Verfahren wohl am Platz sein, und die Auswahl der zu eliminierenden Unbekannten wird dann von der Natur der jeweiligen Aufgabe abhängen.

Für Triangulierungsausgleichungen im Grossen ist dagegen eine andere durchaus symmetrisch angeordnete Auflösung üblich, welche wir im folgenden behandeln werden.

Unter allen Umständen gilt aber die Fehlerformel (6), mit dem Nenner $n - u + r$, weil die Fehlerberechnung von der *Form* der Ausgleichung unabhängig ist.

§ 50. Trennung der Ausgleichung in zwei Teile, und erste Ausgleichung.

Wir nehmen die im vorigen § 49. beschriebenen Verhältnisse wieder vor, schreiben aber der Übersichtlichkeit wegen immer nur $n = 4$, $u = 3$, $r = 2$, d. h. wir nehmen 4 Beobachtungen, 3 Unbekannte $x\ y\ z$, und 2 Bedingungsgleichungen.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + l_3 \\ \underbrace{v_4 = a_4 x + b_4 y + c_4 z}_{\text{Anzahl} = u} + l_4 \end{array} \right\} \tag{1}$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3 z = 0 \\ \underbrace{B_0 + B_1 x + B_2 y + B_3 z}_{\text{Anzahl} = u} = 0 \end{array} \right\} \tag{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{array}{l} n > u - r \quad \text{und} \quad u > r \\ (n = 4 \;\;,\;\; u = 3 \;\;,\;\; r = 2) \end{array}\right\} \tag{2}$$

Ausgleichungsprinzip:

$$[v\,v] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Wenn man die Fehlergleichungen (1) ohne Rücksicht auf die Bedingungsgleichungen (2) für sich behandelt, so geben sie die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x_0 + [b\,b]\,y_0 + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x_0 + [b\,c]\,y_0 + [c\,c]\,z_0 + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{5}$$

Wir haben dabei $x_0\;y_0\;z_0$ geschrieben, zur Unterscheidung von denjenigen Ergebnissen $x\;y\;z$, welche man durch die Gesamtausgleichung erhalten wird.

Diese Gleichungen (5) löst man nach $x_0\;y_0\;z_0$ auf, und zugleich kann man alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. nach § 28. oder § 33. bestimmen; diese Gewichts-Coefficienten werden im zweiten Teil der Ausgleichung gebraucht werden.

Die $x\;y\;z$ denken wir in je zwei Teile zerlegt:

$$x = x_0 + \delta x \qquad y = y_0 + \delta y \qquad z = z_0 + \delta z \tag{6}$$

Damit nimmt eine einzelne Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l$$

folgende Form an:

$$\begin{array}{l} v = a\,(x_0 + \delta x) + b\,(y_0 + \delta y) + c\,(z_0 + \delta z) \quad + l \\ v = \underbrace{a\;x_0 + b\,y_0 + c\;z_0 + l}_{v'} \quad + \underbrace{a\,\delta x + b\;\delta y + c\,\delta z}_{v''} \\ v = \end{array}$$

d. h. für den ersten Teil der Ausgleichung hat man:

$$v' = a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + l \tag{7}$$

und für den zweiten Teil der Ausgleichung:

$$v'' = a\,\delta x + b\,\delta y + c\,\delta z \tag{8}$$

für beide Ausgleichungen zusammen:

$$v = v' + v'' \tag{9}$$

Hiernach ist:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] + 2\,[v'\,v''] \tag{10}$$

Hievon ist aber $[v'\,v''] = 0$, wie sich leicht beweist, indem man (8) mit v' multipliziert:

$$[v'\,v''] = [a\,v']\,(1) + [b\,v']\,(2) + [c\,v']\,(3) \tag{11}$$

Es ist aber nach (7) und (5):

$$[a\,v'] = [a\,a]\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$$

und ebenso sind $[b\,v'] = 0$ und $[c\,v'] = 0$, also im ganzen $[v'\,v''] = 0$, und (10) reduziert sich auf:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \tag{12}$$

Nachdem somit die Summe $[v\,v]$, deren Minimum erzielt werden soll, in zwei Teile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$ zerlegt ist, von denen der erste Teil $[v'\,v']$ bereits ein relatives Minimum ist, handelt es sich nur noch darum, auch den zweiten Teil $[v''\,v'']$ möglichst klein zu machen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Da $x\ y\ z$ die unabhängigen Unbekannten der Ausgleichung sind, bestehen nach (4) die Bedingungen:

$$\frac{\partial [v\,v]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial [v\,v]}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial [v\,v]}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

Betrachten wir die erste Bedingung näher, so kann man sie so schreiben:

$$\frac{\partial [v\,v]}{\partial x} = \frac{\partial ([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial (x_0 + \delta x)} = 0$$

x_0 ist eine Näherungsannahme des ersten Teils, welche für den zweiten Teil als konstant gilt, folglich für den zweiten Teil:

$$0 = \frac{\partial ([v'\,v'] + [v''\,v''])}{\partial \delta x} = \frac{\partial [v'\,v']}{\partial \delta x} + \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial \delta x} \tag{14}$$

Der erste Teil giebt $\delta x = 0$, denn das Minimum von $[v'\,v']$ wurde eben dadurch erzielt, dass $x = x_0$, also $\delta x = 0$ gemacht wurde. Gleiches gilt bei y und z, es bleibt also nur noch das Schlussglied von (14) gleich Null zu machen, oder zugleich mit y und z:

$$0 = \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial \delta x} \qquad 0 = \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial \delta y} \qquad 0 = \frac{\partial [v''\,v'']}{\partial \delta z} \tag{15}$$

d. h. in Worten: Der zweite Teil der Ausgleichung wird von dem ersten Teil unabhängig, es sind aber die Beziehungen, welche zwischen den v'' und den $\delta x, \delta y, \delta z$ bestehen, zu berücksichtigen.

Die Trennung der $x\ y\ z$ in $x_0 + \delta x$, $y_0 + \delta y$, $z_0 + \delta z$ lässt sich auch in den Bedingungsgleichungen (2) ausdrücken. Diese geben nämlich:

$$\left.\begin{aligned} A_0 + A_1 (x_0 + \delta x) + A_2 (y_0 + \delta y) + A_3 (z_0 + \delta z) = 0 \\ B_0 + B_1 (x_0 + \delta x) + B_2 (y_0 + \delta y) + B_3 (z_0 + \delta z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Setzt man also:

$$\left.\begin{aligned} A_0 + A_1 x_0 + A_2 y_0 + A_3 z_0 = w_1 \\ B_0 + B_1 x_0 + B_2 y_0 + B_3 z_0 = w_2 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

so ergiebt die Vergleichung von (16) mit (2):

$$\left.\begin{aligned} A_1 \delta x + A_2 \delta y + A_3 \delta z + w_1 = 0 \\ B_1 \delta x + B_2 \delta y + B_3 \delta z + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Das sind die Bedingungsgleichungen für den zweiten Teil der Ausgleichung, zu dem wir nun übergehen.

§ 51. Korrelatenausgleichung des zweiten Teils.

Wir haben uns überzeugt, dass $[v''\,v'']$ = Minimum zu machen ist mit den Nebenbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} A_1 \delta x + A_2 \delta y + A_3 \delta z + w_1 = 0 \\ B_1 \delta x + B_2 \delta y + B_3 \delta z + w_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wenn diese Bedingungsgleichungen (1) sich statt auf die Verbesserungen δx , δy , δz direkt auf die v'' bezögen, so *würde* man nach der Korrelatenmethode kurz so verfahren:

$$[A\,A]\,k_1 + [A\,B]\,k_2 + w_1 = 0$$
$$[A\,B]\,k_1 + [B\,B]\,k_2 + w_2 = 0$$

Dieses ist aber nicht der Fall, die δx , δy , δz stehen vielmehr zu den v'' in ähnlichen Beziehungen wie die $x_0\ y_0\ z_0$ zu den l.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun weiss man nach (6) § 28. S. 88, aus der Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen, dass die allgemeine Auflösung der Normalgleichungen des ersten Teils in folgenden Formeln enthalten ist:

$$\left.\begin{aligned} -x_0 &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y_0 &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z_0 &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

und zwar gehören hiezu Fehlergleichungen von dieser Form:

$$v' = a x_0 + b y_0 + c z_0 + l \quad (3)$$

Dagegen haben die Fehlergleichungen der Gesamtausgleichung diese Form:

$$v = v' + v'' = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y) + c(z_0 + \delta z) + l$$

oder

$$v' = a(x_0 + \delta x) + b(y_0 + \delta y) + c(z_0 + \delta z) + l - v'' \quad (3^*)$$

Vergleicht man dieses (3*) mit (3), so erkennt man, dass der neuen Fehlergleichung (3*) auch ein neues System (2*) entsprechen muss, dessen erste Gleichung ist:

$$-(x_0 + \delta x) = \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \quad (2^*)$$

was mit (2) verglichen folgendes giebt:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \alpha_1 v_1'' + \alpha_2 v_2'' + \alpha_3 v_3'' + \alpha_4 v_4'' \\ \delta y &= \beta_1 v_1'' + \beta_2 v_2'' + \beta_3 v_3'' + \beta_4 v_4'' \\ \delta z &= \gamma_1 v_1'' + \gamma_2 v_2'' + \gamma_3 v_3'' + \gamma_4 v_4'' \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Diese Ausdrücke (4) hat man in die Bedingungsgleichungen (1) einzusetzen, wodurch Gleichungen entstehen, welche sich auf die Verbesserungen v'' beziehen, und folgende Form haben:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_1 v_1'' + \mathrm{I}_2 v_2'' + \mathrm{I}_3 v_3'' + \mathrm{I}_4 v_4'' + w_1 &= 0 \\ \mathrm{II}_1 v_1'' + \mathrm{II}_2 v_2'' + \mathrm{II}_3 v_3'' + \mathrm{II}_4 v_4'' + w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Coefficienten I und II haben vermöge ihrer Entstehung aus (4) und (1) folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= A_1 \alpha_1 + A_2 \beta_1 + A_3 \gamma_1 & \mathrm{II}_1 &= B_1 \alpha_1 + B_2 \beta_1 + B_3 \gamma_1 \\ \mathrm{I}_2 &= A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2 + A_3 \gamma_2 & \mathrm{II}_2 &= B_1 \alpha_2 + B_2 \beta_2 + B_3 \gamma_2 \\ \mathrm{I}_3 &= A_1 \alpha_3 + A_2 \beta_3 + A_3 \gamma_3 & \mathrm{II}_3 &= B_1 \alpha_3 + B_2 \beta_3 + B_3 \gamma_3 \\ \mathrm{I}_4 &= A_1 \alpha_4 + A_2 \beta_4 + A_3 \gamma_4 & \mathrm{II}_4 &= B_1 \alpha_4 + B_2 \beta_4 + B_3 \gamma_4 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Nun ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Ausgleichung direkter bedingter Beobachtungen, d. h. mit Einführung der Korrelaten k_1 und k_2 zu den Bedingungsgleichungen (5) hat man die Normalgleichungen zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} [\mathrm{I}\ \mathrm{I}] k_1 + [\mathrm{I}\ \mathrm{II}] k_2 + w_1 &= 0 \\ [\mathrm{I}\ \mathrm{II}] k_1 + [\mathrm{II}\ \mathrm{II}] k_2 + w_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

worauf dann die einzelnen v'' gefunden werden können, nämlich, nach Vertikalreihen in (5):

$$\left.\begin{aligned} v_1'' &= \mathrm{I}_1 k_1 + \mathrm{II}_1 k_2 \\ v_2'' &= \mathrm{I}_2 k_1 + \mathrm{II}_2 k_2 \\ v_3'' &= \mathrm{I}_3 k_1 + \mathrm{II}_3 k_2 \\ v_4'' &= \mathrm{I}_4 k_1 + \mathrm{II}_4 k_2 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Verfolgt man diesen Rechnungsgang näher, so findet man durch Quadrieren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und Multiplizieren der Coefficienten I und II die Summen-Coefficienten der Normalgleichungen (7) wie folgt:

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{I\,I}] = {} & \\
& A_1 A_1 [\alpha\alpha] + 2 A_1 A_2 [\alpha\beta] + 2 A_1 A_3 [\alpha\gamma] \\
& + A_2 A_2 [\beta\beta] + 2 A_2 A_3 [\beta\gamma] \\
& + A_3 A_3 [\gamma\gamma]
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
[\mathrm{I\,II}] = {} & \qquad (9\,a) \\
& + A_1 B_1 [\alpha\alpha] + A_1 B_2 [\alpha\beta] + A_1 B_3 [\alpha\gamma] \\
& + A_2 B_1 [\alpha\beta] + A_2 B_2 [\beta\beta] + A_2 B_3 [\beta\gamma] \\
& + A_3 B_1 [\alpha\gamma] + A_3 B_2 [\beta\gamma] + A_3 B_3 [\gamma\gamma]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{II\,II}] = {} & \qquad (9\,b) \\
& B_1 B_1 [\alpha\alpha] + 2 B_1 B_2 [\alpha\beta] + 2 B_1 B_3 [\alpha\gamma] \\
& + B_2 B_2 [\beta\beta] + 2 B_2 B_3 [\beta\gamma] \\
& + B_3 B_3 [\gamma\gamma]
\end{aligned}
$$

Führt man (6) auch in (8) ein, so erhält man zunächst:

$$
\left.
\begin{aligned}
v_1'' &= (A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 + A_3\gamma_1)\,k_1 + (B_1\alpha_1 + B_2\beta_1 + B_3\gamma_1)\,k_2 \\
v_2'' &= (A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 + A_3\gamma_2)\,k_1 + (B_1\alpha_2 + B_2\beta_2 + B_3\gamma_2)\,k_2 \\
v_3'' &= (A_1\alpha_3 + A_2\beta_3 + A_3\gamma_3)\,k_1 + (B_1\alpha_3 + B_2\beta_3 + B_3\gamma_3)\,k_2 \\
v_4'' &= (A_1\alpha_4 + A_2\beta_4 + A_3\gamma_4)\,k_1 + (B_1\alpha_4 + B_2\beta_4 + B_3\gamma_4)\,k_2
\end{aligned}
\right\} \qquad (10)
$$

und setzt man diese Ausdrücke wieder in (4), so erhält man:

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta x = x - x_0 = {} & [\alpha\alpha]\,A_1 k_1 + [\alpha\alpha]\,B_1 k_2 \\
& + [\alpha\beta]\,A_2 k_1 + [\alpha\beta]\,B_2 k_2 \\
& + [\alpha\gamma]\,A_3 k_1 + [\alpha\gamma]\,B_3 k_2 \\
\delta y = y - y_0 = {} & [\alpha\beta]\,A_1 k_1 + [\alpha\beta]\,B_1 k_2 \\
& + [\beta\beta]\,A_2 k_1 + [\beta\beta]\,B_2 k_2 \\
& + [\beta\gamma]\,A_3 k_1 + [\beta\gamma]\,B_3 k_2 \\
\delta z = z - z_0 = {} & [\alpha\gamma]\,A_1 k_1 + [\alpha\gamma]\,B_1 k_2 \\
& + [\beta\gamma]\,A_2 k_1 + [\beta\gamma]\,B_2 k_2 \\
& + [\gamma\gamma]\,A_3 k_1 + [\gamma\gamma]\,B_3 k_2
\end{aligned}
\right\} \qquad (11)
$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und wir haben folgenden Rechnungsgang:

Mit den Coefficienten A , B der Bedingungsgleichungen (1) und mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ . . ., welche schon bei Gelegenheit des ersten Teils der Ausgleichung (im vorigen § 50. S. 147) bestimmt worden sind, rechnet man die Coefficienten [I I] , [I II] u. s. w. nach (9 a) und (9 b) aus, stellt damit die Normalgleichungen (7) auf, und löst dieselben nach den Korrelaten k_1 und k_2 auf.

Diese Korrelaten setzt man in die Gleichungen (11), und hat damit alle Verbesserungen δx , δy , δz.

Die einzelnen Verbesserungen v'' nach (10) bekommt man auf diesem Wege nicht, doch braucht man dieselben gewöhnlich auch nicht selbst, sondern nur ihre Quadratsumme $[v''\,v'']$, welche wir in § 52. behandeln werden.

Obgleich somit im Prinzip alles erledigt ist, führen wir doch noch einige Zwischen-Bezeichnungen ein, durch welche die Formeln (9) und (11) mehr übersichtlich, und zur numerischen Ausrechnung bequemer gemacht werden sollen.

Je nachdem man in (11) nach Horizontallinien oder nach Vertikallinien ordnet, bekommt man Teilsummen, für welche wir die neuen Zeichen [1] [2] [3], oder $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ . . . einführen, und welche als „Hilfsgrössen [1] [2] [3] . . .“ und „Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ . . .“ benannt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hilfsgrössen:

$$\left.\begin{aligned}[1] &= A_1 k_1 + B_1 k_2 \\ [2] &= A_2 k_1 + B_2 k_2 \\ [3] &= A_3 k_1 + B_3 k_2\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Übertragungs-Coefficienten:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1[\alpha\alpha] + A_2[\alpha\beta] + A_3[\alpha\gamma] & \mathfrak{B}_1 &= B_1[\alpha\alpha] + B_2[\alpha\beta] + B_3[\alpha\gamma] \\ \mathfrak{A}_2 &= A_1[\alpha\beta] + A_2[\beta\beta] + A_3[\beta\gamma] & \mathfrak{B}_2 &= B_1[\alpha\beta] + B_2[\beta\beta] + B_3[\beta\gamma] \\ \mathfrak{A}_3 &= A_1[\alpha\gamma] + A_2[\beta\gamma] + A_3[\gamma\gamma] & \mathfrak{B}_3 &= B_1[\alpha\gamma] + B_2[\beta\gamma] + B_3[\gamma\gamma]\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Damit lassen sich die Gleichungen (11) zweifach neu schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= [\alpha\alpha][1] + [\alpha\beta][2] + [\alpha\gamma][3] \\ \delta y &= [\alpha\beta][1] + [\beta\beta][2] + [\beta\gamma][3] \\ \delta z &= [\alpha\gamma][1] + [\beta\gamma][3] + [\gamma\gamma][3]\end{aligned}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{aligned}\delta x &= \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 \\ \delta y &= \mathfrak{A}_2 k_1 + \mathfrak{B}_2 k_2 \\ \delta z &= \mathfrak{A}_3 k_1 + \mathfrak{B}_3 k_2\end{aligned}\right\} \begin{matrix}(14)\,\alpha \\ \text{und} \\ (14)\,\mathfrak{A}\end{matrix}$$

Auch die Normalgleichungs-Coefficienten in (7) lassen sich nun noch anders darstellen:

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{I\,I}] &= [A\,\mathfrak{A}] \\ [\mathrm{I\,II}] &= [A\,\mathfrak{B}] \text{ oder } = [\mathfrak{A}\,B] \\ [\mathrm{II\,II}] &= [B\,\mathfrak{B}]\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Die nicht quadratischen Coefficienten z. B. [I II] können doppelt erhalten werden, was als Probe dient. Im einzelnen ist hiebei:

$$\left.\begin{aligned}[A\,\mathfrak{B}] &= A_1\mathfrak{B}_1 + A_2\mathfrak{B}_2 + \ldots \\ [\mathfrak{A}\,B] &= \mathfrak{A}_1 B_1 + \mathfrak{A}_2 B_2 + \ldots\end{aligned}\right\} \qquad (15\,a)$$

Mit diesen Hilfsgrössen [1] [2] [3] und Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ nimmt die Ausgleichung folgenden Gang an:

1) Coefficienten A B ... der Bedingungsgleichungen nach (1).
2) Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ ... nach § 28. oder § 33.
3) Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ ... nach (13).
4) Normalgleichungs-Coefficienten nach (15).
5) Auflösung der Normalgleichungen (7).
6) Hilfsgrössen [1] , [2] , [3] nach (12)
7) Verbesserungen δx , δy , δz nach $(14)\,\alpha$

} oder δx, δy δz nach $(14)\,\mathfrak{A}$.

§ 52. Fehlerquadratsummen und mittlere Fehler.

Nach (12) § 50. S. 147 haben wir:

$$[v\,v] = [v'\,v'] + [v''\,v''] \qquad (1)$$

Die Bestandteile $[v'\,v']$ und $[v''\,v'']$, welche von dem ersten Teil und von dem zweiten Teil der Ausgleichung herrühren, braucht man nicht aus den einzelnen v' und v'' auszurechnen, sondern man kann sie aus den Normalgleichungen ableiten.

Was zunächst den ersten Teil betrifft, so hat man alles hiezu Nötige nach (8) § 27. S. 85, nämlich für u Unbekannte:

$$[v'\,v'] = [l\,l\,.\,u] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \ldots \qquad (2)$$

und auch für den zweiten Teil der Ausgleichung haben wir in § 41. bereits alle Formen kennen gelernt, in welche $[v''\,v'']$ gebracht werden kann, denn diese Formen lassen sich alle auf den neuen Fall übertragen, wenn man nur die Bedeutung der neuen Zeichen in § 50. und § 51. berücksichtigt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir haben daher nach (4) und (5) § 41. S. 122:

$$[v'' v''] = -[w k] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 - \ldots \tag{3}$$

und

$$[v'' v''] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{[\mathrm{II\,II} . 1]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{[\mathrm{III\,III} . 2]} + \ldots \tag{4}$$

Obgleich diese Formeln nach Analogie von § 41. sofort angeschrieben werden können, weil es sich um die Summe $[v'' v'']$ handelt, welche durch die Korrelatenausgleichung von § 51. zu einem Minimum gemacht wurde, mag es doch auch angenehm sein, diese Formeln unmittelbar nachzuweisen, wobei sich zugleich noch eine neue praktisch brauchbare Form (5) ergeben wird.

Die einzelnen v'', welche in (10) § 51. S. 150 gegeben sind, lassen sich mit Benützung der Hilfsgrössen [1] [2] [3] zunächst so darstellen:

$$\begin{aligned} v_1'' &= \alpha_1 [1] + \beta_1 [2] + \gamma_1 [3] \\ v_2'' &+ \alpha_2 [1] + \beta_2 [2] + \gamma_2 [3] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} [v'' v''] = [\alpha\,\alpha] [1] [1] &+ 2 [\alpha\,\beta] [1] [2] + 2 [\alpha\,\gamma] [1] [3] \\ &+ [\beta\,\beta] [2] [2] + 2 [\beta\,\gamma] [2] [3] \\ &+ [\gamma\,\gamma] [3] [3] \end{aligned}$$

Mit Benützung von (14) α § 51 S. 151 wird dieses:

$$[v'' v''] = [1]\,\delta x + [2]\,\delta y + [3]\,\delta z \tag{5}$$

und mit (12) § 51. S. 151, wenn man zugleich nach k ordnet:

$$[v'' v''] = (A_1 \delta x + A_2 \delta y + A_3 \delta z) k_1 + (B_1 \delta x + B_2 \delta y + B_3 \delta z) k_2$$

Die Coefficienten von k_1 und k_2 sind hier nichts anderes, als die linken Teile der Normalgleichungen (1) § 51. S. 148, d. h. es ist nun:

$$[v'' v''] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 = -[w k]$$

wie schon oben (3) geschrieben wurde; und daraus folgt (4) ganz ebenso wie die frühere analoge Gleichung in § 41.

Nachdem wir so die Bestandteile von $[v v]$ kennen gelernt haben, kann auch die Formel für den mittleren Fehler m zu einer mehr anschaulichen Bedeutung gebracht werden. Nach (6) § 49. ist nämlich nun:

$$m^2 = \frac{[v v]}{n - u + r} = \frac{[v' v'] + [v'' v'']}{(n - u) + r}$$

Hiebei passen die Zähler und Nenner wieder in Teilen zusammen. Es ist nämlich:

$$\frac{[v' v']}{n - u} = m_1^2 \qquad \text{und} \qquad \frac{[v'' v'']}{r} = m_2^2$$

wo m_1 den mittleren Fehler nur aus dem ersten Teil der Ausgleichung, und m_2 den mittleren Fehler nur aus dem zweiten Teil der Ausgleichung vorstellt.

Im allgemeinen werden m_1 und m_2 weder unter sich gleich, noch mit dem Gesamtmittelfehler m gleich ausfallen.

Wenn m_1 und m_2 sehr wesentlich verschieden ausfallen, so deutet das auf Fehlerquellen, welche in dem ersten oder in dem zweiten Teil verborgen geblieben sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 53. Funktionsgewicht nach der Ausgleichung.

Nachdem im vorigen § 52. die Korrelatenausgleichung durch die Coefficienten I, II ... auf den früheren Fall von § 39. zurückgeführt ist, können wir auch das Funktionsgewicht nach der Ausgleichung, ohne weitere Entwicklungen, nach § 42. anschreiben, wenn nur die Bedeutung der Coefficienten $\alpha\ \beta\ \ldots$ und I II ... richtig benützt wird.

Es soll sich um folgende Funktion handeln:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z \tag{1}$$

deren Gewicht P bestimmt werden soll. Man zerlegt wie bisher:

$$F = f_1 (x_0 + \delta x) + f_2 (y_0 + \delta y) + f_3 (z_0 + \delta z) \tag{2}$$

Um dieses als eine Funktion von $(l - v'')$ darzustellen, hat man nach (2*) § 51. S. 149:

$$\begin{aligned}
-(x_0 + \delta x) &= \alpha_1 (l_1 - v_1'') + \alpha_2 (l_2 - v_2'') + \alpha_3 (l_3 - v_3'') + \alpha_4 (l_4 - v_4'') \\
-(y_0 + \delta y) &= \beta_1 (l_1 - v_1'') + \beta_2 (l_2 - v_2'') + \beta_3 (l_3 - v_3'') + \beta_4 (l_4 - v_4'') \\
-(z_0 + \delta z) &= \gamma_1 (l_1 - v_1'') + \gamma_2 (l_2 - v_2'') + \gamma_3 (l_3 - v_3'') + \gamma_4 (l_4 - v_4'')
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2), so wird folgende Form entstehen:

$$-F = \varphi_1 (l_1 - v_1'') + \varphi_2 (l_2 - v_2'') + \varphi_3 (l_3 - v_3'') + \varphi_4 (l_4 - v_4'') \tag{3}$$

wo die Coefficienten φ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= f_1 \alpha_1 + f_2 \beta_1 + f_3 \gamma_1 \\
\varphi_2 &= f_1 \alpha_2 + f_2 \beta_2 + f_3 \gamma_2 \\
\varphi_3 &= f_1 \alpha_3 + f_2 \beta_3 + f_3 \gamma_3 \\
\varphi_4 &= f_1 \alpha_4 + f_2 \beta_4 + f_3 \gamma_4
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Nun ist das Gewicht der Funktion (3) nach den Regeln für bedingte Beobachtungen nach (12) § 42. S. 124:

$$\frac{1}{P} = [\varphi\,\varphi] - \left\{ \frac{[\mathrm{I}\,\varphi]^2}{[\mathrm{I\ I}]} + \frac{[\mathrm{II}\,\varphi\,.\,1]^2}{[\mathrm{II\ II}\,.\,1]} + \frac{[\mathrm{III}\,\varphi\,.\,2]^2}{[\mathrm{III\ III}\,.\,2]} + \ldots \right\} \tag{5}$$

Dabei ist der erste Teil vermöge (4):

$$\left.\begin{aligned}
[\varphi\,\varphi] = [\alpha\,\alpha] f_1^2 &+ 2\,[\alpha\,\beta] f_1 f_2 + 2\,[\alpha\,\gamma] f_1 f_3 \\
&+ [\beta\,\beta] f_2^2 \quad + 2\,[\beta\,\gamma] f_1 f_3 \\
&+ [\gamma\,\gamma] f_3^2
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

d. h. nach (3) § 29. S. 92 ist 1 : $[\varphi\,\varphi]$ das Gewicht der Funktion F nach der ersten Ausgleichung und *vor* der zweiten Ausgleichung.

Hiefür sind auch alle anderen Formen von § 29. gültig, also nach Einführung der Hilfsgrössen q, die Formel (5) S. 92:

$$[\varphi\,\varphi] = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 = [q\,f] \tag{7}$$

und die elegante Schlussformel (13) S. 94:

$$[\varphi\,\varphi] = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} + \ldots \tag{8}$$

Was den zweiten Teil von (5) betrifft, so hat man hiezu lediglich die Bedeutungen der φ in (4) mit den Coefficienten I II III von (6) § 51. S. 149 zusammenzunehmen. Und wenn man darnach die Produktsummen $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$, $[\mathrm{III}\,\varphi]$ u. s. w. bildet, so sieht man alsbald, dass man wieder auf gleiche Formen kommt wie bei [I II] , [I III] u. s. w. Die Glieder $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$ ... schliessen sich hieran gerade

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

so an, wie wenn zu den Bedingungsgleichungen mit den Coefficienten $A\ B\ \ldots$ noch eine weitere Gleichung mit den Coefficienten $f_1\ f_2\ f_3\ \ldots$ getreten wäre, und an die Reihe der Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \ldots$ schliessen sich noch die q so an:

$$\left.\begin{array}{cccccc} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 & \mathfrak{A}_4 & \ldots \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 & \mathfrak{B}_4 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & \ldots \end{array}\right\} \quad (10)$$

Für die $[\mathrm{I}\,\varphi]$, $[\mathrm{II}\,\varphi]$ u. s. w. gewinnt man hiebei auch je *zwei* Formeln, ebenso wie die nichtquadratischen $[\mathrm{I\,II}]$, $[\mathrm{I\,III}]$ ... nach (15) § 51. S. 151 auch doppelt ausdrückbar waren. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{array}{lll} [\mathrm{I}\ \ \varphi] = [\mathfrak{A}\,f] & \text{oder} & = [A\,q] \\ [\mathrm{II}\ \varphi] = [\mathfrak{B}\,f] & \text{oder} & = [B\,q] \\ [\mathrm{III}\,\varphi] = [\mathfrak{C}\,f] & \text{oder} & = [C\,q] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{array}\right\} \quad (11)$$

Diese Glieder hängt man an die Elimination der Normalgleichungen an, und rechnet dann genau so weiter, wie es schon in § 42. gelehrt wurde.

§ 54. Vermittelnde Beobachtungen mit partiellen Bedingungsgleichungen.

Wenn die Fehlergleichungen Unbekannte enthalten, welche in den Bedingungsgleichungen nicht vorkommen, so lassen sich die im Vorstehenden entwickelten Formeln doch anwenden, denn man kann dann annehmen, dass die betreffenden Coefficienten der Bedingungsgleichungen gleich Null sind.

Hiernach wäre es überhaupt nicht nötig, diesen Fall besonders zu behandeln; allein man kann den fraglichen Umstand schon in dem ersten Teil der Ausgleichung vorteilhaft ausnützen, indem man die in den Bedingungsgleichungen nicht auftretenden Unbekannten schon in den Normalgleichungen des ersten Teils eliminiert.

Da bei Triangulierungsausgleichungen dieser Fall von Wichtigkeit ist, gehen wir hier näher darauf ein, und nehmen zugleich Veranlassung, die Anwendung der allgemeinen Theorie auf Triangulierungsausgleichung auch sonst noch vorzubereiten.

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{\begin{array}{l} v_1' = h_1(x) + i_1(y) + a_1'\,x + b_1'\,y + c_1'\,z + l_1' \\ v_2' = h_2(x) + i_2(y) + a_2'\,x + b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ v_3' = h_3(x) + i_3(y) + a_3'\,x + b_3'\,y + c_3'\,z + l_3' \\ v_4' = h_4(x) + i_4(y) + a_4'\,x + b_4'\,y + c_4'\,z + l_4' \\ v_5' \quad \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = s} \quad \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Anzahl} = u} \ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\text{Gesamt-Anzahl} = s + u$$

Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{\begin{array}{l} A_0 + A_1\,x + A_2\,y + A_3\,z = 0 \\ B_0 + \underbrace{B_1\,x + B_2\,y + B_3\,z}_{\text{Anzahl} = u.} = 0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Die s Unbekannten (x) (y) (die Nullpunkts-Korrektionen der einzelnen Sätze)

kommen nur in den Fehlergleichungen (1), nicht aber in den Bedingungsgleichungen (2) vor. Das hat auf den Beginn der ersten Ausgleichung keinen Einfluss; man stellt unbekümmert darum die zu (1) gehörigen Normalgleichungen auf, und beginnt damit, (x) und (y) zu eliminieren.

Nachdem (x) und (y) eliminiert sind, bleibt ein System übrig, welches in unseren bisherigen Bezeichnungen so geschrieben werden muss:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a'\,a'\,.\,2]}\,x + [a'\,b'\,.\,2]\,y + [a'\,c'\,.\,2]\,z + [a'\,l'\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[b'\,b'\,.\,2]}\,y + [b'\,c'\,.\,2]\,z + [b'\,l'\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[c'\,c'\,.\,2]}\,z + [c'\,l'\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[l'\,l'\,.\,2]} &= [v_0\,v_0] \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nach den früheren Betrachtungen über reduzierte Fehlergleichungen § 26. haben die hier auftretenden Coefficienten $[a'\,a'\,.\,2]$ u. s. w. wieder die Bedeutungen von Summen und Produkten, wir setzen daher wieder $[a'\,a'\,.\,2] = [a\,a]$ u. s. w. und haben statt (3):

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} &= [v_0\,v_0] \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Mit diesen Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ ... rechnet man nun gerade so weiter, wie mit den früheren, ebenfalls mit $[a\,a]$ $[a\,b]$ ... bezeichneten Coefficienten des ersten Teils der Ausgleichung.

Die Quadratsumme $[v_0\,v_0]$ in (3) und (4) reduziert sich allmählich vollends auf $[v'\,v']$ in folgender Weise:

$$[v'\,v'] = [v_0\,v_0] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} - \ldots \quad (5)$$

Das mittlere Fehlerquadrat der ersten Ausgleichung wird:

$$m_1^2 = \frac{[v'\,v']}{n-(s+u)} \quad (6)$$

Wir wollen nun auch noch einen anderen Umstand hervorheben, der sich bei Triangulierungsausgleichungen von selbst einstellt, ohne die Allgemeingültigkeit der bisherigen Entwicklungen zu beeinflussen, nämlich das Zerfallen der Fehlergleichungen (1) und der Normalgleichungen (4) in verschiedene ganz unabhängige Gruppen. Diese Gleichungen gehören nämlich zu dem Inbegriff *aller* Stationsausgleichungen.

Wir wollen dieses in allgemeinen Formeln andeuten, und annehmen, es handle sich um 3 Unbekannte mit folgenden in 2 Systeme zerfallenden Fehlergleichungen, in welchen etwa gewisse andere Unbekannte (x) (z) ... bereits eliminiert sein mögen:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1\,x + b_1\,y \ldots + l_1 \\ v_2 &= a_2\,x + b_2\,y \ldots + l_2 \\ v_3 &= a_3\,x + b_3\,y \ldots + l_3 \\ v_4 &= \ldots \quad \ldots c_4\,z + l_4 \\ v_5 &= \ldots \quad \ldots c_5\,z + l_5 \end{aligned}$$

Bildet man hiezu die Normalgleichungen, so werden sie:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y \ldots + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y \ldots + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} &= (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + (l_4^2 + l_5^2) \\ &= [v_0\,v_0]_1 \quad + [v_0\,v_0]_2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese in 2 Systeme zerfallende Form (7) ist in der allgemeinen Form (4) inbegriffen, und der Umstand, dass ein Teil der Coefficienten in (7) gleich Null ist, macht sich in der Weiterrechnung von selbst angenehm geltend.

Auch die Formel (5) zerfällt dann von selbst in einzelne getrennte Teile:

$$[v'\,v']_1 = [v_0\,v_0]_1 - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}$$

$$[v'\,v']_2 = [v_0\,v_0]_2 + \ldots\ldots\ldots - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]}$$

Wegen des Ausfallens von $[a\,c]$ und $[b\,c]$ in (7) ist nämlich $[c\,l\,.\,2] = [c\,l]$ und $[c\,c\,.\,2] = [c\,c]$. Dann ist:

$$[v'\,v']_1 + [v'\,v']_2 = [v'\,v']$$

$[v'\,v']_1$ entspricht einer ersten Station, $[v'\,v']_2$ einer zweiten Station u. s. w.

Die Formel (6) kann man nun sowohl für jede einzelne Station, als auch für den Inbegriff aller Stationen anschreiben.

§ 55. Formel-Zusammenstellung für vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Wir stellen alle Gebrauchsformeln für die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen im Folgenden zusammen, mit den bisher in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen. Zur Vergleichung stellen wir rechts daneben die entsprechenden Formeln der „Rechnungsvorschriften" von S. 1—24 des Werkes: „Die Königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, zweite verbesserte Auflage, herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation, Berlin 1870." und zwar beziehen sich die römischen Nummern XVI, XVII u. s. w. auf die dort angewendete Numerierung I. bis XXIX.

Die Bezugnahme auf die Landesaufnahme ist hier deswegen sehr nützlich, weil eine andere Anwendung der vorliegenden allgemeinen Aufgabe als auf jene Triangulierungen der Landesaufnahme nach 1870, kaum noch vorkommt, und das Zurechtfinden in der Formelmenge ohne einen solchen Leitfaden nicht leicht ist.

Wir beginnen mit den reduzierten Stations-Normalgleichungen, wobei sich die Bezeichnung „reduziert" darauf bezieht, dass die Stations-Unbekannten, welche wir in § 54. mit (x) , (y) bezeichnet haben ($x\,x,\ x_{,,}\ x_{,,,}$ der Rechnungsvorschriften S. 2), in den Stations-Normalgleichungen bereits eliminiert seien.

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Reduzierte Stations-Normalgleichungen:

$\underline{[a\,a]}\,x_0 + [a\,b]\,y_0 + [a\,c]\,z_0 + [a\,l] = 0$	$\underline{(a\,a)}\,A - (a\,b)\,B - (a\,c)\,C - (a\,n) = 0$
$\underline{[b\,b]}\,y_0 + [b\,c]\,z_0 + [b\,l] = 0$	$+ \underline{(b\,b)}\,B - (b\,c)\,C - (b\,n) = 0$
$\underline{[c\,c]}\,z_0 + [c\,l] = 0$	$+ \underline{(c\,c)}\,C - (c\,n) = 0$
$\underline{[l\,l]} = [v_0\,v_0]$	$(V_0\,V_0)$
	III. und VIII$_c$.

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Diese Gleichungen werden nach $x_0\ y_0\ z_0$, bzw. $A\ B\ C$, aufgelöst, man hat also nun:

die auf der Station ausgeglichenen Winkel:

x_0	y_0	z_0	A	B	C

Am Schluss der Elimination bekommt man hiebei gelegentlich die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler:

$$[v'v']_1=[v_0v_0]_1-\left\{\frac{[al]^2}{[aa]}+\frac{[bl.1]^2}{[bb.1]}+\frac{[cl.2]^2}{[cc.2]}\right\} \qquad (VV)=(V_0V_0)-\left\{\frac{(an)^2}{(aa)}+\frac{(bn.1)^2}{(bb.1)}+\frac{(cn.2)^2}{(cc.2)}\right\}$$

VIII$_c$.

$[v'\ v']_1$ gilt zunächst für *eine* Station; für alle Stationen zusammen hat man:
$[v'\ v']_1+[v'\ v']_2+[v'\ v']_3+\ldots=[v'\ v']$

$(V\ V)$ gilt zunächst für *eine* Station; für alle Stationen zusammen hat man:
$(V\ V)+(V'\ V')+(V''\ V'')+(V'''\ V''')+\ldots$

Jede einzelne Stationsausgleichung giebt nun einen mittleren Fehler:

$$m_1=\sqrt{\frac{[v'\ v']_1}{n-u-s}} \qquad \mu_1=\sqrt{\frac{(V\ V)}{m-A,B,C-x}}$$

Bezieht man die Berechnung auf alle Stationen zusammen, so wird:

$$m_1=\sqrt{\frac{[v'\ v']}{[n]-[u]-[s]}} \qquad \mu_1=\sqrt{\frac{(V\ V)+(V'\ V')+(V''\ V'')}{(m)-(A,B,C)-(x)}}$$

Mit den auf den Stationen ausgeglichenen Winkeln $x_0\ y_0\ z_0$, bzw. $A\ B\ C$, bildet man die Netzbedingungsgleichungen, gerade so, wie wenn diese $x_0\ y_0\ z_0$ bzw. $A\ B\ C$ unmittelbar gemessene Winkel wären. Die Netzkorrektionen dieser Winkel werden bei Triangulierungen mit (1) (2) (3) ... durch das ganze Netz durchlaufend numeriert.

Netzbedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} A_1\,\delta x+A_2\,\delta y+A_3\,\delta z+\ldots+w_1&=0\\ B_1\,\delta x+B_2\,\delta y+B_3\,\delta z+\ldots+w_2&=0\\ C_1\,\delta x+C_2\,\delta y+C_3\,\delta z+\ldots+w_3&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_1(1)+\mathfrak{a}_2(2)+\mathfrak{a}_3(3)+\ldots-\mathfrak{A}&=0\\ \mathfrak{b}_1(1)+\mathfrak{b}_2(2)+\mathfrak{b}_3(3)+\ldots-\mathfrak{B}&=0\\ \mathfrak{c}_1(1)+\mathfrak{c}_2(2)+\mathfrak{c}_3(3)+\ldots-\mathfrak{C}&=0 \end{aligned}$$

VIII.

Nachdem so die Numerierung aller Winkel des Netzes festgestellt ist, und die Netzbedingungsgleichungen tabellarisch geordnet sind, bildet man auch eine entsprechende Tabelle der Gewichts-Coefficienten. Bei Gelegenheit der einzelnen Stations-Normalgleichungs-Auflösungen hat man (nach § 28. oder § 33.) alle diese Coefficienten bestimmt:

Gewichts-Coefficienten der einzelnen Stationen:

$$\begin{array}{llll} [\alpha\,\alpha] & [\alpha\,\beta] & [\alpha\,\gamma] & \ldots\\ & [\beta\,\beta] & [\beta\,\gamma] & \ldots\\ & & [\gamma\,\gamma] & \ldots \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (\alpha\,\alpha) & (\alpha\,\beta) & (\alpha\,\gamma) & \ldots\\ & (\beta\,\beta) & (\beta\,\gamma) & \ldots\\ & & (\gamma\,\gamma) & \ldots \end{array}$$

Diese Coefficienten zerfallen in so viele Einzelsysteme, als man Stationen hat. Zur tabellarischen Übersicht empfiehlt es sich, nun statt der Literierung $\alpha\ \beta\ \ldots$ eine den Netzkorrektionen (1) (2) (3) entsprechende Numerierung anzuwenden:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formeln unseres Buches §. 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Gewichts-Coefficienten-Tabelle für alle Stationen:
(beispielshalber mit Gruppen von 3 2 3 Elementen)

	1]	2]	3]	4]	5]	6]	7]	8]
[1.	$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$	$[\alpha\,\gamma]$					
[2.	$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$	$[\beta\,\gamma]$					
[3.	$[\alpha\,\gamma]$	$[\beta\,\gamma]$	$[\gamma\,\gamma]$					
[4.				$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$			
[5.				$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$			
[6.						$[\alpha\,\alpha]$	$[\alpha\,\beta]$	$[\alpha\,\gamma]$
[7.						$[\alpha\,\beta]$	$[\beta\,\beta]$	$[\beta\,\gamma]$
[8.						$[\alpha\,\gamma]$	$[\beta\,\gamma]$	$[\gamma\,\gamma]$

Aus den Coefficienten der Netzbedingungsgleichungen und aus den Gewichts-Coefficienten bildet man die

Übertragungs-Coefficienten:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1[\alpha\,\alpha] + A_2[\alpha\,\beta] + A_3[\alpha\,\gamma] \qquad \mathfrak{A}_1 = \mathfrak{a}_1(\alpha\,\alpha) + \mathfrak{a}_2(\alpha\,\beta) + \mathfrak{a}_3(\alpha\,\gamma)$$
$$\mathfrak{A}_2 = A_1[\alpha\,\beta] + A_2[\beta\,\beta] + A_3[\beta\,\gamma] \qquad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{a}_1(\alpha\,\beta) + \mathfrak{a}_2(\beta\,\beta) + \mathfrak{a}_3(\beta\,\gamma)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{B}_1 = B_1[\alpha\,\alpha] + B_2[\alpha\,\beta] + B_3[\alpha\,\gamma] \qquad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{b}_1(\alpha\,\alpha) + \mathfrak{b}_2(\alpha\,\beta) + \mathfrak{b}_3(\alpha\,\gamma)$$
$$\mathfrak{B}_2 = B_1[\alpha\,\beta] + B_2[\beta\,\beta] + B_3[\beta\,\gamma] \qquad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{b}_1(\alpha\,\beta) + \mathfrak{b}_2(\beta\,\beta) + \mathfrak{b}_3(\beta\,\gamma)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

XVI.

oder numeriert:

$$\mathfrak{A}_1 = A_1[1.1] + A_2[1.2] + A_3[1.3]$$
$$\mathfrak{A}_2 = A_1[2.1] + A_2[2.2] + A_3[2.3]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{B}_1 = B_1[1.1] + B_2[1.2] + B_3[1.3]$$
$$\mathfrak{B}_2 = B_1[2.1] + B_2[2.2] + B_3[2.3]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch Multiplikationen der Coefficienten $A\ B\ \ldots$ der Bedingungsgleichungen mit den Übertrags-Coefficienten $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \ldots$ bildet man:

$$[\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] \quad [\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\,B] \quad [\mathrm{I\,III}] = [A\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}\,C]$$
$$[\mathrm{II\,II}] = [A\,\mathfrak{B}] \quad [\mathrm{II\,III}] = [B\,\mathfrak{C}] = [\mathfrak{B}\,C]$$
$$[\mathrm{III\,III}] = [C\,\mathfrak{C}]$$

Dieses sind die Coefficienten der

Wenn man mit den Coefficienten $\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ldots$ von XIII. die Hilfsformeln bildet:

$$[1] = \mathfrak{a}_1\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_1\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_1\,\mathrm{III}$$
$$[2] = \mathfrak{a}_2\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_2\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_2\,\mathrm{III}$$
$$[3] = \mathfrak{a}_3\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_3\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_3\,\mathrm{III}$$
$$[4] = \mathfrak{a}_4\,\mathrm{I} + \mathfrak{b}_4\,\mathrm{II} + \mathfrak{c}_4\,\mathrm{III}$$

$\mathrm{X_a}$.

und wenn man diese Ausdrücke in die unten gegebenen Gewichtsgleichungen XV. setzt, so erlangt man die ebenfalls unten mitgeteilten Korrektionsformeln XVI. Diese endlich setzt man in die Bedingungsgleichungen XIII. und erhält damit die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Normalgleichungen:

$$\begin{aligned} \underline{[\mathrm{II}]}\,k_1 + [\mathrm{I\,II}]\,k_2 + [\mathrm{I\,III}]\,k_3 + w_1 &= 0 \\ \underline{[\mathrm{II\,II}]}\,k_2 + [\mathrm{II\,III}]\,k_3 + w_2 &= 0 \\ \underline{[\mathrm{III\,III}]}\,k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{(\mathrm{I\,I})}\,\mathrm{I} + (\mathrm{I\,II})\,\mathrm{II} + (\mathrm{I\,III})\,\mathrm{III} - \mathfrak{A} &= 0 \\ \underline{(\mathrm{II\,II})}\,\mathrm{II} + (\mathrm{II\,III})\,\mathrm{III} - \mathfrak{B} &= 0 \\ \underline{(\mathrm{III\,III})}\,\mathrm{III} - \mathfrak{C} &= 0 \end{aligned}$$

XVII.

Diese Normalgleichungen löst man auf, und erhält damit:

die Korrelaten:

$k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \ldots$ | $\mathrm{I} \quad \mathrm{II} \quad \mathrm{III} \quad \ldots$

Indem man den Bedingungsgleichungen XIII. nach Vertikallinien folgt, bildet man die Formeln für die:

Hilfsgrössen [1] [2] [3]:

$$\begin{aligned} [1] &= A_1 k_1 + B_1 k_2 + C_1 k_3 + \ldots \\ [2] &= A_2 k_1 + B_2 k_2 + C_2 k_3 + \ldots \\ [3] &= A_3 k_1 + B_3 k_2 + C_3 k_3 + \ldots \\ [4] &= A_4 k_1 + B_4 k_2 + C_4 k_3 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \mathfrak{a}_1 \mathrm{I} + \mathfrak{b}_1 \mathrm{II} + \mathfrak{c}_1 \mathrm{III} + \ldots \\ [2] &= \mathfrak{a}_2 \mathrm{I} + \mathfrak{b}_2 \mathrm{II} + \mathfrak{c}_2 \mathrm{III} + \ldots \\ [3] &= \mathfrak{a}_3 \mathrm{I} + \mathfrak{b}_3 \mathrm{II} + \mathfrak{c}_3 \mathrm{III} + \ldots \\ [4] &= \mathfrak{a}_4 \mathrm{I} + \mathfrak{b}_4 \mathrm{II} + \mathfrak{c}_4 \mathrm{III} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$\mathrm{X_a}$.

Nachdem die Korrelaten und die Hilfsgrössen ausgerechnet sind, hat man die:

Korrektionsformeln:

$$\begin{aligned} \delta x &= \mathfrak{A}_1 k_1 + \mathfrak{B}_1 k_2 + \mathfrak{C}_1 k_3 \\ \delta y &= \mathfrak{A}_2 k_1 + \mathfrak{B}_2 k_2 + \mathfrak{C}_2 k_3 \\ \delta z &= \mathfrak{A}_3 k_1 + \mathfrak{B}_3 k_2 + \mathfrak{C}_3 k_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &= \mathfrak{A}_1 \mathrm{I} + \mathfrak{B}_1 \mathrm{II} + \mathfrak{C}_1 \mathrm{III} \\ (2) &= \mathfrak{A}_2 \mathrm{I} + \mathfrak{B}_2 \mathrm{II} + \mathfrak{C}_2 \mathrm{III} \\ (3) &= \mathfrak{A}_3 \mathrm{I} + \mathfrak{B}_3 \mathrm{II} + \mathfrak{C}_3 \mathrm{III} \end{aligned}$$

XVI.

oder zur Kontrole:

Gewichtsgleichungen:

$$\begin{aligned} \delta x &= [1]\,[\alpha\,\alpha] + [2]\,[\alpha\,\beta] + [3]\,[\alpha\,\gamma] \\ \delta y &= [1]\,[\alpha\,\beta] + [2]\,[\beta\,\beta] + [3]\,[\beta\,\gamma] \\ \delta z &= [1]\,[\alpha\,\gamma] + [2]\,[\beta\,\gamma] + [3]\,[\gamma\,\gamma] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) &= (\alpha\,\alpha)\,[1] + (\alpha\,\beta)\,[2] + (\alpha\,\gamma)\,[3] \\ (2) &= (\alpha\,\beta)\,[1] + (\beta\,\beta)\,[2] + (\beta\,\gamma)\,[3] \\ (3) &= (\alpha\,\gamma)\,[1] + (\beta\,\gamma)\,[2] + (\gamma\,\gamma)\,[3] \end{aligned}$$

XV.

Damit ist die Netzausgleichung vollendet. Für die Quadratsumme der bei der Netzausgleichung übrig bleibenden Fehler hat man verschiedene Formeln:

$$[v''\,v''] = (1)\,[1] + (2)\,[2] + (3)\,[3]$$

$$[v''\,v''] = -w_1 k_1 - w_2 k_2 - w_3 k_3 = -[wk]$$

$$[v''\,v''] = \frac{w_1^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2 . 1]^2}{[\mathrm{II\,II} . 1]} + \frac{[w_3 . 2]^2}{[\mathrm{III\,III} . 2]}$$

$$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = (1)\,[1] + (2)\,[2] + (3)\,[3] \quad \text{(XVIII)}$$

$$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\,\mathrm{I} + \mathfrak{B}\,\mathrm{II} + \mathfrak{C}\,\mathrm{III}$$

$$[\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = \frac{\mathfrak{A}^2}{(\mathrm{I\,I})} + \frac{(\mathfrak{B} . 1)^2}{(\mathrm{II\,II} . 1)} + \frac{(\mathfrak{C} . 2)^2}{(\mathrm{III\,III} . 2)} \quad \text{(XIX)}$$

Hieraus berechnet sich der mittlere Gewichtseinheitsfehler für die Netzausgleichung allein:

$$m_2 = \sqrt{\frac{[v''\,v'']}{r}}$$

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{(\mathfrak{B}\,\mathfrak{B})}{(\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C})}}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formeln unseres Buches § 50—54.	Formeln der Rechnungsvorschriften der Landesaufnahme S. 1—24.

Der mittlere *Gewichtseinheitsfehler* der Gesamtausgleichung ist:

$$m = \sqrt{\frac{[v'\,v'] + [v''\,v'']}{[n] - [u] - [s] + r}} \qquad \mu = \sqrt{\frac{(V\,V) + (V'\,V') + (V''\,V'') + (\mathfrak{V}\mathfrak{V})}{(m) - (A,B,C) - (x) + (\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})}}$$

XXI. und XXII.

Wenn man das Gewicht P einer Funktion der ausgeglichenen Elemente bestimmen will, so bringt man diese Funktion, wenn sie nicht an und für sich schon linear ist, durch Differentiieren in die Form:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f_1 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = f_2 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f_3 \qquad \frac{\partial F}{\partial A} = l_1 \quad \frac{\partial F}{\partial B} = l_2 \quad \frac{\partial F}{\partial C} = l_3$$

Mit diesen neuen Coefficienten f bzw. l und den schon früher bekannten Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. bildet man:

$$[\alpha\,\alpha]f_1 + [\alpha\,\beta]f_2 + [\alpha\,\gamma]f_3 = q_1$$
$$[\alpha\,\beta]f_1 + [\beta\,\beta]f_2 + [\beta\,\gamma]f_3 = q_2$$
$$[\alpha\,\gamma]f_1 + [\beta\,\gamma]f_2 + [\gamma\,\gamma]f_3 = q_3$$

$$(\alpha\,\alpha)l_1 + (\alpha\,\beta)l_2 + (\alpha\,\gamma)l_3 = q_1$$
$$(\alpha\,\beta)l_1 + (\beta\,\beta)l_2 + (\beta\,\gamma)l_3 = q_2$$
$$(\alpha\,\gamma)l_1 + (\beta\,\gamma)l_2 + (\gamma\,\gamma)l_3 = q_3$$

XXVIII.

Nachdem die q ausgerechnet sind, findet man den ersten Teil der gesuchten Gewichtsreciproke:

$$\frac{1}{P_0} = [f\,q] \qquad \frac{1}{P_0} = (l\,q)$$

Weiter berechnet man Ersatzglieder für die Absolutglieder der Bedingungsgleichungen, und zwar hat man dafür zweierlei Formeln:

Ersatzglieder:

$$[\mathfrak{A}\,f] \text{ oder } = [A\,q] \qquad (\mathfrak{A}\,l) \text{ oder } = (a\,q)$$
$$[\mathfrak{B}\,f] \;\;„ \;\; = [B\,q] \qquad (\mathfrak{B}\,l) \;\;„ \;\; = (b\,q)$$
$$[\mathfrak{C}\,f] \;\;„ \;\; = [C\,q] \qquad (\mathfrak{C}\,l) \;\;„ \;\; = (c\,q)$$

(Seite 20.)

Diese Ersatzglieder setzt man an Stelle der Absolutglieder $w_1\;w_2\;w_3$ bzw. $\mathfrak{A}\;\mathfrak{B}\;\mathfrak{C}$ der Normalgleichungen XVII, und findet mit Zuziehung des schon vorher berechneten $[f\,q]$ durch allmähliche Elimination in üblicher Weise:

$$\frac{1}{P} = [q\,f] - \frac{[\mathfrak{A}\,f]^2}{[\mathrm{I\,I}]} - \frac{[\mathfrak{B}\,f.1]^2}{[\mathrm{II\,II}.1]} - \frac{[\mathfrak{C}\,f.2]^2}{[\mathrm{III\,III}.2]} \qquad \frac{1}{P} = (l\,q] - \frac{(\mathfrak{A}\,l)^2}{[\mathrm{I\,I}]} - \frac{(\mathfrak{B}\,l.1)^2}{[\mathrm{II\,II}.1]} - \frac{(\mathfrak{C}\,l.2)^2}{[\mathrm{III\,III}.2]}$$

XXIX.

Mittlerer Fehler der Funktion F:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} \qquad M = \mu\sqrt{\frac{1}{P}}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 56. Zusammenfassung aller Formen von Ausgleichungsaufgaben.

Die Ausgleichungsaufgaben, welche wir bisher behandelt haben, sind in den vorgeführten Formen allmählich durch praktische Bedürfnisse einzeln erzeugt worden; es sind das aber noch nicht alle Aufgaben der Ausgleichungsrechnung, weshalb wir nun zum Schlusse daran gehen wollen, eine Systematik aller Ausgleichungsaufgaben zu bilden und dieselben in einem allgemeinsten Falle zusammenzufassen, und zwar letzteres im Anschluss an *Helmert*s Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q., Leipzig 1872, welcher dort in § 5. zuerst eine solche Systematik und Zusammenfassung gegeben hat.

I. Direkte Beobachtungen.

Wenn *eine* Unbekannte durch mehrfache unabhängige Messungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ (von gleicher Genauigkeit) bestimmt wurde, so bestehen nach § 7. S. 20 folgende Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ v_2 &= x - l_2 \\ &\cdots\cdots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und es ist der bestbestimmte Wert von x das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{[l]}{n} \tag{2}$$

II. Vermittelnde Beobachtungen.

Zwischen den Unbekannten $x,\ y,\ z \ldots$ und den unabhängigen Beobachtungen $l_1\ l_2 \ldots l_n$ bestehen nach § 12. S. 41 die Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= \overbrace{a_n x + b_n y + c_n z + \ldots}^{\text{Anzahl} = u.} + l_n \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Hier ist n grösser als u oder als Grenzfall $n = u$, jedenfalls nicht n kleiner als u, und dann bekommt man die Bestimmung der Unbekannten $x,\ y,\ z$ durch Auflösung der Normalgleichungen (14) S. 44.

Man bemerkt, dass die Gleichungen (1) in den Gleichungen (3) mit enthalten sind, indem alle $a = 1$, alle $b,\ c,\ d \ldots = 0$ und $l = -l$ genommen wird. Es ist also der Fall *I.* direkte Beobachtungen mit arithmetischem Mittel, in dem Falle *II.* vermittelnde Beobachtungen mit enthalten.

An den Ausgleichungsfall *II* wollen wir noch eine etwas erweiterte Aufgabe anschliessen, welche in unserem früheren Entwicklungsgange § 12—36. noch *nicht* enthalten ist, nämlich vermittelnde Beobachtungen mit Fehler-*Differenz*-Gleichungen, in einfachster Gestalt so:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Anzahl} \\ = n - 1 \end{array}\right\} \left\{\begin{aligned} v_2 - v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ v_3 - v_1 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \quad (n - 1 > u) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n - v_1 &= \overbrace{a_n x + b_n y + c_n z + \ldots}^{\text{Anzahl} = u} + l_n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hier treten nur *Differenzen* $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1 \ldots$ als linke Seiten der Fehlergleichungen auf, niemals die v_1, $v_2 \ldots$ einzeln; man kann aber gewöhnliche Fehlergleichungen herstellen, indem man v_1 selbst als Unbekannte einführt, also so:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \begin{array}{l} v_1 = v_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_2 = v_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + l_1 \\ v_3 = v_1 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + l_2 \quad (n > u+1) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_n = \underbrace{v_1 + a_n x + b_n y + c_n z}_{\text{Anzahl} = u+1} + l_n \end{array} \right\} \tag{5}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left. \begin{array}{l} n\, v_1 + [a]\, x + [b]\, y + [c]\, z + l = 0 \\ [a]\, v_1 + [a\,a]\, x + [a\,b]\, y + [a\,c]\, z + [a\,l] = 0 \\ [b]\, v_1 + [a\,b]\, x + [b\,b]\, y + [b\,c]\, z + [b\,l] = 0 \\ [c]\, v_1 + [a\,c]\, x + [b\,c]\, y + [c\,c]\, z + [c\,l] = 0 \end{array} \right\} \tag{6}$$

und die erste Reduktion mit Elimination von v_1 giebt:

$$\left. \begin{array}{l} \left([a\,a] - \frac{[a]}{n}[a]\right) x + \left([a\,b] - \frac{[a]}{n}[b]\right) y + \left([a\,c] - \frac{[a]}{n}[c]\right) z + \left([a\,l] - \frac{[a]}{n}[l]\right) = 0 \\ \left([b\,b] - \frac{[b]}{n}[b]\right) y + \ldots \quad \text{u. s. w.} \end{array} \right\} \tag{7}$$

Wir werden diesen Fall in verschiedenen praktisch-geodätischen Aufgaben wieder finden (namentlich Eliminierung der Orientierungs-Unbekannten bei Richtungsmessungen). Hier kam es nur darauf an, zu zeigen, dass durch den Kunstgriff, eines der v selbst als Unbekannte zu setzen, die Aufgabe (4) mit $n-1$ Gleichungen und u Unbekannten zurückgeführt werden konnte auf Ausgleichung mit n gewöhnlichen Fehlergleichungen und $u+1$ Unbekannten. Das Verfahren ist auch auf mehr als *eine* Hilfsunbekannte v anwendbar.

III. Bedingte Beobachtungen.

In (3) § 37. hatten wir die Gleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots\ a_n v_n + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots\ b_n v_n + w_2 = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots\ r_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + w_r = 0 \end{array} \right\} \quad (n > r) \tag{8}$$

Es wurde in § 37. gezeigt, dass man irgend welche r der Verbesserungen v in den $n-r$ übrigen mit Hilfe der vorstehenden Bedingungsgleichungen (8) ausdrücken und dadurch die Aufgabe der Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit n Fehlergleichungen zurückführen kann.

Man kann dieses auch noch allgemeiner so ansehen:

Wenn es gelingt, irgend welche $n-r$ unabhängige unter den v auszudrücken in irgend welchen $n-r$ unabhängigen Unbekannten $x, y, z \ldots$, so kann man mittelst der Gleichungen (8) auch die übrigen r von den v in denselben $n-r$ Unbekannten $x, y, z \ldots$ ausdrücken, und dadurch das Ganze zurückführen auf $(n-r)+r = n$ Fehlergleichungen mit $n-r$ Unbekannten (dieses ist z. B. der Fall bei Höhen-Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen, Band II, 1893, §. 147. $n = 14$, $r = 8$, $n - r = 6$).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

IV. Vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen.

Auch diese Aufgabe lässt sich auf die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen, wie in § 49. gezeigt wurde. Ausserdem haben wir in § 50—51. eine zweite Lösung kennen gelernt durch Trennung in zwei Teile, deren erster Teil vermittelnde Beobachtungen und deren zweiter Teil bedingte Beobachtungen betrifft.

V. Allgemeinster Fall.

Alle bisher behandelten Ausgleichungsaufgaben können als Einzelfälle der folgenden allgemeinen Aufgabe betrachtet werden:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \ldots\ a_n v_n + A_1 x + B_1 y + C_1 z + w_1 = 0 \\ b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \ldots\ b_n v_n + A_2 x + B_2 y + C_2 z + w_2 = 0 \\ c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots\ c_n v_n + A_3 x + B_3 y + C_3 z + w_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_1 v_1 + r_2 v_2 + r_3 v_3 + \ldots\ r_n v_n}_{\text{Anzahl} = n} + \underbrace{A_r x + B_r y + C_r z + w_r = 0}_{\text{Anzahl} = u} \end{array} \right\} \quad (9)$$

$$r > u \quad , \quad n > r - u$$

Die $v_1\ v_2 \ldots v_n$ sind Beobachtungsverbesserungen, deren Quadratsumme $[v\,v]$ ein Minimum werden soll; x, y, z sind Unbekannte.

Wenn $r = u$ ist, so hat man ohne Ausgleichung eine strenge Lösung, indem alle $v = 0$ werden und die so bleibenden n Gleichungen nach den u Unbekannten $x\ y\ z$ aufgelöst werden.

Eine Ausgleichung ist also nur möglich für $r > u$, und dann kann man die Aufgabe zurückführen auf r Bedingungsgleichungen zwischen den v ohne die x, y, z, indem man mit Hilfe von u ausgewählten Gleichungen die u Unbekannten x, y, z in den dazu gehörigen v ausdrückt und damit in den $r - u$ übrigen Gleichungen eliminiert. Es bleiben dann $r - u$ Bedingungsgleichungen zwischen den n Werthen v übrig, weshalb zu deren Ausgleichung noch nötig ist, dass $r - u < n$ ist, und der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist dann:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{r - u}} \quad (10)$$

Die in den Gleichungen (9) enthaltene Aufgabe ist also im Prinzip gelöst, und wie sich die Lösung im einzelnen Falle gestalten wird, hängt von der Verteilung der Coefficienten ab, deren ein Teil $= 0$ oder $= 1$ sein kann oder sonst einfache Werte annehmen kann.

Durch vereinfachende Annahme betreffs der Coefficienten kann man alle früheren Aufgaben I. II. III. IV. in V. wieder finden, z. B. II. Vermittelnde Beobachtungen, entstehen aus V. dadurch, dass in jeder Gleichung nur ein einzelnes v stehen bleibt, welches dann als lineare Funktion der x, y, z auftritt, dazu ist nötig, dass $r > n$ oder höchstens $r = n$ ist; wenn $r < n$ ist, so ist es nicht möglich, für jedes v eine besondere Fehlergleichung zu erlangen, man kann dann aber einzelne v als besondere Unbekannte herausheben, so wie in (5) mit einem einzelnen v_1 geschehen ist.

Der Fall III., bedingte Beobachtungen ist in V. sehr einfach dadurch enthalten, dass x, y, z gleich Null werden, und der Fall IV., vermittelnde Beobachtungen mit Bedingungsgleichungen, ergiebt sich aus V. durch eine Zerfällung in zwei Gruppen von Gleichungen, deren erste nur je ein einzelnes v und die x, y, z und deren zweite keine v und dagegen die x, y, z allein enthält.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Durch die vorstehenden Betrachtungen ist auch klar geworden, dass *alle* Ausgleichungsaufgaben sich auf den Fall II. vermittelnde Beobachtungen, zurückführen lassen, wie wir schon am Anfang von § 12. S. 41 behauptet haben.

Aus diesem Grunde war es auch nur nötig, den Satz für den mittleren Fehler, betreffs der Division mit $n - u$ in (19) § 27. S. 87 für vermittelnde Beobachtungen zu beweisen; auf die übrigen Fälle könnte dieser Satz dann durch einfache Betrachtungen über die Zahl der Beobachtungen und der Unbekannten übertragen werden, wie z. B. für den allgemeinsten Fall V. in der vorstehenden Gleichung (10) geschehen ist.

Kapitel II.

Triangulierungs-Netze.

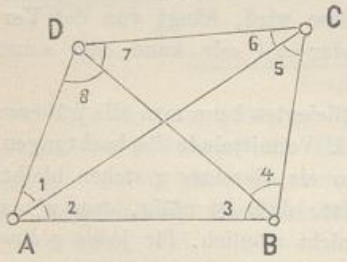
Die Ausgleichung der Triangulierungsnetze ist eine der wichtigsten Aufgaben der M. d. kl. Q. und hat durch ihre Dringlichkeit am allermeisten zur Entwicklung der Ausgleichungstheorien beigetragen. Diese Ausgleichung geschieht in den meisten Fällen nach bedingten Beobachtungen, und wurde zum erstenmale von *Gauss* gelehrt im Jahre 1826 in der Abhandlung „supplementum theoriae combinationis" (vgl. S. 4.).

Die erste Aufgabe zur Triangulierungsausgleichung besteht in der Aufstellung der Bedingungsgleichungen, mit welchen wir uns deshalb nun beschäftigen.

§ 57. Bedingungsgleichungen im Viereck.

Ehe wir für Dreiecksnetze im Allgemeinen die Bedingungen aufsuchen, welche zwischen den gemessenen Winkeln oder Richtungen bestehen, wollen wir den einfachen Fall eines Vierecks mit zwei Diagonalen vorausschicken, um an diesem Beispiele die Art der Behandlung zunächst kennen zu lernen.

Fig. 1.



In dem ebenen Viereck (Fig. 1.) seien die 8 einzelnen Winkel gemessen, welche mit 1, 2, 3 ... 8 numeriert sind, es sei z. B. (1) der Winkel $D\,A\,C$ und (2) sei der Winkel $C\,A\,B$. Es ist also angenommen, dass auf A zuerst nur $A\,D$ und $A\,C$ in einem Satze angezielt sind, dann in einem zweiten Satze $A\,C$ und $A\,B$, oder kurz, es sind auf A die zwei *einzelnen Winkel* (1) und (2) gemessen, und nicht ein Satz mit den 3 Richtungen $A\,D$, $A\,C$ und $A\,B$. (Der Fall von Richtungsmessungen wird erst nachher behandelt werden.)

Nachdem also über die Art der Messung Klarheit gegeben ist, überlegen wir, dass 8 Winkel für die eindeutige Konstruktion eines Vierecks zu viel sind; 4 Winkel würden ausreichen, um bei einer gegebenen Seite das Viereck zu konstruieren, es sind also 4 Winkel überschüssig, und diesen müssen 4 unter sich unabhängige Bedingungsgleichungen entsprechen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Suchen wir diese Bedingungen auf, so sieht man zuerst, dass 4 geschlossene Dreiecke da sind, welche geben:

Dreieck	$A\,B\,D$	$(1)+(2)+(3)+(8)=180°$	(1)
„	$B\,C\,D$	$(4)+(5)+(6)+(7)=180°$	(2)
„	$A\,D\,C$	$(1)+(6)+(7)+(8)=180°$	(3)
„	$A\,B\,C$	$(2)+(3)+(4)+(5)=180°$	(4)

Diese 4 Gleichungen sind aber nicht von einander unabhängig; z. B. wenn man (1) und (2) addiert und (3) subtrahiert, so erhält man (4), oder allgemeiner, wenn 3 Dreiecke schliessen, so schliesst das 4te von selbst.

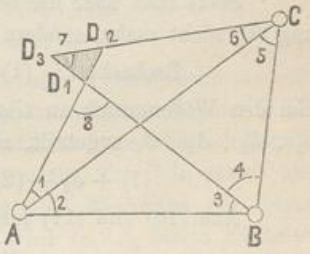
Man bemerkt auch, dass wenn die einzelnen Dreiecke auf 180° schliessen, auch von selbst das ganze Viereck auf 360° schliesst, d. h.:

$$(1)+(2)+(3)+(4)+(5)+(6)+(7)+(8)=360° \qquad (5)$$

Durch diese letzte Gleichung in Verbindung mit irgend welchen zweien der Gleichungen (1)—(4) wird ebenfalls alles ausgedrückt, was über Winkelsummen in dem ebenen Viereck (Fig. 1.) gesagt werden kann.

Da wir also nur 3 unabhängige Winkelsummengleichungen gefunden haben, aber im Ganzen bei 8 Winkeln 4 Bedingungen bestehen müssen, müssen wir noch eine 4te Gleichung suchen, welche auch bald durch die Konstruktion nach Fig. 2. angedeutet wird.

Fig. 2.



Wenn nämlich auch die 4 Dreiecke in ihren Winkelsummen je auf 180° schliessen, so ist damit noch nicht gesichert, dass das Viereck als Ganzes schliesst, denn es kann bei der Konstruktion von der Basis $A\,B$ aus, etwa bei D ein fehlerzeigendes Dreieck $D_1\,D_2\,D_3$ entstehen, indem mit dem Dreieck $A\,B\,C$ begonnen wird, und dann die drei Strahlen $A\,D$, $B\,D$, $C\,D$ gezogen werden, welche im Allgemeinen sich nicht in *einem* Punkte schneiden werden.

Um auszudrücken, dass das fehlerzeigende Dreieck auf einen Punkt zusammenschrumpft, kann man z. B. $B\,D_1 = B\,D_3$ setzen, d. h.:

$$B\,D_1 = \frac{A\,B\ \sin(1+2)}{\sin(8)}$$

$$B\,D_3 = \frac{A\,B\ \sin(2)\sin(5+6)}{\sin(5)\sin(7)}$$

Diese beiden einander gleich gesetzt geben:

$$(B) \qquad \frac{\sin(1+2)\ \sin(5)\ \sin(7)}{\sin(8)\ \sin(2)\ \sin(5+6)} = 1 \qquad (6)$$

Dieses nennt man eine *Seitengleichung*, und zwar für B als Zentralpunkt, weil nach Fig. 1. die Gleichung (6) ausdrückt, dass $B\,A$ über $B\,D$ und $B\,C$ in sich selbst zurückgerechnet stimmen muss.

Dieses (6) ist nicht die einzige Form, in welcher das Schliessen des fehlerzeigenden Dreiecks ausgedrückt werden kann; man kann z. B. auch A als Zentralpunkt nehmen und ausdrücken, dass $A\,D_1 = A\,D_2$ werden soll, und das giebt:

$$(A) \qquad \frac{\sin(3)\ \sin(5)\ \sin(7+8)}{\sin(6)\ \sin(8)\ \sin(3+4)} = 1 \qquad (7)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Später werden wir sehen, dass es sogar 7 verschiedene Formen von Seitengleichungen in einem Viereck giebt, jedoch mag es hier genügen, wenigstens die nötige und genügende Zahl von Gleichungen gefunden zu haben, indem wir etwa (1) (2) (3) nebst (6) auswählen, und damit die schon zu Anfang erkannte Zahl von 4 unabhängigen Gleichungen haben.

Umformung der Bedingungsgleichungen.

In den bisherigen Gleichungen mögen (1) , (2) , (3) ... die Winkel überhaupt bezeichnen und z. B. die Gleichung (1) sagt, dass die Summe (1) + (2) + (3) + (8) den Betrag 180° erfüllen *soll*, was bei beobachteten Winkeln wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler nicht der Fall ist. Wir werden deshalb nun unterscheiden zwischen beobachteten Winkeln (1) , (2) , (3) ... und ausgeglichenen Winkeln [1] , [2] , [3] ... und Winkel-Verbesserungen δ_1 , δ_2 , δ_3 *) ... in dieser Weise:

$$(1) + \delta_1 = [1] \quad , \quad (2) + \delta_2 = [2] \quad , \quad (3) + \delta_3 = [3] \ldots \tag{8}$$

Als Vergleichung mit den allgemeinen Formeln von § 37. haben wir also die (1) , (2) , (3) entsprechend den dortigen l_1 , l_2 , l_3 und die [1] , [2] , [3] entsprechend den x_1 , x_2 , x_3.

Die Summengleichung für (1) , (2) , (3) , (8) giebt also nun:

$$\text{Ausgeglichen:} \quad [1] + [2] + [3] + [8] - 180° = 0 \tag{9}$$

Setzt man aber die beobachteten (1) , (2) , (3) , (8) ein, so stimmt die Gleichung (9) nicht mehr, sondern es entsteht ein Widerspruch w:

$$\text{Beobachtet:} \quad (1) + (2) + (3) + (8) - 180° = w \tag{10}$$

Um den Widerspruch zu tilgen, werden den Beobachtungen gewisse Verbesserungen δ_1 , δ_2 , δ_3 , δ_8 zugeteilt, also:

$$(1) + \delta_1 + (2) + \delta_2 + (3) + \delta_3 + (8) + \delta_8 - 180° = 0 \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_8 + w = 180° \tag{12}$$

Als Zahlenbeispiel wollen wir zu Fig. 1. folgende 8 Winkel als beobachtet annehmen, welche wir nach den 4 Dreiecken gruppieren:

(1) =	37°	26′	41″		(2) =	34°	35′	25″	
(2) =	34	35	25	72° 2′ 6″	(3) =	41	17	34	96° 75′ 36″
(3) =	41	17	34		(4) =	55	58	2	
(8) =	66	40	24		(5) =	48	9	2	
	180°	00′	04″			180°	00′	03″	
	w =	+	4″			w =	+	3″	
(4) =	55°	58′	2″		(1) =	37°	26′	41″	
(5) =	48	9	2	78° 0′ 28″	(8) =	66	40	27	112° 41′ 54″
(6) =	29	51	26		(7) =	46	1	27	
(7) =	46	1	27		(6) =	29	51	26	
	179°	59′	57″			180°	00′	01″	
	w =	−	3″			w =	+	1″	

(13)

*) Die *Winkel*verbesserungen werden hier δ genannt, weil das sonst für Beobachtungsverbesserungen von uns benützte Zeichen v für die nachher folgenden *Richtungs*verbesserungen vorbehalten werden soll.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diesen 4 Dreiecken entsprechen nach (12) folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_8 + 4'' = 0 \quad (14)$$

$$\delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 + 3'' = 0 \quad (15)$$

$$\delta_4 + \delta_5 + \delta_6 + \delta_7 - 3'' = 0 \quad (16)$$

$$(\delta_1 + \delta_6 + \delta_7 + \delta_8 + 1'' = 0) \quad (17)$$

davon sind aber, wie wir schon zu Anfang gesehen haben, nur 3 Gleichungen unabhängig (was wir dadurch angedeutet haben, dass die letzte (17) in Klammer gesetzt wurde).

Nach diesem müssen wir auch die Seitengleichung (6) auf lineare Form bringen, und rechnen dazu zunächst logarithmisch aus:

	log sin	Diff. für 10″
(5) = 48° 09′ 02″	9.872 0983	189
(7) = 46 01 27	9.857 1109	203
(1 + 2) = 72 2 6	9.978 2924	69
	9.707 5016	
(8) = 66° 40′ 27″	9.962 9694	90
(2) = 34 35 25	9.754 1220	306
(5 + 6) = 78 00 28	9.990 4169	45
	9.707 5083	

(18)

Probe 9.707 5016 — 9.707 5083 = — 0.000 0067

oder in Einheiten der 7. Stelle: $w = -67$ (19)

Um eine Beziehung zwischen diesem logarithmischen Widerspruche und den Winkelverbesserungen δ herzustellen, haben wir bei der logarithmischen Rechnung (18) die logarithmischen Differenzen für 10″ aus der dabei benützten logarithmisch-trigonometrischen Tafel notiert, z. B. 189 für den Winkel (5) = 48° 9′. Wir wissen also, dass eine Änderung dieses Winkels um 1″ den Betrag 18,9 Einheiten der letzten Stelle giebt, oder eine Winkeländerung = δ_5 Sekunden wird 18,9 δ_5 letzte Einheiten bringen. Ebenso verhält es sich bei den anderen Winkeln, und man kommt daher bald zu dem Schluss, dass die Winkeländerungen δ_5 , δ_7 , $\delta_1 + \delta_2$, . . . den Widerspruch $w = -67$ in folgender Weise zusammenbringen müssen:

$$+18{,}9\,\delta_5 + 20{,}3\,\delta_7 + 6{,}9\,(\delta_1 + \delta_2) - 9{,}0\,\delta_8 - 30{,}6\,\delta_2 - 4{,}5\,(\delta_5 + \delta_6) - 67 = 0 \quad (20)$$

Dabei ist in Einheiten der 7. Logarithmenstelle gerechnet, was aber nicht wesentlich ist; rechnet man in Einheiten der 6. Stelle, so erhält man:

$$+1{,}89\,\delta_5 + 2{,}03\,\delta_7 + 0{,}69\,(\delta_1 + \delta_2) - 0{,}90\,\delta_8 - 3{,}06\,\delta_2 - 0{,}45\,(\delta_5 + \delta_6) - 6{,}7 = 0 \quad (21)$$

Wenn man dieses zusammenfasst und ordnet, so erhält man:

$$+0{,}69\,\delta_1 - 2{,}37\,\delta_2 + 1{,}44\,\delta_5 - 0{,}45\,\delta_6 + 2{,}03\,\delta_7 - 0{,}90\,\delta_8 - 6{,}70 = 0 \quad (22)$$

Man kann überhaupt eine solche Gleichung mit jeder beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren, ohne deren sachliche Bedeutuug für die Ausgleichung zu ändern, und aus formellen Gründen ist es sehr nützlich, die Coefficienten der Seitengleichungen möglichst nahe = 1 zu machen, weil auch die Summengleichungs-Coefficienten in (14)—(17) alle = 1 sind.

Rechenprobe für das Absolutglied der Seitengleichung.

Die logarithmisch-trigonometrische Rechnung (18) lässt man nicht gern ohne Probe, weil ein Fehler im Absolutgliede w sich durch die ganze Rechnung fort-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

pflanzen und erst am Schlusse in schlimmer Weise zu Tage treten würde. Abgesehen von der unmittelbaren Doppelrechnung nach demselben Verfahren hat man hier bei *sphärischen* Dreiecken die erwünschte Probe, dass die Seitengleichung sowohl für die unmittelbaren Dreieckswinkel gilt, als auch für die nach dem Legendre'schen Satze um je $^1/_3$ Excess verminderten Dreieckswinkel. Da in unserem Falle (13)—(18) nur ein *ebenes* Viereck angenommen ist, können wir diese Probe hier nicht zeigen, behalten uns aber vor, dieselbe später zu behandeln (§ 59.).

Theoretische Berechnung der Seitengleichungs-Coefficienten.

Obgleich die Coefficienten 18,9 , 20,3 u. s. w. der linearen Seitengleichung (20) sich unmittelbar empirisch als logarithmische Sinusdifferenzen ergeben haben, ist es doch nicht überflüssig, diese Coefficienten auch theoretisch zu berechnen.

Wir wollen dazu etwas allgemeiner eine Seitengleichung so annehmen:

$$\frac{sin\,(1)\quad sin\,(3)\ \ldots}{sin\,(2)\quad sin\,(4)\ \ldots} = 1 \tag{23}$$

oder in logarithmischer Form:

$$log\,sin\,(1) - log\,sin\,(2) + log\,sin\,(3) - log\,(4)\ \ldots = 0$$

Dieses *soll* sein, ist aber im Allgemeinen nicht erfüllt, sondern giebt einen logarithmischen Widerspruch w:

$$log\,sin\,(1) - log\,sin\,(2) + log\,sin\,(3) - log\,sin\,(4)\ \ldots = w \tag{24}$$

Der Widerspruch w soll durch Zufügung der Verbesserungen δ_1 , δ_2 ... zu den beobachteten Winkeln (1) , (2) ... getilgt werden, d. h. es soll werden:

$$log\,sin\,\big((1)+\delta_1\big) - log\,sin\,\big((2)+\delta_2\big) + \ldots = 0$$

Hiezu findet man nach dem Taylor'schen Satze:

$$log\,sin\,\big((1)+\delta_1\big) = log\,sin\,(1) + \mu\,cotg\,(1)\,\frac{\delta_1}{\varrho} \tag{25}$$

Hiebei bedeutet $\mu = 0{,}43429\ldots$ den logarithmischen Modulus und der Nenner $\varrho = 206\,265''$ ist zugesetzt, damit δ_1 im letzten Gliede in Sekunden gerechnet werden kann. Durch Ausrechnung findet man:

$$log\,\frac{\mu}{\varrho} = 4.32336 - 10 \qquad \frac{\mu}{\varrho} = 0{,}0000021{\cdot}055$$

oder

$$\left.\begin{array}{lll} log\,\dfrac{\mu}{\varrho} = 1{\cdot}32336 & \dfrac{\mu}{\varrho} = 21{,}055 & \text{für 7. } log.\text{ Stelle} \\ \quad\ 0{\cdot}3236 & \quad\ 2{,}1055 & \text{„ 6. „ „} \end{array}\right\} \tag{26}$$

Wir wollen den Coefficienten von δ_1 in (25) kurz mit a_1 bezeichnen, und haben dann:

$$log\,sin\,\big((1)+\delta_1\big) - log\,sin\,(1) = a_1\,\delta_1 \text{ mit } a_1 = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,(1) \tag{27}$$

Nehmen wir als Beispiel die Berechnung (18), so ist:

$$\begin{array}{rll} (5) = 48^\circ\,09'\ 02'' & log\,cotg\,(5) & = 9.95214 \\ & log\,(\mu : \varrho) & = 1.32336 \text{ für 7. Stelle} \\ & log\,a_5 & = 1\,27550 \\ & a_5 & = 18{,}858 \text{ für 7. Stelle.} \end{array}$$

Dieses ist mit 18,9 in (20) hinreichend übereinstimmend.

Wenn man alle Coefficienten so ausrechnet, so erhält man statt (20):

$$+18{,}858\,\delta_5 + 20{,}222\,\delta_7 + 6{,}827(\delta_1+\delta_2) - 9{,}079\,\delta_8 - 30{,}532\,\delta_2 - 4{,}472(\delta_5+\delta_6) - 67{,}0 \tag{28}$$

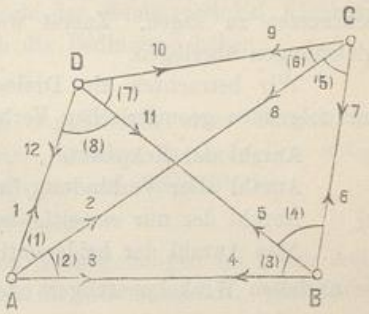
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Offenbar ist es streng genommen überflüssig, in solcher Weise die Coefficienten genauer zu berechnen als sie diejenige Logarithmentafel liefert, mit welcher man den Widerspruch w rechnet, oder mit welcher man nachher das Dreiecksnetz selbst zu rechnen beabsichtigt; indessen da man wegen der vielen im Laufe der langen Rechnung sich häufenden Abrundungsfehler die Coefficienten oft am Anfang mit mehr Stellen schreibt, als man schliesslich braucht, so kann man bei sehr ausgedehnten Netzen wohl lieber die Coefficienten nach (26) ausrechnen, als die weiteren Stellen mit Nullen ausfüllen.

Richtungs-Beobachtungen.

Bisher haben wir angenommen, man habe reine *Winkel*messungen, d. h. in jedem Messungssatze nur *zwei* Sichten, so dass in Fig. 3. die 8 einzelnen Winkel $DAC = (1)$, $CAB = (2)$ u. s. w. gemessen sind.

Fig. 3.



Statt dessen wollen wir nun die neue Annahme machen, es sei auf jedem Punkte ein voller Satz von Richtungen gemessen, also z. B. in A seien die drei Sichten AD , AC , AB gleichartig eingeschnitten. (Natürlich kann man auch annehmen, es seien mehrere solche Sätze gemessen, und in ein Mittel vereinigt.)

Dann hat man statt 8 Winkeln 12 Richtungen, wie in Fig. 3. an den Pfeilspitzen angeschrieben ist.

Wenn man wie bisher eine Winkelverbesserung mit δ bezeichnet und die Richtungsverbesserungen der beiden Winkelschenkel nun mit v_1 und v_2 bezeichnet, so ist lediglich δ der Differenz $v_2 - v_1$ gleich zu setzen, also in Fig. 3.:

$$\delta_1 = v_2 - v_1 \quad , \quad \delta_2 = v_3 - v_2 \quad , \quad \delta_1 + \delta_2 = v_3 - v_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Auf diese Weise gehen die früheren Gleichungen (14)—(16) und (21) in folgende über:

$$(v_3 - v_1) + (v_5 - v_4) + (v_{12} - v_{11}) + 4'' = 0$$
$$(v_3 - v_2) + (v_6 - v_4) + (v_8 - v_7) + 3'' = 0$$
$$(v_6 - v_5) + (v_9 - v_7) + (v_{11} - v_{10}) - 3'' = 0$$
$$1{,}89\,(v_8 - v_7) + 2{,}03\,(v_{11} - v_{10}) + 0{,}69\,(v_3 - v_1) - 0{,}90\,(v_{12} - v_{11}) - 3{,}06\,(v_3 - v_2) - 0{,}45\,(v_9 - v_7) - 6{,}7 = 0$$

Nach den Nummern geordnet und bzw. zusammengefasst giebt dieses:

$$-v_1 + v_3 - v_4 + v_5 - v_{11} + v_{12} + 4'' = 0 \qquad (29)$$
$$-v_2 + v_3 - v_4 + v_6 - v_7 + v_8 + 3'' = 0 \qquad (30)$$
$$-v_5 + v_6 - v_7 + v_9 - v_{10} + v_{11} - 3'' = 0 \qquad (31)$$
$$-0{,}69\,v_1 + 3{,}06\,v_2 - 2{,}37\,v_3 - 1{,}44\,v_7 + 1{,}89\,v_8 - 0{,}45\,v_9 - 2{,}03\,v_{10} + 2{,}93\,v_{11} - 0{,}90\,v_{12} - 6{,}7 = 0 \qquad (32)$$

Diese 4 Gleichungen (29)—(32) sind der Richtungs-Ausgleichung des Vierecks (Fig. 3.) zu Grunde zu legen.

In jeder dieser Gleichungen (29)—(32) ist die algebraische Summe aller Coefficienten gleich Null, nämlich in (29) bis (31): $3 - 3 = 0$ und in (32): $+7{,}88 - 7{,}88 = 0$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses ist nicht zufällig, sondern tritt bei Bedingungsgleichungen für Richtungsmessungen immer ein, wie aus der Entstehung der Gleichungen leicht zu ersehen ist. Auch die Richtungsverbesserungen v selbst geben, bei gleichen Gewichten, stationsweise addiert stets die Summen Null, wie am Schluss des nächsten § 58. S. 176—177 ausführlicher gezeigt werden wird.

§ 58. Allgemeine Betrachtung der Bedingungsgleichungen.

Mit dem was im vorhergehenden § 57. über Bedingungsgleichungen gelehrt wurde, kann man bereits an die Ausgleichung kleiner Netze, wie in § 59. oder § 60. gehen, indessen ist doch noch manches weitere über Bedingungsgleichungen in Dreiecksnetzen zu sagen. Zuerst wollen wir die *Zahl* der unabhängigen Bedingungsgleichungen überlegen.

Wir betrachten ein Dreiecksnetz, in welchem *eine* Grundlinie gemessen ist, mit folgenden geometrischen Verhältnissen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Anzahl der Eckpunkte} & p \\ \text{Anzahl aller Verbindungslinien} & l \\ \text{Anzahl der nur } \textit{ein}\text{seitig beobachteten Verbindungslinien} & l' \\ \text{Also Anzahl der beiderseitig beobachteten Verbindungslinien} & l - l' \end{array}\right\} \quad (1)$$

Je nachdem Winkelmessungen oder Richtungsmessungen vorliegen, habe man:

$$\text{Anzahl der Winkelmessungen} \ldots\ldots W \quad (2)$$

oder

$$\text{Anzahl der Richtungsmessungen} \ldots\ldots R \quad (3)$$

Die Richtungsmessungen sollen hiebei für jede Station in je einem vollen Satze ausgeführt sein.

Wir wollen nun zuerst annehmen, dass man Winkelmessungen habe, und nachher den Fall der Richtungsmessungen behandeln.

I. Winkelmessungen.

Die Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen ist gleich der Anzahl der überschüssigen Beobachtungen, denn jede überschüssige Beobachtung giebt eine selbständige Messungsprobe. Wir bezeichnen:

$$\text{Anzahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen} \ldots\ldots r \quad (4)$$

Die Anzahl der notwendigen Winkel findet man so: Unter Annahme *einer* Basis liegen die zwei ersten Punkte, nämlich die beiden Basis-Endpunkte, ohne Winkelmessungen fest, und jeder weitere Punkt braucht zur Anfügung an die gegebenen Punkte 2 Winkel, also:

	Basis mit 2 Punkten verlangt	0 Winkel
$(p-2)$ Punkte	der 3te Punkt verlangt	2 „
	„ 4te „ „	2 „
	. . . . .	
	„ p^{te} „ „	2 „
	Summe	$0 + (p-2)\,2 = 2p - 4$ Winkel

Wenn also W Winkel gemessen sind, so sind $W - (2p - 4)$ überschüssig oder man hat:

$$r = W - 2p + 4 \text{ Bedingungsgleichungen.} \quad (5)$$

Diese Bedingungsgleichungen teilen sich in zwei wesentlich verschiedene Gattungen, nämlich Winkelgleichungen und Seitengleichungen.

Die Winkelgleichungen zerfallen abermals in zwei verschiedene Arten, nämlich 1) Horizontgleichungen oder Stationsgleichungen, und 2) Dreiecksgleichungen oder allgemeiner Polygongleichungen.

Als Beispiele von Horizontgleichungen haben wir in der nachfolgenden Fig. 3. S. 174 die zwei Horizonte um Oggersheim und um Speyer; es sind auf Speyer die 5 einzelnen Winkel (12), (15), (16), (19), (22) gemessen, woraus die Probe entsteht:

$$(12) + (15) + (16) + (19) + (22) = 360°$$

und ähnlich bei Oggersheim.

Oder wenn z. B. in demselben Netze (Fig. 3. S. 174) auf Donnersberg ausser den zwei einzelnen Winkeln (1) und (27) auch noch der Summenwinkel Klobberg-Calmit = (28) gemessen wäre, so würde man noch die Bedingung haben:

$$(1) + (27) - (28) = 0$$

Allgemeiner kann man über Horizontgleichungen sagen: Auf einer Station mit s Strahlen sind $s - 1$ Winkel zur Festlegung dieser Strahlen unumgänglich nötig; sind mehr Winkel, etwa n Winkel gemessen, so hat man auf dieser Station

$$n - s + 1 \text{ Stationsgleichungen.} \qquad (6)$$

Diese Art von Gleichungen tritt bei grossen Ausgleichungen im Netze meist nicht auf, da man sie auf den einzelnen Stationen für sich behandelt. (Bei Richtungsbeobachtungen in ganzen Sätzen giebt es überhaupt keine Stationsgleichungen.) Die zweite Art der Winkelgleichungen betrifft zuerst die Summen $(1) + (2) + (3) = 180°$ bzw. $180° +$ sphär. Excess, in den einzelnen Dreiecken, dann aber auch Viereckssummen $(1)+(2)+(3)+(4)=360°$ und allgemeiner $(1)+(2)+\ldots(n)=(n-2)\,180°$ u. s. w.

Wenn man die Zahl dieser Gleichungen aufsuchen will, so bemerkt man zuerst, dass *ein*seitig beobachtete Linien hier nicht in Betracht kommen, z. B. in einem Dreieck, in welchem nur auf zwei Ecken Messungen gemacht sind, hat man nur zwei Winkel, folglich keine Summenprobe u. s. w.

Daraus folgt weiter, dass auch solche *Punkte*, welche nur durch einseitig beobachtete Linien mit anderen Punkten zusammenhängen, d. h. die entweder nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnittenen Punkte, bei der Abzählung der Winkelgleichungen nicht in Betracht kommen.

Die Anzahl der unabhängigen Dreiecksgleichungen ist im allgemeinen *nicht* schlechthin gleich der Anzahl der Dreiecke selbst, auch wenn die einseitig beobachteten Seiten ausgeschieden sind, denn eine Dreiecksgleichung kann in der Summe oder Differenz anderer solcher Gleichungen bereits enthalten sein, wie wir schon im vorigen § 57. bei (1)—(4) S. 165 gesehen haben. Auch hat sich dort gezeigt, dass eine Viereckgleichung (5) in Verbindung mit 2 Dreiecksgleichungen dasselbe ausdrücken kann, wie 3 einzelne Dreiecksgleichungen.

Wenn man sich nach diesem Beispiele überzeugt hat, dass jede Polygongleichung denselben Dienst leistet, wie eine Dreiecksgleichung, insofern verschiedenartige Formierung der fraglichen Polygongleichungen möglich ist, so kommt man auch zur Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Polygongleichungen in folgender Weise: Man denkt sich einen geschlossenen Zug über alle p Punkte gelegt. Dieser Zug umfasst auch p Linien. Wenn man l Linien hat, so sind $l - p$ Linien von dem Zuge noch nicht getroffen, und jede dieser Linien giebt eine neue Gleichung. Also ein

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Polygonzug mit p Linien giebt eine Gleichung, die übrigen $l - p$ Linien geben $l - p$ Gleichungen, man hat also im ganzen:

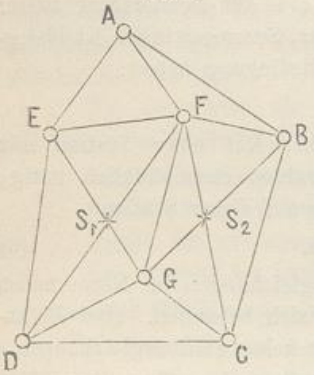
$$\left.\begin{array}{r} 1 + l - p \text{ Dreiecksgleichungen} \\ \text{(allgemeine Polygongleichungen)} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Dieses gilt, wenn die l Linien alle hin und her gemessen sind, wenn darunter l' einseitig gemessene Linien sind, so hat man statt (7):

$$1 + (l - l') - p \text{ Dreiecksgleichungen oder Polygongleichungen.} \quad (8)$$

Dabei sind aber auch etwaige nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnittene Punkte unter den p Punkten nicht mitzuzählen.

Fig. 1.



Wir fanden noch ein zweites Verfahren zum Abzählen der Dreiecksgleichungen, nämlich so: Man zählt die Anzahl Δ aller geschlossenen Dreiecke und dann die Anzahl S aller Diagonalenschnitte, dann ist die Anzahl der unabhängigen Dreiecksgleichungen:

$$(\Delta - S) \text{ Dreiecksgleichungen} \quad (9)$$

Z. B. in Fig. 1. hat man 11 geschlossene Dreiecke und 2 Diagonalenschnitte, also $11 - 2 = 9$ unabhängige Dreiecksgleichungen, was auch mit der Regel (7) stimmt, indem $l = 15$ und $p = 7$ also $1 + l - p = 9$.

Oder wenn man in Fig. 2. auch noch AG zieht, so wird die Anzahl der geschlossenen Dreiecke um 3 vermehrt (EAG, FAG, BAG) und es kommen noch zwei Diagonalenschnitte auf EF und DF hinzu, es wird also dann $\Delta = 14$, $S = 4$ also $\Delta - S = 10$ Dreiecksgleichungen, was mit $16 + 1 - 7 = 10$ nach (7) stimmt.

Die Regel (9), deren Begründung nach dem Anblick von Fig. 2. sich leicht allgemein geben lässt, ist namentlich bei den gewöhnlichen Dreiecksnetzen der Praxis, wo man die einzelnen Dreiecke ohnehin alle aufsuchen muss, sehr bequem.

Wir gehen über zu den *Seitengleichungen*.

Die Zahl der Seitengleichungen erhellt am besten aus folgender Betrachtung: Man unterscheidet „Dreiecksnetz“ und „Dreieckskette“, indem man Dreieckskette eine solche Aneinanderreihung von Dreiecken nennt, bei welcher man von irgend einem Dreieck zu einem andern nur auf *einem* bestimmten Weg gelangen kann, während bei einem Dreiecksnetz verschiedene Wege möglich sind. Nach dieser Auffassung ist ein Viereck mit einer Diagonale eine Kette, ein Viereck mit zwei Diagonalen ein Netz. Ob die Seiten sich schneiden oder nicht, ist nicht entscheidend; wenn die Seiten sich schneiden, hat man jedenfalls ein „Netz“, es giebt aber auch „Netze“, ohne Diagonalenschnitte, z. B. mit Centralsystemen, vgl. die nachfolgende Fig. 3.

Wenn man in einer Kette noch *einen* weiteren Winkel misst, wodurch eine Sicht eingefügt wird, welcher die Kette zum Netz macht, so entsteht insofern eine neue Bedingungsgleichung, als man die Länge der neu eingefügten Seite nun zweifach ausdrücken kann. Jede nicht zum Zusammenhang der Kette nötige Seite giebt eine solche Seitengleichung. Eine Dreieckskette hat keine Seitengleichungen, es folgt also die Regel:

Die Anzahl der Seitengleichungen eines Dreiecksnetzes ist gleich der Anzahl von Seiten, welche gestrichen werden müssen, damit das Netz in eine Kette übergeht.

Um eine Formel hiefür zu bilden, überlegt man, dass zum Zusammenhang der

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

3 ersten Punkte 3 Linien und für jeden folgenden Punkt noch 2 Linien nötig sind, also:

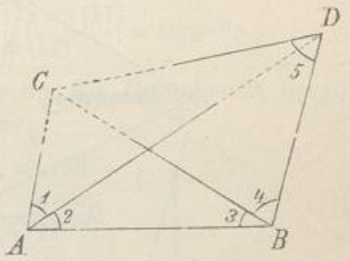
	für die 3 ersten Punkte	3 Linien
	„ den 4ten Punkt	2 „
$(p-3)$ Punkte	„ „ 5ten „	2 „
	. . . . .	
	für den p^{ten} Punkt	2 Linien
	Summe $3+(p-3)$	2 Linien $= 2p-3$ Linien.

Hat man l Linien, so sind davon $l-(2p-3)$ überschüssig, folglich bestehen

$$l-2p+3 \text{ Seitengleichungen} \tag{10}$$

Nachdem schon im vorhergehenden § 57. Seitengleichungen in einem Viereck behandelt worden sind, wollen wir zu weiterer Erläuterung noch einen Fall nehmen:

Fig. 2.



In Fig. 2. seien die angedeuteten 5 Winkel gemessen. Die vorstehende Formel (10) giebt hier mit $l=6$ und $p=4$:

$$6-8+3=1 \text{ Seitengleichung.}$$

Obgleich keines der 4 Dreiecke von Fig. 2. in Bezug auf 180° geschlossen ist, hat das Viereck doch eine Probe; man kann nämlich die Seite CD aus AB zweifach ableiten:

$$1)\ CD = AB\,\frac{sin\,(1+2)}{sin\,(1+2+3)}\,\frac{sin\,(4)}{sin\,(5)}$$

$$2)\ CD = AB\,\frac{sin\,(2)}{sin\,(2+3+4)}\,\frac{sin\,(4)}{sin\,(4+5)}$$

Setzt man diese beiden Ausdrücke einander gleich, so erhält man die Seiten-Bedingungsgleichung:

$$(c) \qquad \frac{sin\,(1+2)\,sin\,(2+3+4)\,sin\,(4+5)}{sin\,(1+2+3)\,sin\,(2)\,sin\,(5)} = 1$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, so kann man mit den 5 Winkeln (1) (2) (3) (4) (5) das Viereck Fig. 2. nicht ohne Widerspruch konstruieren, sondern man wird bei der Konstruktion in irgend einem Punkt ein fehlerzeigendes Dreieck erhalten.

Im Zusammenhang haben wir nun, indem von den Stationsgleichungen abgesehen wird, folgendes:

Bedingungsgleichungen für ***Winkelbeobachtungen.***

W Winkelmessungen, p Punkte, l Linien, sämtlich hin und her beobachtet

$$\left.\begin{array}{rl} l-2p+3 & \text{Seitengleichungen,} \\ l-p+1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r=2l-3p+4 & \\ r=W-2p+4 & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Wenn unter den l Linien eine Anzahl l' nur einseitig beobachtet ist, und

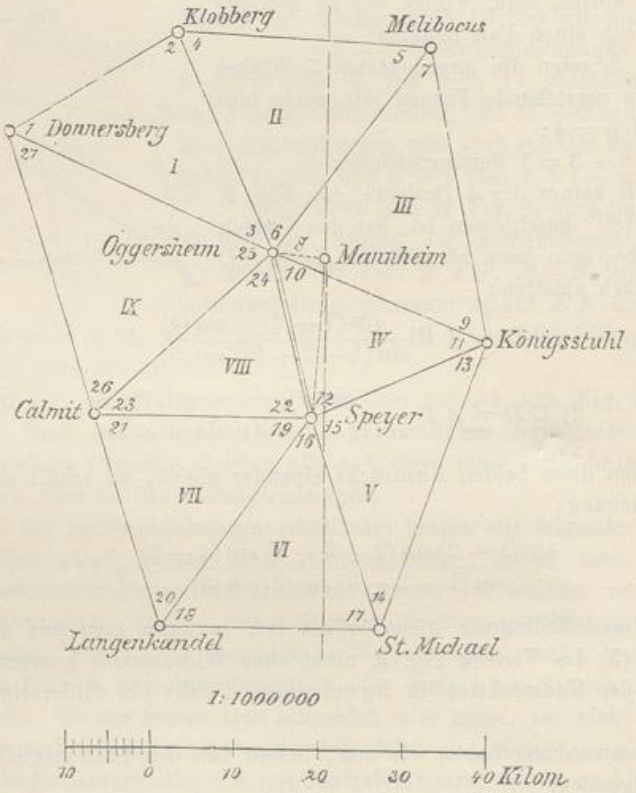
unter den p Punkten eine Anzahl p' nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} & l - 2p + 3 \quad \text{Seitengleichungen,} \\ & l - l' - (p - p') + 1 \quad \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen.} \\ r = 2l - l' - 3p + p' + 4 & \\ r = W - 2p + 4 & \end{array}\right\} \quad \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \qquad (12)$$

Beispiel eines Dreiecksnetzes mit Winkelbeobachtungen.

In der nachstehenden Fig. 3., welche ein badisches Dreiecksnetz vorstellt, sind 27 einzelne Winkel gemessen, und es handelt sich um die Aufsuchung der Bedingungsgleichungen.

Fig. 3.
(Der Punkt Mannheim gehört nicht zu dem Netze.)



$W = 27$ Winkel,	$l - 2p + 3 = 2$ Seitengleichungen,
$p = 9$ Punkte,	$l - p + 1 = 9$ Dreiecksgleichungen,
$l = 17$ Linien;	Ogg. u. Sp. $= 2$ Horizonte
	$W - 2p - 4 = 13$ Gleichungen.

Nach den Regeln (11) haben wir in diesem Netze 2 Seitengleichungen und 9 Dreiecksgleichungen, ferner noch den unmittelbaren Anblick in Oggersheim und Speyer je eine Horizontgleichung.

Es ist auch nicht schwer, diese $2 + 9 + 2$ Gleichungen wirklich aufzustellen:

Die Horizonte in Oggersheim und in Speyer geben:

$$\left.\begin{aligned}(3)+(6)+(8)+(10)+(24)+(25)-360^\circ&=0\\(12)+(15)+(16)+(19)+(22)-360^\circ&=0\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die 9 Dreieckswinkelgleichungen entsprechen einfach den 9 Dreiecken I, II, III ... IX, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}(1)+(2)+(3)-(180^\circ+\text{sphär. Excess})&=0\\(4)+(5)+(6)-\ldots\qquad\qquad&=0\\\ldots\ldots\ldots&\\(25)+(26)+(27)-(180^\circ+\text{sphär. Excess})&=0\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Die zwei Seitengleichungen beziehen sich auf die Centralpunkte Oggersheim und Speyer, es wird z. B. ausgedrückt, dass von der Basis Oggersheim-Speyer mit Sinusrechnung über die Dreiecke VIII , IX , I , II , III , IV die Basis wieder herauskommen muss, also:

$$\frac{\text{Ogg.-Sp.}\ \sin(22)\ \sin(26)\ \sin(1)\ \sin(4)\ \sin(7)\ \sin(11)}{\sin(23)\ \sin(27)\ \sin(2)\ \sin(5)\ \sin(9)\ \sin(12)} = \text{Ogg.-Sp.},$$

in gleicher Weise behandelt man auch die Dreiecke um den Centralpunkt Speyer, und die beiden so entstehenden Seitengleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned}(O)\quad &\frac{\sin(12)\ \sin(9)\ \sin(5)\ \sin(2)\ \sin(27)\ \sin(23)}{\sin(11)\ \sin(7)\ \sin(4)\ \sin(1)\ \sin(26)\ \sin(22)}=1\\(S)\quad &\frac{\sin(10)\ \sin(13)\ \sin(17)\ \sin(20)\ \sin(23)}{\sin(11)\ \sin(14)\ \sin(18)\ \sin(21)\ \sin(24)}=1\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Damit haben wir in (13) , (14) , (15) die $2+9+2=13$ Gleichungen, welche der Ausgleichung des Netzes mit den 27 einzelnen Winkelmessungen zu Grunde zu legen sind.

(Die vollständig durchgeführte Ausgleichung dieses Beispiels war in unseren 3 früheren Auflagen enthalten. Diesesmal haben wir die Durchrechnung des Beispiels nicht mehr aufgenommen, weil Ausgleichungen mit einzelnen *Winkel*messungen in diesem Sinne, in neuerer Zeit immer mehr in Abgang kommen.)

II. Richtungsmessungen.

Nachdem wir im Vorstehenden die Aufstellung der Bedingungsgleichungen für *Winkel*messungen behandelt haben, ist es nicht schwer, davon auch auf Richtungsmessungen überzugehen, welche in der heutigen trigonometrischen Praxis die Hauptrolle spielen. Trotzdem ist beim Aufstellen der Bedingungsgleichungen immer (wenigstens in Gedanken) die *Winkel*form massgebend, und erst von da geht man auf Richtungen über.

Da wir den Grundgedanken des Übergangs von Winkelverbesserungen δ auf Richtungsverbesserungen v bereits an dem Viereckbeispiel des vorigen § 57. S. 169 gezeigt haben, nämlich Zerlegung $\delta = v_2 - v_1$ u. s. w., so brauchen wir nicht mehr viel dazu zu sagen, sondern nur die Sache noch etwas allgemeiner aufzufassen.

Wir setzen *volle* Richtungssätze voraus, (oder Mittelbildung aus mehrfachen vollen Richtungssatzmessungen, was offenbar hier dasselbe ist), und zwar auf allen Stationen gleichgewichtig. Etwaige ungleiche Wiederholungen der Sätze auf verschiedenen Stationen würde verschiedene Gewichte in die Ausgleichung einführen, wovon aber jetzt nicht die Rede sein soll.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Bei solcher Messungsart fallen die Horizontgleichungen, mit welchen wir es bei der Ausgleichung von Winkelmessungen zu thun hatten, einfach weg.

Wir denken uns eine Station einerseits mit W Winkelmessungen, ohne Horizontproben, und andererseits dieselben Sichten mit R Richtungsmessungen. Dann ist offenbar $R = W + 1$, d. h. auf jeder Station ist eine Richtung mehr als die unabhängigen Winkel und in einem ganzen Netze mit p Punkten und W Winkeln, ohne Horizontproben, oder R Richtungen ist offenbar

$$W = R - p \tag{16}$$

dabei sind aber etwaige nur *vorwärts* eingeschnittene Punkte unter p nicht mitzuzählen.

Bedingungsgleichungen für ***Richtungs****messungen.*

R Richtungen, p Punkte, l Linien hin und her beobachtet. Mit (16) geht (11) über in:

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ l - p + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ \left.\begin{array}{r} r = 2l - 3p + 4 \\ r = R - 3p + 4 \end{array}\right\} & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \tag{17}$$

Dabei ist $2l = R$, denn wenn alle Linien hin und her gemessen sind, so hat man doppelt so viel Richtungen als Linien.

Wenn unter den l Linien eine Anzahl l' nur einseitig beobachtet ist, und unter den p Punkten eine Anzahl p' nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, so hat man:

$$\left.\begin{array}{rl} l - 2p + 3 & \text{Seitengleichungen,} \\ (l - l') - (p - p') + 1 & \text{Dreiecks- oder Polygongleichungen,} \\ r = 2l - l' - 3p + p' + 4 & \text{Bedingungsgleichungen überhaupt.} \end{array}\right\} \tag{18}$$

Die beiden Abzählungsformeln $l - p + 1$ Dreiecksgleichungen und $l - 2p + 3$ Seitengleichungen werden als „*Gauss*sche *Lehrsätze*“ mitgeteilt und bewiesen in Gerlings Ausgleichungsrechnungen, Hamburg 1843, S. 273 und S. 277 unter Citat von „Beiträge zur Geographie Kurhessens u. s. w. von Gerling, Cassel 1839, S. 166.“

Eine andere Anleitung zur Abzählung der Bedingungsgleichungen nach geometrischer Anschauung, speziell für Richtungsmessungen, giebt *Bessel* auf S. 139 und 140 der Gradmessung in Ostpreussen.

Zur besonderen Behandlung der nur *ein*seitig eingeschnittenen Linien und Punkte in (12) und (17) wurden wir durch entstandenes Bedürfnis geführt.

Wenn die Dreiecksnetz-Bedingungen sich auf Richtungen beziehen, so ist in jeder Bedingungsgleichung die algebraische Summe der Coefficienten gleich Null, und die Richtungsverbesserungen v geben stationsweise addiert ebenfalls je die Summe gleich Null; vorausgesetzt dass alle Messungsgewichte *gleich* sind.

Diese zwei Sätze lassen sich nach §. 57 und 58 und nach §. 39 sofort einsehen: Wenn eine auf Winkel bezogene Bedingungsgleichung etwa heisst:

$$a\,\delta + a'\,\delta' + a''\,\delta'' + \ldots = 0$$

wo δ , δ' , δ'' ... Winkelverbesserungen sind, so lautet die entsprechende Gleichung für Richtungsverbesserungen v_l und v_r:

$$\begin{array}{ll} & a\,(v_r - v_l) + a'\,(v_r' - v_l') + a''\,(v_r'' - v_l'') + \ldots = 0 \\ & a\,v_r - a\,v_l + a'\,v_r' - a'\,v_l + a''\,v_r'' - a''\,v_l'' + \ldots = 0 \\ \text{hier ist:} & a - a + a' - a' + a'' - a'' + \ldots \quad = 0 \end{array}$$

Was die v betrifft, so sind deren Formeln in (9) § 39. S. 119 gegeben; wenn man dort addiert, so bekommt man:

$$[v] = [a]\,k_1 + [b]\,k_2 + [c]\,k_3$$

Versteht man nun unter $[v]$ die Summierung für je *eine* Station, so gelten auch $[a]$ $[b]$ $[c]$ nur stationsweise, sind also = Null, folglich auch stationsweise $[v]$ = Null.

Was die wirkliche Aufstellung der Bedingungsgleichungen betrifft, so werden die verschiedenen Winkelsummen-Gleichungen niemals Schwierigkeiten bereiten, und wenn das Netz sich in lauter einzelne Dreiecke zerlegen lässt, so werden auch die Seitengleichungen als Sinusprodukte für Viereckdiagonalen oder Centralsysteme nach Anleitung von § 57. S. 167 und des vorstehenden Beispiels (Fig. 3. S. 174) sich leicht ergeben. Etwas schwieriger kann die Sache werden bei Punkten, welche entweder nur vorwärts oder nur rückwärts eingeschnitten sind, doch kann darüber hier nichts allgemeines gesagt werden; auch wird es sich oft empfehlen, solche Punkte von der Gesamtausgleichung auszuschliessen, und nur nachher einzuschalten.

Dagegen ist hier noch ein allgemeines Wort zu sagen über *Kranz-Systeme*, d. h. solche von Dreiecksketten umschlossene Polygone, welche einen leeren Raum zwischen sich fassen. In der Gesamtausgleichung der Preussischen Landesaufnahme haben solche Systeme eine wichtige Rolle gespielt, und wir wollen daher die geschichtliche Entwicklung, welche diese Anlage und die zugehörigen Ausgleichungen genommen haben, vorführen nach einer Mitteilung von Major *Haupt* in den „astron. Nachrichten" 107. Band, Nr. 2549—2550, (Sept. 1883):

Als in den 60er Jahren dieses Jahrhunderts bei der preussischen Landes-Triangulierung Ketten, welche einen von Dreiecken freien Landesteil umspannten, wieder in sich zusammen schlossen, stellte sich der Übelstand heraus, dass trotz der Aufstellung aller vorhandenen und notwendigen Winkelgleichungen und Seitengleichungen identische Punkte, von verschiedenen Seiten her berechnet, *nicht* dieselben geographischen Coordinaten erhielten, und dass der von Dreiecken freie innere Raum, das Polygon *nicht* die seinem Inhalt entsprechende Winkelsumme erhielt, denn es fehlten die drei sogenannten Polygongleichungen.

Der erste, welcher eine Methode zur Aufstellung dieser Polygon-Gleichungen gab, war der Premier-Lieutenant *v. Prondzynski* („Astr. Nachr." Nr. 1690, 71. Band, 1868, S. 145—154 und Nr. 1782, 75. Band, 1869, S. 81—90). Er zog Richtungs-Korrektionen der jüngsten Kette durch die ganzen Längen-, Breiten- und Azimut-Rechnungen hindurch, und bildete so drei neue Gleichungen.

Demnächst gab Professor *Börsch* eine andere, aber im allgemeinen nicht einfachere Methode an („Astr. Nachr." Nr. 1697 und 1704, 71. Band (1868), S. 265—268 und S. 379—380), welche darauf gegründet ist, den inneren freien Raum zwischen den verschiedenen Ketten mit zu rechnenden Dreiecken zu überspannen und so die fehlenden Gleichungen aufzustellen.

Hier ist auch *Zachariae*: „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten" deutsch von Lamp, Berlin 1878) S. 156, zu zitieren, wo für „Kranz-Systeme" die nötigen Gleichungen durch Einführung fingierter Messungen und Wiederelimination derselben gewonnen werden.

Diese Methoden wurden bei der preussischen Landes-Triangulation nicht benützt; das in Wirklichkeit von dieser Behörde angewandte Verfahren wurde von dem damaligen Hauptmann *Schreiber* (jetzigen General) angegeben, dasselbe liefert zwei

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Gleichungen durch die Projektion der inneren Polygonkranz-Begrenzung auf ein beliebig angenommenes rechtwinkliges, sphäroidisches Coordinaten-System.

Diese Schreiber'sche Methode des Polygonkranz-Anschlusses durch rechtwinklige Coordinaten ist mitgeteilt in dem Werke: „Die königlich preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Erster Teil, Berlin 1870, S. 421 und Hauptdreiecke II. Teil, Berlin 1874, S. 605".

Wir haben einen Bericht hierüber mit einem Beispiele gegeben in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen", 1882, S. 81—85 und S. 103, und bemerken hiezu, dass die ersten Schreiber'schen Formeln von 1870 („Hauptdreiecke I, S. 421") sich rein sphärisch mit einem mittleren Krümmungs-Halbmesser entwickeln lassen, und so mit den bekannten Soldner'schen Coordinaten-Formeln zusammenfallen, während die zweiten Schreiber'schen Formeln von 1874 („Hauptdreiecke II, S. 605") noch höhere Glieder hinzufügen, entsprechend der Gauss'schen Abhandlung: „Disquisitiones generales circa superficies curvas".

Es giebt noch eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Viereck, welche hier angeschlossen werden könnte, jedoch wollen wir dieses auf den Schluss dieses Kapitels verschieben, um den Übergang zu praktischen Ausgleichungsrechnungen nicht zu lange aufzuhalten.

§ 59. Ausgleichung eines Vierecks mit 4 vollen Richtungssätzen.

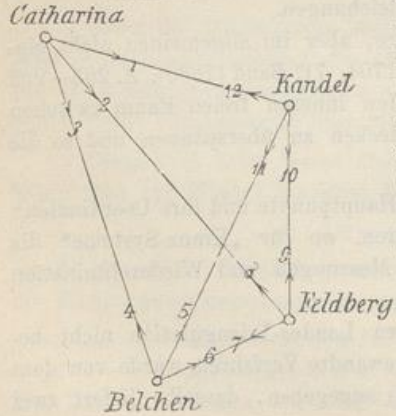
Als erstes Beispiel zur rechnerischen Durchführung nehmen wir ein Viereck der badischen Triangulierung mit 4 vollen gleichgewichtigen Richtungssätzen.

Die Ergebnisse der Messungen, jeweils auf einen Anfangsstrahl als Nullrichtung bezogen, sollen sein:

Station Catharina.		Station Kandel.	
Kandel . . .	(1) = 0° 0′ 0,00″	Feldberg . .	(10) = 0° 0′ 0,00″
Feldberg . .	(2) = 34 52 27,44	Belchen . .	(11) = 25 9 9,67
Belchen . . .	(3) = 57 49 20,90	Catharina .	(12) = 102 43 24,53
Station Belchen		Station Feldberg	
Catharina . .	(4) = 0° 0′ 0,00″	Belchen . .	(7) = 0° 0′ 0.00″
Kandel . . .	(5) = 44 36 27,07	Catharina . .	(8) = 72 58 55,84
Feldberg . .	(6) = 84 04 12,94	Kandel . . .	(9) = 115 23 06,40

(1)

Fig. 1.
Viereck mit vollen Richtungssätzen.
Maasstab 1 : 400000.



Hier ist jeweils eine beliebige Sicht als *Nullstrahl* mit 0° 0′ 0,00″ angenommen, doch ist das unwesentlich, und man soll sich sehr hüten, der so formell bevorzugten Richtung irgend eine sachlich besondere Bedeutung beizulegen. Namentlich darf man nicht glauben, man habe damit *Winkel* vor sich in dem Sinne, wie er in § 57. und § 58. im Gegensatz zu Richtungen aufgestellt wurde. Der Anfangswert 0° 0′ 0,00″ muss vielmehr gerade ebenso eine Ausgleichungsverbesserung erhalten, wie der zweite Richtungswert 34° 52′ 27,44″ u. s. w., und man ändert an der Sache gar nichts, wenn man alle Richtungen eines Satzes um ein beliebiges Maass verschiebt.

Aus diesem Grunde macht man sich häufig

die Sache möglichst bequem für *spätere* Zwecke, indem man alle Richtungssätze schon von Anfang an in Form von genäherten trigonometrischen Richtungswinkeln aufstellt. (Katasterbezeichnung „Neigungen".) Die Orientierung für solche trigonometrische Richtungswinkel hat man stets aus genäherten Anschlussrechnungen.

Um die Vorteile solcher Orientierung sofort ins richtige Licht zu stellen, wollen wir gleich bei diesem unserem ersten Beispiel davon Gebrauch machen und die unter (1) mitgeteilten Richtungsmessungssätze nochmals schreiben in genäherter Orientierung (mit $+x$ nach Norden und Richtungswinkelzählung von Nord über Ost).

Catharina.	Kandel.
(1) = 104° 33′ 24,00″	(10) = 181° 49′ 59,47″
(2) = 139 25 51,44	(11) = 206 59 9,14
(3) = 162 22 44,90	(12) = 284 33 24,00
Belchen.	**Feldberg.**
(4) = 342° 22′ 40,13″	(7) = 246° 26′ 53,07″
(5) = 126 59 7,20	(8) = 319 25 48,91
(6) = 166 26 53,07	(9) = 1 49 59,47

(2)

Die Richtung (1) stimmt mit der Gegenrichtung (12), ebenso stimmt (10) mit (9), (7) mit (6) überein, weil dieses bei der willkürlichen Festsetzung der Anfangsrichtungen so angenommen worden ist; dass die übrigen Richtungen, z. B. (5) und (11) nicht stimmen, hat seinen Grund teils in den Beobachtungsfehlern, teils aber auch in dem Umstand, dass die Dreiecke nicht eben, sondern sphärisch sind.

Zur Netzausgleichung braucht man zuerst die sphärischen Excesse, und hiezu *eine* Seite des Netzes. Z. B. Catharina—Belchen = 34433^m, log = 4.53697. Die geographische Breite ist ungefähr 48°, und der Logarithmus des Erdhalbmessers daher $log\, r$ = 6.80479, womit man in bekannter Weise berechnet aus der Dreiecksfläche $\triangle$:

$$\text{Sphär. Excess } \varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\varrho \qquad \text{mit } log\frac{\varrho}{r^2} = 1.70485$$

Z. B. das erste Dreieck Catharina—Belchen—Kandel hat genähert:

Catharina	(1,3)	= 57° 49′	*log sin* 9.92755
Belchen	(4,5)	= 44 36′	„ „ 9.84643
Kandel	(11,12)	= 77 34′	„ „ 9.98969

womit unter Zugrundlegung von $log\, CB$ = 4.53697 berechnet wird $log\, CK$ = 4.39371 und dann $\triangle = \frac{1}{2}\, CB \,.\, CK \sin C$, $log \triangle$ = 8.55720 und ε = 1.828″. Oder kurz, man berechnet mit vorläufigen Seiten und Winkeln die Excesse, wie sie in folgender alle 4 Summenproben enthaltenden Zusammenstellung angegeben sind:

C.	(1,3)	= 57° 49′	20,90″	C.	(2,3)	= 22° 56′	53,46″
B.	(4,5)	= 44 36	27,07	F.	(7,8)	= 72 58	55,84
K.	(11,12)	= 77 34	14,86	B.	(4,6)	= 84 4	12,94
	Summe	180° 0′	2,83″		Summe	180° 0′	2,24″
	soll	180 0	1,83		soll	180 0	1,22
		w =	+ 1,00″			w =	+ 1,02″
B.	(5,6)	= 39° 27′	45,87″	F.	(8,9)	= 42° 24′	10,56″
F.	(7,9)	= 115 23	6,40	K.	(10,12)	= 102 43	24,53
K.	(10,11)	= 25 9	9,67	C.	(1,2)	= 34 52	27,44
	Summe	180° 0′	1,94″		Summe	180° 0′	2,53″
	soll	180 0	0,67		soll	180 0	1,28
		w =	+ 1,27″			w =	+ 1,25″

(3)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Bezeichnet man die Richtungs-Verbesserungen mit $v_1\ v_2 \ldots v_{12}$, so folgen aus diesen Probesummen folgende 4 Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_3 - v_1 + v_5 - v_4 + v_{12} - v_{11} + 1{,}00'' &= 0 \\ v_3 - v_2 + v_8 - v_7 + v_6 - v_4 + 1{,}02'' &= 0 \\ v_6 - v_5 + v_9 - v_7 + v_{11} - v_{10} + 1{,}27'' &= 0 \\ v_9 - v_8 + v_{12} - v_{10} + v_2 - v_1 + 1{,}25'' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

In jeder dieser Gleichungen ist die Summe der Coefficienten = Null, wie sich aus der Entstehung dieser Gleichungen unmittelbar ergiebt (vgl. die Anmerkung am Schluss von § 57. und S. 176—177.

Wenn irgend welche 3 von diesen 4 Bedingungsgleichungen (4) erfüllt sind, so ist die 4te von selbst erfüllt, man hat daher nur 3 von den Gleichungen (4) in die Ausgleichung einzuführen.

Es besteht ferner eine Seitenbedingungsgleichung (Centralpunkt Feldberg):

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin(1,2)\sin(4,6)\sin(10,11)}{\sin(2,3)\sin(5,6)\sin(10,12)} = 1 \quad (5)$$

Diese Gleichung ist allerdings zunächst dem *ebenen* Viereck entsprechend, ebenso wie in § 57. S. 165 gelehrt wurde, allein die Gleichung (5) gilt ebenso auch für ein *sphärisches* Viereck, weil der Sinussatz, insofern er die *Winkel* eines Dreiecks betrifft, für ein ebenes und für ein sphärisches Dreieck gleichlautend ist (und die Sinus der Centriwinkel am Erdmittelpunkt für die Dreiecksseiten hier nicht auftreten, ev. durch die „Additamentenmethode" der sphärischen Dreiecksberechnung berücksichtigt würden; vgl. unseren III. Band, 1890, § 42).

Der Seitengleichung (5) entspricht folgende logarithmisch-trigonometrische Ausrechnung mit 7stelligen Logarithmen:

			Diff. für 10″
(1,2) = 34° 52′ 27,44″	*log sin* (1,2)	9.757 2273	+ 302
(4,6) = 84 4 12,94	*log sin* (4,6)	9.997 6699	+ 22
(10,11) = 25 9 9,67	*log sin* (10,11)	9.628 4216	+ 449
		9.383 3188	
(2,3) = 22° 56′ 53,46″	*log sin* (2,3)	9.590 9515	+ 498
(5,6) = 39 27 45,87	*log sin* (5,6)	9.803 1677	+ 256
(10,12) = 102 43 24,53	*log sin* (10,12)	9.989 2025	— 48
		9.383 3217	

(6)

Widerspruch $9.383\,3188 - 9.383\,3217 = -0.000\,0029 = w$

Um für diese sehr wichtige logarithmisch-trigonometrische Berechnung des Fehlergliedes w eine Probe zu erlangen, kann man sich der sphärischen Excesse bedienen, welche in (3) bereits angegeben sind, indem man nach dem Legendre'schen Satze rechnend, jeden Dreieckswinkel um ein Drittel des sphärischen Excesses vermindert. So erhält man aus (3):

C. (1,3) = 57° 49′ 20,29″	C. (2,3) = 22° 56′ 53,05″
B. (4,5) = 44 36 26,46	F. (7,8) = 72 58 55,43
K. (11,12) = 77 34 14,25	B. (4,6) = 84 4 12,53
+ 1,00	+ 1,01
B. (5,6) = 39° 27′ 45,65″	F. (8,9) = 42° 24′ 10,13″
F. (7,9) = 115 23 6,18	K. (10,12) = 102 43 24,10
K. (10,11) = 25 9 9,45	C. (1,2) = 34 52 27,01
+ 1,28	+ 1,24

(7)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Summen + 1,00 u. s. w. sollen den entsprechenden w in (3) gleich sein, und wenn das nicht völlig der Fall ist, so rührt es nur von der Abrundung bei der Bildung der Drittel-Excesse her. Nun macht man mit den Winkeln (7) abermals eine logarithmisch-trigonometrische Ausrechnung von der Form (6):

				Diff. für 10″
(1,2) = 34° 52′ 27,01″	*log sin* (1,2)	9.757 2260	+ 302	
(4,6) = 84 4 12,53	*log sin* (4,6)	9.997 6699	+ 22	
(10,11) = 25 9 9,45	*log sin* (10,11)	9.628 4206	+ 449	
		9.383 3165		(8)
(2,3) = 22° 56′ 53,05″	*log sin* (2,3)	9 590 9495	+ 498	
(5,6) = 39 27 45,65	*log sin* (5,6)	9.803 1672	+ 256	
(10,12) = 102 43 24,10	*log sin* (10,12)	9.989 2027	— 48	
		9.383 3194		

Widerspruch $9.383\,3165 - 9.383\,3194 = -0.000\,0029 = w$

Nun bekommt man aus (6) und (8) übereinstimmend die lineare Seitengleichung in Einheiten der 7ten Logarithmendecimale:

$$\left.\begin{array}{l} +30{,}2\,(v_2 - v_1) + 2{,}2\,(v_6 - v_4) + 44{,}9\,(v_{11} - v_{10}) \\ -49{,}8\,(v_3 - v_2) - 25{,}6\,(v_6 - v_5) + 4{,}8\,(v_{12} - v_{11}) - 29 = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

Diese Gleichung kann man so weiter benützen, aber im Vergleich mit den Winkelsummengleichungen (4) hat die Gleichung (9) zu grosse Coefficienten, was formell störend für die weitere Rechnung ist, und wir wollen deshalb lieber die Gleichung (9) durchaus mit 10 dividieren, d. h. in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale rechnen:

$$\left.\begin{array}{l} +3{,}02\,(v_2 - v_1) + 0{,}22\,(v_6 - v_4) + 4{,}49\,(v_{11} - v_{10}) \\ -4{,}98\,(v_3 - v_2) - 2{,}56\,(v_6 - v_5) + 0{,}48\,(v_{12} - v_{11}) - 2{,}9 = 0 \end{array}\right\} \quad (10)$$

Man kann eine solche Bedingungsgleichung (9) oder (10) mit jeder beliebigen Zahl multiplizieren oder dividieren, ohne ihre Bedeutung für die Ausgleichung zu ändern, (während man *Fehler*gleichungen nicht multiplizieren darf, ohne die Gewichtsverhältnisse zu ändern, vgl. (6) § 21. S. 68. Am besten ist es, wenn die Coefficienten der linearen Seitengleichungen im Mittel ungefähr den Wert 1 haben, weil auch die Winkelsummengleichungen (4) alle die Coefficienten 1 haben; man könnte daher daran denken, die Gleichung (10) nochmals mit 2 oder 3 zu dividieren, indessen mit der bequemen Rechnung in Einheiten der 6ten Stelle nach (10) kommt man gewöhnlich gut durch, und wir bleiben daher bei (10) stehen. und finden daraus durch Ordnen nach v_1 , v_2 , v_3 . . .:

$$\begin{array}{r} -3{,}02\,v_1 + 8{,}00\,v_2 - 4.98\,v_3 - 0{,}22\,v_4 + 2{,}56\,v_5 - 2{,}34\,v_6 - 4{,}97\,v_{10} \\ + 4{,}49\,v_{11} + 0{,}48\,v_{12} - 2{,}9 = 0 \end{array} \quad (11)$$

Die Coefficienten-Summe $-3{,}02 + 8{,}00 \ldots + 0{,}48$ ist auch wieder $= 0$, wie bei den Gleichungen (4).

Die lineare Seitengleichung (11), nebst *dreien* von den 4 Winkelgleichungen der Gruppe (4) bilden das vollständige System der Bedingungsgleichungen. Mit Ausscheidung der dritten Gleichung der Gruppe (4) bilden wir die Tabelle der Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Coefficienten der Bedingungsgleichungen:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
k_1 a	−3,02	+8,00	−4,98	−0,22	+2,56	−2,34	..	..	..	−4,97	+4,49	+0,48	−2,90
k_2 b	−1	...	+1	−1	+1	...	..	..	..	...	−1	+1	+1,00
k_3 c	...	−1	+1	−1	...	+1	−1	+1	..	...	...	...	+1,02
k_4 d	−1	+1	...	...	...	...	..	−1	+1	−1	...	+1	+1,25

(12)

Die Bildung der Summen-Coefficienten ist sehr einfach, es ist z. B.:

$$[a\,a] = 3{,}02^2 + 8{,}00^2 + 4{,}98^2 + \ldots\ldots + 0{,}48^2 = 155{,}09$$
$$[a\,b] = +3{,}02 - 4{,}98 + 0{,}22 + 2{,}56 - 4{,}49 + 0{,}48 = -3{,}19 \text{ u. s. w.}$$
$$[a\,c] = -8{,}00 + 4{,}98 + 0{,}22 - 2{,}34 = -15{,}10$$
$$[a\,d] = +3{,}02 + 8{,}00 + 4{,}97 + 0{,}48 = +16{,}47$$
$$[b\,b] = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6$$
$$[b\,c] = +1 + 1 = +2$$
$$[b\,d] = +1 + 1 = +2$$
$$[c\,c] = 1^2 + \ldots = 6$$
$$[c\,d] = +1 + 1 = 2$$
$$[d\,d] = 1^2 + \ldots = 6$$

Die Normalgleichungen sind also in abgekürzter Schreibweise:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & a] & & b] & & c] & d] \quad w \\ [a & \underline{155{,}09\,k_1} & - 3{,}19\,k_2 & - 15{,}10\,k_3 & + 16{,}47\,k_4 & - 2{,}90 = 0 \\ [b & & \underline{6{,}00\,k_2} & + 2{,}00\,k_3 & + 2{,}00\,k_4 & + 1{,}00 = 0 \\ [c & & & \underline{6{,}00\,k_3} & - 2{,}00\,k_4 & + 1{,}02 = 0 \\ [d & & & & \underline{6{,}00\,k_4} & + 1{,}25 = 0 \end{array} \qquad (13)$$

Die Elimination und Auflösung giebt:

$$k_1 = +0{,}044 \qquad k_2 = +0{,}078 \qquad k_3 = -0{,}232 \qquad k_4 = -0{,}431 \qquad (14)$$

Nach Anleitung der Tabelle der Bedingungsgleichungen (12) macht man folgende tabellarische Berechnung der Verbesserungen v:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
+0,044	−0,132	+0,352	−0,218	−0,010	+0,112	−0,103	...	...	...	−0,217	+0,197	+0,021
+0,078	−0,078	...	+0,078	−0,078	+0,078	...	...	...	...	...	−0,078	+0,078
−0,232	...	+0,232	−0,232	+0,232	...	−0,232	+0,232	−0,232	...	...	...	...
−0,431	+0,431	−0,431	...	...	...	...	...	+0,431	−0,431	+0,431	...	−0,431
v	+0,221	+0,153	−0,372	+0,144	+0,190	−0,335	+0,232	+0,199	−0,431	+0,214	+0,119	−0,332
Summe		−0,002			−0,001			0,000			+0,001	

(15)

Diese Werte v geben stationsweise je die Summe 0,000″, abgesehen von kleinen Abrundungsunsicherheiten 0,002″ u. s. w.

Fügt man die so erhaltenen v zu den beobachteten Richtungen (2) hinzu, wobei wir auf 0,01″ abrunden, so erhält man folgendes:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beobachtet	v	Ausgeglichen	v^2	
(1) = 104° 33′ 24,00″	+ 0,22″	[1] = 104° 33′ 24,22″	0,0484	
(2) = 139 25 51,44	+ 0,15	[2] = 139 25 51,59	0,0225	
(3) = 162 22 44,90	− 0,37	[3] = 162 22 44,53	0,1369	
(4) = 342° 22′ 40,13″	+ 0,14″	[4] = 342° 22′ 40,27″	0,0196	
(5) = 26 59 7,20	− 0,19	[5] = 26 59 7,39	0,0361	
(6) = 66 26 53,07	− 0,33	[6] = 66 26 52,74	0,1089	
(7) = 246° 26′ 53,07″	+ 0,23″	[7] = 246° 26′ 53,30″	0,0529	(16)
(8) = 319 25 48,91	+ 0,20	[8] = 319 25 49,11	0,0400	
(9) = 1 49 59,47	− 0,43	[9] = 1 49 59,04	0,1849	
(10) = 181° 49′ 59,47″	+ 0,21″	[10] = 181° 49′ 59,68″	0,0441	
(11) = 206 59 9,14	+ 0,12	[11] = 206 59 9,26	0,0144	
(12) = 284 33 24,00	− 0,33	[12] = 284 33 23,67	0,1089	
			$[v\,v] = 0{,}8176$	

Durch Subtraktionen dieser ausgeglichenen Richtungen bildet man die ausgeglichenen Winkel und stellt dieselben abermals wie früher bei (3) in Dreiecken zusammen. Zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln, welche mit (1,3), (4,5) ... bezeichnet waren, bezeichnen wir die ausgeglichenen Winkel mit [1,3], [4,5] ...:

C.	[1,3] =	57° 49′ 20,31″	C.	[2,3] =	22° 56′ 52,94″	
B.	[4,5] =	44 36 27,12	F.	[7,8] =	72 58 55,81	
K.	[11,12] =	77 34 14,41	B.	[4,6] =	84 4 12,47	
	Summe	180° 0′ 1,84″		Summe	180° 0′ 1,22″	
	soll	1,83		soll	1,22	(17)
B.	[5,6] =	39° 27′ 45,35″	F.	[8,9] =	42° 24′ 9,93″	
F.	[7,9] =	115 23 5,74	K.	[10,12] =	102 43 23,99	
K.	[10,11] =	25 9 9,58	C.	[1,2] =	34 52 27,37	
	Summe	180° 0′ 0,67″		Summe	180° 0′ 1,29″	
	soll	0,67		soll	1,28	

Zur Untersuchung, ob die Seitengleichung stimmt, macht man statt der früheren logarithmischen Rechnung (6) die folgende neue logarithmische Rechnung:

[1,2] = 34° 52′ 27,37″	*log sin* [1,2]	9.757 2271	
[4,6] = 84 4 12,47	*log sin* [4,6]	9.997 6699	
[10,11] = 25 9 9,58	*log sin* [10,11]	9.628 4212	
		9.383 3181	(18)
[2,3] = 22° 56′ 52,94″	*log sin* [2,3]	9.590 9490	
[5,6] = 39 27 45,35	*log sin* [5,6]	9.803 1664	
[10,12] = 102 43 23,99	*log sin* [10,12]	9.989 2028	
		9.383 3182	

Mit den ausgeglichenen Richtungen berechnet man alle Dreiecksseiten auf allen Wegen übereinstimmend. Als Basis nehmen wir hiezu die Seite Catharina—Belchen nach Angabe der badischen Landestriangulierung:

Catharina—Belchen = 34 432,57^m (19)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Unter Annahme dieser Länge wurden mit den ausgeglichenen Winkeln und Sinuslogarithmen (18) nach der Additamentenmethode folgende Entfernungen widerspruchsfrei berechnet:

Catharina—Belchen . .	= 34 432,57^m	log = 4.536 9695	
Catharina—Feldberg . .	= 35 816,62	4.554 0846	
Catharina—Kandel . . .	= 24 760,43	4.393 7582	(20)
Belchen—Feldberg . . .	= 14 039,83	4.147 3617	
Belchen—Kandel . . .	= 29 843,17	4.474 8450	
Feldberg—Kandel . . .	= 20 994,59	4.322 1074	

Man kann auch entsprechend (7) und (8) nach dem Legendre schen Satze rechnen, was dieselben Werte geben muss wie (20).

In Bezug auf Genauigkeitsbestimmung hat man zuerst die Summe $[v\,v] = 0{,}8176$ nach (16) ins Auge zu fassen. Eine Probe dafür bekommt man durch die Formel $[v\,v] = -[w\,k]$, nach (4) § 41. S. 122. Die Ausrechnung hiezu ist:

$w_1 = -2{,}90$	$k_1 = +0{,}044$	$-w_1 k_1 = +0{,}1276$	
$w_2 = +1{,}00$	$k_2 = +0{,}078$	$-w_2 k_2$	$-0{,}0780$
$w_3 = +1{,}02$	$k_3 = -0{,}232$	$-w_3 k_3 = +0{,}2366$	
$w_4 = +1{,}25$	$k_4 = -0{,}431$	$-w_4 k_4 = +0{,}5388$	
		$+0{,}9030 - 0{,}0780$	
		$-[w\,k] = +0{,}8250$	(21)

Man kann auch noch die Formel (5) § 41. S. 122 zuziehen, was wir aber hier unterlassen, da wir auch die Elimination (13)—(14) nicht im Einzelnen vorgeführt haben, und weil die Probe (21) neben der unmittelbaren Ausrechnung der einzelnen v^2 in (16) vollauf genügt.

Wir nehmen im Mittel $[v\,v] = 0{,}82$, und haben damit den mittleren Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{0{,}82}{4}} = \pm 0{,}45'' \qquad (22)$$

und den mittleren Fehler eines Winkels vor der Ausgleichung:

$$= m\sqrt{2} = \pm 0{,}64'' \qquad (23)$$

Damit ist die Ausgleichung vollendet, und mit den Dreiecksseiten (20) nebst den Winkeln (18) kann man nun auch die Coordinaten der Viereckspunkte in jedem System berechnen, das in Frage kommt.

Die Coordinaten der 4 Punkte im badischen System sind in der „Zeitschr. f. Verm. 1878," S. 33—34 mitgeteilt. Ebendaselbst S. 20—25 sind auch die Originalmessungen mitgeteilt, welche zu dieser Netzausgleichung geführt haben. Es sind viele einzelne nach dem Repetitionsverfahren gemessene Winkel, welche wir zuerst stationsweise ausgeglichen und dann wie volle Richtungssätze weiter behandelt haben.

Die Messung voller gleichgewichtiger Richtungssätze auf allen 4 Punkten, welche wir am Anfang in (1) oder (2) S. 179 angenommen haben, hat also thatsächlich *nicht* stattgefunden, und wir haben deshalb unsere vorstehende Viereckausgleichung entweder als ein Schulbeispiel mit fingierten Richtungsmessungen aufzufassen, oder wir haben ein praktisches Beispiel vor uns für ein zwar nicht formell strenges aber sehr nützliches, schon von Gauss in dem „supplementum theoriae combinationis, 1826" erstmals angewendetes Näherungsverfahren, darin bestehend, dass man Winkelmessungen oder auch unvollständige Satzrichtungsmessungen, zuerst stationsweise irgendwie (vielleicht nur näherungsweise) ausgleicht und dann die Stationsergebnisse wie volle Richtungssätze in die Netzausgleichung einführt.

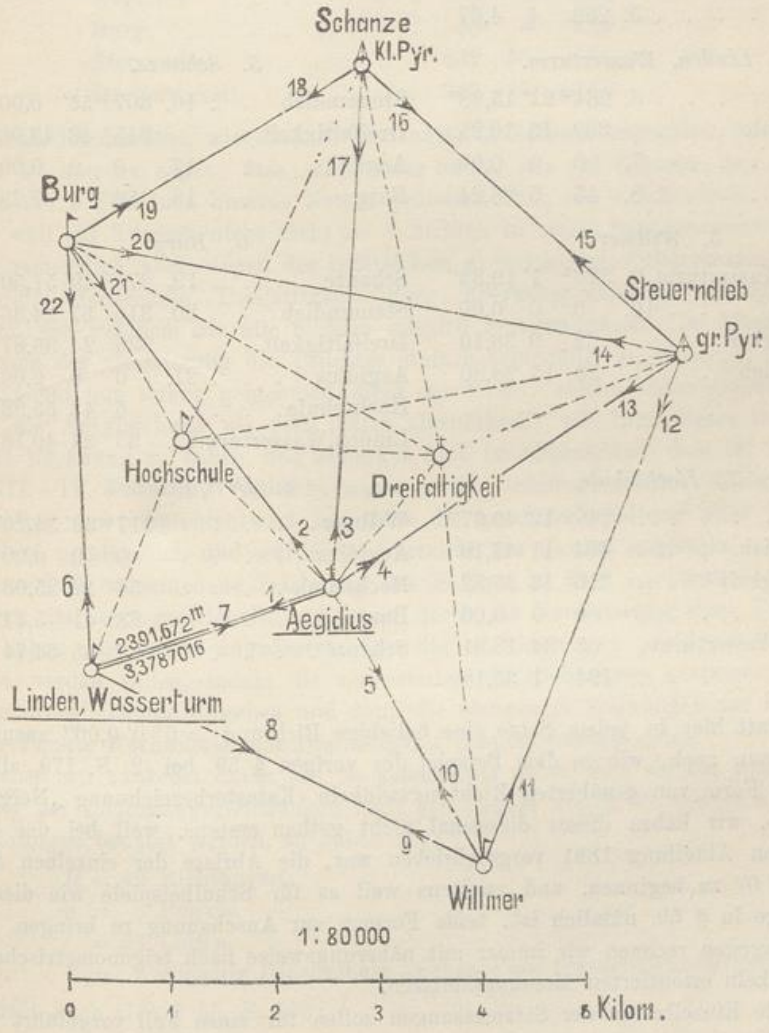
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 60. Triangulierungsnetz der Stadt Hannover.

Im Jahre 1891 ist das in Fig. 1. gezeichnete Dreiecksnetz der Stadt Hannover gemessen worden von dem Verfasser, welcher damals in vorübergehender Weise als „Trigonometer" der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme funktionierte.

Über den technischen Teil dieser Messungen haben wir bereits in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 246—285 mit Centrierungen u. s. w. berichtet, und es sei

Fig. 1.



hier nur wiederholt, dass die Winkelmessungen mit dem daselbst auf S. 183 abgebildeten kleinen Mikroskop-Theodolit mit 14cm-Kreis ausgeführt worden sind, und zwar auf allen 8 Punkten von Fig. 1. in je 12 Sätzen.

Folgendes sind die Mittelwerte dieser Messungen in Form von Richtungssätzen, wobei jeweils die Richtung nach Aegidius oder Linden Wasserturm als 0° 0′ 0″ eingeführt ist.

1. Aegidius.

Linden, Wasserturm	1.	0°	0′	0,00″
Hochschule		63	38	53,31
Burg	2.	70	56	34,82
Schanze	3.	110	42	21,36
Dreifaltigkeit		143	40	8,40
Steuerndieb	4.	163	44	49,52
Willmer	5.	259	4	4,67

2. Linden, Wasserturm.

Burg	6.	284°	21′	15,98″
Hochschule		309	13	10,25
Aegidius	7.	0	0	0,00
Willmer	8.	45	5	26,24

3. Willmer.

Linden, Wasserturm	9.	326°	1′	19,33″
Aegidius	10.	0	0	0,00
Dreifaltigkeit		22	9	36,10
Steuerndieb	11.	50	15	28,80

4. Steuerndieb.

Willmer	12.	325°	34′	46,28″
Aegidius	13.	0	0	0,00
Dreifaltigkeit		12	56	15,08
Hochschule		24	5	46,54
Burg	14.	44	9	14,00
Schanze	15.	74	52	31,12

5. Schanze.

Steuerndieb	16.	307°	55′	0,00″
Dreifaltigkeit		345	43	43,08
Aegidius	17.	0	0	0,00
Burg	18.	56	4	7,29

6. Burg. (1)

Schanze	19.	275°	49′	51,50″
Steuerndieb	20.	316	57	24,36
Dreifaltigkeit		336	24	35,87
Aegidius	21.	0	0	0,00
Hochschule		6	43	55,93
Linden, Wasserturm	22.	33	24	40,16

7. Hochschule.

Schanze	249°	12′	49,37″
Steuerndieb	304	11	45,10
Dreifaltigkeit	316	13	35,82
Aegidius	0	0	0,00
Linden, Wasserturm	65	34	18,81
Burg	194	1	35,18

8. Dreifaltigkeit.

Willmer	317°	33′	31,20″
Aegidius	0	0	0,00
Hochschule	56	12	25,93
Burg	83	41	5,14
Schanze	132	45	54,74

Statt hier in jedem Satze eine beliebige Richtung = 0° 0′ 0,00″ anzunehmen, könnte man auch, wie in dem Beispiel des vorigen § 59. bei (2) S. 179, alle Sätze sofort in Form von genäherten Richtungswinkeln (Katasterbezeichnung „Neigungen") aufführen, wir haben dieses diesesmal nicht gethan erstens, weil bei der trigonometrischen Abteilung 1891 vorgeschrieben war, die Abrisse der einzelnen Sätze je mit 0° 0′ 0″ zu beginnen, und zweitens weil es für Schulbeispiele wie dieses und das vorige in § 59. nützlich ist, *beide* Formen zur Anschauung zu bringen. In der Praxis dagegen rechnen wir immer mit näherungsweise nach trigonometrischen Richtungswinkeln orientierten Messungsabrissen.

Die Einzelheiten der Satzmessungen sollen für *einen* Fall vorgeführt werden; wir wählen dazu das Beispiel *Schanze*, wo auf dem Erdboden und centrisch gemessen werden konnte, und zwar 4 Sichten zusammen in je einem Satze. Dieses wurde 12 mal wiederholt, wie aus folgender Tabelle zu ersehen ist, in welcher, mit Weglassung der Grade und Minuten, nur die Sekunden angegeben sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Kreislage.	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	Mittel
	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
Aegidius	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00
Burg	6,0	4,5	10,5	6,0	11,0	8,5	10,0	6,0	8,5	3,5	5,5	7,5	7,29
Steuerndieb . .	63,0	59,5	61,0	61,0	60,5	61,5	62,0	59,0	56,0	56,0	58,0	62,5	60,00
Dreifaltigkeit .	40,5	38,0	45,0	46,5	43,5	47,5	38,5	48,5	40,0	40,0	41,5	47,5	43,08
Satzmittel . . .	27,38	25,50	29,12	28,38	28,75	29,37	27,62	28,37	26,12	24,88	26,25	29,38	27,59

(2)

Das Gesamtergebnis dieser 12 Sätze ist also, wenn nun auch die Grade und Minuten zugesetzt werden:

Aegidius	0°	0′	0,00″
Burg	56	4	7,29
Steuerndieb	307	55	0,00
Dreifaltigkeit	345	43	43,08

Dieses ist dasselbe, wie oben S. 186, unter 5. Schanze angegeben ist.

Es ist nun zu sagen, dass solch *volle* Sätze, wie auf Schanze, nur auf den wenigsten der 8 Stationen unseres Netzes gemessen sind, aus verschiedenen Gründen, teilweise weil auf Türmen nicht mehr als 4 Sichten in einem Satz genommen werden durften, namentlich aber wegen der zahlreichen excentrischen Aufstellungen, indem auf Aegidius, Hochschule, Dreifaltigkeit, Burg, überhaupt nicht *ein* Standpunkt zu finden war, von welchem aus alle Sichten möglich gewesen wären. In diesen Fällen wurden nach der Centrierung die Teilsätze einfach aneinander geschoben.

Man hat nun streng genommen nicht das Recht, solche zusammengeschobene Sätze in die Ausgleichung als *volle* Sätze einzuführen; wir thun dieses aber doch, um glatte Rechnung zu haben, und bemerken dazu im allgemeinen, dass für Triangulierung III.—IV. Ordnung, vielleicht sogar in II. Ordnung, solches Näherungsverfahren üblich und empfehlenswert ist, denn die Auseinanderhaltung aller Teilsätze wäre viel zu umständlich und würde die Übersicht des Ganzen ungemein stören.

Durch die verschiedene Zeichnung der Sichten in Fig. 1., nämlich teilweise ausgezogen, teilweise gestrichelt, und ferner durch die Numerierung eines Teiles der Sichten haben wir bereits angedeutet, dass die 42 Richtungen nachher verschieden behandelt werden sollen, indem die numerierten 22 Richtungen zusammen in eine Korrelaten-Ausgleichung eingehen und dann die übrigen 20 Richtungen zur Einschaltung der Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit benützt werden sollen.

Sehen wir zunächst davon ab, so können wir unser Netz als ein Beispiel zur Abzählung der Bedingungsgleichungen nach den Regeln von § 58. benützen. Wenn alle Richtungen benützt werden, so haben wir:

$R = 42$ Richtungen,
$p = 8$ Punkte,
$l = 22$ Linien,
$l' = 2$ einseitig (Hochschule – Schanze und Steuerndieb—Dreifaltigkeit),

dieses giebt nach (18) § 58. S. 176:

$l - 2p + 3 = 9$ Seitengleichungen,
$(l - l') - p + 1 = 13$ Dreiecksgleichungen (180°),
$R - 3p + 4 = 22$ Bedingungsgleichungen im Ganzen.

Wenn dagegen die punktierten Linien und damit die beiden Punkte Hochschule

und Dreifaltigkeit aus dem Hauptnetze weggelassen werden, so bleibt eine Ausgleichung mit nur 8 Bedingungsgleichungen, welche im nächsten § 61. ausführlich durchgenommen werden wird.

Vorher haben wir noch die beiden Basispunkte des Netzes anzugeben, nämlich Aegidius und Linden Wasserturm.

Diese beiden Punkte wurden von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme schon 1887 an das Netz I. Ordnung angeschlossen, wie in der „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 8—14 von uns berichtet und in unserem III. Bande, Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890, S. 335 und 452 mitgeteilt worden ist. Ausserdem kommt der Punkt Celle als Ursprung unseres Kataster-Coordinaten-Systems in Betracht.

Folgendes sind die fraglichen geographischen Coordinaten der Landesaufnahme:

	Breite	Länge	
Aegidius, Helmstange	52 22 14,9611	27 24 24,6290	(3) (1888)
Wasserturm, Fahnenstange	52 21 49,9080	27 22 25,0168	
Differenzen Aeg.-Wassert.	0′ 25,0531″	1′ 59,6122″	

Die amtliche Mitteilung von 1891 giebt:

Celle Coord. Nullpunkt	52° 37′ 32,6709″	27° 44′ 54,8477″	(4) (1891)
Aegidius, Helmstange	52 22 14,9611	27 24 24,6289	
Wasserturm, Fahnenstange	52 21 49,9080	27 22 25,0167	
Differenzen	0′ 25,0531″	1′ 59,6122″	

Die Längenangaben von 1891 sind um 0,0001″ kleiner als die von 1888, was nur etwa 2^{mm} Verschiebung entspricht, also *sachlich gleichgültig* ist, doch musste diese Kleinigkeit hier erwähnt werden, weil wir auch die Angaben von 1888 schon mehrfach mitgeteilt haben.

Im rechtwinkligen conformen System der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme haben unsere beiden Basispunkte folgende Coordinaten:

Aegidius	$y = -244656{,}090^m$	$x = -30624{,}971^m$	(5)
Linden, Wasserturm	$-246956{,}479$	$-31285{,}875$	
Differenzen	$+2300{,}389$	$+660{,}904$	

Aus den Angaben (4) haben wir folgende rechtwinklige Coordinaten im Kataster-System berechnet:

Aegidius	$y = -23271{,}813^m$	$x = -28308{,}395^m$	(6)
Linden, Wasserturm	$-25538{,}488$	$-29071{,}474$	
Differenzen	$+2266{,}675$	$+763{,}079$	

Um nun unsere Basis Aegidius—Wasserturm abzuleiten, können wir drei Wege einschlagen, nämlich diese Basis aus den Angaben (4) oder (5) oder (6) berechnen. Man wird in genügender Übereinstimmung finden:

Aegidius—Linden Wasserturm	$log\ S = 3{,}3787016$	(7)
	$S = 2391{,}672^m$	

Nebenbei sei hiezu bemerkt: Wenn man die Entfernung S unmittelbar aus den geographischen Coordinaten (4) berechnen will, bedient man sich der Mittelbreiten-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Formeln in unserem III. Bande, 3. Aufl. 1890, S. 398; zu (5) gehören die Formeln desselben Bandes S. 451—452 (vor kurzem in d. „Z. f. Verm. 1894", S. 167—175 neu entwickelt) und zu (6) gehören die gewöhnlichen Soldnerschen Formeln in jenem III. Bande, S. 271—275.

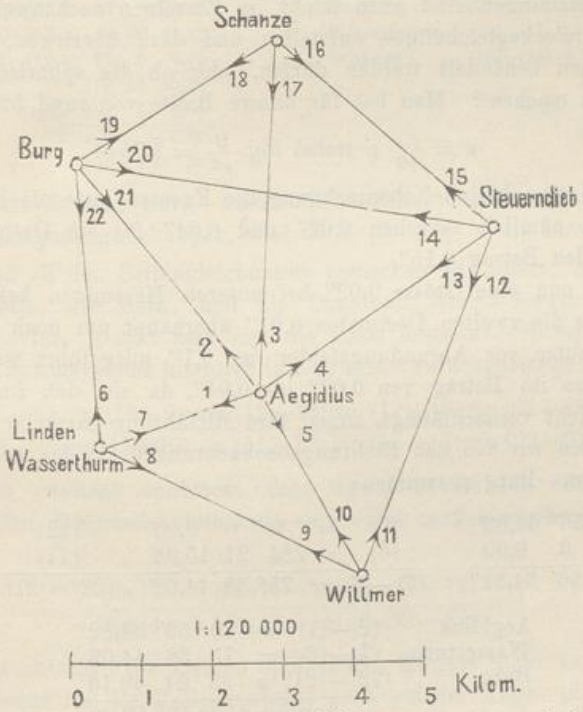
Wir werden später noch mit diesen verschiedenen Coordinaten zu thun haben, bis auf Weiteres brauchen wir nur die Basisseite Aegidius—Wasserturm nach (7).

Man könnte fragen, warum unser ganzes Netz (Fig. 1.) an die verhältnismässig *kurze* Seite Aegidius—Wasserturm angeschlossen und nicht etwa Steuerndieb als zweiter Basispunkt zusammen mit Linden Wasserturm genommen wurde? Der Punkt Aegidius, (sozusagen geodätisch geheiligt durch Messungen von *Gauss* selbst 1823) hat so viele Vorteile, dass er immer als I. oder II. Ordnung beibehalten werden wird; Linden, Wasserturm wurde 1887 als Folgepunkt dazu genommen, zu einer Zeit, als Steuerndieb 1891 noch nicht gebaut war. Die Basis Aegidius—Wasserturm diente 1888 zuerst für Linden; wäre die ganze Anlage erst 1891 zusammen mit Steuerndieb entschieden worden, so würde wohl letzterer Punkt mit als Basispunkt genommen worden sein.

§ 61. Ausgleichung des Hannoverschen Fünfecks.

Von den im vorigen § 60. S. 186 mitgeteilten sämtlichen Hannoverschen Richtungsmessungen benützen wir zunächst nur diejenigen, welche sich auf das Hauptfünfeck mit dem Centralpunkt Aegidius beziehen, für welches die Seite Aegidius—Wasserturm = 2391,672^m als Basis dient. Die dazu gehörigen Messungs-Sichten sind in der nachstehenden Fig. 1. mit Pfeilen und Nummern versehen.

Fig. 1.



Die zu dem Haupt-Fünfeck gehörigen Richtungsmessungen haben wir von § 60. S. 186 nochmals besonders ausgezogen und im folgenden besonders zusammengestellt.

	1. Aegidius.				*4. Steuerndieb.*				
Wasserturm	(1) =	0°	0′	0,00″	Willmer	(12) =	325°	34′	46,28″
Burg	(2) =	70	56	34,82	Aegidius	(13) =	0	0	0,00
Schanze	(3) =	110	42	21,36	Burg	(14) =	44	9	14,00
Steuerndieb	(4) =	163	44	49,52	Schanze	(15) =	74	52	31,12
Willmer	(5) =	259	4	4,67					
	2. Wasserturm.				*5. Schanze.*				(1)
Burg	(6) =	284°	21′	15,98″	Steuerndieb	(16) =	307°	55′	0,00″
Aegidius	(7) =	0	0	0,00	Aegidius	(17) =	0	0	0,00
Willmer	(8) =	45	5	26,24	Burg	(18) =	56	4	7,29
	3. Willmer.				*6. Burg.*				
Wasserturm	(9) =	326°	1′	19,33″	Schanze	(19) =	275°	49′	51,50″
Aegidius	(10) =	0	0	0,00	Steuerndieb	(20) =	316	57	24,36
Steuerndieb	(11) =	50	15	28,80	Aegidius	(21) =	0	0	0,00
					Wasserturm	(22) =	33	24	40,16

Man überlegt zuerst die Zahl und Art der Bedingungsgleichungen. Wir haben $p = 6$ Punkte, $l = 11$ beiderseitig beobachtete Linien, also $R = 2l = 22$ beobachtete Richtungen. Damit bekommt man nach (17) § 58. S. 176:

$$l - 2p + 3 = 2 \text{ Seitengleichungen,}$$
$$l - p + 1 = 6 \text{ Dreiecksgleichungen,}$$
$$R - 3p + 4 = 8 \text{ Gleichungen im Ganzen.}$$

Diese Gleichungen sind auch leicht im Einzelnen nachzuweisen. Wir wollen zuerst die 6 Dreiecksgleichungen aufstellen und dazu überlegen, ob die Dreiecke geradezu als *eben* behandelt werden dürfen, oder ob die sphärischen Excesse sich noch bemerklich machen? Man hat für unsere Breite von rund 52°:

$$\varepsilon = \frac{\triangle}{r^2}\varrho \text{ wobei } log\,\frac{\varrho}{r^2} = 1.7044$$

und dabei giebt eine kleine Nebenrechnung die Excesse, wie sie im Nachstehenden angegeben sind, nämlich zwischen 0,02″ und 0,04″ für ein Dreieck, und für das ganze Fünfeck den Betrag 0,15″.

Obgleich nun eine Grösse 0,02″ bei unseren Messungen keinen reellen Wert mehr hat, indem die zweiten Decimalen 0,01″ überhaupt nur noch als reine *Rechen*stellen zum Schutze vor Abrundungsfehler der 0,1″ mitgeführt werden, haben wir doch die Excesse im Betrag von 0,02″ bis 0,04″, da sie sich im Ganzen bis auf 0,15″ häufen, nicht vernachlässigt, zumal ihre Mitführung gar keine Mühe verursacht.

Nun stellen wir aus den Richtungsbeobachtungen (1) das erste Dreieck Aegidius—Wasserturm—Burg zusammen:

(2)	= 70°	56′	34,82″	(7)	= 0°	0′	0,00″	(22)	= 33°	24′	40,16″
(1)	= 0	0	0,00	(6)	= 284	21	15,98	(21)	= 0	0	0,00
(2)—(1)	= 70°	56′	34,82″	(7)—(6)	= 75°	38′	44,02″	(22)—(21)	= 33°	24′	40,16″

Aegidius	(2)—(1)	=	70°	56′	34,82″
Wasserturm	(7)—(6)	=	75	38	44,02
Burg	(22)—(21)	=	33	24	40,16
		Summe	179°	59′	59,00″
	soll	$180° + \varepsilon$ =	180°	0′	0,02″
		w =			−1,02″ (c′)

Bezeichnen wir nun mit (1), (2), (3) ... die beobachteten Richtungen, mit [1], [2], [3] ... die ausgeglichenen Richtungen, und mit $[1]-(1)=v_1$, $[2]-(2)=v_2$ u. s. w. die Richtungsverbesserungen, so ist:

$$(2)-(1)+(7)-(6)+(22)-(21)=179°\,59'\,59{,}00''$$
$$[2]-[1]+[7]-[6]+[22]-[21]=180°\;0'\;0{,}02''$$
$$\text{also}\quad v_2-v_1+v_7-v_6+v_{22}-v_{21}-1{,}02''=0 \qquad (c)$$

Diese Gleichung haben wir mit (c) bezeichnet, weil sie in der späteren Literierung aller Bedingungsgleichungen die dritte werden wird.

Ebenso wie diese (c) bilden wir auch die übrigen Dreiecksgleichungen:

Aegidius	(1)−(5) =	100°	55′	55,33″
Willmer	(10)—(9) =	33	58	40,67
Wasserturm	(8)—(7) =	45	5	26,24
		180	0	2,24
	soll	180	0	0,02
	$w=$			+2,22

$v_1-v_5+v_{10}-v_9+v_8-v_7+2{,}22''=0 \qquad (d)$

Aegidius	(5)—(4) =	95°	19′	15,15″
Steuerndieb	(13)—(12) =	34	25	13,72
Willmer	(11)—(10) =	50	15	28,80
		179	59	57,67
	soll	180	0	0,03
	$w=$			−2,36

$v_5-v_4+v_{13}-v_{12}+v_{11}-v_{10}-2{,}36''=0 \qquad (e)$

Aegidius	(4)—(3) =	53°	2′	28,16″
Steuerndieb	(15)—(13) =	74	52	31,12
Schanze	(17)—(16) =	52	5	0,00
		179	59	59,28
	soll	180	0	0,04
	$w=$			−0,76

$v_4-v_3+v_{15}-v_{13}+v_{17}-v_{16}-0{,}76''=0 \qquad (f)$

Aegidius	(3)—(2) =	39°	45′	46,54″
Schanze	(18)—(17) =	56	4	7,29
Burg	(21)—(19) =	84	10	8,50
		180	0	2,33
	soll	180	0	0,03
	$w=$			+2,30

$v_3-v_2+v_{18}-v_{17}+v_{21}-v_{19}+2{,}30''=0 \qquad (g)$

Aegidius	(4)—(2) =	92°	48′	14,70″
Steuerndieb	(14)—(13) =	44	9	14,00
Burg	(21)—(20) =	43	2	35,64
		180	0	4,34
	soll	180	0	0,04
	$w=$			+4,30

$v_4-v_2+v_{14}-v_{13}+v_{21}-v_{20}+4{,}30''=0 \qquad (h)$

Burg	(20)—(19) =	41°	7′	32,86″
Steuerndieb	(15)—(14) =	30	43	17,12
Schanze	(18)—(16) =	108	9	7,29
		179	59	57,27
	soll	180	0	0,03
	$w=$			−2,76

(i)

Dieses letzte Dreieck Burg—Steuerndieb—Schanze gehört nicht mehr zu den unabhängigen Bedingungsgleichungen, weil es in (f) + (g) — (h) bereits enthalten ist.

Übergehend zu den Seitengleichungen bemerken wir sofort, dass das Centralsystem um Aegidius die erste, und die Diagonale Burg—Steuerndieb die zweite Seitengleichung bietet. Denkt man sich die Basis Aegidius—Wasserturm durch alle 5 Dreiecke des Centralsystems hindurch in sich selbst zurückgerechnet, so erhält man:

$$\frac{\sin(7—6)\,\sin(10—9)\,\sin(13—12)\,\sin(17—16)\,\sin(21—19)}{\sin(8—7)\,\sin(11—10)\,\sin(15—13)\,\sin(18—17)\,\sin(22—21)}=1 \qquad (A)$$

Wenn man zweitens ausdrückt, dass irgend welche von Schanze ausgehende Seite des nördlichen Diagonalvierecks in sich selbst zurückberechnet stimmen muss, so erhält man:

$$\frac{\sin(3—2)\,\sin(15—13)\,\sin(20—19)}{\sin(4—3)\,\sin(15—14)\,\sin(21—19)}=1 \qquad (B)$$

Hiebei braucht man die kleinen sphärischen Excesse nicht zu berücksichtigen, weil ja der Sinussatz für die Dreieckswinkel auch auf der Kugel gilt, und man die Seitenberechnung nach der sogenannten Additamentenmethode ausgeführt denken kann. So giebt die Seitengleichung (A) folgende logarithmische Ausrechnung:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

					Diff. für 10″
(7)—(6)	= 75°	38′	44,02″	*log sin* = 9.986 2255	54
(10)—(9)	= 33	58	40,67	9.747 3139	313
(13)—(12)	= 34	25	13,72	9.752 2497	307
(17)—(16)	= 52	5	0,00	9.897 0249	164
(21)—(19)	= 84	10	8,50	9.997 7471	21
				Z = 9.380 5611	
(8)—(7)	= 45°	5′	26,24″	*log sin* = 9.850 1708	210
(11)—(10)	= 50	15	28,80	9.885 8874	175
(15)—(13)	= 74	52	31,12	9.984 6894	57
(18)—(17)	= 56	4	7,29	9.918 9250	142
(22)—(21)	= 33	24	40,16	9.740 8703	319
				N = 9.380 5429	

$$Z - N = +\,0{,}000\,0182$$

Die zugehörige lineare Seitengleichung ist für Einheiten der 6ten Logarithmen-Stelle:

$$+0{,}54(v_7 - v_6) + 3{,}13(v_{10} - v_9) + 3{,}07(v_{13} - v_{12}) + 1{,}64(v_{17} - v_{16}) + 0{,}21(v_{21} - v_{19})$$
$$-2{,}10(v_8 - v_7) - 1{,}75(v_{11} - v_{10}) - 0{,}57(v_{15} - v_{13}) - 1{,}42(v_{18} - v_{17}) - 3{,}19(v_{22} - v_{21}) + 18{,}2 = 0$$

oder zusammengefasst:

$$\left.\begin{array}{llll} +2{,}64\,v_7 & +4{,}88\,v_{10} & +3{,}64\,v_{13} & +3{,}06\,v_{17} \\ -0{,}54\,v_6 - 2{,}10\,v_8 - 3{,}13\,v_9 - 1{,}75\,v_{11} - 3{,}07\,v_{12} & & -0{,}57\,v_{15} - 1{,}64\,v_{16} - 1{,}42\,v_{18} & \\ & & +3{,}40\,v_{21} & \\ & & -0{,}21\,v_{19} - 3{,}19\,v_{22} + 18{,}2 = 0 & \end{array}\right\} \text{(a)}$$

Ebenso giebt die zweite Seitengleichung (B) folgende Ausrechnung:

					Diff. für 10″
(3)—(2)	= 39°	45′	46,54″	*log sin* = 9.805 9169	253
(15)—(13)	= 74	52	31,12	9.984 6894	57
(20)—(19)	= 41	7	32,86	9.818 0374	241
				Z = 9.608 6437	
(4)—(3)	= 53°	2′	28,16″	*log sin* = 9.902 5835	158
(15)—(14)	= 30	43	17,12	9.708 3056	354
(21)—(19)	= 84	10	8,50	9.997 7471	21
				N = 9.608 6362	

$$Z - N = +\,0{,}000\,0075$$

$$+2{,}53\,(v_3 - v_2) + 0{,}57\,(v_{15} - v_{13}) + 2{,}41\,(v_{20} - v_{19})$$
$$-1{,}58\,(v_4 - v_3) - 3{,}54\,(v_{15} - v_{14}) - 0{,}21\,(v_{21} - v_{19}) + 7{,}5 = 0$$

zusammengefasst:

$$\left.\begin{array}{lll} +4{,}11\,v_3 & -2{,}97\,v_{15} & -2{,}20\,v_{19} \\ -2{,}53\,v_2 - 1{,}58\,v_4 & -0{,}57\,v_{13} + 3{,}54\,v_{14} & +2{,}41\,v_{20} - 0{,}21\,v_{21} + 7{,}5 = 0 \end{array}\right\} \text{(b)}$$

Nun haben wir auf S. 191—192 zerstreut die 8 linearen Bedingungsgleichungen (c) (d) (e) (f) (g) (h) (a) (b), welche wir jetzt in geordneter Form und in der Reihenfolge (a) (b) ... (h) in die Tabelle I. auf S. 194—195 oben, schreiben:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aus dieser Tabelle I. S. 194 u. 195 berechnet man leicht alle Summen-Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w. Z. B.:

a	a^2	a	b	$a\,b$	$a\,c$
0,54	0,2916	+ 3,64	— 0,57	— 2,0748	+ 0,54
2,64	6,9696	— 0,57	— 2,97	+ 1,6929	+ 2,64
. .	. . .	— 0,21	— 2,20	+ 0,4620	— 3,40
3,19	10,1942	+ 3,40	— 0,21	— 0,7140	— 3,19
$[a\,a] = 107{,}1942$		$[a\,b] = -0{,}6339$			$[a\,c] = -3{,}41$ u. s. w.

Damit bildet man die Normalgleichungen, welche in abgekürzter Schreibweise und zugleich mit abgerundeten Coefficienten (z. B. 107,19 statt 107,1942) sich so darstellen (abgekürzte Schreibweise nach (2) und (3) unten auf S. 80):

$$\begin{aligned}
&+107{,}19k_1 - 0{,}63k_2 - 3{,}41k_3 + 3{,}27k_4 + 0{,}08k_5 + 0{,}49k_6 - 0{,}87k_7 - 0{,}24k_8 + 18{,}20 = 0\\
&\quad + 58{,}16k_2 - 2{,}32k_3 \quad + 1{,}01k_5 - 8{,}09k_6 + 8{,}63k_7 + 2{,}44k_8 + 7{,}50 = 0\\
&\qquad + 6{,}00k_3 - 2{,}00k_4 \quad\quad - 2{,}00k_7 - 2{,}00k_8 - 1{,}02 = 0\\
&\qquad\quad + 6{,}00k_4 - 2{,}00k_5 \quad\quad + 2{,}22 = 0\\
&\qquad\qquad + 6{,}00k_5 - 2{,}00k_6 \quad - 2{,}00k_8 - 2{,}36 = 0\\
&\qquad\qquad\quad + 6{,}00k_6 - 2{,}00k_7 + 2{,}00k_8 - 0{,}76 = 0\\
&\qquad\qquad\qquad + 6{,}00k_7 + 2{,}00k_8 + 2{,}30 = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 6{,}00k_8 + 4{,}30 = 0
\end{aligned}$$

Die Auflösung dieser 8 Gleichungen gab:

$$\begin{aligned}
k_1 &= -0{,}177 \quad k_2 = -0{,}048 \quad k_3 = -0{,}387 \quad k_4 = -0{,}367\\
k_5 &= +0{,}112 \quad k_6 = +0{,}422 \quad k_7 = -0{,}014 \quad k_8 = -0{,}931
\end{aligned}$$

damit kann man die Verbesserungen v ausrechnen nach den Gleichungen (9) § 39. S. 119, nämlich:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a_1 k_1 + b_1 k_2 + c_1 k_3 + \ldots\\
v_2 &= a_2 k_1 + b_2 k_2 + c_2 k_3 + \ldots \quad \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Man folgt dabei den Bedingungsgleichungen nach Vertikalreihen und bekommt eine Ausrechnung, welche wir unmittelbar unter der Tabelle der Bedingungsgleichungen I. auf S. 194 u. 195 tabellarisch in II. dargestellt haben.

Eine erste Rechenprobe hat man hier darin, dass die v stationsweise gruppiert je die Summe Null geben müssen. Dieses ist auf S. 194 u. 195 unten durch dickere Vertikalstriche angedeutet, z. B.:

$$+ 0{,}020 + 0{,}679 - 0{,}633 - 0{,}545 + 0{,}479 = 0.$$

Diese Probe ist übrigens nicht tiefgreifend, denn wenn sogar die k ganz falsch wären, würden die Stationssummen der v doch $= 0$ sein wegen der Gruppierung der Coefficienten der Bedingungsgleichungen. Man wird möglichst rasch zu der entscheidenden Probe eilen, ob die Verbesserungen v zu völligem Stimmen der Bedingungsgleichungen führen; dieses werden wir jedoch erst später auf S. 197 behandeln, und zunächst (aus einigen formellen Gründen) die Ausrechnung der $[v^2] = -[w\,k]$ vornehmen, was eine Rechenprobe enthält und auch sogleich zu dem mittleren Fehler führt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

I. Bedingungsgleichungen, z. B. $-0{,}54$ $+2{,}64$

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
k_1	a	. .	. .	. .	. .	. .	$-0{,}54$	$+2{,}64$	$-2{,}10$	$-3{,}13$	$+4{,}13$	$-1{,}73$
k_2	b	. .	$-2{,}58$	$+4{,}11$	$-1{,}58$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
k_3	c	-1	$+1$	. .	. .	. .	-1	$+1$	. .	. .	. .	. .
k_4	d	$+1$	. .	. .	. .	-1	. .	-1	$+1$	-1	$+1$	. .
k_5	e	. .	. .	. .	-1	$+1$	. .	. .	. .	. .	-1	$+1$
k_6	f	. .	. .	-1	$+1$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
k_7	g	. .	-1	$+1$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
k_8	h	. .	-1	. .	$+1$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .

II. Ausrechnung der Verbesserungen v aus den Korrelaten z. B.

$k_1 = -0{,}177$	. .	. .	. .	. .	. .	$+0{,}096$	$-0{,}467$	$+0{,}372$	$+0{,}554$	$-0{,}556$	$+0{,}31$
$k_2 = -0{,}048$	. .	$+0{,}121$	$-0{,}197$	$+0{,}076$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
$k_3 = -0{,}387$	$+0{,}387$	$-0{,}387$	. .	. .	. .	$+0{,}387$	$-0{,}387$	. .	. .	. .	. .
$k_4 = -0{,}367$	$-0{,}367$	. .	. .	. .	$+0{,}367$	. .	$+0{,}367$	$-0{,}367$	$+0{,}367$	$-0{,}367$	. .
$k_5 = +0{,}112$	. .	. .	. .	$-0{,}112$	$+0{,}112$	. .	. .	. .	. .	$-0{,}112$	$+0{,}11$
$k_6 = +0{,}422$	. .	. .	$-0{,}422$	$+0{,}422$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
$k_7 = -0{,}014$	. .	$+0{,}014$	$-0{,}014$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
$k_8 = -0{,}931$	. .	$+0{,}931$	. .	$-0{,}931$	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
	$+0{,}020$ $= v_1$	$+0{,}679$ $= v_2$	$-0{,}633$ $= v_3$	$-0{,}545$ $= v_4$	$+0{,}479$ $= v_5$	$+0{,}483$ $= v_6$	$-0{,}487$ $= v_7$	$+0{,}005$ $= v_8$	$+0{,}921$ $= v_9$	$-1{,}36$ $= v_{10}$	$+0{,}42$ $= v_{11}$

Fortsetzung des Textes von S. 193 unten.

Indem man die v auf $0{,}01''$ abrundet, hat man:

	v	v^2		v	v^2		v	v^2
1.	$+0{,}02''$	0,0004	9.	$+0{,}92''$	0,8464	17.	$-0{,}11''$	0,0121
2.	$+0{,}68$	0,4624	10.	$-1{,}34$	1,7956	18.	$+0{,}24$	0,0576
3.	$-0{,}63$	0,3969	11.	$+0{,}42$	0,1764	19.	$+0{,}16$	0,0256
4.	$-0{,}55$	0,3025	12.	$+0{,}43$	0,1849	20.	$+0{,}81$	0,6561
5.	$+0{,}48$	0,2304	13.	$+0{,}00$	0,0000	21.	$-1{,}15$	1,3225
6.	$+0{,}48$	0,2304	14.	$-1{,}10$	1,2100	22.	$+0{,}18$	0,0324
7.	$-0{,}49$	0,2401	15.	$+0{,}67$	0,4489			2,1063
8.	$+0{,}01$	0,0001	16.	$-0{,}13$	0,0169			4,6791
		1,8632			4,6791			1,8632
								8,6486

(2)

Controllrechnung:

	w	k	$-wk$	
1.	$+18{,}20$	$-0{,}177$	3,2214	
2.	$+7{,}50$	$-0{,}048$	0,3600	
3.	$-1{,}02$	$-0{,}387$		$-0{,}3947$
4.	$+2{,}22$	$-0{,}367$	0,8147	
5.	$-2{,}36$	$+0{,}112$	0,2643	
6.	$-0{,}76$	$+0{,}422$	0,3207	
7.	$+2{,}30$	$-0{,}014$	0,0322	
8.	$+4{,}30$	$-0{,}931$	4,0033	
			8.6219	(3)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$+2{,}64\,v_7 - 2{,}10\,v_8 \ldots - 3{,}19\,v_{22} + 18{,}20 = 0$

v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}	v_{20}	v_{21}	v_{22}	w
−1,75	−3,07	+3,64	. .	−0,57	−1,64	+3,06	−1,42	−0,21	. .	+3,40	−3,19	+18,20
. .	. .	−0,57	+3,54	−2,97	. .	. .	. .	−2,20	+2,41	−0,21	. .	+ 7,50
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	−1	+1	− 1,02
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	+ 2,22
+1	−1	+1	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	− 2,36
. .	. .	−1	. .	+1	−1	+1	. .	. .	. .	. .	. .	− 0,76
. .	. .	. .	. .	. .	. .	−1	+1	−1	. .	+1	. .	+ 2,30
. .	. .	−1	+1	. .	. .	. .	. .	. .	−1	+1	. .	+ 4,30

z. B. $v_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots = +0{,}387 - 0{,}367 = +0{,}020$

+0,310	+0,543	−0,644	. .	+0,101	+0,290	−0,541	+0,251	+0,037	. .	−0,602	+0,565
. .	. .	+0,027	−0,169	+0,142	. .	. .	. .	+0,106	−0,116	+0,010	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	+0,387	−0,387
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
+0,112	−0,112	+0,112	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
. .	. .	−0,422	. .	+0,422	−0,422	+0,422	. .	. .	. .	. .	. .
. .	. .	. .	. .	. .	. .	+0,014	−0,014	+0,014	. .	−0,014	. .
. .	. .	+0,931	−0,931	. .	. .	. .	. .	. .	+0,931	−0,931	. .
+0,422	+0,431	+0,004	−1,100	+0,665	−0,132	−0,105	+0,237	+0,157	+0,815	−1,150	+0,178
$= v_{11}$	$= v_{12}$	$= v_{13}$	$= v_{14}$	$= v_{15}$	$= v_{16}$	$= v_{17}$	$= v_{18}$	$= v_{19}$	$= v_{20}$	$= v_{21}$	$= v_{22}$

Fortsetzung des Textes von S. 194 unten.

Die Übereinstimmung zwischen 8,65 und 8,62 ist genügend, wir berechnen daraus den mittleren Fehler einer Richtung, nämlich wegen der Anzahl 8 von Bedingungsgleichungen:

$$m = \sqrt{\frac{8{,}63}{8}} = \pm 1{,}04'' \qquad (4)$$

Nun wollen wir aber zu der letzten durchschlagenden Probe, nämlich Erfüllung der Bedingungsgleichungen übergehen, und müssen hiezu die soeben berechneten v den unter (1) auf S. 190 früher mitgeteilten beobachteten Richtungen zufügen.

Dabei haben wir einige kleine formelle Abweichungen zu erklären, indem einzelne v der nachfolgenden Tabelle S. 196 bis zu 0,01″ von den soeben in (2) zusammengestellten v abweichen, z. B. $v_9 = +0{,}92''$ erscheint nachher $= +0{,}91''$. Da die 0,01″ in unserem Falle überhaupt keinen reellen Wert mehr haben, sondern nur als letzte Kontroll-Rechenstelle mitlaufen, brauchten wir kaum Rechenschaft über ein Schwanken von 0,01″ zu geben; und es kommt bei solchen Ausgleichungen oft vor, dass man kleine nach der Ausgleichung noch gebliebene Missstimmigkeiten in den Bedingungsgleichungen kurzer Hand nach Gutdünken vollends tilgt. Indessen in unserem Falle haben wir neben der in vorstehendem mitgeteilten Ausgleichung noch eine zweite Ausgleichung mit schärferer Fassung der zweiten Seitengleichung durchgeführt, und diese zweite Ausgleichung bei Ansetzen der endgültigen v mitbenützt, woraus die erwähnten weniger formellen Abweichungen von 0,01″ hervorgegangen sind.

Wir werden am Schlusse dieses Kapitels hierauf zurückkommen und auch einen anderen formellen Umstand, betreffend die *Reihenfolge* der Bedingungsgleichungen in der Tabelle I. oben auf S. 194—195 noch erörtern.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

		beobachtet (vgl. S. 190)	Verbesserung v	Ausgeglichen
1. Aegidius.				
Wasserturm . . .	(1) =	0° 0′ 0,00″	+ 0,02″	0° 0′ 0,02″
Burg	(2) =	70 56 34,82	+ 0,68	70 56 35,50
Schanze	(3) =	110 42 21,36	— 0,63	110 42 20,73
Steuerndieb . . .	(4) =	163 44 49,52	— 0,55	163 44 48,97
Willmer	(5) =	259 4 4,67	+ 0,48	259 4 5,15
		50,37	0,00	50,37
2. Wasserturm.				
Burg	(6) =	284° 21′ 15,98″	+ 0,48″	284° 21′ 16,46″
Aegidius	(7) =	0 0 0,00	— 0,48	359 59 59,52
Willmer	(8) =	45 5 26,24	0,00	45 5 26,24
		42,22	0,00	42,22
3. Willmer.				
Wasserturm . . .	(9) =	326° 1′ 19,35″	+ 0,91″	326° 1′ 20,24″
Aegidius	(10) =	0 0 0,00	— 1,33	359 59 58,67
Steuerndieb . . .	(11) =	50 15 28,80	+ 0,42	50 15 29,22
		48,13	0,00	48,13
4. Steuerndieb.				
Willmer	(12) =	325° 34′ 46,28″	+ 0,43″	325° 34′ 46,71
Aegidius	(13) =	0 0 0,00	+ 0,01	0 0 0,01
Burg	(14) =	44 9 14,00	— 1,09	44 9 12,91
Schanze	(15) =	74 52 31,12	+ 0,66	74 52 31,78
		31,40	+ 0,01	31,41
5. Schanze.				
Steuerndieb . . .	(16) =	307° 55′ 0,00″	— 0,13″	307° 54′ 59,87″
Aegidius	(17) =	0 0 0,00	— 0,10″	359 59 59,90
Burg	(18) =	56 4 7,29	+ 0,23	56 4 7,52
		7,29	0,00	7,29
6. Burg.				
Schanze	(19) =	275° 49′ 51,50″	+ 0,16″	275° 49′ 51,66″
Steuerndieb . . .	(20) =	316 57 24,36	+ 0,81	316 57 25,17
Aegidius	(21) =	0 0 0,00	— 1,15	359 59 58,85
Wasserturm . . .	(22) =	33 24 40,16	+ 0,17	33 24 40,33
		56,02	— 0,01	56,01

Mit diesen ausgeglichenen Richtungen bildet man wieder die Dreieckswinkel als Differenzen, ebenso wie früher in (c) bis (h) S. 191 mit den beobachteten Richtungen. Ausführlich schreiben wir dieses nur für das erste Dreieck:

[2] = 70° 56′ 35,50″	[7] = 359° 59′ 59,52″	[22] = 33° 24′ 40,33″
[1] = 0 0 0,02	[6] = 284 21 16,46	[21] = 359 59 58,85
[2]—[1] = 70° 56′ 35,48″	[7]—[6] = 75° 38′ 43,06″	[22]—[21] = 33° 24′ 41,48″

Aegidius	[2]—[1] =	70° 56′ 35,48″
Wasserturm	[7]—[6] =	75 38 43,06
Burg	[22]—[21] =	33 24 41,48
		180° 0′ 0,02″

[c]

In gleicher Weise bildet man auch die übrigen ausgeglichenen Dreiecke:

Aegidius	[1]—[5]	=	100°	55′	54,87″	Aegidius	[3]—[2]	=	39° 45′ 45,23″
Willmer	[10]—[9]	=	33	58	38,43	Schanze	[18]—[17]	=	56 4 7,62
Wasserturm	[8]—[7]	=	45	5	26,72	Burg	[21]—[19]	=	84 10 7,19
			180°	0′	0,02″ [d]				180° 0′ 0,04″ [g]
Aegidius	[5]—[4]	=	95°	19′	16,18″	Aegidius	[4]—[2]	=	92° 48′ 13,47″
Steuerndieb	[13]—[12]	=	34	25	13,30	Steuerndieb	[14]—[13]	=	44 9 12,89
Willmer	[11—[10]	=	50	15	30,55	Burg	[21]—[20]	=	43 2 33,68
			180°	0′	0,03″ [e]				180° 0′ 0,04″ [h]
Aegidius	[4]—[3]	=	53°	2′	28,24″	Burg	[20]—[19]	=	41° 7′ 33,51″
Steuerndieb	[15]—[13]	=	74	52	31,77	Steuerndieb	[15]—[14]	=	30 43 18,88
Schanze	[17]—[16]	=	52	5	0,03	Schanze	[18]—[16]	=	108 9 7,65
			180°	0′	0,04″ [f]				180° 0′ 0,04″ [i]

Zur Dreiecksberechnung wird man die kleinen Excesse, welche zwischen 0,02″ und 0,04″ betragen, noch auf die Dreieckswinkel verteilen, und dann braucht man nur noch eine Basislänge, um alle Dreiecksseiten nach dem Sinussatz berechnen zu können. Wie am Schlusse des vorigen § 60. S. 188 mitgeteilt wurde, ist die Basisseite

$$\text{Aegidius—Wasserturm } S = 2391{,}672^{m}$$
$$\log S = 3{,}378\,7016$$

Damit wurden in der angegebenen Weise auch alle übrigen Dreiecksseiten widerspruchsfrei berechnet mit folgenden Ergebnissen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Aegidius—Wasserturm} & \log S = 3.378\,7016 \\ \text{Aegidius—Willmer} & \log S = 3.481\,5665 \\ \text{Aegidius—Steuerndieb} & \log S = 3.615\,2086 \\ \text{Aegidius—Schanze} & \log S = 3.702\,8735 \\ \text{Aegidius—Burg} & \log S = 3.624\,0521 \\ \text{Wasserturm—Willmer} & \log S = 3.623\,4413 \\ \text{Willmer—Steuerndieb} & \log S = 3.727\,4425 \\ \text{Steuerndieb—Schanze} & \log S = 3.620\,7673 \\ \text{Schanze—Burg} & \log S = 3.511\,0402 \\ \text{Burg—Wasserturm} & \log S = 3.613\,3487 \\ \text{Burg—Steuerndieb} & \log S = 3.780\,5583 \end{array}\right\} \quad (5)$$

§ 62. Genauigkeit einer Netzdiagonale.

Mit den ausgeglichenen Richtungen, Winkeln und Dreiecksseiten des vorigen § 61. kann man alles zum weiteren geodätischen Gebrauch Erforderliche vollends berechnen, und dem Praktiker raten wir deshalb, sofort von § 61. zu § 63. u. § 64. überzugehen, wo wir die Coordinatenberechnung zu dem Fünfeck von § 61. behandeln werden.

Indessen für unseren theoretischen Gang ist es nützlich, hier eine Einschaltung zu machen, betreffend die Genauigkeit irgend einer aus der Basis Aegidius—Wasserturm abgeleiteten Dreiecksseite.

Da die Basis Aegidius—Wasserturm ziemlich klein ist im Vergleich mit der Ausdehnung des Gesamtnetzes, ist es nicht ohne Interesse, die Fehlerübertragung von dieser Basis auf eine der längeren Seiten, z. B. auf die nahezu $2\frac{1}{2}$ mal so lange

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diagonale Burg– Steuerndieb zu berechnen. Dabei handelt es sich nur um diejenigen Fehler, welche durch die Winkelmessungen erzeugt und weiter getragen werden, während die Basis Aegidius—Wasserturm selbst hier als fehlerfrei betrachtet wird.

Wir wollen hiemit eine Funktions-Gewichtsberechnung nach der Theorie von § 42. machen.

Setzen wir die Basis Aegidius—Wasserturm $= b$ und die Diagonale Burg—Steuerndieb $= s$, so besteht nach Fig. 1. § 61. S. 189 die Beziehung:

$$s = b \frac{sin\,[7—6]\,sin\,[4—2]}{sin\,[22—21]\,sin\,[14—13]} \qquad (1)$$

Die beiden hiezu erforderlichen Dreiecke sind mit ihren ausgeglichenen Winkeln unter [c] und [h] auf S. 196—197 angegeben, nämlich mit Zufügung der Legendre'schen ebenen Winkel:

				Legendre
Aegidius	[2—1]	=	70° 56′ 35,48″	70° 56′ 35,47″
Wasserturm	[7—6]	=	75 38 43,06	75 38 43,06
Burg	[22—21]	=	33 24 41,48	33 24 41,47
			180° 0′ 0,02″	180° 0′ 0,00″
Aegidius	[4—2]	=	92° 48′ 13,47″	92° 48′ 13,46″
Steuerndieb	[14—13]	=	44 9 12,89	44 9 12,88
Burg	[21—20]	=	43 2 33,68	43 2 33,66
			180° 0′ 0,04″	180° 0′ 0,00″

Mit den Legendre'schen Winkeln rechnet man:

		Diff. für 10″			Diff. für 10″
$log\,sin\,[7—6]$	= 9.986 2250	54	$log\,sin\,[22—21]$	= 9.740 8745	319
$log\,sin\,[4—2]$	= 9.999 4798	— 11	$log\,sin\,[14—13]$	= 9.842 9735	216
	9.985 7048			— 9.583 8480	
				= + 0.416 1520	

Aegidius—Wasserturm $log\,b = 3.378\,7016$
$+ 9.985\,7048$
$+ 0.416\,1520$

Burg—Steuerndieb $log\,s = 3.780\,5584$, $s = 6033{,}349^{m}$ (2)

Dieses stimmt genügend mit 3.780 5583, wie auf S. 197 angegeben ist, und zwar kommt, gelegentlich bemerkt, die kleine Abweichung von 1 Einheit der 7. Stelle in $log\,s$ nur daher, dass die Werte (5) am Schluss von § 61. S. 197 bei den Rechnungen aus den verschiedenen Dreiecken in der letzten Stelle nötigenfalls gemittelt wurden.

Aus der vorstehenden logarithmischen Berechnung mit den beigesetzten Differenzen für $log\,sin$ kann man die Fehlerfunktion anschreiben:

$$log\,s — log\,b = + 0{,}54\,(d_7 — d_6) — 0{,}11\,(d_4 — d_2) — 3{,}19\,(d_{22} — d_{21}) — 2{,}16\,(d_{14} — d_{13}) \qquad (3)$$

dabei bedeuten d_7 , d_6 u. s. w. die Änderungen der gemessenen Richtungen (7) , (6) ... und zwar d_7 , d_6 ... in Sekunden, wenn $log\,s — log\,b$ in Einheiten der 6^{ten} Logarithmen-Decimale verstanden. Dieses Verfahren ist offenbar ganz entsprechend der Aufstellung der linearen Seitengleichungen, welche wir in § 57. S. 167 gelehrt haben; und man könnte auch die Coefficienten 0,54 u. s. w. ähnlich wie dort als Differentialquotienten der $log\,sin$-Funktion nachweisen, was nochmals auszuführen nun nicht nötig ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir betrachten nun die vorstehende Gleichung (3) als Funktion F in dem Sinne von § 42., (indem unsere d denselben Charakter haben wie die x von (1) § 42. S. 123) und damit werden die Coefficienten f:

$f_7 = +0{,}54 \quad f_6 = -0{,}54 \quad f_4 = -0{,}11 \quad f_2 = +0{,}11$
$f_{22} = -3{,}19 \quad f_{21} = +3{,}19 \quad f_{14} = -2{,}16 \quad f_{13} = +2{,}16$

alle anderen f sind = Null. Wir bilden eine Tabelle aller f und aller derjenigen $a\ b\ c\ \ldots$, welche mit den vorhandenen f zusammen vorkommen. Die $a\ b\ c\ \ldots$ sind von der früheren grossen Coefficiententabelle § 61. S. 194—195 hierher übertragen.

	2	4	6	7	13	14	21	22
a	. .	. .	− 0,54	+ 2,64	+ 3,64	. .	+ 3,40	− 3,19
b	− 2,53	− 1,58	. .	. .	− 0,57	+ 3,54	− 0,21	. .
c	+ 1	. .	− 1	+ 1	. .	. .	− 1	+ 1
d	. .	. .	. .	− 1	. .	. .	. .	. .
e	. .	− 1	. .	. .	+ 1	. .	. .	. .
f	. .	+ 1	. .	. .	− 1	. .	. .	. .
g	− 1	. .	. .	. .	. .	. .	+ 1	. .
h	− 1	+ 1	. .	. .	− 1	+ 1	+ 1	. .
f	+ 0,11	− 0,11	− 0,54	+ 0,54	+ 2,16	− 2,16	+ 3,19	− 3,19

Nun rechnet man alle af, bf, cf u. s. w., z. B.:

a	f	af	cf	
− 0,54	− 0,54	+ 0,2916	+ 0,11	
+ 2,64	+ 0,54	+ 1,4256	+ 0,54	
+ 3,64	+ 2,16	+ 7,8624	+ 0,54	
+ 3,40	+ 3,19	+ 10,8460	− 3,19	
− 3,19	− 3,19	+ 10,1761	− 3,19	
		$[af] = 30{,}6017$	$[cf] = -5{,}19$	u. s. w.

Dieses sind die Ersatzglieder für die Absolutglieder w der Normalgleichungen, und entsprechend (15) S. 125 haben wir folgendes Coefficientensystem:

	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	f
a	+ 107,19	− 0,63	− 3,41	+ 3,27	+ 0,08	+ 0,49	− 0,87	− 0,24	+ 30,60
b	. . .	+ 58,16	− 2,32	− 0,00	+ 1,01	− 8,09	+ 8,63	+ 2,44	− 9,65
c		. . .	+ 6,00	− 2,00	. . .	. . .	− 2,00	− 2,00	− 5,19
d			. . .	+ 6,00	− 2,00	. . .	. . .	. . .	− 0,54
e				. . .	+ 6,00	− 2,00	. . .	− 2,00	+ 2,27
f					. . .	+ 6,00	− 2,00	+ 2,00	− 2,27
g						. . .	+ 6,00	+ 2,00	+ 3,08
h							. . .	+ 6,00	− 1,35
f								. . .	+ 30,29 = $[ff]$

Dieses System wird 8 mal reduziert, d. h. es werden der Reihe nach k_1, k_2 bis k_8

eliminiert und dabei das Schlussglied immer mitgeführt. Durch diese 8 Eliminationen wird man erhalten (nach Gleichung (12) S. 124):

$$30{,}29 - (8{,}74 + 1{,}54 + 3{,}63 + 1{,}68 + 0{,}33 + 3{,}01 + 1{,}39 + 0{,}87)$$

$$\text{d. h. } \frac{1}{P} = 30{,}29 - 21{,}19 = 9{,}10$$

Diese ganze Rechnung von S. 199 an ist nur mit dem Rechenschieber gemacht, deshalb höchstens auf 0,1 sicher, daher zu setzen rund:

$$\frac{1}{P} = 9{,}1$$

Da der mittlere Fehler der Gewichtseinheit früher in (4) § 61. S. 195 rund $m = 1{,}0''$ gefunden wurde, haben wir nun den mittleren Funktionsfehler:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 1{,}0\sqrt{9{,}1} = \pm 3{,}0 \qquad (3)$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmenstelle, wir haben also nach (2) und (3):

$$log\, s = 3.780\,5584 \pm 30$$

$$\text{also } s = 6033{,}349^{m} \pm 0{,}042^{m}$$

Dieses ist geradezu aus der Logarithmentafel erhalten, indem ± 30 an der fraglichen Stelle bei der Tafeldifferenz 72 den Betrag $\pm 0{,}042^{m}$ ausmacht. Mehr theoretisch hat man:

$$d\, log\, s = \frac{\mu}{s}\, d\, s = \pm 0{,}0000030 \qquad \frac{d\, s}{s} = \frac{0{,}0000030}{0{,}434\ldots} = 0{,}000007$$

d. h. 7 Milliontel oder 7 Millimeter auf 1 Kilometer, was auf 6 Kilometer ausgerechnet wieder $\pm 42^{mm}$ giebt wie vorhin.

Dieses ist der mittlere zu fürchtende Fehler der Diagonale Burg—Steuerndieb, insofern diese Seite trigonometrisch aus der fehlerfrei angenommenen Seite Aegidius—Wasserturm abgeleitet ist. Die erzielte Genauigkeit ist offenbar sehr befriedigend.

In gleicher Weise könnte man auch einen bei der Kürze der Basis nicht ungefährlichen *Verdrehungsfehler* des Netzes bestimmen.

§ 63. Abrisse und Coordinaten im System der Landesaufnahme.

Wie schon am Schluss von § 60. angegeben wurde, haben wir für unsere zwei Basispunkte Aegidius und Linden Wasserturm Anschluss-Coordinaten im conformen rechtwinkligen System der Landesaufnahme.

Diese Coordinaten sind für das allgemeine Verständnis der preussischen Geodäsie sehr wichtig, dagegen hat das Kataster andere Coordinaten, welche wir nachher in dem besonderen § 64. behandeln werden.

Die Hauptformeln der conformen rechtwinkligen Coordinaten haben wir vor Kurzem in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 167—171 entwickelt und wir wollen hier nur die Gebrauchsformeln hersetzen, mit Beziehung auf Fig. 1.

Ein Punkt A habe die Projektions-Coordinaten $x_1\ y_1$, und ein Punkt B habe entsprechend $x_2\ y_2$, dann hat man für die geradlinige Entfernung s und den Richtungswinkel t_1 in dem ebenen rechtwinkligen Systeme, wie immer:

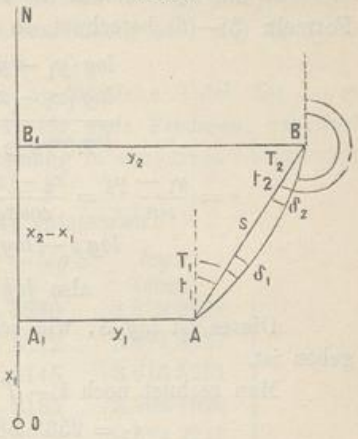
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{aligned} tang\, t_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ s = \frac{y_2 - y_1}{\sin t_1} &= \frac{x_2 - x_1}{\cos t_1} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ausserdem sei S die sphärische Entfernung der Punkte A und B, hierzu dient das Vergrösserungsverhältnis:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ds}{dS} = m = 1 + \frac{y^2}{2r^2} \text{ oder } log\, m &= \frac{\mu}{2r^2} y^2 \\ \text{wobei für 7stell. Logarithmen } log \frac{\mu}{2r^2} &= 2{\cdot}72670 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Fig. 1.



Für eine Entfernung S und ihre Projektion s hat man in logarithmischer Form:

$$\left.\begin{aligned} log\, s - log\, S &= \frac{\mu}{12r^2}(y_1^2 + 4y_0^2 + y_2^2), \\ \text{wobei } y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} &\text{ und } log \frac{\mu}{12r^2} = 1{\cdot}94855 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Wenn y_1 und y_2 nahe gleich sind, d. h. wenn die Differenz $y_2 - y_1$ verhältnismässig klein ist im Vergleich mit y selbst, kann man genähert rechnen:

$$\left.\begin{aligned} \text{Genähert } log\, s - log\, S &= \frac{\mu}{8r^2}(y_1 + y_2)^2, \\ \text{wo } log \frac{\mu}{8r^2} &= 2{\cdot}12464 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Weiter sei T_1 der sphärische (auch sphäroidische) Richtungswinkel des Strahls AB in A. Zur Reduktion von t_1 auf T_1 hat man:

$$\left.\begin{aligned} T_1 - t_1 &= (x_2 - x_1)\frac{(2y_1 + y_2)}{3}\frac{\varrho}{2r^2} \\ \text{und entsprechend: } \\ T_2 - t_2 &= (x_1 - x_2)\frac{(2y_2 + y_1)}{3}\frac{\varrho}{2r^2} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\text{wo } log \frac{\varrho}{2r^2} = 1.40334$$

Wenn $y_2 - y_1$ klein ist im Vergleich mit y_1 und y_2 selbst, kann man auch diese beiden Reduktionen gleich nehmen, nämlich genähert:

$$\left.\begin{aligned} T_1 - t_1 = t_2 - T_2 &= (x_2 - x_1)(y_2 + y_1)\frac{\varrho}{4r^2}, \\ \text{wo } log \frac{\varrho}{4r^2} &= 1.10231 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Der Ursprung des Systems ist in dem Meridian für 31° Länge auf der Breite 52° 42′ 2,53251″ (entsprechend 52° 40′ auf der Gauss'schen conformen Kugel). Die $+ x$ werden nach Norden und die $+ y$ nach Osten gezählt, wir haben daher in der Gegend von Hannover $- y$ und $- x$, und unsere beiden Basispunkte sind:

Aegidius	$y_1 = -244\,656{,}090^m$	$x_1 = -30\,624{,}971^m$
Wasserturm	$y_2 = -246\,956{,}479^m$	$x_2 = -31\,285{,}875^m$
	$y_1 - y_2 = +2\,300{,}389^m$	$x_1 - x_2 = +660{,}904^m$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man hieraus die Entfernung und die beiden Richtungswinkel nach den Formeln (3)—(6) berechnet, so erhält man:

$$\begin{array}{l} log\,(y_1 - y_2) = 3.361\,8013 \\ log\,(x_1 - x_2) = 2.820\,1384 \\ \hline log\,tang\,t_2 \quad = 0.541\,6629 \qquad t_2 = 73°\ 58'\ 14{,}12'' \end{array} \tag{7}$$

$$s = \frac{y_1 - y_2}{sin\,t_2} = \frac{x_2 - x_1}{cos\,t_2} \;..\; 3.379\,0236$$

$$log\,s - log\,S = \quad 3220 \text{ nach Formel (3) oder (4)}$$

$$\text{also } log\,S = 3.378\,7016 \tag{8}$$

Dieses ist $log\,S$, wie schon in der Dreiecksausgleichung § 61. S. 197 angegeben ist.

Man rechnet noch $t - T$ nach (5) oder (6), und hat dann:

$$\begin{array}{rlrl} & t_1 = 253°\ 58'\ 14{,}12'' & & t_2 = 73°\ 58'\ 14{,}12'' \\ T_1 - t_1 = & \quad +0{,}41'' & T_2 - t_2 = & \quad -0{,}41'' \\ \hline & T_1 = 253°\ 58'\ 14{,}53'' & & T_2 = 73°\ 58'\ 13{,}71'' \end{array} \tag{9}$$

Um auch für die übrigen Dreiecksseiten die $log\,s - log\,S$ und die $t - T$ zu berechnen, muss man zuerst durch abgerundete Annahmen vorläufige Näherungswerte ermitteln, was übrigens auch aus anderen Gründen schon nützlich ist. Solche Näherungswerte sind:

1. Aegidius	$y = -244656{,}1^m$	$x = -30625{,}0^m$
2. Wasserturm	$-246956{,}5$	$-31285{,}9$
3. Willmer	$-243280{,}9$	$-33328{,}4$
4. Steuerndieb	$-241167{,}9$	$-28421{,}4$
5. Burg	$-247076{,}5$	$-27179{,}2$
6. Schanze	$-244244{,}4$	$-25592{,}9$

(10)

Bei der Berechnung der $log\,s - log\,S$ ist es sehr angenehm, dass diese Reduktionen nur von den Ordinaten y und gar nicht von den Abscissen x abhängen; man kann deswegen die Berechnung der $log\,m$ ein für allemal durch eine Tabelle erledigen. Wir haben für unseren Hannoverschen Messungsbereich eine solche Tafel berechnet, von der wir aber hier der Raumersparung wegen nur die Hauptwerte für y von 1^{km} zu 1^{km} wachsend angeben, und zwar $log\,m$ in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle:

y	$log\,m$	y	$log\,m$	y	$log\,m$	y	$log\,m$
230^{km}	2819·4	240^{km}	3069·9	250^{km}	3331·0	260^{km}	3602·8
231	2844·0	241	3095·5	251	3357·7	261	3630·6
232	2868·6	242	3121·3	252	3384·6	262	3658·5
233	2893·4	243	3147·1	253	3411·5	263	3686·5
234	2918·3	244	3173·1	254	3438·5	264	3714·6
235	2943·3	245	3199·1	255	3465·6	265	3742·8
236	2968·4	246	3225·3	256	3492·8	266	3771·1
237	2993·6	247	3251·6	257	3520·2	267	3799·5
238	3018·9	248	3278·0	258	3547·6	268	3828·0
239	3044·4	249	3304·4	259	3575·2	269	3856.6

(11)

Man kann diese Sache auch graphisch behandeln: man überzieht das Netzbild der Triangulierung (Fig. 1. § 60. S. 185 mit einer Schaar von Ordinatenlinien konstanter $log\,m$ und kann dann für jeden Punkt das zugehörige $log\,m$ interpolatorisch abgreifen. Die 7te Logarithmenstelle bekommt man auf diesem Wege sogar in dem

kleinen Maassstabe 1 : 80 000 von Fig. 1. S. 185 noch nahezu richtig, und jedenfalls hat man damit eine angemessene Kontrolle der Tafelberechnung oder der unmittelbaren Berechnung nach der Formel (3) oder (4) S. 201.

Die preussische Landesaufnahme benützt eine ausführliche Tafel der $\log m$ nach dem Prinzip unseres vorstehenden Beispiels (11) für ganz Preussen, nebenbei ein kleines Zeichen dafür, wie viel angenehmer die Rechnung in conformen Coordinaten ist im Vergleich mit den Soldner schen Coordinaten. —

In solcher Weise sind die nachfolgenden Werte entstanden:

Dreiecksseite	$\log S$ (sphärisch)	$\log s - \log S$	$\log s$ (eben)	
Aegidius—Wasserturm	3.378 7016	+ 3220	3.379 0236	
Aegidius—Willmer	3.481 5665	+ 3172	3.481 8837	
Aegidius—Steuerndieb	3.615 2086	+ 3145	3.615 5231	
Aegidius—Schanze	3.702 8735	+ 3185	3.703 1920	
Aegidius—Burg	3.624 0521	+ 3222	3.624 3743	
Wasserturm—Willmer	3.623 4413	+ 3202	3.623 7615	(12)
Willmer—Steuerndieb	3.727 4425	+ 3127	3.727 7552	
Steuerndieb—Schanze	3.620 7673	+ 3140	3.621 0813	
Schanze—Burg	3.511 0402	+ 3216	3.511 3618	
Burg—Wasserturm	3.613 3487	+ 3252	3.613 6739	
Burg—Steuerndieb	3.780 5583	+ 3177	3.780 8760	

Nach dieser Seitenberechnung kommt die Aufstellung der Richtungs-Abrisse in der nachfolgenden Tabelle auf S. 204, in welcher aber nicht bloss die Richtungen des Fünfecks von § 61. S. 189, sondern auch noch diejenigen Richtungen kommen, welche in den Messungstabellen von § 60. S. 186 sich auf die Richtungen nach den zwei Punkten Hochschule und Dreifaltigkeit beziehen.

In diesem Abrisse stehen in erster Spalte die beobachteten Richtungen T, d. h. solche Werte, welche gegen die unmittelbar beobachteten Richtungen von § 60. S. 186 je um einen konstanten Betrag auf einer Station verschoben sind.

Insofern man beobachtete Sätze stets um einen willkürlichen Winkel im ganzen drehen darf (gerade so wie auch schon die Annahme 0° 0′ 0″ für je einen Strahl in den Messungssätzen von § 60. S. 186 auf willkürlicher Verdrehung beruht), kann man die Zahlen der ersten Spalte von S. 204 immer noch als „*beobachtet*“ bezeichnen, wenn ihre Verschiebung konstant ist, und es handelt sich nur noch um den Betrag dieser Verschiebung, den wir an dem ersten Beispiel der Station Aegidius dadurch ermitteln wollen, dass wir mit dem Einsetzen des *ausgeglichenen* T_1 in der dritten Spalte beginnen. Hier ist der aus den Basis-Coordinaten in (9) S. 202 berechnete Wert $T_1 = 253° 58′ 14{,}53″$ einzusetzen, und da die Netzverbesserungen v der zweiten Spalte von § 61. S. 196 her bekannt sind, haben wir auch das erste beobachtete $T = 253° 58′ 14{,}53″ - 0{,}02″ = 253° 58′ 14{,}51$, und die früher auf Station Aegidius beobachtet angegebenen Werte von S. 196 erscheinen sämtlich um 253° 58′ 14,51″ vergrössert in der ersten Spalte von S. 204, und um gleich viel vermehrt erscheinen auch die ausgeglichenen Richtungen von S. 196 nun in der dritten Spalte von S. 204. Hat man die $t - T$ in die 4te Spalte von S. 204 eingesetzt, so bekommt man auch alle Werte t der letzten Spalte von S. 204 und damit auch den Übergang zu den *anderen* Stationen. Denn da die t *ebenen* geradlinigen Coordinaten entsprechen, gehen sie von einem Punkte zum jenseitigen Punkte durch Zufügung von $\pm$ 180° über.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Abriss im conformen System der Landesaufnahme. (13)

	Beobachtet T (sphärisch)	v	Ausgeglichen T (sphärisch)	$t-T$	Ausgeglichen t (eben)
1. Aegidius.			(γ=2° 50′ 49,56″)		
Wasserturm . . 1.	253° 58′ 14,51″	+0,02″	253 58 14,53	−0,41″	253 58 14,12
Hochschule . .	317 37 7,82			+0,93	(317 37 8,75)
Burg . . . . 2.	324 54 49,33	+0,68	324 54 50,01	+2,14	324 54 52,15
Schanze . . . 3.	4 40 35,87	−0,63	4 40 35,24	+3,11	4 40 38,35
Dreifaltigkeit .	37 38 22,91			+0,83	(37 38 23,74)
Steuerndieb . . 4.	57 43 4,03	−0,55	57 43 3,48	+1,36	57 43 4,84
Willmer . . . 5.	153 2 19,18	+0,48	153 2 19,66	−1,67	153 2 17,99
2. Wasserturm.			(γ=2° 52′ 23,46″)		
Burg . . . . 6.	358° 19′ 30,17″	+0,48″	358 19 30,65	+2,57″	358 19 33,22
Hochschule . .	23 11 24,44			+1,35	(23 11 25,79)
Aegidius . . . 7.	73 58 14,19	−0,48	73 58 13,71	+0,41	73 58 14,12
Willmer . . . 8.	119 3 40,43	0,00	119 3 40,43	−1,27	119 3 39,16
3. Willmer.			(γ=2° 49′ 43,18″)		
Wasserturm . . 9.	299° 3′ 36,98″	+0,91″	299 3 37,89	+1,26″	299 3 39,15
Aegidius . . . 10.	333 2 17,65	−1,33	333 2 16,32	+1,67	333 2 17,99
Dreifaltigkeit .	355 11 53,75			+2,49	(355 11 56,24)
Steuerndieb . . 11.	23 17 46,45	+0,42	23 17 46,87	+3,01	23 17 49,88
4. Steuerndieb.			(γ=2° 48′ 31,02″)		
Willmer . . . 12.	203° 17′ 52,46″	+0,43″	203 17 52,89	−3,00″	203 17 49,89
Aegidius . . . 13.	237 43 6,18	+0,01	237 43 6,19	−1,35	237 43 4,84
Dreifaltigkeit .	250 39 21,26			−0,53	(250 39 20,73)
Hochschule . .	261 48 52,72			−0,43	(261 48 52,29)
Burg . . . . 14.	281 52 20,18	−1,09	281 52 19,09	+0,76	281 52 19,85
Schanze . . . 15.	312 35 37,30	+0,66	312 35 37,96	+1,73	312 35 39,69
5. Schanze.			(γ=2° 50′ 49,06″)		
Steuerndieb . . 16.	132° 35′ 41,56″	−0,13″	132 35 41,43	−1,74″	132 35 39,69
Dreifaltigkeit .	170 24 24,64			−2,28	(170 24 22,36)
Aegidius . . . 17.	184 40 41,56	−0,10	184 40 41,46	−3,11	184 40 38,35
Burg . . . . 18.	240 44 48,85	+0,23	240 44 49,08	−0,93	240 44 48,10
6. Burg.			(γ=2° 52′ 42,26″)		
Schanze . . . 19.	60° 44′ 46,95″	+0,16″	60 44 47,11	+0,99″	60 44 48,10
Steuerndieb . . 20.	101 52 19,81	+0,81	101 52 20,62	−0,77	101 52 19,85
Dreifaltigkeit .	121 19 31,32			−1,31	(121 19 30,01)
Aegidius . . . 21.	144 54 55,45	−1,15	144 54 54,30	−2,15	144 54 52,15
Hochschule . .	151 38 51,38			−1,21	(151 38 50,17)
Wasserturm . . 22.	178 19 35,61	+0,17	179 19 35,78	−2,57	179 19 33,21

Die bei den ausgeglichenen T zugefügten Werte γ sind die Meridianconvergenzen. (Vgl. den späteren § 86.)

Eine Bemerkung mag nur noch denjenigen Strahlen gelten, welche in der Netzausgleichung bis jetzt noch gar nicht vorgekommen sind, nämlich betreffend die Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit, diese Strahlen sind von § 60. S. 186 einfach

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

mit herübergenommen und auf den bereits ausgeglichenen Stationen Aegidius, Wasserturm u. s. w. werden diese neuen Strahlen ganz einfach *mit* den alten Strahlen von selbst orientiert.

Auf den Stationen Hochschule und Dreifaltigkeit selbst ist dieses noch nicht möglich, und könnte nur etwa näherungsweise geschehen, wovon aber erst im nächsten Kapitel bei der Doppelpunkteinschaltung Hochschule—Dreifaltigkeit gehandelt werden wird.

Nun enthalten die ausgeglichenen Seiten und Richtungen der Tabellen von S. 203 und S. 204 alles was zur Coordinatenrechnung erforderlich ist; man rechnet mit den *ebenen* Seiten s und den *ebenen* Richtungswinkeln t wie immer in der Ebene:

$$y_2 = y_1 + s_1 \sin t_1 \qquad x_2 = x_1 + s_1 \cos t_1 \quad \text{u. s. w.}$$

Folgendes sind die Ergebnisse dieser Coordinatenrechnung:

Coordinaten im conformen System der Landesaufnahme.

1. Aegidius	$y = -244\,656{,}090^m$	$x = -30\,624{,}971^m$	(14)
2. Wasserturm	$-246\,956{,}479$	$-31\,285{,}875$	
3. Willmer	$-243\,280{,}909$	$-33\,328{,}385$	
4. Steuerndieb	$-241\,167{,}896$	$-28\,421{,}362$	
5. Burg	$-247\,076{,}504$	$-27\,179{,}218$	
6. Schanze	$-244\,244{,}387$	$-25\,592{,}941$	

§ 64. Abrisse und Coordinaten im Kataster-System mit dem Nullpunkt Celle.

Für die Kataster- und Stadt-Vermessung ist ein anderes Coordinatensystem vorgeschrieben, nach sog. Soldnerscher Art, und zwar mit dem Ursprungspunkt Celle, in welchem wir nun, ganz unabhängig von dem vorigen § 63. die ausgeglichenen Richtungen, Winkel und Seiten von § 61. in Abrissen und Coordinaten verwerten werden.

Die schon in (6) § 60. angegebenen Coordinaten unserer zwei Basispunkte sind:

Aegidius	$y_1 = -23271{,}813$	$x_1 = -28308{,}395$	(1)
Wasserturm	$y_2 = -25538{,}488$	$x_2 = -29071{,}474$	
	$y_1 - y_2 = +2266{,}675$	$x_2 - x_1 = +763{,}079$	

In rein *ebener* Rechnung (entsprechend t und s des vorigen § 63.) erhält man:

$$tang\, \alpha_0 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad s_0 = \frac{y_1 - y_2}{\sin \alpha_0} = \frac{x_1 - x_0}{\cos \alpha_0}$$

$$\alpha_0 = 71^\circ\, 23'\, 38{,}85'' \qquad log\, s_0 = 3.378\,7019 \tag{2}$$

Man könnte nun vielleicht wohl, wenn man die Sache praktisch betrachtet, das ganze Netz (Fig. 1. § 60. S. 185 in dieser Weise schlechthin als *eben* nach Coordinaten berechnen, allein die bekannten sphärischen Reduktionen für Soldnersche Coordinaten, (welche in unserem III. Bande, „Handb. d. Verm.“, 3. Aufl., § 46. — § 48. angegeben sind) bringen in unserem Falle doch noch etwa 0,5″ in den Richtungen, und nachdem wir alles auf 0,01″ ausgeglichen haben, wollen wir nun doch nicht

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schon wieder 0,5″ vernachlässigen, zumal ja der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung nur ± 1,0″ nach der Netzausgleichung ist.

Oder in den Coordinaten würden wir in rein ebener Richtung schon Widersprüche in den Centimetern erhalten, während es bei einer Stadtvermessung angenehm ist, alles Grundlegende bis auf 1^{mm} formell, jedenfalls aber auf 1^{cm} scharf durchzurechnen. Kurz aus diesen Gründen haben wir uns mit den Ergebnissen (1) und (2) nicht begnügt, sondern haben die berührten Soldnerschen kleinen Korrektionsglieder, ohne dieselben im Einzelnen nachzuweisen, da sie ja als allgemein bekannt angenommen werden dürfen, mit in Rechnung gebracht und gefunden:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = +0{,}41'' \qquad \alpha_2 - \alpha_0 \pm 180° = +0{,}50'' \;,\; \log s - \log s_0 = -0{,}000\,0003 \quad (4)$$

also zu (2) hinzugefügt:

$$\alpha_1 = 71°\,23'\,39{,}26'' \;,\; \alpha_2 = 251°\,23'\,39{,}35'' \;,\; \log s = 3.378\,7016 \quad (5)$$

Das letzte $\log s$ stimmt überein mit dem $\log S$ des vorigen § 63. S. 202, die α_1 und α_2 entsprechen den früheren T_1 und T_2 von § 63., sie sind um etwa 2° 35′ kleiner als jene T, weil die α nur die Meridianconvergenz gegen Celle, dagegen die T die Meridianconvergenz gegen den 31^{ten} Längengrad (bei Berlin) enthalten.

Den soeben berechneten Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigung") $\alpha_2 = 251°\,23'\,39{,}35''$ findet man in dem Abrisse von S. 207 wieder als ersten Wert ausgeglichen α, und mit $v_1 = +0{,}02''$ aus der Netzausgleichung § 61. S. 196 bekommt man erstes beobachtetes $A = 251°\,23'\,39{,}33''$, woraus folgt, dass alle auf Aegidius beobachteten Richtungen von § 60. S. 186 nun um $251°\,23'\,39{,}33''$ verschoben werden müssen, weil Aegidius—Wasserturm früher den Wert $0°\,0'\,0{,}00''$ hatte.

Ebenso verfährt man auf Station Wasserturm mit dem Richtungswinkel Aegidius = $71°\,23'\,39{,}26''$ nach der soeben gemachten Rechnung (5).

Um dann auch die übrigen Sätze vollends zu orientieren, hat man Willmer—Wasserturm als Umkehrung von Wasserturm—Willmer zunächst = $330°\,27'\,44{,}48''$, was aber wegen der sphärischen Korrektionen in $330°\,27'\,44{,}19''$ übergeht.

Diese kleinen sphärischen Korrektionen haben wir nicht mehr im einzelnen nachgewiesen, sie entsprechen den $t - T$ in dem Landesaufnahme-Abriss von § 63. S. 204. In jenem conformen System waren die $t - T$ ebenso wie auch die $\log s - \log S$ viel glatter und übersichtlicher zu behandeln als in dem Soldnerschen Katastersystem, in welchem die kleinen Richtungs- und Entfernungs-Korrektionen bei der gewöhnlichen Art der Berechnung mit in den Coordinaten-Korrektionen stecken, und auch sonst nicht so bequem zu berechnen sind wie in einem conformen System.

Dieses nur nebenbei bemerkend geben wir im nachfolgenden die nach Soldnerscher Methode berechneten endgültigen Coordinaten:

Coordinaten im Kataster-System Celle.

1. Aegidius	$y = -23271{,}813^m$	$x = -28308{,}395^m$	
2. Wasserturm	$-25538{,}488$	$-29071{,}474$	
3. Willmer	$-21777{,}609$	$-30945{,}359$	(7)
4. Steuerndieb	$-19888{,}668$	$-25951{,}884$	
5. Schanze	$-23086{,}933$	$-23266{,}607$	
6. Burg	$-25842{,}799$	$-24977{,}399$	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Abriss im Kataster-System Celle.

	Beobachtet A	v	Ausgeglichen $\alpha = A + v$	$\log S$
1. Aegidius.				
Wasserturm . . 1.	251° 23′ 39,33″	+ 0,02″	251° 23′ 39,35″	3.378 7016
Hochschule . .	315 2 32,64			
Burg . . . . . 2.	322 20 14,15	+ 0,68	322 20 14,83	3.624 0521
Schanze . . . . 3.	2 6 0,69	− 0,63	2 6 0,07	3.702 8735
Dreifaltigkeit . .	35 3 47,73			
Steuerndieb . . 4.	55 8 28,85	− 0,55	55 8 28,30	3.615 2086
Willmer 5	150 27 44,00	+ 0,48	150 27 44,48	3.481 5665
2. Wasserturm.				
Burg . . . . . 6.	355° 44′ 55,72″	+ 0,48″	355° 44′ 56,20″	3.613 3487
Hochschule . .	20 36 49,99			
Aegidius . . . 7.	71 23 39,74	− 0,48	71 23 39,26	3.378 7016
Willmer . . . . 8.	116 29 5,98	0,00	116 29 5,98	3.623 4413
3. Willmer.				
Wasserturm . . 9.	296° 29′ 4,85″	+ 0,91″	296° 29′ 5,76″	3.623 4413
Aegidius . . . 10.	330 27 45,52	− 1,33	330 27 44,19	3.481 5665
Dreifaltigkeit . .	352 37 21,62			
Steuerndieb . . 11.	20 43 14,32	+ 0,42	20 43 14,74	3.727 4425
4. Steuerndieb.				
Willmer . . . . 12.	200° 43′ 14,83″	+ 0,43″	200° 43′ 15,26″	3.727 4425
Aegidius . . . 13.	235 8 28,55	+ 0,01	235 8 28,56	3.615 2086
Dreifaltigkeit . .	248 4 43,63			
Hochschule . .	259 14 15,09			
Burg . . . . . 14.	279 17 42,55	− 1,09	279 17 41,46	3.780 5583
Schanze . . . . 15.	310 0 59,67	+ 0,66	310 1 0,31	3.620 7673
5. Schanze.				
Steuerndieb . . 16.	130° 1′ 0,73″	− 0,13″	130° 1′ 0,60″	3.620 7673
Dreifaltigkeit . .	167 49 43,84			
Aegidius . . . 17.	182 6 0,73	− 0,10	182 6 0,66	3.702 8735
Burg . . . . . 18.	238 10 8,02	+ 0,23	238 10 8,24	3.511 0402
6. Burg.				
Schanze . . . . 19.	58° 10′ 7,89″	+ 0,16″	58° 10′ 8,03″	3.511 0402
Steuerndieb . . 20.	99 17 40,75	+ 0,81	99 17 41,58	3.780 5583
Dreifaltigkeit . .	118 44 52,26			
Aegidius . . . 21.	142 20 16,39	− 1,15	142 20 15,24	3.624 0521
Hochschule . .	149 4 12,32			
Wasserturm . . 22.	175 44 56,55	+ 0,17	175 44 56,73	3.613 3487

Die hier angegebenen $\log S$ sind dieselben wie in (12) § 63. S. 203.

§ 65. Schwerds Basis-Netz mit Winkelmessungen.

Nachdem wir die Dreiecksnetzausgleichung mit *Richtungs*messungen an den zwei Beispielen von § 59. und § 61. kennen gelernt haben, wollen wir auch eine Netz-Ausgleichung mit *Winkel*messungen behandeln.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ein gutes Beispiel hiezu giebt uns das Basisnetz von *Schwerd*, in welchem einzelne Winkel mit verschiedenen Gewichten gemessen sind.

Professor *Schwerd* am Lyzeum in Speyer hat im Jahr 1820 (als Konkurrenz- und Trutz-Arbeit gegen die amtliche Basismessung Speyer-Oggersheim) mit seinen Lyzeumsschülern eine kleine 860 Meter lange Basis gemessen, und dieselbe durch ein trigonometrisches Netz mit der Linie Speyer-Oggersheim verbunden.

Schwerd hat seine Messungen veröffentlicht in der Schrift: „Die kleine Speyrer Basis, oder Beweis, dass man mit einem geringen Aufwand an Zeit, Mühe und Kosten durch eine kleine genau gemessene Linie die Grundlage einer grossen Triangulation bestimmen kann, Speyer, gedruckt bei Jakob Christian Kolb, 1822.“ Da aber der Verfasser seine trigonometrischen Messungen nur nach Gutdünken („auf die natürlichste Weise“ S. 64) ausgeglichen hat, schien uns eine Neuausgleichung von Schwerds Messungen umsomehr am Platz, als dadurch die treffliche Gewichtsunterscheidung, welche Schwerd in richtiger Erkenntnis der verschiedenen Bedeutung der mehr oder weniger spitzen Winkel traf, voll ausgenützt werden kann.

Der Teil des Schwerdschen Netzes, welchen wir behandeln wollen, ist in dem Viereck Fig. 1. gezeichnet. Das punktierte Dreieck Mannheim-Speyer-Oggersheim gehört nicht zu unserer Ausgleichung, sondern dient zum Anschluss an die badische Triangulierung.

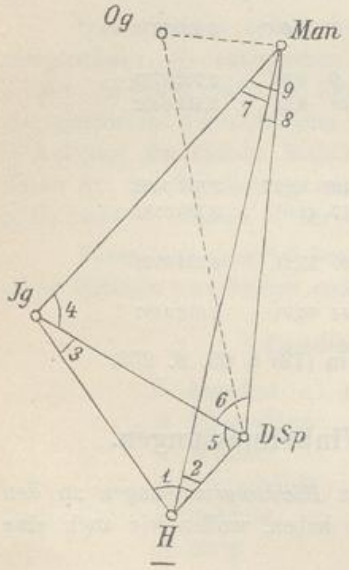
Als Basis nehmen wir die aus der eigentlichen, nur 860^m langen gemessenen Basis trigonometrisch abgeleitete Linie (Schwerd S. 69):

$$D\,Sp - H = 4962{,}8282^m \qquad (1)$$

($D\,Sp$ = Dom in Speyer, H = Heiligenstein.)

Die Originalwinkelmessungen, welche für unser Netz Fig. 1. in Betracht kommen, sind von Schwerd auf S. 48—50 seines Buches mitgeteilt, und auf S. 56 und 57 daselbst sind die zugehörigen Zentrierungsreduktionen, sowie die Drittel von sphärischen Excessen angegeben. Indem wir die Zentrierungsreduktionen an den gemessenen Winkeln anbringen, die von Schwerd mit hereingezogenen sphärischen Excesse aber hier ausser Betracht lassen, bekommen wir folgende Tabelle der gemessenen Winkel:

Fig. 1.
Schwerd s Basisnetz.
Maassstab 1 : 400 000.



Schwerd Seite	Nr.	Winkel	Gewicht p	$\frac{1}{p}$
48 u. 56	58	(1) = 81° 21′ 43,36″	70	0,0143
48 u. 56	60	(2) = 31 37 39,73	7	0,1429
49 u. 56	64	(3) = 25 16 28,85	101	0,0099
49 u. 56	65	(4) = 76 33 44,65	47	0,0213
48 u. 55	61	(5) = 73 21 46,35	85	0,0118
49 u. 55	62	(6) = 67 4 27,96	57	0,0175
50 u. 57	68	(7) = 28 25 42,53	10	0,1000
50 u. 57	67	(8) = 7 56 6,92	28	0,0357
50 u. 57	66	(9) = 36 21 49,55	30	0,0333
		Summa $[p]$ = 435		0,3867

(2)

Als Gewichte p sind hier die von Schwerd angegebenen Repetitionszahlen genommen.

Wie man sieht, sind die Gewichte p sehr ungleich. Schwerd hat mit Recht die spitzen Winkel, welche den Grundlinien gegenüber liegen, verstärkt gemessen.

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen findet man nach Anleitung von § 58. Es ist nämlich die Anzahl der gemessenen Winkel $W = 9$, die Anzahl der Punkte $p = 4$, die Anzahl der Verbindungslinien $l = 6$, folglich hat man nach (11) § 58. S. 173:

$$W - 2p + 4 = 5 \text{ Bedingungsgleichungen}$$

und insbesondere:

$$\left.\begin{array}{l} l - 2p + 3 = 1 \text{ Seitengleichung} \\ l - p + 1 = 3 \text{ Dreiecksgleichungen} \\ \text{und für den Punkt } M \text{ 1 Horizontgleichung} \end{array}\right\} \quad (3)$$

also $1 + 3 + 1 = 5$ Gleichungen im Ganzen wie oben.

Die Seitengleichung bilden wir für den Centralpunkt $D\,Sp$, d. h. wir drücken aus, dass die Seite $D\,Sp. — Man.$ aus der Basis $D\,Sp. — H.$ auf beiden möglichen Wegen gleich erhalten werde. Dieses giebt:

$$\text{Es soll sein } \frac{sin\,(1)\,sin\,(4)\,sin\,(8)}{sin\,(3)\,sin\,(9)\,sin\,(2)} = 1 \quad (4\,a)$$

Die 3 Dreiecksschlüsse sind

$$\text{Es soll sein } (1) + (3) + (5) \quad - (180° + \varepsilon_b) = 0 \quad (4\,b)$$
$$\text{„ „ „ } (4) + (6) + (9) \quad - (180 + \varepsilon_c) = 0 \quad (4\,c)$$
$$\text{„ „ „ } (2) + (5) + (6) + (8) - (180 + \varepsilon_d) = 0 \quad (4\,d)$$

und die Horizontgleichung auf Mannheim:

$$\text{Es soll sein } (7) + (8) - (9) = 0 \quad (4\,e)$$

Für die sphärischen Excesse berechnet man auf Grund der Basis $D\,H = 4962{,}8282^m$ nach (1), mit den gemessenen Winkeln, die sämtlichen Dreiecke vorläufig, die mittlere geographische Breite ist etwa 49° 30', also $log\,r = 6.80487$, damit findet man nach der Formel $\varepsilon = \frac{\varrho}{r^2}\triangle$:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für das Dreieck } D\,H\,J & \varepsilon_b = 0{,}138'' \\ \text{„ „ „ } D\,J\,M & \varepsilon_c = 0{,}505 \\ \text{„ „ „ } D\,H\,M & \varepsilon_d = 0{,}151 \end{array}\right\} \quad (5)$$

Diese Excesse braucht man jedenfalls zum Aufstellen der Dreiecksgleichungen, man kann sie aber auch zur Bildung der Seitengleichung benützen.

Wir bilden zuerst die Dreieckssummenproben:

(1) =	81°	21′	43,36″	(4) =	76°	33′	44,65″	(2) =	31°	37′	39,73″
(3) =	25	16	28,85	(6) =	67	4	27,96	(5) =	73	21	46,35
(5) =	73	21	46,35	(9) =	36	21	49,55	(6) =	67	4	27,96
								(8) =	7	56	6,92
	179	59	58,560		180	0	2,160		180	0	0,960
soll	180	0	0,138	soll	180	0	0,505	soll	180	0	0,151
	$w_b = -1{,}578$				$w_c = +1{,}655$				$w_d = +0{,}809$		

(6)

Die Bedingungsgleichungen werden nach Anleitung von § 57.—58. gebildet, dieselben sind:

a) Seitengleichung:

$$+0{,}320\,v_1 + 0{,}503\,v_4 + 15{,}105\,v_8 - 4{,}459\,v_3 - 2{,}860\,v_9 - 3{,}419\,v_2 + 4{,}715 = 0 \quad (7)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es ist dabei in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale gerechnet.

Die drei Dreiecksgleichungen werden nach (6):

$$\left.\begin{array}{ll} b) & v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0{,}809'' = 0 \\ c) & v_1 + v_3 + v_5 - 1{,}578'' = 0 \\ d) & v_4 + v_6 + v_9 + 1{,}655'' = 0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Endlich die Horizontgleichung:

$$e) \qquad v_7 + v_8 - v_9 - 0{,}100 = 0 \quad (9)$$

Die Winkelverbesserungen sind hier mit v bezeichnet, wie im allgemeinen die Verbesserungen. In § 57. hatten wir unterschieden *Winkel*verbesserungen δ und *Richtungs*verbesserungen v; es wird kaum nötig sein, zu erklären, dass diese Unterscheidung hier nicht mehr gemacht ist, weil es sich in diesem § 65. überhaupt nur um einerlei Art von Verbesserungen handelt, für welche das allgemeine Zeichen v genommen ist.

Man schreibt die Coefficienten der Bedingungsgleichungen (7) , (8) , (9) nebst den Gewichten in eine Tabelle:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	w
p	70	7	101	47	85	57	10	28	30	
$\frac{1}{p}$	0,0143	0,1429	0,0099	0,0213	0,0118	0,0175	0,1000	0,0357	0,0333	
1. a	+0,320	−3,419	−4,459	+0,503	. .	. .	. .	+15,105	−2,860	+4,715
2. b	. .	+1	. .	. .	+1	+1	. .	+1	. .	+0,809
3. c	+1	. .	+1	. .	+1	. .	. .	. .	. .	−1,578
4. d	. .	. .	. .	+1	. .	+1	. .	. .	+1	+1,655
5. e	. .	. .	. .	. .	. .	. .	+1	+1	−1	−0,100

(10)

Wenn man nun die Summen $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$ $\left[\frac{a\,b}{p}\right]$ u. s. w. bildet, so bemerkt man, dass es von Schwerd mit Einsicht so geordnet wurde, dass zu den grossen Coefficienten auch die grösseren Gewichte kommen. Die Ausrechnung giebt die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise (nach (2) und (3) unten auf S. 80):

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} +\underline{10{,}2941\,k_1} & +0{,}0511\,k_2 & -0{,}0396\,k_3 & -0{,}0846\,k_4 & +0{,}6348\,k_5 & +4{,}7150 = 0 \\ & +\underline{0{,}2079\,k_2} & +0{,}0118\,k_3 & +0{,}0175\,k_4 & +0{,}0357\,k_5 & +0{,}8090 = 0 \\ & & +\underline{0{,}0360\,k_3} & . \quad . & . \quad . & -1{,}5780 = 0 \\ & & & +\underline{0{,}0721\,k_4} & -0{,}0333\,k_5 & +1{,}6550 = 0 \\ & & & & +\underline{0{,}1690\,k_5} & -0{,}1000 = 0 \end{array}\right\} \quad (11)$$

Die Auflösung dieser 5 Gleichungen giebt:

$$k_1 = -0{,}3436\ ,\ k_2 = -4{,}0814\ ,\ k_3 = +44{,}7898\ ,\ k_4 = -23{,}2072\ ,\ k_5 = -1{,}8279 \quad (12)$$

Bei der Berechnung der Verbesserungen v folgt man, wie immer, der Tabelle (10) der Bedingungsgleichungen nach Vertikalreihen, z. B.:

$$v_1 = +\frac{0{,}320}{70}k_1 + \frac{1}{70}k_3 = +0{,}638''$$

$$v_2 = -\frac{3{,}419}{7}k_1 + \frac{1}{7}k_2 = -0{,}415''$$

. . . . . .

Die Tabelle aller v nebst ihrer Verwendung zur Verbesserung der gemessenen Winkel zeigt folgendes:

Gemessen	v	Verbessert
(1) = 81° 21′ 43,360″	+ 0,638″	[1] = 81° 21′ 43,998″
(2) = 31 37 39,730	— 0,415	[2] = 31 37 39,315
(3) = 25 16 28,850	+ 0,459	[3] = 25 16 29,309
(4) = 76 33 44,650	— 0,497	[4] = 76 33 44,153
(5) = 73 21 46,350	+ 0,479	[5] = 73 21 46,829
(6) = 67 4 27,960	— 0,479	[6] = 67 4 27,481
(7) = 28 25 42,530	— 0,183	[7] = 28 25 42,347
(8) = 7 56 6,920	— 0,396	[8] = 7 56 6,524
(9) = 36 21 49,550	— 0,680	[9] = 36 21 48,870

(13)

Nach Vollendung der Ausgleichung überzeugt man sich zuerst, ob die Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Dieses ist der Fall; und man kann nun alle Dreiecksseiten eindeutig berechnen. Die Ergebnisse für 4 Seiten sind:

$DH = 4\,962{,}8282^m$	(Basis)	$\log DH = 3.695\,7292{\cdot}3$
$DM = 18\,851{,}510$	$\pm 0{,}12^m$	$\log DM = 4.275\,3461{\cdot}4$
$HM = 22\,896{,}729$		$\log HM = 4.359\,7734{\cdot}4$
$JM = 17\,851{,}153$	$\pm 0{,}11^m$	$\log JM = 4.251\,6662{\cdot}4$

(14)

(Die bei zwei Seiten angegebenen mittleren Fehler $\pm 0{,}12^m$ und $\pm 0{,}11^m$ sind aus späteren Berechnungen hergesetzt.)

Zu Genauigkeitsberechnungen übergehend, bilden wir zuerst die Summe $[p\,v\,v]$ unmittelbar aus den einzelnen v und p, und dann zur Kontrolle nach der Formel $[p\,v\,v] = -[w\,k]$ wie aus der Ausrechnung im einzelnen hervorgeht:

	v	v^2	p	$p\,v^2$
1)	+ 0,638	0,4070	70	28,49
2)	— 0,415	0,1722	7	1,21
3)	+ 0,459	0,2107	101	21,28
4)	— 0,497	0,2470	47	11,61
5)	+ 0,479	0,2294	85	19,50
6)	— 0,479	0,2294	57	13,08
7)	— 0,183	0,0335	10	0,34
8)	— 0,396	0,1568	28	4,39
9)	— 0,680	0,4624	30	13,87
			435	113,77
				$= [p\,v\,v]$

	w	k	$-w\,k$
1)	+ 4,715	— 0,3436	+ 1,62
2)	+ 0,809	— 4,0814	+ 3,30
3)	— 1,578	+ 44,7898	+ 70,68
4)	+ 1,655	— 23,2072	+ 38,41
5)	— 0,100	— 1.8279	— 0,18
			113,83
			$= -[w\,k]$

Man hat in hinreichender Übereinstimmung $[p\,v\,v] = -[w\,k] = 113{,}8$.

Der mittlere Fehler der Gewichtseinheit wird hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{113{,}8}{5}} = \pm 4{,}77'' \qquad (15)$$

Es soll noch das Gewicht und der mittlere Fehler der Seite DM nach der Ausgleichung bestimmt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Seite $D\,M$ wird aus $D\,H$ am kürzesten abgeleitet durch die Gleichung:

$$D\,M = \frac{D\,H}{sin\,[8]}\,sin\,[2] \tag{16}$$

Es ist, wie immer in solchen Fällen, bequemer, zunächst die Funktion zu logarithmieren, d. h. aus (16) zu bilden mit Weglassung des konstanten $D\,H$:

$$F = log\,sin\,[2] - log\,sin\,[8] \tag{17}$$

Die Rechnung geht nun denselben Gang wie in § 62. S. 199. Es wird:

$$f_2 = +3{,}419 \qquad f_8 = -15{,}105 \tag{18}$$

alle anderen f sind gleich Null. Dann berechnet man:

$$\left[\frac{af}{p}\right] = -9{,}82\ ,\ \left[\frac{bf}{p}\right] = -0{,}05\ ,\ \left[\frac{cf}{p}\right] = 0{,}00\ ,\ \left[\frac{df}{p}\right] = 0{,}00\ ,\ \left[\frac{ef}{p}\right] = -0{,}54$$

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = +9{,}82$$

Diese Glieder setzt man an Stelle der Schlussglieder von (11), eliminiert durch, und findet:

$$\left[\frac{ff}{p}.5\right] = 0{,}32 = \frac{1}{P} \tag{19}$$

daraus den mittleren Funktionsfehler:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 4{,}77\sqrt{0{,}31} = \pm 2{,}66 \text{ Einheiten der 6ten Logarithmen-Stelle,}$$

d. h. $$d\,log\,s = \pm 0.0000026{\cdot}6 = \frac{\mu}{s}\,d\,s \quad , \quad s = 18852^m$$

$$d\,s = \pm 0{,}115^m$$

Also im ganzen hat man die Entfernung:

$$D\,M = 18\,851{,}510^m \pm 0{,}115^m \text{ (Triangulierungsfehler)} \tag{20}$$

wie auch schon bei (14) angegeben ist.

Dabei ist die Berechnungsbasis $D\,H = 4962{,}8282^m$ als fehlerfrei angenommen. Wir wollen nun aber auch noch den mittleren Fehler der Basis selbst berücksichtigen, und seine Fortpflanzung auf die Linie $D\,M$ berechnen.

Der mittlere Fehler der Basis $D\,H$ wurde auf Grund verschiedener Angaben von Schwerd zu $\pm 9{,}7^{mm}$ geschätzt.

Dieser Fehler vergrössert sich durch trigonometrische Übertragung auf die 18852^m lange Linie $D\,M$, so dass er giebt:

$$\frac{18852}{4963}\,9{,}7 = \pm 36{,}8^{mm} \tag{21}$$

und dazu tritt der Triangulierungsfehler der Linie $D\,M$, welcher nach (20) den Wert $\pm 115^{mm}$ hat, es ist also der mittlere Gesamtfehler der Linie $D\,M$:

$$= \sqrt{36{,}8^2 + 115^2} = \pm 124^{mm}$$

Statt (20) werden wir also jetzt schreiben:

$$D\,M = 18\,851{,}510^m \pm 0{,}124^m \text{ (Gesamtfehler).} \tag{22}$$

Mittlerer Winkel-Fehler für mittleres Gewicht.

In (15) haben wir zwar den mittleren Fehler der Gewichtseinheit $m = \pm 4{,}77''$ bestimmt, und dieser Wert bildet die Grundlage aller weiteren strengen Genauigkeits-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

berechnungen, wie an dem Beispiel der Fehlerberechnung (16)—(20) zu sehen ist. Allein jener Gewichtseinheitsfehler m befriedigt nicht den oft auftretenden Wunsch, für die auf der Station im Mittel erreichte Winkelgenauigkeit ein anschauliches Maass zu besitzen. Hiezu dient der mittlere Fehler für mittleres Gewicht, wobei aber das mittlere Gewicht nicht etwa schlechthin als Durchschnittswert $\frac{[p]}{n}$ der 9 Einzelgewichte genommen werden darf, sondern der Definition der Gewichte als Reciproke der mittleren Fehler-Quadrate und dem Princip des mittleren Fehlers selbst entsprechend so zu berechnen ist:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right] \tag{23}$$

wo n die Zahl der Einzelgewichte ist. In unserem Falle sind die $\frac{1}{p}$ in der Tabelle (2) angegeben mit der Summe 0,3867, es ist also

$$\frac{1}{g} = \frac{0{,}3867}{9} = 0{,}04297 \quad , \quad g = 23{,}37 \tag{24}$$

und der mittlere Fehler für dieses mittlere Gewicht:

$$\mu = m\sqrt{\frac{1}{g}} = 4{,}77\ \sqrt{0{,}04297} = \pm\, 0{,}989'' \tag{25}$$

Wenn auf jeder Station nicht mehr als die zur Stationsfestlegung selbst erforderliche Zahl von Winkeln gemessen wäre, so *würde* dieses μ auch den mittleren Fehler von mittlerem Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels vorstellen. Es ist aber in unserem Falle auf einer Station, nämlich Mannheim, ein Winkel überzählig (vgl. Horizontgleichung (9)) und deswegen hat unser μ in (25) eine etwas andere Bedeutung, welche jetzt nicht weiter erörtert werden soll. Überhaupt haben wir (25) nur als formelles Rechenbeispiel hier vorgeführt, denn wenn die Winkel absichtlich sehr ungleich gewichtig sind, hat die Rechnung (25) nicht den inneren Sinn, der ihr bei glatten durchlaufenden Ketten oder gleichförmig ausgebreiteten Netzen zukommt.

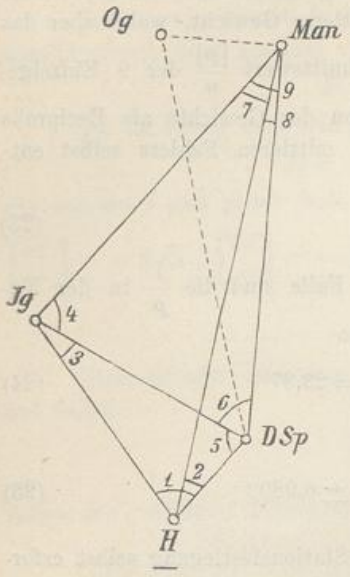
§ 66. Triangulierungsausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen. Schwerds Basis-Netz.

Wenn schon die Winkelausgleichung des vorigen § 65. nicht ein Beispiel für die laufende Praxis war, so ist das noch weniger der Fall bei einer Dreiecksnetzausgleichung mit Winkeln nach *vermittelnden* Beobachtungen, die wir noch anfügen wollen. Es ist aber wohl nützlich einzusehen, dass man eine derartige Ausgleichung nicht notwendig nach Korrelaten machen muss, sondern dass man auch andere Formen dafür zur Verfügung hat.

Schon in der allgemeinen Theorie § 37. wurde angegeben, dass man Messungen, welche sich zunächst in der Form von bedingten Beobachtungen darbieten, auch auf vermittelnde Beobachtungen reduzieren kann. Ob dieses nützlich ist, kommt auf den einzelnen Fall an; bei unserem Schwerd'schen Basisnetz kann man wohl so verfahren, und zwar bekommt man dann nur 4 Normalgleichungen aufzulösen, gegen 5 bei der Korrelaten-Methode. Die Reduktion auf vermittelnde Beobachtungen wird aber auch noch andere Vorteile, bei Genauigkeitsuntersuchungen, bieten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 1.
Schwerd's Basisnetz.
Maassstab 1 : 400 000.



Nach dem vorigen § 65. (7) bis (10) S. 209 bis 210 bestehen für das Schwerd'sche Netz Fig. 1. folgende 5 unabhängige Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} +0{,}320\,v_1 - 3{,}419\,v_2 - 4{,}459\,v_3 + 0{,}503\,v_4 \\ \quad + 15{,}105\,v_8 - 2{,}860\,v_9 + 4{,}715 = 0 \\ v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0{,}809 = 0 \\ v_1 + v_3 + v_5 - 1{,}578 = 0 \\ v_4 + v_6 + v_9 + 1{,}655 = 0 \\ v_7 + v_8 - v_9 - 0{,}100 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Von den 9 gemessenen Winkeln wählen wir die 4 Winkel (1) (2) (3) und (8) als unabhängige Unbekannte aus, oder, sofort zu den Verbesserungen übergehend, nehmen wir die Verbesserungen v_1 , v_2 v_3 , v_8 als unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es entsteht die Aufgabe, mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (1) alle anderen v in diesen v_1 , v_2 , v_3 , v_8 auszudrücken.

Nach gewöhnlichen algebraischen Methoden erhalten wir hiefür:

$$\left.\begin{array}{l} v_5 = -v_1 - v_3 + 1{,}578 \\ v_6 = +v_1 - v_2 + v_3 - v_8 - 2{,}387 \\ v_9 = -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 4{,}641\,v_8 + 1{,}511 \\ v_4 = -0{,}946\,v_1 + 1{,}867\,v_2 + 0{,}475\,v_3 - 3{,}641\,v_8 - 0{,}779 \\ v_7 = -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 3{,}641\,v_8 + 1{,}611 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dazu kommen noch die Fehlergleichungen für die unabhängigen v selbst, nämlich:

$$v_1 = v_1 \qquad v_2 = v_2 \qquad v_3 = v_3 \qquad v_8 = v_8 \quad (3)$$

Die Gewichte p sind schon bei (2) S. 208 angegeben, es ist uns aber dieses Mal bequemer, die Gewichtseinheit 100fach kleiner zu nehmen, und damit bekommen wir folgende Tabelle der Coefficienten der Fehlergleichungen (2) und (3) und der Gewichte p, nebst $\sqrt{p}$:

Fehlergleichungen:

						p	$\sqrt{p}$
$v_1 =$	$+1{,}000\,v_1$	. .	. .	. .	. .	0,70	0,837
$v_2 =$	. .	$+1{,}000\,v_2$	. .	. .	. .	0,07	0,265
$v_3 =$	. .	. .	$+1{,}000\,v_3$	. .	. .	1,01	1,005
$v_8 =$	. .	. .	. .	$+1{,}000\,v_8$	. .	0,28	0,529
$v_5 =$	$-1{,}000\,v_1$	. .	$-1{,}000\,v_3$	. .	$+1{,}578$	0,85	0,922
$v_6 =$	$+1{,}000\,v_1$	$-1{,}000\,v_2$	$+1{,}000\,v_3$	$-1{,}000\,v_8$	$-2{,}387$	0,57	0,755
$v_4 =$	$-0{,}946\,v_1$	$+1{,}867\,v_2$	$+0{,}475\,v_3$	$-3{,}641\,v_8$	$-0{,}779$	0,47	0,686
$v_7 =$	$-0{,}054\,v_1$	$-0{,}867\,v_2$	$-1{,}475\,v_3$	$+3{,}641\,v_8$	$+1{,}611$	0,10	0,316
$v_9 =$	$-0{,}054\,v_1$	$-0{,}867\,v_2$	$-1{,}475\,v_3$	$+4{,}641\,v_8$	$+1{,}511$	0,30	0,548

(4)

Um die Gewichte ein für alle mal zu berücksichtigen, multiplizieren wir die

Coefficienten und Absolutglieder der Fehlergleichungen bzw. mit $\sqrt{p}$ und bekommen damit folgende neue Tabelle:

Gleichgewichtige Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrrrr}
\sqrt{p_1}\,v_1 = & +0{,}84\,v_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sqrt{p_2}\,v_2 = & \ldots & +0{,}26\,v_2 & \ldots & \ldots & \ldots \\
\sqrt{p_3}\,v_3 = & \ldots & \ldots & +1{,}00\,v_3 & \ldots & \ldots \\
\sqrt{p_8}\,v_8 = & \ldots & \ldots & \ldots & +0{,}53\,v_8 & \ldots \\
\sqrt{p_5}\,v_5 = & -0{,}92\,v_1 & \ldots & -0{,}92\,v_3 & \ldots & +1{,}46 \\
\sqrt{p_6}\,v_6 = & +0{,}75\,v_1 & -0{,}75\,v_2 & +0{,}75\,v_3 & -0{,}75\,v_8 & -1{,}80 \\
\sqrt{p_4}\,v_4 = & -0{,}65\,v_1 & +1{,}28\,v_2 & +0{,}33\,v_3 & -2{,}49\,v_8 & -0{,}53 \\
\sqrt{p_7}\,v_7 = & -0{,}02\,v_1 & -0{,}27\,v_2 & +0{,}46\,v_3 & +1{,}15\,v_8 & +0{,}51 \\
\sqrt{p_9}\,v_9 = & -0{,}03\,v_1 & -0{,}48\,v_2 & -0{,}81\,v_3 & +2{,}55\,v_8 & +0{,}83
\end{array}\right\} \quad (5)$$

Die Abrundung auf 0,01 ist hinreichend zur Erlangung einer Winkelgenauigkeit von 0,01″.

Die hiezu gehörigen Normalgleichungen sind in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
\underline{+2{,}54\,v_1} & -1{,}37\,v_2 & +1{,}23\,v_3 & +0{,}96\,v_8 & -2{,}38 = 0 \\
 & \underline{+2{,}57\,v_2} & +0{,}37\,v_3 & -4{,}16\,v_8 & +0{,}14 = 0 \\
 & & \underline{+3{,}39\,v_3} & -3{,}98\,v_8 & -3{,}77 = 0 \\
 & & & \underline{+14{,}87\,v_8} & +5{,}37 = 0 \\
 & & & & \underline{+6{,}60}
\end{array}\right\} \quad (6)$$

Die Auflösung dieses Systems von 4 Gleichungen gab:

$$v_1 = +0{,}64'' \qquad v_2 = -0{,}41'' \qquad v_3 = +0{,}46'' \qquad v_4 = -0{,}40'' \quad (7)$$

Durch Einsetzen dieser 4 ersten v in die Fehlergleichungen (4) bekommt man auch alle anderen v, und zwar überall auf etwa 0,01″ übereinstimmend mit den früheren Resultaten v von (13) § 65. S. 211, weshalb wir diese Zahlen nicht noch einmal hersetzen.

Die Elimination der Normalgleichungen (6) giebt auch ein Schlussglied:

$$[l\,l\,.\,4] = 1{,}14 \quad (8)$$

was ebenfalls mit 113,8 nach (15) § 65. S. 211 genügend stimmt, mit Rücksicht auf die nun 100 mal kleinere Gewichtseinheit.

Der mittlere Winkelfehler für die Gewichtseinheit ist jetzt:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{9-4}} = \sqrt{\frac{1{,}14}{5}} = \pm 0{,}477'' \quad (9)$$

Dieses entspricht dem früheren 4,77″ nach (15) § 65. S. 211 bei 100 fach grösserer Gewichtseinheit.

Wir wollen noch das Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen Winkel bestimmen, und zwar soll diese Funktion die Seite $J\,M$ sein. Die Seite $D\,H$ gilt als fehlerfreie Basis, die Funktion ist daher:

$$J\,M = D\,H\,\frac{sin\,[1]\,sin\,[6]}{sin\,[3]\,sin\,[9]} \quad (10)$$

oder logarithmisch:

$$log\,J\,M = log\,D\,H + log\,sin\,[1] + log\,sin\,[6] - log\,sin\,[3] - log\,sin\,[9] \quad (11)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das Differential ist:

$$d\,log\,J\,M = \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[1]\,d\,[1] + \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[6]\,d\,[6] - \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[3]\,d\,[3] - \frac{\mu}{\varrho}\,cotg\,[9]\,d\,[9]$$

$$d\,log\,J\,M = 0{,}32\,d\,[1] + 0{,}90\,d\,[6] - 4{,}46\,d\,[3] - 2{,}86\,d\,[9] \qquad (12)$$

Hier sind aber nur [1] und [3] unabhängige Unbekannte der Ausgleichung, und es dürfen daher nur $d\,[1]$ und $d\,[3]$, oder die Differentiale $d\,[2]$ und $d\,[8]$ der ebenfalls unabhängigen ausgeglichenen Unbekannten [2] und [8] in (12) vorkommen. Um daher $d\,[6]$ und $d\,[9]$ zu eliminieren, betrachten wir die Fehlergleichungen (2) und bilden daraus:

$$\left.\begin{aligned} d\,[9] &= -0{,}054\,d\,[1] - 0{,}867\,d\,[2] - 1{,}475\,d\,[3] + 4{,}641\,d\,[8] \\ d\,[6] &= d\,[1] - d\,[2] + d\,[3] - d\,[8] \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Diese Gleichungen sind deswegen richtig, weil in den Fehlergleichungen die Absolutglieder l verschwinden, wenn man von den ausgeglichenen Winkeln [1] [2] ... statt von den beobachteten Winkeln (1) (2) ... ausgeht, und entsprechend $d\,[1]$ $d\,[2]$ ... statt v_1 v_2 ... setzt. Die zweite Gleichung (13) kann man unmittelbar aus der Figur ablesen.

Setzt man also (13) in (12), so erhält man:

$$d\,log\,J\,M = +1{,}37\,d\,[1] + 1{,}58\,d\,[2] + 0{,}66\,d\,[3] - 14{,}17\,d\,[8] \qquad (14)$$

also:

$$f_8 = -14{,}17 \qquad f_3 = +0{,}66 \qquad f_1 = +1{,}37 \qquad f_2 = +1{,}58 \qquad (15)$$

Wir haben hier die Ordnung $f_8\ f_3\ f_1\ f_2$ angenommen, weil es uns für spätere Zwecke interessiert, v_2 als letzte Unbekannte zu haben, um das Gewicht von v_2 gelegentlich mit zu erhalten. Setzt man nun, um der Anweisung von § 29. S. 93 zu entsprechen, die bei (15) berechneten Werte f an Stelle der Absolutglieder der Normalgleichungen (6), und ordnet nach der Folge $f_8\ f_3\ f_1\ f_2$, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{14{,}87\,q_8} - 3{,}98\,q_3 + 0{,}96\,q_1 - 4{,}16\,q_2 + 14{,}17 &= 0 \\ +\underline{3{,}39\,q_3} + 1{,}23\,q_1 + 0{,}37\,q_2 - 0{,}66 &= 0 \\ +\underline{2{,}54\,q_1} - 1{,}37\,q_2 - 1{,}37 &= 0 \\ +\underline{2{,}57\,q_2} - 1{,}58 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Die Weiterelimination giebt:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{2{,}32\,q_3} + 1{,}49\,q_1 - 0{,}74\,q_2 + 3{,}12 &= 0 \\ +\underline{2{,}48\,q_1} - 1{,}10\,q_2 - 2{,}28 &= 0 \\ +\underline{1{,}41\,q_2} + 2{,}39 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} +\underline{1{,}52\,q_1} - 0{,}62\,q_2 - 4{,}28 &= 0 \\ +\underline{1{,}17\,q_2} + 3{,}38 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

$$+\underline{0{,}92\,q_2} - 1{,}61 = 0 \qquad (19)$$

Die hier geschriebenen q sind bloss Zeichen für die Ordnung der früheren v.

Nach Anleitung von (13) § 29. S. 94 hat man nun:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} &= \frac{14{,}17^2}{14{,}87} + \frac{3{,}12^2}{2{,}32} + \frac{4{,}28^2}{1{,}52} + \frac{1{,}61^2}{0{,}92} \\ &= 13{,}50 + 4{,}20 + 12{,}05 + 2{,}81 = 32{,}56 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 0{,}477\,\sqrt{32{,}56} = \pm 2{,}72 \qquad (21)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses ist der mittlere Fehler der Funktion (11) in Einheiten der 6ten Decimale, also:

$$log\, J\, M = 4.252\,6662{\cdot}4 \pm 27{\cdot}2 \tag{22}$$

$$J\, M = 17\,851{,}15^{m} \pm 0{,}11^{m} \tag{23}$$

Dieses ist schon in (14) § 65. beigefügt worden.

Gelegentlich hat man auch in dem letzten Coefficienten von q_2 in (19) das Gewicht der Winkelkorrektion v_2 erhalten, nämlich:

$$P_2 = 0{,}92 \tag{24}$$

(derselbe Coefficient 0,92 würde auch erhalten, wenn man die schon früher vorhandenen Gleichungen (6) so auflöste, dass v_2 die letzte Unbekannte wäre).

Hieraus findet man auch den mittleren Fehler des ausgeglichenen Winkels $(2) + v_2 = [2]$, nämlich:

$$M_2 = \frac{m}{\sqrt{0{,}92}} = \pm 0{,}50''$$

(die Eliminationen dieses § sind nur mit dem Rechenschieber gemacht, also überall nur auf etwa 2—3 Stellen genau).

§ 67. Stationsausgleichung mit Winkelmessungen.

Wenn Winkelmessungen so verteilt sind, dass auf einer Station mit s Strahlen mehr als $s - 1$ Winkel vorliegen, so kann man für jeden auf der Station überschüssigen Winkel eine Bedingung in die Netzausgleichung einfügen, wie in dem Beispiele des Schwerd schen Basisnetzes § 65. S. 209 mit der Station Mannheim gezeigt worden ist.

Wenn aber die Zahl der auf den Stationen überzähligen Winkel gross ist, so wird dieses Verfahren sehr umständlich, und ist deswegen im grossen nicht anzuwenden.

Man hat deswegen zu dem Verfahren gegriffen, zuerst die Stationen für sich auszugleichen.

Indem wir die Frage, wie dann die Stationsausgleichungen ins Netz übergehen sollen, vorerst bei Seite lassen, behandeln wir die Stationsausgleichung mit Winkeln jetzt als selbständige vorläufige Aufgabe.

I. Summenprobe im Horizont.

Ein einfacher, in früherer Zeit, als man Repetitionswinkel mass, oft vorgekommener Fall liegt vor, wenn mehrere Winkel, welche den ganzen Horizont von 360° füllen, einzeln gemessen werden und dann auf die Horizontprobe abgestimmt werden müssen. Z. B. in Fig. 3. §. 58. S. 174 hatten wir 2 solche Horizontproben, mit $(3) + (6) + (8) + (10) + (24) + (25)$ im Horizont Oggersheim und mit $+ (12) + (15) + (16) + (19) + (22)$ im Horizont Speyer. Auch die Probe auf Mannheim in Fig. 1. § 65. S. 208 erscheint von dieser Art, wenn man (7) , (8) und $360° - (9)$ als drei einzelne Winkelmessungen auffasst, welche den Horizont 360° füllen müssen.

Die Ausgleichung eines solchen Horizontes besteht bei gleichen Gewichten der einzelnen Winkel lediglich darin, dass man den Horizontwiderspruch zu gleichen Teilen auf alle beteiligten Winkel umlegt, und wenn die Winkel ungleiche Gewichte haben, so erfolgt die Verteilung des Widerspruches umgekehrt proportional den Gewichten.

Man kann dieses nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels *zweier* ungleich

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

genauer Messungen behandeln, ähnlich wie die schon früher in § 10. behandelte Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Wir nehmen hiezu folgendes an:

Gemessen:	A_1	A_2	A_3	...	A_n
mit den Gewichten:	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Es soll sein: $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n - 360° = 0$

Es ist $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n - 360° = w$ (1)

Der ausgeglichene Wert des ersten Winkels sei x; es liegen also zur Bestimmung von x zwei Beobachtungsresultate vor:

1) $x = A_1$ mit dem Gewicht p_1

2) $x = 360° - (A_2 + A_3 + \ldots A_n) = A_1 - w$ mit dem Gewicht p'

Das Gewicht p' wird bestimmt durch

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \ldots \frac{1}{p_n} = \left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_1} \tag{2}$$

Der ausgeglichene Wert x ist nach (4) § 8. S. 25:

$$x = \frac{A_1 p_1 + (A_1 - w) p'}{p_1 + p'} = A_1 - \frac{p'}{p_1 + p'} w$$

und mit Einführung des Wertes von p' aus (2):

$$x = A_1 - \frac{1}{p_1} \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{3}$$

Da eine ähnliche Formel für die übrigen Winkel gilt, so hat man das Resultat in Worten: der Widerspruch w wird auf die einzelnen Winkel umgekehrt proportional ihren Gewichten verteilt.

Die Verbesserung v_1 des ersten gemessenen Winkels beträgt:

$$v_1 = -\frac{1}{p_1} \frac{w}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{4}$$

und da eine ähnliche Formel auch für die anderen Winkel gilt, so hat man:

$$[p\,v\,v] = \frac{1}{p_1} \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2} + \frac{1}{p_2} \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]^2} + \ldots = \frac{w^2}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{5}$$

Der mittlere Fehler m einer Beobachtung vom Gewicht 1 ist:

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{2-1}} \quad \text{also} \quad m = \frac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{6}$$

Der mittlere Fehler M_1 des ersten ausgeglichenen Winkels x wird erhalten, indem man m mit der Quadratwurzel der Gewichtssumme $p_1 + p'$ dividiert, die Ausführung giebt:

$$M_1 = w \frac{\sqrt{\frac{1}{p_1}\left(\left[\frac{1}{p}\right] - \frac{1}{p_1}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{7}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn alle Gewichte $p_1 = p_2 = \ldots p_n = 1$ werden, so werden die Formeln einfacher, nämlich:

$$x = A_1 - \frac{w}{n} \tag{8}$$

$$m = \frac{w}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

$$M_1 = w\frac{\sqrt{n-1}}{n} = \frac{w}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n-1}{n}} \tag{10}$$

Aus (10) und (9) folgt, dass die Genauigkeit eines Winkels *nach* der Ausgleichung im Vergleich mit der Genauigkeit *vor* der Ausgleichung gewachsen ist im Verhältnis $\sqrt{n} : \sqrt{n-1}$.

Der Genauigkeitsgewinn für einen Winkel ist also verhältnismässig klein, wenn viele Winkel im Horizont gemessen sind.

II. Horizontabschluss nach vermittelnden Beobachtungen.

Wir behandeln mit Fig. 1. die Messung von 6 einzelnen Winkeln zwischen 4 Strahlen, d. h. Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen, und gleichen nach vermittelnden Beobachtungen aus. Die 6 Messungen sollen sein:

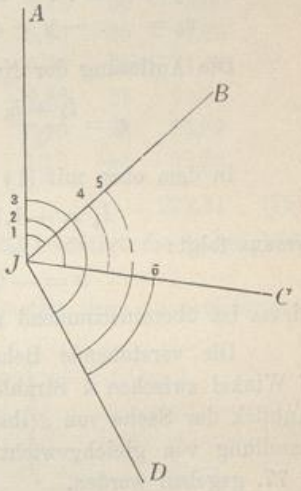
$$\left.\begin{array}{llll} 1. = 48^\circ\,17'\;\;1{,}4'' & & 4. = 48^\circ\,35'\;14{,}3'' \\ 2. = 96\;\;52\;\;16{,}8 & & 5. = 104\;\;37\;\;7{,}8 \\ 3. = 152\;\;54\;\;6{,}8 & & 6. = 56\;\;1\;\;48{,}9 \end{array}\right\} \tag{11}$$

Zur gegenseitigen Festlegung der 4 Strahlen $ABCD$ sind 3 Winkel nötig, wir führen deshalb 3 Winkel als unabhängige Unbekannte ein, wir nehmen:

Unbekannte: AJB , AJC , AJD

Als erste Näherungswerte der Unbekannten nehmen wir die 3 ersten Messungen selbst.

Fig. 1.



Näherungswerte:		Verbesserungen:	
$(AJB) =$	$48^\circ\,17'\;\;1{,}4''$	x	(12)
$(AJC) =$	$96\;\;52\;\;16{,}8$	y	
$(AJD) =$	$152\;\;54\;\;6{,}8$	z	

Ferner bezeichnen wir, wie sonst, die 6 Verbesserungen der Beobachtungen mit $v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5\ v_6$, und nun sind die 3 ersten Fehlergleichungen offenbar sehr einfach:

$$v_1 = x \qquad v_2 = y \qquad v_3 = z \tag{13}$$

weil nämlich die 3 ersten Beobachtungen selbst als Näherungen genommen sind. Die 4te Fehlergleichung wird:

$$48^\circ 35'\,14{,}3'' + v_4 = (96^\circ 52'\,16{,}8'' + y) - (48^\circ 17'\,1{,}4'' + x)$$

$$v_4 = -x + y + 1{,}1''$$

In ähnlicher Weise wird auch die 5te und die 6te Fehlergleichung gebildet, wir haben daher die Zusammenstellung aller 6 Fehlergleichungen:

$$(13)\quad \left.\begin{array}{l} v_1 = +x \;\ldots\;\ldots\;\ldots \\ v_2 = \ldots +y \;\ldots\;\ldots \\ v_3 = \ldots\;\ldots +z \;\ldots \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} v_4 = -x+y \;\ldots +1{,}1'' \\ v_5 = -x \;\ldots +z-2{,}4'' \\ v_6 = \ldots -y+z+1{,}1'' \end{array}\right\} \tag{14}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Mit gleichen Gewichten bekommt man die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - z + (+2{,}4 - 1{,}1) = 0 \\ -x + 3y - z + (+1{,}1 - 1{,}1) = 0 \\ -x - y + 3z + (-2{,}4 + 1{,}1) = 0 \end{array}\right\} \text{ oder } \left.\begin{array}{l} \underline{3x} - y - z + 1{,}3 = 0 \\ +\underline{3y} - z + 0{,}0 = 0 \\ \underline{3z} - 1{,}3 = 0 \end{array}\right\} \quad (15)$$

Die Auflösung giebt:

$$x = -0{,}3'' \qquad y = 0{,}0'' \qquad z = +0{,}3'' \qquad (16)$$

Fügt man diese Verbesserungen den gemessenen Winkeln 1. 2. 3. oder, was hier dasselbe ist, den Näherungen (1) (2) (3) zu, so bekommt man das *Stationsergebnis:*

$$\left.\begin{array}{lrrr} \text{Winkel } AB = & 48° & 17' & 1{,}1'' \\ \text{„ } AC = & 96 & 52 & 16{,}8 \\ \text{„ } AD = & 152 & 54 & 7{,}1 \end{array}\right\} \quad (17)$$

Man kann eine solche Ausgleichung auch allgemeiner behandeln. Bei 4 Strahlen und 6 Winkelmessungen sollen die Absolutglieder der Fehlergleichungen, welche in (14) die Werte $+1{,}1''$, $-2{,}4''$, $+1{,}1''$ hatten, allgemein mit l_4 , l_5 , l_6 bezeichnet sein, und damit erhält man:

Fehlergleichungen:

$$\begin{array}{l} v_1 = x \\ v_2 = \quad y \\ v_3 = \quad\quad z \\ v_4 = -x + y \quad + l_4 \\ v_5 = -x \quad + z + l_5 \\ v_6 = \quad -y + z + l_6 \end{array}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - z - l_4 - l_5 = 0 \\ -x + 3y - z + l_4 - l_6 = 0 \\ -x - y + 3z + l_5 + l_6 = 0 \end{array}\right\} \quad (18)$$

Die Auflösung der Normalgleichungen giebt:

$$x = \frac{l_4 + l_5}{4} \qquad y = \frac{-l_4 + l_6}{4} \qquad z = \frac{-l_5 - l_6}{4} \qquad (19)$$

In dem oben mit (14) behandelten Zahlenbeispiele war:

$$l_4 = +1{,}1'' \qquad l_5 = -2{,}4'' \qquad l_6 = +1{,}1''$$

woraus folgt:

$$x = -0{,}3'' \qquad y = 0{,}0'' \qquad z = +0{,}3'' \qquad (20)$$

dieses ist übereinstimmend mit dem früheren (16).

Die vorstehende Behandlung der Winkelausgleichung von Fig. 1., wo alle 6 Winkel zwischen 4 Strahlen gleichgewichtig gemessen sind, hat sich beim ersten Anblick der Sache von selbst dargeboten. Die *allgemeinere* und viel elegantere Behandlung von gleichgewichtigen Winkelmessungen in allen Combinationen wird in § 77. gegeben werden.

Wenn die Gewichte a priori *nicht gleich* sind, so wird auch bei symmetrischer Anordnung der Messungen die Ausgleichung doch nicht mehr symmetrisch.

Wir wollen zu den 6 Messungen, welche oben behandelt wurden, bzw. zu den 6 Fehlergleichungen (14) folgende Gewichte annehmen:

$$p_1 = 30 \qquad p_2 = 20 \qquad p_3 = 26 \qquad p_4 = 25 \qquad p_5 = 28 \qquad p_6 = 44 \qquad (21)$$

Damit wird:

$$[p\,a\,a] = +30 + 25 + 28 = +83$$
$$[p\,a\,b] = -25 \text{ u. s. w.}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\begin{aligned} +\underline{83{,}0\,x} - 25{,}0\,y - 28{,}0\,z + 39{,}7 &= 0 \\ \underline{89{,}0\,y} - 44{,}0\,z - 20{,}9 &= 0 \\ \underline{98{,}0\,z} - 18{,}8 &= 0 \\ \underline{244{,}77} & \end{aligned}$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{array}{ll} x = -0{,}34'' & p_x = 54{,}6 \\ y = +0{,}24 & p_y = 50{,}4 \\ z = +0{,}20 & p_z = 54{,}8 \end{array}\right\} \quad (22)$$

$$[p\,ll.3] = [p\,v\,v] = 222{,}5 \quad (23)$$

Damit wird der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{222{,}5}{6-3}} = \pm 8{,}61''$$

Die mittleren Fehler der ausgeglichenen $x\ y\ z$ werden demnach:

$$m_x = \frac{8{,}61}{\sqrt{54{,}6}} = \pm 1{,}17'' \qquad m_y = \frac{8{,}61}{\sqrt{50{,}4}} = \pm 1{,}21'' \qquad m_z = \frac{8{,}61}{\sqrt{54{,}8}} = \pm 1{,}16'' \quad (24)$$

Alle 6 ausgeglichenen Winkelwerte erhält man durch Zufügen der Verbesserungen $x\ y\ z$ zu den angenommenen Näherungswerten (12), zugleich bildet man auch durch Subtraktionen die 3 übrigen Winkel und findet damit:

Winkel	Gemessen	v	Ausgeglichen	v^2	p	$p\,v^2$
1. $= A\,B$	48° 17′ 1,4″	− 0,34″	48° 17′ 1,06″	0,12	30	3,60
2. $= A\,C$	96 52 16,8	+ 0,24	96 52 17,04	0,06	20	1,20
3. $= A\,D$	152 54 6,8	+ 0,20	152 54 7,00	0,04	26	1,04
4. $= B\,C$	48 35 14,3	+ 1,68	48 35 15,98	2,82	25	70,50
5. $= B\,D$	104 37 7,8	− 1,86	104 37 5,94	3,46	28	96,89
6. $= C\,D$	56 1 48,9	+ 1,06	56 1 49,96	1,12	44	49,28
						222,51 (25)

Die Übereinstimmung von $[p\,v\,v]$ nach (23) und (25) bestätigt die Richtigkeit der Rechnung.

Man kann dieses Ausgleichungs-Ergebnis auch in Gestalt eines ausgeglichenen Richtungssatzes aufstellen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Richtung } JA = & 0° \ 0' & 0{,}00'' \\ \text{„} \quad JB = & 48 \ 17 & 1{,}06 \\ \text{„} \quad JC = & 96 \ 52 & 17{,}04 \\ \text{„} \quad JD = & 152 \ 54 & 7{,}00 \end{array}\right\} \quad (26)$$

Und wenn man von den verschiedenen Gewichtsunterscheidungen, die in einem solchen ausgeglichenen Satze enthalten sind, absehen will, so führt man den Satz (26) schlechthin wie einen unmittelbar voll gemessenen Satz in eine Netzausgleichung ein, die dann in der Form von § 59. oder § 61. weitergeführt wird.

In solcher Weise hat Gerling als Schüler von Gauss die Horizontabschlüsse und namentlich deren Einführung in die Netzausgleichung behandelt und das vorstehende Beispiel ist aus Gerlings Ausgleichungsrechnung der praktischen Geometrie 1843, §. 56—57 entlehnt. In welcher Weise die ungleichen Gewichte p nach (21) zwischen 20 und 44 entstanden sind, etwa als Repetitionszahlen der Winkelmessungen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

oder ob sie bloss von Gerling für ein Schulbeispiel fingiert sind, mag dahingestellt bleiben. Viel wichtiger als eine Ausgleichung mit ungleichen Gewichten ist die Ausgleichung von gleichgewichtigen Winkelmessungen in allen Combinationen, worauf wir später in § 77. ausführlicher zurückkommen werden.

III. Horizontabschluss nach dem Korrelatenverfahren.

Wir wollen nun den bisher behandelten Fall von Fig. 1. auch nach bedingten Beobachtungen, mit Korrelaten, behandeln, und finden, dass zwischen den 6 gemessenen Winkeln folgende 3 Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a)} & -v_1+v_2\ \ -v_4\ \ \ \ +w_4=0 & , & w_4=+1{,}1'' \\ \text{b)} & -v_1\ \ +v_3\ \ -v_5\ \ +w_5=0 & , & w_5=-2{,}4 \\ \text{c)} & \ \ -v_2+v_3\ \ \ \ -v_6+w_6=0 & , & w_6=+1{,}1 \end{array}\right\} \quad (27)$$

Man kann diese Gleichungen unmittelbar aus der Figur ablesen, mit Einsetzung der Beobachtungen (11). Diese Gleichungen (27) sind aber auch schon in der zweiten Hälfte der früheren Fehlergleichungen (18) enthalten, wenn man daselbst setzt:

$$x=v_1 \quad y=v_2 \quad z=v_3 \quad \text{und} \quad l_4=w_4 \quad l_5=w_5 \quad l_6=w_6 \quad (28)$$

Die Bedingungsgleichungen (27) geben folgende Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} +3k_1 & +k_2 & -k_3 & +w_4=0 \\ +k_1 & +3k_2 & +k_3 & +w_5=0 \\ -k_1 & +k_2 & +3k_3 & +w_6=0 \end{array}\right\} \quad (29)$$

Die allgemeine Auflösung hievon ist:

$$k_1=\frac{-2w_4+w_5-w_6}{4}\ ,\ k_2=\frac{+w_4-2w_5+w_6}{4}\ ,\ k_3=\frac{-w_4+w_5-2w_6}{4} \quad (30)$$

und die Korrektionsformeln, welche den Bedingungsgleichungen (27) nach Vertikalreihen folgen, geben:

$$\left.\begin{array}{l|l} 4v_1=-k_1-k_2=+w_4+w_5 & 4v_4=-k_1=+2w_4-w_5+w_6 \\ 4v_2=+k_1-k_3=-w_4+w_6 & 4v_5=-k_2=-w_4+2w_5-w_6 \\ 4v_3=+k_2+k_3=-w_5-w_6 & 4v_6=-k_3=+w_4-w_5+2w_6 \end{array}\right\} \quad (31)$$

Damit haben wir wieder dasselbe, was früher in (19) enthalten war, nach der bei (28) angegebenen Bezeichnungsänderung.

Wenn man also, wie in diesem Falle, gleichgewichtige Winkelbeobachtungen in allen Kombinationen hat, und wenn es sich um allgemeine Formeln handelt, so führt die Korrelatenmethode auf einem weiteren Weg zu demselben Resultat wie die Methode der vermittelnden Beobachtungen.

Wenn die Messungen nicht gleichgewichtig, oder nicht in allen Kombinationen angestellt sind, so ist die Korrelatenmethode zur numerischen Ausgleichung unter Umständen sehr nützlich.

Zur Vergleichung der Ausgleichung nach vermittelnden oder nach bedingten Beobachtungen stellen wir folgende Betrachtung an:

Zur Festlegung von s Strahlen sind $s-1$ Winkel nötig; hat man also W Winkel gemessen, so bestehen:

für vermittelnde Beobachtungen: $s-1$ unabhängige Unbekannte (32)

für bedingte Beobachtungen: $W-(s-1)$ Bedingungsgleichungen (33)

und entsprechend ist in beiden Fällen die Anzahl der aufzulösenden Normalgleichungen.

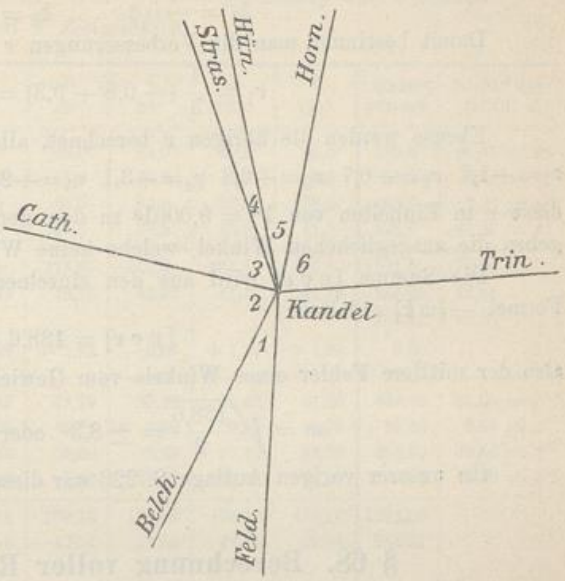
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Z. B. bei $s = 4$ Strahlen und $W = 6$ Winkeln hat man in beiden Fällen 3 Gleichungen aufzulösen.

Dagegen bei vielen Strahlen und verhältnismässig wenigen Bedingungsgleichungen ist die Korrelatenmethode sehr am Platz, wie folgendes Beispiel zeigt:

Nach Fig. 2. sind 6 unabhängige Winkel (1) (2) (3) (4) (5) (6) gemessen. Ausser diesen 6 sollen nur 2 Kontrollwinkel gemessen sein, nämlich die Summe (1) + (2) = (7) und die Gesamtsumme (1)+(2)+(3) + (4) + (5) + (6) = (8), es bestehen also nur 2 Bedingungsgleichungen.

Fig. 2.



Folgendes sind die Messungen in neuer Teilung und die Gewichte:

Nr.	Zielpunkt links	Zielpunkt rechts	Gemessene Winkel	Gewicht p
1	Feldberg	Belchen	(1) = 27,94758g	5
2	Belchen	Catharina	(2) = 86,18972	12
3	Catharina	Strassburg . . .	(3) = 63,70226	4
4	Strassburg . . .	Hünersedel . . .	(4) = 8,76737	3
5	Hünersedel . . .	Hornisgrinde . .	(5) = 26,27865	4
6	Hornisgrinde . .	Trinitatis	(6) = 82,73775	3
7	Feldberg	Catharina	(7) = 114,13753	5
8	Feldberg	Trinitatis	(8) = 295,62484	5
				41

(34)

Die erste Bedingungsgleichung heisst:

$$27{,}94758 + v_1 + 86{,}18972 + v_2 = 114{,}13753 + v_7$$

oder zusammengefasst, mit Annahme der Centesimalsekunde als Einheit:

$$v_1 + v_2 - v_7 - 2{,}3 = 0 \qquad (35)$$

In gleicher Weise stellt man die zweite Bedingungsgleichung auf:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 - v_8 - 15{,}1 = 0 \qquad (36)$$

Die Coefficienten der beiden Normalgleichungen werden:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = +\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} = 0{,}200 + 0{,}083 + 0{,}143 = +0{,}426 \text{ u. s. w.}$$

Die zwei Normalgleichungen selbst sind:

$$+\underline{0{,}426\,k_1} + 0{,}283\,k_2 - 2{,}3 = 0$$
$$+0{,}283\,k_1 + \underline{1{,}649\,k_2} - 15{,}1 = 0$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Deren Auflösung giebt:

$$k_1 = -0{,}8 \qquad k_2 = +9{,}3$$

Damit bestimmt man die Verbesserungen v nach (9) § 139. S. 119:

$$v_1 = \frac{1}{5}(-0{,}8 + 9{,}3) = +1.7$$

Ebenso werden die übrigen v berechnet, alle zusammen sind:

$v_1 = +1{,}7$ $v_2 = +0{,}7$ $v_3 = +2{,}3$ $v_4 = +3{,}1$ $v_5 = +2{,}3$ $v_6 = +3{,}1$ $v_7 = +0{,}2$ $v_8 = -1{,}9$

diese v in Einheiten von $1^{cc} = 0{,}0001^g$ zu den gemessenen Winkeln (34) hinzugefügt geben die ausgeglichenen Winkel, welche keine Widersprüche mehr zeigen.

Die Summe $[p\,v\,v]$ wird aus den einzelnen v in Übereinstimmung mit der Formel $-[w\,k]$ erhalten:

$$[p\,v\,v] = 138{,}6$$

also der mittlere Fehler eines Winkels vom Gewicht 1:

$$m = \sqrt{\frac{138{,}6}{2}} = \pm 8{,}3^{cc} \text{ oder } = \pm 2{,}7''.$$

(In unserer vorigen Auflage S. 226 war dieses Beispiel ausführlicher behandelt.)

§ 68. Berechnung voller Richtungs-Sätze.

Wenn eine volle Satzmessung in gleichartiger Weise, nur mit verdrehtem Limbus, mehrfach wiederholt wird, so besteht die Berechnung des Schlussergebnisses lediglich in einer Mittelbildung, wie wir an dem Beispiele von § 60. S. 187 bereits gezeigt haben.

Die Limbusverstellung zwischen je 2 Sätzen macht man bekanntlich wegen der Elimination der Teilungsfehler mit gleichen Intervallen, z. B. von 45° zu 45°, wenn man 4 Sätze nehmen will, von 30° zu 30° bei 6 Sätzen u. s. w. Die verschiedenen Sätze macht man gewöhnlich dadurch vergleichbar, dass man irgend eine Sicht, etwa als Anfang, in allen Sätzen auf einen gemeinsamen Wert, z. B. 0° 0′ 0″ bringt (oder auch auf einen genäherten Richtungswinkel), doch könnte man die Mittelbildung, wenn man wollte, auch *ohne* solche vorhergehende Zusammenschiebung machen, indem man ja immer auch *nach* der Mittelbildung den Satz nochmals beliebig verschieben kann.

All dieses Bekannte hier vorzuführen, sind wir nur veranlasst, weil wir noch die Berechnung des mittleren Fehlers aus mehreren Satzwiederholungen zeigen wollen, und zwar im Anschluss an unser früheres Beispiel der Hannoverschen Triangulierung, Station Schanze, in § 60. S. 187.

Es sind dort 12 Sätze genommen, von welchen wir aber nun nur 6, d. h. die Hälfte benützen wollen, erstens weil 12 Sätze ungewöhnlich viel sind, und zweitens, weil es hier um ein übersichtliches Schulbeispiel zu thun ist, bei welchem zu viele Wiederholungen die Übersichtlichkeit stören würden.

Mit Weglassung der Grade und Minuten haben wir so die 6 Richtungssätze erhalten, welche in der Tabelle auf S. 225 in der Abteilung I eingesetzt sind, und zwar mit 60,0″ als Anfangsrichtung auf P^0 statt mit 0,0″, damit bei den Satzverschiebungen keine negativen Werte entstehen.

Man bildet nun in der Abteilung I wie gewöhnlich die Quersummen und die Richtungsmittel, und zur Kontrolle auch nach den Vertikalspalten die Satzsummen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnung des mittleren Fehlers einer Richtungsmessung aus 6 Sätzen mit 4 Zielpunkten.

	Satz-Nr. Kreislage	1. 0°	2. 30°	3. 60°	4. 90°	5. 120°	6. 150°	Quer-summe	Richtungs-Mittel A
I	Zielpunkt $P°$	60,0″	60,0″	60,0″	60,0″	60,0″	60,0″	360,0″	60,00″ $= A°$
	„ P'	6,0	10,5	11,0	10,0	8,5	5,5	51,5	8,58 $= A'$
	„ P''	63,0	61,0	60,5	62,0	56,0	58,0	360,5	60,08 $= A''$
	„ P'''	40,5	45,0	43,5	38,5	40,0	41,5	249,0	41,50 $= A'''$
	Summen	169,5	176,5	175,0	170,5	164,5	165,0	1021,0	170,16
	Satzmittel B	42,38	44,12	43,75	42,62	41,12	41,25	255,25	42,54
								255,24	$= A_0$
	Satzverschiebung $A_0 - B$	+ 0,16	− 1,58	− 1,21	− 0,08	+ 1,42	+ 1,29	0,00	
II $= I + (A_0 - B)$	$P°$	60,16	58,42	58,79	59,92	61,42	61,29	360,00	60,00 $= A°$
	P'	6,16	8,92	9,79	9,92	9,92	6,79	51,50	8,58 $= A'$
	P''	63,16	59,42	59,29	61,92	57,42	59,29	360,50	60,08 $= A''$
	P'''	40,66	43,42	42,29	38,42	41,42	42,79	249,00	41,50 $= A'''$
	Summen	170,14	170,18	170,16	170,18	170,18	170,16	1021,00	
	Satzmittel B'	42,54	42,54	42,54	42,54	42,54	42,54	255,24	
III	$v° = A° - P°$	− 0,16	+ 1,58	+ 1,21	+ 0,08	− 1,42	− 1,29	0,00	
	$v' = A' - P'$	+ 2,42	− 0,34	− 1,21	− 1,34	− 1,34	+ 1,79	− 0,02	
	$v'' = A'' - P''$	− 3,08	+ 0,66	+ 0,79	− 1,84	+ 2,66	+ 0,79	− 0,02	
	$v''' = A''' - P'''$	+ 0,84	− 1,92	− 0,79	+ 3,08	+ 0,08	− 1,29	0,00	
	Summen	+ 0,02	− 0,02	0,00	− 0,02	− 0,02	0,00	− 0,04	
IV	$v°^2$	0,03	2,50	1,46	0,01	2,02	1,66	7,68	
	v'^2	5,86	0,12	1,46	1,80	1,80	3,20	14,24	
	v''^2	9,49	0,44	0,62	3,39	7,08	0,62	21,64	
	v'''^2	0,71	3,69	0,62	9,49	0,01	1,66	16,18	
		16,09	6,75	4,16	14,69	10,91	7,14	59,74	
								59,74	$= [v^2]$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{(n-1)(s-1)}} = \sqrt{\frac{59{,}74}{(6-1)(4-1)}} = \sqrt{\frac{59{,}74}{15}} = \pm 2{,}00'' \qquad (1)$$

Die Quersumme 1021,0 muss mit der Vertikal-Addition der Quersummen der einzelnen Sätze stimmen. Die Richtungsmittel A, welche sich aus den Quersummen durch Division mit 6 ergeben, enthalten nun bereits alles, was zur Ausrechnung der Richtungssätze an sich gehört, denn man hat, wenn man wieder die Grade und Minuten von (2) S. 187 zusetzt, das Ergebnis:

$P° = 60{,}00''$	Aegidius	$= 0° 00' 00{,}00''$
$P' = 8{,}58''$	Burg	$= 56° 04' 08{,}58''$
$P'' = 60{,}08''$	Steuerndieb	$= 307° 55' 0{,}08''$
$P''' = 41{,}50''$	Dreifaltigkeit	$= 345° 43' 41{,}50''$

Um weiter zur Berechnung eines mittleren Richtungsfehlers zu gelangen, bilden wir auch die Satzmittel B, bei denen der Blick sich sogleich darauf richten wird, ob sie nahezu *gleich* sind und dann bildet man aus diesen Satzmitteln B wieder ein Mittel $A_0 = 42{,}54$, welches mit den einzelnen B verglichen, die Satzverschiebungen

$A_0 - B$ giebt. Diese $A_0 - B$ zu den Richtungswerten in I addiert, geben die verschobenen Richtungen in der Abtheilung II. (S. 225.)

Verfährt man in II ebenso wie vorher in I, so bekommt man in Hinsicht auf die Richtungsmittel A durchaus nichts neues, aber die Satzmittel B' werden anders als vorher, nämlich die B' werden, wie beabsichtigt war, alle *gleich*, und wenn man nun die Fehler v durch Vergleichung der Richtungsmittel $A^\circ A' A'' A'''$ mit den verschobenen Richtungen der Abteilung II bildet, wie in III geschehen ist, so wird nach Kolumnen und Linien addiert überall die Summe = 0, oder höchstens 0,02 wegen Abrundungen. Endlich werden diese v quadriert, wie in Abteilung IV zu sehen ist, und die Summe aller v^2, nach Spalten und Linien addiert, wird $[v^2] = 59{,}74$. Der Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlers ist $= (n-1)(s-1)$, wo n die Anzahl der Sätze (Gyren) und s die Anzahl der Richtungen (Strahlen) in jedem Satze bedeutet, also in unserem Falle $n = 6$ und $s = 4$ oder $(n-1)(s-1) = 15$, womit sich ergiebt:

$$m = \sqrt{\frac{59{,}74}{15}} = \pm 2{,}00'' \qquad (2)$$

Dieses ist der mittlere Fehler einer Richtung in einem Satze, und bei 6 maliger Satzwiederholung wird der mittlere Fehler einer 6 fach gemittelten (d. h. ausgeglichenen) Richtung:

$$M = \frac{2{,}00}{\sqrt{6}} = \pm 0{,}98'' \qquad (3)$$

Wenn man, ebenso wie die hier behandelten 6 Sätze, alle die 12 Sätze von (2) § 60. S. 187 zusammen berechnet, so erhält man zu Fig. 1. § 60. S. 185

$$m = \pm 2{,}31'' \quad , \quad M = \pm 0{,}67'' \qquad (4)$$

Was die Begründung des Rechenverfahrens nach S. 225 in Hinsicht auf die einzelnen v und $[v^2]$ betrifft, so mag es zunächst genügen, dass in Abteilung III die v nach Spalten und Linien durchaus die Summen Null geben, dass also in allen Beziehungen das Prinzip des arithmetischen Mittels eingehalten ist. Die schärfere Begründung ist aus dem späteren § 71. zu entnehmen.

Anmerkung über Teilungsfehler.

Wenn die Satzverschiebungen $A_0 - B$ in der Rechnung von S. 225 einen gesetzmässigen Verlauf zeigen (flüssige Curve beim Auftragen der $A_0 - B$ als Ordinaten zu den Kreislagen als Abscissen), so enthält das eine Andeutung von systematischen Teilungsfehlern, zugleich aber auch die Beruhigung, dass der wirkliche mittlere Richtungsfehler, wie er nachher in das Netz eingeht, *kleiner* sein wird, als der Fehler m, bzw. M nach der Rechnung (2) und (3), denn ein Teil der Wertbeträge der v wird in den systematischen Teilungsfehlern seinen Grund haben, und daher durch die symmetrischen Kreisstellungen sich grossenteils eliminieren.

In unserem Falle zeigen die $A_0 - B$ auf S. 225 in der That gesetzmässigen Verlauf, und der Schlussfehler $M = \pm 0{,}67''$ nach (4) wäre also noch zu gross. Die Netzausgleichung § 61. gab in (4) S. 195 $m = \pm 1{,}04''$, was mit vorigem $M = \pm 0{,}67''$ vergleichbar wäre, wenn nicht noch eine Menge anderer Umstände, die vielen Centrierungen auf hohen (vielleicht schwankenden) Türmen u. s. w. dazu kämen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 69. Genäherte Berechnung unvollständiger Richtungssätze.

Hat man Richtungsbeobachtungen in lauter vollen Sätzen, so besteht die Ausgleichung lediglich in der Mittelbildung für alle Ablesungen je eines Zielpunktes, wie im vorigen § 68. gezeigt ist.

Sind die einzelnen Sätze nicht alle vollständig, so ist die strenge Ausgleichung nach unserem späteren § 71. zu machen.

Es giebt aber eine zweckmässiges Näherungsverfahren zur Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welches in dem Werke „Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland", London 1858, S. 62—66, zuerst angegeben und in Helmert „Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q., 1872", S. 154 behandelt wird.

Als Zahlenbeispiel hiezu haben wir auf S. 228 eine willkürliche Auswahl aus den Messungen auf der Station Trenk der Gradmessung in Ostpreussen getroffen, und dabei angenommen, dass wenigstens *ein* Zielpunkt (Mednicken) in allen Sätzen eingeschnitten ist, so dass alle Sätze auf Mednicken $= 0° 0' 0''$ reduziert werden können. Dieses ist jedoch nicht wesentlich; wäre z. B. in dem 8ten Satz nur Wargelitten und Galtgarben gemessen, nicht aber Mednicken, so würde man etwa diesen Satz auf das Mittel der sämtlichen vorhergehenden Ablesungen von Wargelitten oder Galtgarben bringen. Mit einigem Geschick wird man sich in solchen Fällen leicht helfen können, so dass alle Sätze in gemeinsamer genäherter Orientierung zum Beginn der Ausgleichung dastehen.

Hat man so das Beobachtungsmaterial in der Tabelle I a geordnet, so bildet man in allen Kolumnen die Mittel A, und wenn die Sätze nur sehr wenig lückenhaft waren, oder wenn es sich nur um eine flüchtige Ausgleichung handelte, so würde man die Mittelwerte A sofort als Ergebnisse beibehalten.

Die weitere Ausgleichung gestaltet sich so:

I b. Man bildet die Differenzen $A - l = v$ zwischen den Mitteln A der ersten Stufe und ihren darüber stehenden l, z. B.:

Fuchsberg Num.	1.	$35{,}8'' - 36{,}2''$	$= -0{,}4''$
	2.	$35{,}8 - 37{,}5$	$= -1{,}7$
	3.	. . . .	. .
	4.	$35{,}8 - 33{,}7$	$= +2{,}1$
	5.	$35{,}8 - 36{,}1$	$= -0{,}3$
	6.	$35{,}8 - 34{,}7$	$= +1{,}1$
	7.	$35{,}8 - 36{,}5$	$= -0{,}7$
Summe		$+3{,}2 - 3{,}1$	$= +0{,}1$ soll $= 0{,}0$

Die algebraischen Summen dieser $A - l = v$ sind bekanntlich $=$ Null, was als Rechenprobe der Abteilung II. dient und hier mit $+0{,}1$ statt 0,0 genügend stimmt.

Weiter bildet man für die Abteilung I b die Quersummen und die Quermittel, z. B.:

$$\frac{0{,}0'' - 0{,}4'' + 1{,}9'' + 0{,}2''}{4} = \frac{+1{,}7''}{4} = +0{,}4'' = x.$$

Diese x der letzten Spalte von I b setzt man unverändert hinauf nach I a.

II. Die soeben besprochenen x werden zu den l in I a addiert, und die Summen nach II a heruntergesetzt. Hier bildet man wieder spaltenweise die Mittel B, welche als Resultat gelten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Genäherte Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Station Trenk.)

Satz Num.	Ia. Beobachtete Richtungen. Erste Stufe. Mednicken l°	Fuchsberg l'	Wargelitten l''	Galtgarben l'''	x	
1	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 36,2″	287° 14′ 11,0″	346° 24′ 18,4″	+ 0,4	
2	0,0	37,5	14,5	. .	— 1,1	
3	0,0	. .	12,5	18,0	+ 0,3	
4	0,0	33,7	14,1	. .	+ 0,3	
5	0,0	36,1	13,4	. .	— 0,3	von I b.
6	0,0	34,7	. .	19,6	0,0	heraufgesetzt.
7	0,0	36,5	. .	. .	— 0,3	
8	0,0	. .	13,7	20,5	— 0,9	
9	0,0	. .	11,2	. .	+ 0,8	
10	0,0	. .	. .	16,5	+ 1,0	
Summen	10. 0,0″	6. 214,7″	7. 90,4″	5. 93,0″	10 + 6 + 7 + 5 = 28	
Mittel A.	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 35,8″	287° 14′ 12,9″	346° 24′ 18,6″		

	I b. Differenzen $A - l = v$				Quer-Summen	Anzahl q	Mittel x
1	0,0″	— 0,4″	+ 1,9″	+ 0,2″	+ 1,7	4	+ 0,4″
2	0,0	— 1,7	— 1,6	. .	— 3,3	3	— 1,1
3	0,0	. .	+ 0,4	+ 0,6	+ 1,0	3	+ 0,3
4	0,0	+ 2,1	— 1,2	. .	+ 0,9	3	+ 0,3
5	0,0	— 0,3	— 0,5	. .	— 0,8	3	— 0,3
6	0,0	+ 1,1	. .	— 1,0	+ 0,1	3	0,0
7	0,0	— 0,7	. .	. .	— 0,7	2	— 0,3
8	0,0	. .	— 0,8	— 1,9	— 2,7	3	— 0,9
9	0,0	. .	+ 1,7	. .	+ 1,7	2	+ 0,8
10	0,0	. .	. .	+ 2,1	+ 2,1	2	+ 1,0
Summen	0,0″	+ 3,2″	+ 4,0″	+ 2,9″		28	
		— 3,1	— 4,1	— 2,9			
	0,0	+ 0,1	— 0,1	0,0			
Probe,soll:	0,0	0,0	0,0	0,0			

	II a. Verbesserte Richtungen $l + x$. Zweite Stufe.				
1	359° 59′ 60,4″	83° 30′ 36,6″	287° 14′ 11,4″	346° 24′ 18,8″	
2	58,9	36,4	13,4	. .	
3	60,3	. .	12,8	18,3	
4	60,3	34,0	14,4	. .	Diese Werte werden
5	59,7	35,8	13,1	. .	durch Additionen
6	60,0	34,7	. .	19,6	$l + x$
7	59,7	36,2	. .	. .	von I. gebildet.
8	59,1	. .	12,8	19,6	
9	60,8	. .	12,0	. .	
10	61,0	. .	. .	17,5	
Summen	10. 600,2″	6. 213,7″	7. 89,9″	5. 93,8″	
Mittel B.	0° 0′ 0,0″	83° 30′ 35,6″	287° 14′ 12,8″	346° 24′ 18,8″	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um dieses Verfahren zu begründen, erinnern wir uns, dass es immer darauf ankommt, die Differenzen v zwischen den Resultaten und den Beobachtungen in ihrer Quadratsumme $[v\,v]$ möglichst klein zu machen. Man kann nun in diesem Falle die Gesamtsumme $[v\,v]$ in zweifacher Weise zerlegt denken:

1) Zerlegung nach Kolumnen $[v\,v] = [v^\circ\,v^\circ] + [v'\,v'] + [v''\,v''] + \ldots$ (1)

2) Zerlegung nach Linien $[v\,v] = [v_1\,v_1] + [v_2\,v_2] + [v_3\,v_3] + [v_4\,v_4] + \ldots$ (2)

Durch die Bildung der Kolumnenmittel A wird in jeder Kolumne für sich die Summe $[v^\circ\,v^\circ]$, bzw. $[v'\,v']$ oder $[v''\,v'']$ möglichst klein gemacht, und in den einzelnen Linien wird dann $[v_1\,v_1]$, bzw. $[v_2\,v_2]$ u. s. w. noch verkleinert durch Anbringung der Satzverschiebungen x_1 x_2 u. s. w., welche die arithmetischen Mittel der v jeder Linie sind.

Letzteres zeigt sich am deutlichsten an derjenigen Kolumne, welche am Anfang zur Hauptorientierung gedient hat, in unserem Beispiel an der Kolumne Mednicken; diese erhält in der Tabelle I b alle $v = 0$, d. h. alle Widersprüche werden dadurch den anderen Kolumnen zugeschoben, und erst nach Einführung der Verschiebungen x tritt eine gerechtere Verteilung der v ein.

Die *allmähliche* Verkleinerung von $[v\,v]$, zuerst in den Kolumnen, dann in den Linien, entspricht näherungsweise der M. d. kl. Q., welche bei strenger Anwendung eine *gemeinsame* Berücksichtigung aller Beziehungen in den Kolumnen und in den Linien verlangen würde.

Die Zahlenwerte der Tabelle II a haben immer noch den Charakter von *Original*-Beobachtungen, denn es sind nur die Ablesungen jedes Satzes um eine *konstante* Grösse x verschoben worden, und solche Verschiebung ist bei Richtungs-Beobachtungs-Sätzen immer willkürlich zulässig.

Man kann daher, mit der Tabelle II a von neuem anfangend, die ganze Rechnung wiederholen, eine dritte Stufe III bilden, und es ist möglich, dass man durch fortgesetzte Wiederholungen dieser Art den Resultaten einer strengen Ausgleichung nach der M. d. kl. Q. unbegrenzt nahe kommt.

Dabei kann man auch für jede Ausgleichungsstufe die Quadratsumme $[v^2]$ der übrig bleibenden Fehler ausrechnen und an deren allmählicher Abnahme sehen, ob die Rechnungsgang convergiert. Wir haben das an unserem Beispiele S. 228 bis zur dritten Stufe durchgeführt und folgendes erhalten:

Station Trenk

	Stufe I	Stufe II	Stufe III
Mednicken . . .	0° 0′ 0,0″	0° 0′ 0,0″	0° 0′ 0,00″
Fuchsberg . . .	83 30 35,8	83 30 35,6	83 30 35,55
Wargelitten . . .	287 14 12,9	287 14 12,8	287 14 12,67
Galtgarben . . .	346 24 18,6	346 24 18,8	346 24 18,81
	$[v^2] = 30{,}22$	$[v^2] = 18{,}42$	$[v^2] = 17{,}97$

Von der II. zur III. Stufe ist kaum noch merkliche Änderung. Aus der Summe $[v^2]$ kann man auch einen mittleren Fehler einer Richtung berechnen, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{17{,}37}{28 - 13}} = \sqrt{\frac{17{,}97}{15}} = \pm 1{,}09''$$

Der Nenner $28 - 13$ ist hier dadurch entstanden, dass 28 gemessene Richtungen vorhanden sind, welchen aber als Unbekannte gegenüber stehen erstens 3 unabhängige

Winkel zwischen 4 Sichten und 10 Orientierungs-Unbekannte in 10 gemessenen Sätzen, also 13 Unbekannte.

Die in Vorstehendem behandelte Näherungsausgleichung empfiehlt sich aus vielen Gründen, und sie dürfte vielleicht in neuer Zeit noch mehr Bedeutung deswegen gewinnen, weil die strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze, welche wir im nachfolgenden § 71. lehren werden, mit der dazu gehörigen formell strengen Bessel schen Netz-Ausgleichung (§ 72.) allmählich gegen andere Verfahren zurücktritt.

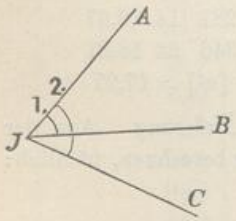
§ 70. Unterscheidung von Winkelmessung und Richtungsmessung.

Wir haben schon im Bisherigen mehrfach die Unterscheidung von Winkelmessungen und Richtungsmessungen gemacht, ohne dabei scharfe Erklärungen zu geben, indem diese Benennungen heute so allgemein, schon bei den Messungen, gebraucht werden, dass ihr Sinn als bekannt vorausgesetzt werden konnte, nämlich so, dass eine *Winkelmessung* (im engeren Sinne) sich stets auf *zwei* Sichtstrahlen, links und rechts, bezieht, während ein Satz von *Richtungs*messungen beliebig viele Sichtstrahlen enthalten kann.

Winkelmessung erscheint also als besonderer Fall der Richtungsmessung, und wenn man mehrere Winkelmessungen aneinander setzt, so bekommt man für die trigonometrischen Rechnungen dasselbe, was ein Satz von Richtungsmessungen bietet, und nur wenn es sich um Ausgleichungs- und Genauigkeitsfragen handelt, ist die Unterscheidung von Winkeln und Richtungen in dem angegebenen Sinne von Bedeutung.

Die heutigen Benennungen Winkelmessung und Richtungsmessung haben sich in diesem Sinne erst in den letzten Jahrzehnten festgesetzt. Gauss unterschied 1821 (Astr. Nachr. 1. Band, S. 81) „Winkelmessungen auf einmal gemacht“ (Richtungen) und „Winkelmessungen unabhängig gemacht“ (Winkelmessungen im engeren Sinne), Bessel und Hagen gebrauchten 1837 die Worte Winkel und Richtung ohne scharfe Unterscheidung nach dem heutigen Sinne, welche wie es scheint von *Hansen* herrührt, der eine Ausgleichung nach „Richtungen“ 1841 in „Astr. Nachr., 18. Band“, S. 173, gab. Auch *Gerling* gebraucht in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen“ 1843, „Winkel“ und „Richtungen“, so wie heute gebräuchlich ist.

Fig. 1.
3 Richtungen $A\ B\ C$
2 Winkel 1. 2.



Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir die wichtigsten Begriffe über mittlere Fehler und Gewichte von Winkeln und Richtungen festsetzen.

Ein Winkel kann immer betrachtet werden als Differenz zweier Richtungen; z. B. in Fig. 1. ist:

$$\text{Winkel } A\,J\,B = \text{Richtung } J\,B - \text{Richtung } J\,A \qquad (1)$$

Ist daher r ein mittlerer Richtungsfehler und m ein mittlerer Winkelfehler, so ist nach (1):

$$\pm m = \pm r \pm r$$
$$m^2 = r^2 + r^2 = 2\,r^2$$
$$m = r\sqrt{2} \qquad (2)$$

oder in Gewichtsverhältnissen, wenn p ein Winkelgewicht und q ein Richtungsgewicht ist:

$$\left.\begin{aligned} p : q &= \frac{1}{2} : 1 \text{ oder } = 1 : 2 \\ \text{oder } p &= \frac{q}{2} \quad , \quad q = 2p \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

d. h. eine Winkelmessung hat nur halbes Gewicht p im Vergleich mit dem Gewicht q einer Richtungsmessung.

Da durch Messungswiederholung auch das Gewicht verdoppelt wird, ergiebt sich auch, dass die Doppelmessung eines Winkels gleiches Gewicht hat mit der einfachen Messung einer Richtung.

Eine einzelne Richtungsmessung ist für praktische Zwecke wertlos, denn *eine* solche Messung bestimmt nur den Winkel, welcher eine Theodolit-Sicht mit der Sicht für die Null-Ablesung bildet, z. B. wenn man bei einer Theodolit-Aufstellung einen Punkt A anzielt und 26° 17′ 20″ abliest, so heisst das, die Sicht A macht den Winkel 26° 17′ 20″ mit derjenigen Sichtlinie, welche man bei der Ablesung 0° 0′ 0″ hat. Würde man nun den Theodolit wegnehmen, so hätte man für trigonometrische Berechnungen absolut Nichts erhalten. Man muss für geodätische Zwecke immer mindestens *zwei* Richtungen zusammen messen. Die Richtungen, welche bei einer und derselben Limbusstellung gemessen werden, bilden zusammen einen *Satz* (oder Gyrus).

Wenn nach Fig. 1. die 3 Richtungen $A\,B\,C$ in einem Satz eingeschnitten sind, so ist jede Richtung mit einem besonderen Fehler $v\,A$, $v\,B$, $v\,C$ behaftet, und wenn die 3 Messungen in eine Ausgleichung eingehen, so muss werden:

$$(v\,A)^2 + (v\,B)^2 + (v\,C)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{4}$$

Wenn andererseits die 3 Strahlen $A\,B\,C$ durch 2 *Winkel*messungen $A\,B$ und $A\,C$ gegen einander festgelegt werden, so entsprechen diesen 2 Winkelmessungen 4 Richtungsverbesserungen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} &\text{Winkelverbesserung } \delta_1 = v\,B_1 - v\,A_1 \\ &\text{Winkelverbesserung } \delta_2 = v\,C_2 - v\,A_2 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

wo δ_1 und δ_2 Winkelverbesserungen, und $v\,A_1$, $v\,B_1$, $v\,A_2$, $v\,C_2$ Richtungsverbesserungen sind. Wenn man nun nach Richtungen ausgleicht, so besteht die Bedingung (für gleiche Gewichte):

$$(v\,A_1)^2 + (v\,B_1)^2 + (v\,A_2)^2 + (v\,C_2)^2 + \ldots \text{ Minimum} \tag{6}$$

während bei einer Ausgleichung nach Winkeln gälte:

$$p_1\,\delta_1^2 + p_2\,\delta_2^2 + \ldots = p_1\,(v\,B_1 - v\,A_1)^2 + p_2\,(v\,C_2 - v\,A_2)^2 + \ldots = \text{Minimum} \tag{7}$$

wo p_1 und p_2 die Winkelgewichte sind.

Angenommen, man habe die Ausgleichung nach dieser letzten Bedingung (7) bewirkt, so ist man zur Kenntnis der *Differenzen* $v\,B_1 - v\,A_1$ u. s. w. gelangt, welche in (5) mit δ_1, δ_2 u. s. w. bezeichnet wurden; die einzelnen $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s. w. kennt man vorerst noch nicht. Wenn aber diese Richtungsverbesserungen $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s w. in gar keinen anderen Verbindungen in die Rechnung eingehen, als eben in diesen Differenzen δ_1 , δ_2 u. s. w., so hat man das Recht, bei der Zerlegung der Winkelverbesserungen δ in je 2 Richtungsverbesserungen abermals das Prinzip der kleinsten Quadratsumme anzuwenden und zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} v\,A_1 &= -\frac{\delta_1}{2} \qquad v\,B_1 = +\frac{\delta_1}{2} \\ v\,A_2 &= -\frac{\delta_2}{2} \qquad v\,B_2 = +\frac{\delta_2}{2} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

denn jede andere Verteilung würde eine grössere Quadratsumme $(v\,A_1)^2 + (v\,B_1)^2 + \ldots$ geben. Setzt man die Werte für $v\,A_1$, $v\,B_1$ u. s. w. von (8) in (6) und (7) ein, so wird:

$$\frac{1}{2}\,\delta_1^2 + \frac{1}{2}\,\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (6^*)$$

$$p_1\,\delta_1^2 + p_2\,\delta_2^2 + \ldots = \text{Minimum} \qquad (7^*)$$

Diese 2 Bedingungen werden identisch, wenn man $p_1 = p_2 = \ldots = \frac{1}{2}$ setzt, d. h. wenn man jedem Winkel das halbe Gewicht einer Richtung giebt, was der schon zu Anfang erkannten Beziehung (3) entspricht.

Wir haben also erkannt, dass, wenn nur Winkelmessungen vorliegen, man zu gleichen Ergebnissen gelangt, gleichviel, ob man nach Winkeln oder nach Richtungen ausgleicht, und da die Winkelausgleichung einfacher ist, wird man dann wohl meistens bei derselben bleiben. Wenn aber in einem Satze mehr als 2 Richtungen vorkommen, so ist Winkelausgleichung unmöglich und es muss nach Richtungen, entsprechend der Minimumsbedingung (6), ausgeglichen werden.

Richtungsmessungen haben noch das Eigentümliche, dass alle Ablesungen eines Satzes um eine beliebige Grösse verändert werden dürfen, wie folgendes Beispiel zeigt

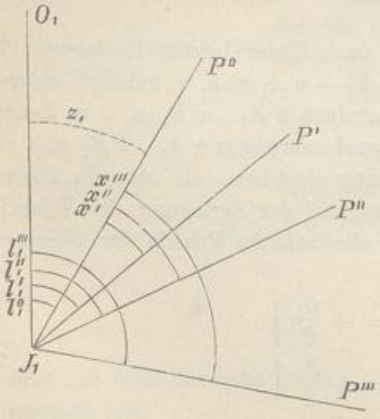
Zielpunkt	Gemessene Richtungen	Reduktion auf $A = 0$	Reduktion auf $A = 57°\,37'\,3''$
A	165° 46′ 12″	0° 0′ 0″	57° 37′ 3″
B	205 45 37	39 59 25	97 36 28
C	286 54 20	121 8 8	178 45 11

(9)

Die *Differenzen* der Richtungen, d. h. die Winkel, auf welche es bei trigonometrischen Berechnungen allein ankommt, bleiben immer dieselben, mag man die Originalablesungen benützen, oder dieselben auf einen Strahl = 0° 0′ 0″ reduzieren, oder einem Strahl seinen trigonometrischen Richtungswinkel als Richtung zuteilen, wie in der letzten Spalte der Zusammenstellung (9) angenommen ist.

§ 71. Strenge Ausgleichung unvollständiger Richtungssätze. (Bessels Methode.)

Fig. 1.
Richtungsmessungen. Satz 1.

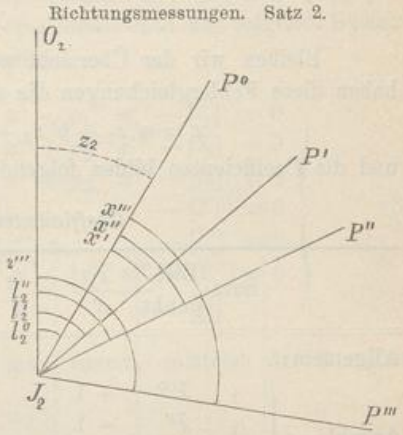


Wenn mehrere unvollständige Sätze auf einer Station gemessen sind, wie etwa in dem Beispiel von § 69. S. 228, so ist es zunächst immer angenehm, wenn wenigstens *eine* Sicht in allen Sätzen vorkommt, damit man alle Sätze an diese eine Sicht etwa als Nullstrahl anhängen und alles übrige vorläufig ordnen kann. Indessen ist dieses nicht wesentlich; die streng theoretische Ausgleichung solcher unvollständiger Richtungssätze ist von solcher Ordnung auf einen gemeinsamen Anfangsstrahl unabhängig, und macht nur etwa zur Gewinnung erster Näherungen davon Gebrauch.

Auf einem ersten Beobachtungspunkt J_1 (Fig. 1.) wird ein Limbuskreis aufgestellt, dessen

Nullhalbmesser die Lage $J_1 O_1$ hat; und beim Einschneiden der geodätischen Strahlen $P^\circ\ P'\ P''\ P'''$ werden an dem Limbuskreisrand die Ablesungen $l_1^\circ\ l_1'\ l_1''\ l_1'''$ gemacht. Obgleich hiebei die Lage des Kreisnullhalbmessers $J_1 O_1$ gegen die Zielstrahlen ohne alle geodätische Bedeutung ist, muss doch ein Winkel z_1, welcher den Nullhalbmesser $J_1 O_1$ gegen einen der genannten Strahlen festlegt, mit in Rechnung genommen werden.

Fig. 2.
Richtungsmessungen. Satz 2.



Alles dieses wird mit verstelltem Limbus wiederholt, wie in Fig. 2. angedeutet ist; und indem wir nun die Sätze mit $_1\ _2\ _3 \ldots$ numerieren, die Zielpunkte aber, und alles, was sich darauf bezieht, mit $^\circ\ '\ ''\ '''\ \ldots$ unterscheiden, haben wir folgende Übersicht:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Satz}_1 & l_1^\circ & l_1' & l_1'' & l_1''' & \ldots\ z_1 \\ \text{Satz}_2 & l_2^\circ & l_2' & l_2'' & l_2''' & \ldots\ z_2 \\ \text{Satz}_3 & l_3^\circ & l_3' & l_3'' & l_3''' & \ldots\ z_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{Satz}_n & l_n^\circ & l_n' & l_n'' & l_n''' & \ldots\ z_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Gewichte der Beobachtungen sollen entsprechend durch $p_1^\circ\ p_1'\ p_1''\ \ldots$ bezeichnet werden; es sind zwar gewöhnlich alle Gewichte der Beobachtungen auf einer Station einander gleich, es ist aber die allgemeine Einführung von Gewichten dennoch nötig, damit man das Ausfallen einzelner Beobachtungen mathematisch ausdrücken kann. Wenn z. B. im zweiten Satz der Zielpunkt P''' fehlt, so ist $p_2''' = 0$.

Durch die Ausgleichung werden allen Messungen Verbesserungen zugeteilt, welche mit v bezeichnet werden sollen; wir haben also ausser (1) noch folgende Bezeichnungen festgestellt:

	Gewichte:				Verbesserungen:			
Satz_1	p_1°	p_1'	p_1''	p_1'''	v_1°	v_1'	v_1''	v_1'''
Satz_2	p_2°	p_2'	p_2''	p_2'''	v_2°	v_2'	v_2''	v_2'''
Satz_3	p_3°	p_3'	p_3''	p_3'''	v_3°	v_3'	v_3''	v_3'''

(2)

Die Beobachtungswerte l sind Richtungen. Man kann dieselben in jedem einzelnen Satz als Winkel betrachten, welche die Strahlen nach $P^\circ\ P'\ P''\ P'''$ mit einem gemeinschaftlichen aber unbekannten Anfangsstrahl nach O bilden. Diese Beobachtungen l sind gemacht worden zur Bestimmung derjenigen Winkel, welche die Strahlen $P^\circ\ P'\ P''\ P'''$ unter sich bilden, und da diese 4 Strahlen durch 3 Winkel gegenseitig festgelegt sind, so führen wir als unabhängige Unbekannte folgende Winkel ein:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Winkel } P^\circ\ P' = x' \\ \text{Winkel } P^\circ\ P'' = x'' \\ \text{Winkel } P^\circ\ P''' = x''' \end{array}\right\} \quad (3)$$

Es ist hiebei unwesentlich, dass diese Winkel einen Strahl, nämlich P° gemeinsam haben, man *könnte* auch z. B. die 3 Winkel $P^\circ\ P'$, $P'\ P''$, $P''\ P'''$ als unabhängige Unbekannte einführen.

Nun kann zur Aufstellung der Fehlergleichungen geschritten werden. Z. B. für die Messung l_2''' hat man nach Fig. 2.: Es soll sein $l_2''' = z_2 + x'''$, also mit Zufügung der Verbesserung v_2''':

$$l_2''' + v_2''' = z_2 + x'''$$

oder Fehlergleichung:

$$v_2''' = z_2 + x''' - l_2'''$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das ganze System dieser Gleichungen ist:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Satz}_1 & v_1^\circ = z_1 - l_1^\circ & v_1' = z_1 + x' - l_1' & v_1'' = z_1 + x'' - l_1'' \quad v_1''' = z_1 + x''' - l_1''' \\ \text{Satz}_2 & v_2^\circ = z_2 - l_2^\circ & v_2' = z_2 + x' - l_2' & v_2'' = z_2 + x'' - l_2'' \quad v_2''' = z_2 + x''' - l_2''' \\ \text{Satz}_3 & v_3^\circ = z_3 - l_3^\circ & v_3' = z_3 + x' - l_3' & v_3'' = z_3 + x'' - l_3'' \quad v_3''' = z_3 + x''' - l_3''' \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (4)$$

Bleiben wir der Übersicht wegen bei 3 Sätzen und 4 Zielpunkten stehen, so haben diese Fehlergleichungen die allgemeine Form:

$$v = a'\,z_1 + b'\,z_2 + c'\,z_3 + a\,x' + b\,x'' + c\,x''' + l \qquad (5)$$

und die Coefficienten bilden folgende Tabelle:

Coefficienten der Fehlergleichungen:

	Satz	Ziel-punkt	z_1 a'	z_2 b'	z_3 c'	x' a	x'' b	x''' c	l	p
Allgemein:										
Anzahl $= s$	1	P°	$+1$						$-l_1^\circ$	p_1°
	1	P'	$+1$			$+1$			$-l_1'$	p_1'
	1	P''	$+1$				$+1$		$-l_1''$	p_1''
	1	P'''	$+1$					$+1$	$-l_1'''$	p_1'''
Anzahl $= s$	2	P°		$+1$					$-l_2^\circ$	p_2°
	2	P'		$+1$		$+1$			$-l_2'$	p_2'
	2	P''		$+1$			$+1$		$-l_2''$	p_2''
	2	P'''		$+1$				$+1$	$-l_2'''$	p_2'''
Anzahl $= s$	3	P°			$+1$				$-l_3^\circ$	p_3°
	3	P'			$+1$	$+1$			$-l_3'$	p_3'
	3	P''			$+1$		$+1$		$-l_3''$	p_3''
	3	P'''			$+1$			$+1$	$-l_3'''$	p_3'''
			Anzahl $= n$			Anzahl $= s-1$				$[p]$ (6)

Vor Bildung der Normalgleichungen wollen wir folgende Summenbezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{array}{l} p_1^\circ + p_1' + p_1'' + p_1''' \ldots = [p_1] \\ p_2^\circ + p_2' + p_2'' + p_2''' \ldots = [p_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1' + p_2' + p_3' + \ldots = [p'] \\ p_1'' + p_2'' + p_3'' + \ldots = [p''] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (7)$$

dabei ist $[p_1] + [p_2] + [p_3] + \ldots = [p^\circ] + [p'] + [p''] + \ldots = [p]$

Indem wir annehmen, dass alle Sätze *einzeln* aufgeführt sind (ohne Zusammenfassung gleichartiger Sätze) ist $[p] = R$ gleich der Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen.

Der erste quadratische Normalgleichungs-Coefficient wird nach der Tabelle (6):

$$p_1^\circ\,1^2 + p_1'\,1^2 + p_1''\,1^2 + p_1'''\,1^2 = p_1^\circ + p_1' + p_1'' + p_1''' = [p_1]$$

und die erste Normalgleichung wird:

$$[p_1]\,z_1 + 0\,z_2 + 0\,z_3 + p_1'\,x' + p_1''\,x'' + p_1'''\,x''' - [p_1\,l_1] = 0$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn die Gewichte p alle an und für sich gleich, nämlich $= 1$ sind, so ist es in den Verbindungen mit l nicht nötig, die Gewichte p überhaupt zu schreiben, denn es ist $[p_1 l_1] = p_1{}^0 l_1{}^0 + p_1' l_1' + p_1'' l_1'' + p_1''' l_1'''$, d. h. die Summe aller derjenigen l, welche mit der Nummer $_1$ überhaupt vorkommen, und das kann man kürzer auch durch $[l_1]$ ausdrücken. Auf diese Weise erhält man das folgende System der Normalgleichungen in ausführlicher Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\underline{[p_1]\,z_1} & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & + p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' & - [l_1] & = 0 \\
\cdot\ \cdot & \underline{[p_2]\,z_2} & \cdot\ \cdot & + p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' & - [l_2] & = 0 \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \underline{[p_3]\,z_3} & + p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' & - [l_3] & = 0 \\
p_1'\ z_1 & + p_2'\ z_2 & + p_3'\ z_3 & + \underline{[p']\,x'} + \cdot\ \cdot & - [l'] & = 0 \\
p_1''\ z_1 & + p_2''\ z_2 & + p_3''\ z_3 & \cdot\ \cdot\ \underline{[p'']\,x''} + \cdot\ \cdot & - [l''] & = 0 \\
p_1'''\ z_1 & + p_2'''\ z_2 & + p_3'''\ z_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \underline{[p'''\,x'''}\ & - [l'''] & = 0 \\
 & & & & \underline{[ll]} &
\end{array}\right\} \quad (8$$

Da viele Coefficienten ausfallen, kann man zuerst, mittelst der 3 ersten Gleichungen, $z_1\ z_2\ z_3$ in $x'\ x''\ x'''$ ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}
-z_1 &= \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' - [l_1]}{[p_1]} \\
-z_2 &= \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' - [l_2]}{[p_2]} \\
-z_3 &= \frac{p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' - [l_3]}{[p_3]}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Setzt man diese Ausdrücke (9) in die 3 letzten Gleichungen (8), so bekommt man ein reduziertes Normalgleichungssystem, welches nur noch die Unbekannten $x'\ x''\ x'''$ enthält. Dasselbe System bekommt man auch, wenn man die Gleichungen (8) allmählich nach dem Schema S. 61 der Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. f. reduziert; die erste so reduzierte Gleichung ist:

$$([p_2] - \frac{0}{[p_1]}\,0)\,z_2 + (0 - \frac{0}{[p_1]}\,0)\,z_3 + (p_2' - \frac{0}{[p_1]}\,p_1')\,x' + \ldots = 0$$

d. h. die mit $[p_2]\,z_2$ anfangende zweite Gleichung der Gruppe (8) bleibt bei der ersten Reduktion unverändert.

Ebenso ist es mit der dritten Gleichung von (8). Die vierte Gleichung von (8) giebt bei der ersten Reduktion:

$$([p'] - \frac{p_1'}{[p_1]}\,p_1')\,x' + (0 - \frac{p_1'}{[p_1]}\,p_1'')\,x'' + (0 - \frac{p_1'}{[p_1]}\,p_1''')\,x''' - ([l'] - \frac{p_1'}{[p_1]}\,[l_1]) = 0$$

Verfolgt man dieses Alles zu Ende, so erhält man ein System von folgender Form in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{rrrr}
\underline{(a\,a)\,x'} + (a\,b)\,x'' + (a\,c)\,x''' + (a\,l) & = 0 \\
\underline{(b\,b)\,x''} + (b\,c)\,x''' + (b\,l) & = 0 \\
\underline{(c\,c)\,x'''} + (c\,l) & = 0 \\
\underline{(l\,l)} &
\end{array}\right\} \quad 10)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Coefficienten haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned}
(a\,a) &= [p'] - \frac{p_1'}{[p_1]}p_1' - \frac{p_2'}{[p_2]}p_2' - \frac{p_3'}{[p_3]}p_3' - \dots \\
-(a\,b) &= \frac{p_1'}{[p_1]}p_1'' + \frac{p_2'}{[p_2]}p_2'' + \frac{p_3'}{[p_3]}p_3'' + \dots \\
-(a\,c) &= \frac{p_1'}{[p_1]}p_1''' + \frac{p_2'}{[p_2]}p_2''' + \frac{p_3'}{[p_3]}p_3''' + \dots \\
(b\,b) &= [p''] - \frac{p_1''}{[p_1]}p_1'' - \frac{p_2''}{[p_2]}p_2'' - \frac{p_3''}{[p_3]}p_3'' - \dots \\
-(b\,c) &= \frac{p_1''}{[p_1]}p_1''' + \frac{p_2''}{[p_2]}p_2''' + \frac{p_3''}{[p_3]}p_3''' + \dots \\
(c\,c) &= [p'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]}p_1''' - \frac{p_2'''}{[p_2]}p_2''' - \frac{p_3'''}{[p_3]}p_3'''
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Die Absolutglieder sind:

$$\left.\begin{aligned}
-(a\,l) &= [l'] - \frac{p_1'}{[p_1]}[l_1] - \frac{p_2'}{[p_2]}[l_2] - \frac{p_3'}{[p_3]}[l_3] - \dots \\
-(b\,l) &= [l''] - \frac{p_1''}{[p_1]}[l_1] - \frac{p_2''}{[p_2]}[l_2] - \frac{p_3''}{[p_3]}[l_3] - \dots \\
-(c\,l) &= [l'''] - \frac{p_1'''}{[p_1]}[l_1] - \frac{p_2'''}{[p_2]}[l_2] - \frac{p_3'''}{[p_3]}[l_3] - \dots
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Endlich das Fehlerquadrat-Summenglied:

$$(l\,l) = [l\,l] - \frac{[l_1]^2}{[p_1]} - \frac{[l_2]^2}{[p_2]} - \frac{[l_3]^2}{[p_3]} - \dots \quad (13)$$

Bei den Coefficienten (11) und den Absolutgliedern (12) können alle gleichartigen Sätze zusammengefasst werden, dagegen bei (13) müssen alle Ablesungen *einzeln* behandelt werden. Das System (10) wird nun wie gewöhnlich weiter behandelt (vgl. § 25.), und giebt sowohl die Unbekannten x' x'' x''', als auch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w., und die Fehlerquadratsumme:

$$[v\,v] = (l\,l\,.\,3) \quad (14)$$

aus welcher das mittlere Fehlerquadrat berechnet wird:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{R - n - (s-1)} \quad (15)$$

Um den Nenner $R - n - (s-1)$ zu verstehen, muss man nach (6) überlegen, dass R die Anzahl aller eingeschnittenen Richtungen ist, n die Anzahl der Sätze und s die Anzahl der Zielpunkte. Damit ist auch n die Anzahl der Nullpunkts-Korrektionen z_1 z_2 ... z_n und bei s Strahlen ist $s-1$ die Anzahl der unabhängigen unbekannten Winkel x' x'' x''' ... also $n + (s-1)$ die Anzahl aller Unbekannten, woraus bei R Beobachtungen, nach dem Satze (19) § 27. S. 87 der Nenner $n - u = R - (n + (s-1))$ in (15) folgt.

Indem wir zu einem Zahlenbeispiel übergehen, bemerken wir, dass man unter $l°$ l' l'' u. s. w. nicht die vollen Winkelablesungen zu verstehen braucht, sondern dass man die Grade, Minuten und beliebige Sekunden ein für allemal absondern darf. So haben wir bei dem folgenden Beispiel S. 238, welches aus der „Gradmessung in Ostpreussen“ S. 101 und 102 ausgewählt ist, bei l' und l'' bzw. 26° 14′ 50″ und 87° 4′ 50″ vorn abgesondert.

Nach den Formeln (11) und nach dem Anblick der Tabelle S. 238 bildet man die Coefficienten:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$(a\,a) = 31 - \frac{0^2}{24} - \frac{19^2}{38} - \frac{12^2}{36} = +17{,}500$$

$$-(a\,b) = \frac{0}{24}12 + \frac{19}{38}0 + \frac{12}{36}12 = +4{,}000$$

$$(b\,b) = 24 - \frac{12^2}{24} - \frac{0^2}{38} - \frac{12^2}{36} = +14{,}000$$

und nach den Formeln (12) die Absolutglieder:

$$-(a\,l) = 68{,}25 - \frac{0}{24}37{,}25 - \frac{19}{38}48{,}50 - \frac{12}{36}53{,}25 = +26{,}250$$

$$-(b\,l) = 70{,}75 - \frac{12}{24}37{,}25 - \frac{0}{38}48{,}50 - \frac{12}{36}53{,}25 = +34{,}375$$

Dieses ist die unmittelbare Anwendung der Formeln (11) und (12), man wird sich aber bald gewöhnen, nach dem Anblick der Tabelle S. 238 kürzer so schreiben:

$$(a\,a) = 31 - \frac{0}{2}0 - \frac{1}{2}19 - \frac{1}{3}12 = +17{,}500$$

$$-(a\,b) = \frac{0}{2}12 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{3}12 = +4{,}000$$

$$(b\,b) = 24 - \frac{1}{2}12 - \frac{0}{2}0 - \frac{1}{3}12 = +14{,}000$$

Das Fehlersummenglied wird nach (13) so berechnet:

$$(l\,l) = 496{,}43 - \frac{165{,}68}{2} - \frac{168{,}73}{2} - \frac{285{,}42}{3} = 234{,}09$$

Die Normalgleichungen sind also in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} +17{,}50\,x' - 4{,}00\,x'' - 26{,}25 &= 0 \\ +14{,}00\,x'' - 34{,}37 &= 0 \\ +234{,}09 & \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Wenn man hier nach § 25. S. 82 einmal reduziert, so erhält man:

$$\begin{aligned} +13{,}086\,x'' - 40{,}370 &= 0 \\ +194{,}72 & \\ 70{,}18 &= [v\,v] \end{aligned}$$

also $x'' = +\frac{40{,}370}{13{,}086} = +2{,}205$ und zugleich $[\beta\,\beta] = \frac{1}{13{,}086} = 0{,}0764$

Kehrt man die Eliminationsordnung um, so bekommt man auch x' und $[\alpha\,\alpha]$.

Die Auflösung der Normalgleichungen (16) giebt also zunächst:

$$x' = +2{,}205 \qquad x'' = +3{,}085 \qquad (17)$$

$$[v\,v] = 70{,}2 \qquad (18)$$

Fügt man diese x' und x'' von (18) zu den Näherungsannahmen für Gilge und Lattenwalde hinzu, welche oben in der Tabelle auf S. 238 angegeben sind, so hat man die auf der Station Nidden ausgeglichenen Winkel:

$$\left.\begin{aligned} \text{Kalleninken-Gilge} &= 26^\circ\,14'\,50'' + x' = 26^\circ\,14'\,52{,}205'' \\ \text{Kalleninken-Lattenwalde} &= 87^\circ\,\;4'\,50'' + x'' = 87^\circ\,\;4'\,53{,}085'' \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Wir brauchen auch noch die Gewichts-Coefficienten der Normalgleichungen (16) und können dazu irgend eines der Verfahren von § 28. oder § 33. benützen. Den

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Station Nidden.

Quer-Summen $[p_q]$		Kalle-ninken l°	a Gilge l'	b Latten-walde l''	$l^\circ+l'+l''=[l_q]$	l'^2	l''^2	$[l_q]^2$
		0°0′00″	26°14′50″	87°4′50″				
	2	+ 0,00″		+ 5,00″	5,00		25,00	25,00
	2	0,00		5,75	5,75		33,06	33,06
	2	0,00		5,50	5,50		30,25	30,25
	2	0,00		7,00	7,00		49,00	49,00
	2	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
	2	0,00		2,75	2,75		7,56	7,56
12	2	0,00		1,50	1,50		2,25	2,25
	2	0,00		2,50	2,50		6,25	6,25
	2	0,00		0,50	0,50		0,25	0,25
	2	0,00		1,75	1,75		3,06	3,06
	2	0,00		1,00	1,00		1,00	1,00
	2	0,00		2,00	2,00		4,00	4,00
				37,25	37,25		165,68	165,68
$[p_1]=24$		(12)	(0)	(12)				
	2	+ 0,00	+ 4,25		4,25	18,06		18,06
	2	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
	2	0,00	0,75		0,75	0,56		0,56
	2	0,00	3,50		3,50	12,25		12,25
	2	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
	2	0,00	2,50		2,50	6,25		6,25
	2	0,00	1,25		1,25	1,56		1,56
	2	0,00	4,50		4,50	20,25		20,25
	2	0,00	3,00		3,00	9,00		9,00
19	2	0,00	6,00		6,00	36,00		36,00
	2	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
	2	0,00	2,75		2,75	7,56		7,56
	2	0,00	2,25		2,25	5,06		5,06
	2	0,00	0,00		0,00	0,00		0,00
	2	0,00	2,00		2,00	4,00		4,00
	2	0,00	1,75		1,75	3,06		3,06
	2	0,00	0,25		0,25	0,06		0,06
	2	0,00	1,00		1,00	1,00		1,00
	2	0,00	4,00		4,00	16,00		16,00
			48,50		48,50	168,73		168,73
$[p_2]=38$		(19)	(19)	(0)				
	3	0,00	+ 0,00	+ 2,75	2,75	0,00	7,56	7,56
	3	0,00	3,50	2,75	6,25	12,25	7,56	39,06
	3	0,00	1,25	3,00	4,25	1,56	9,00	18,06
	3	0,00	3,25	4,75	8,00	10,56	22,56	64,00
	3	0,00	2,25	3,75	6,00	5,06	14,06	36,00
12	3	0,00	3,75	3,25	7,00	14,06	10,56	49,00
	3	0,00	− 0,25	1,25	1,00	0,06	1,56	1,00
	3	0,00	1,25	1,75	3,00	1,56	3,06	9,00
	3	0,00	2,25	1,00	3,25	5,06	1,00	10,56
	3	0,00	0,50	2,25	2,75	0,25	5,06	7,56
	3	0,00	1,00	4,75	5,75	1,00	22,56	33,06
	3	0,00	1,00	2,25	3,25	1,00	5,06	10,56
			19,75	33,50	53,25	52,42	109,60	285,42
$[p_3]=36$		(12)	(12)	(12)	s. o.	168,73	165,68	
$[p]=98$		$[p^\circ]=43$	$[p']=31$ $[l']=68,25$	$[p'']=24$ $[l'']=70,75$			496,43	

einen Wert $[\beta\,\beta] = 0{,}0764$ haben wir schon gelegentlich bei (16) gefunden. Um alle Gewichts-Coefficienten zusammen zu erhalten, verfährt man etwa nach (20) S. 90, d. h. man bildet aus unseren Normalgleichungen (16) die folgenden (voll ausgeschriebenen) Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l|l} +17{,}50\,[\alpha\,\alpha] - 4{,}00\,[\alpha\,\beta] = 1 & +17{,}50\,[\alpha\,\beta] - 4{,}00\,[\beta\,\beta] = 0 \\ -4{,}00\,[\alpha\,\beta] + 14{,}00\,[\alpha\,\beta] = 0 & -4{,}00\,[\alpha\,\beta] + 14{,}00\,[\beta\,\beta] = 1 \end{array}\right\} \quad (20)$$

daraus erhält man die Gewichts-Coefficienten

$$\left.\begin{array}{ll} [\alpha\,\alpha] = +0{,}0611 & [\alpha\,\beta] = +0{,}0175 \\ & [\beta\,\beta] = +0{,}0764 \end{array}\right\} \quad (21)$$

Der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung wird nach (15) und (18):

$$m = \sqrt{\frac{70{,}2}{98-43-2}} = \sqrt{\frac{70{,}2}{53}} = \pm 1{,}15'' \quad (22)$$

Damit ist die Stationsausgleichung Nidden erledigt.

Die im Vorstehenden behandelte Stationsausgleichung ist zuerst von Bessel in der „Gradmessung in Ostpreussen" 1838, S. 69—71 gelehrt worden, jedoch ohne die Berechnung des Fehlerquadratsummengliedes und des mittleren Fehlers nach den Formeln (13)—(15), welche erst später dazu gekommen sind.

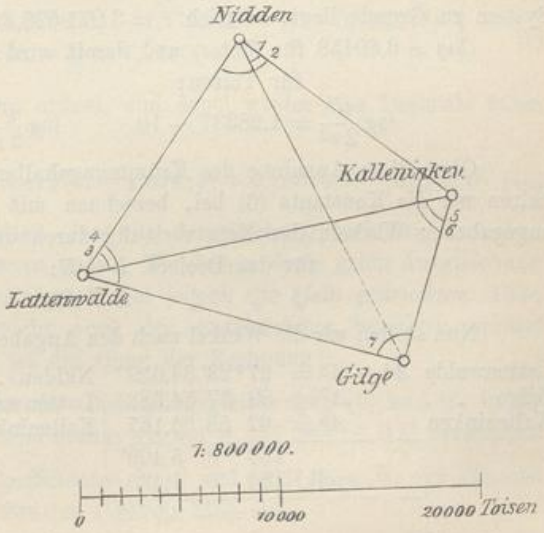
Bessel hat auf S. 70 der Gradmessung in Ostpreussen statt unserer l die Bezeichnungen m, m_1', m_2' u. s. w., und statt unserer z_1, z_2, z_3 die Zeichen x, x_1, x_2 u. s. w., ferner entsprechen unseren x', x'', x''' die Bessel schen A, B, C. Unsere z_1, z_2, z_3 stehen in einer gewissen Beziehung zu derjenigen Grösse, welche auf S. 134 der Gradmessung in Ostpreussen von Bessel mit z bezeichnet ist, vgl. hiezu unseren späteren § 74.

Die Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ haben wir hier nur aus der Elimination im Anschluss an (16) bestimmt, was sehr einfach geht, und z. B. bei der Landesaufnahme, in der Zeit dieser Methode, immer so gemacht wurde; man kann aber auch, was eine durchschlagende Probe giebt, ausserdem alle v einzeln ausrechnen, wozu die z nach (9) erforderlich sind. Die Einzelausrechnung und Quadrierung aller v findet man angewendet in dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts Heft III, 1882, vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1884", S. 73.

§ 72. Dreiecksnetz-Ausgleichung nach Bessels Methode.

Wir schneiden aus dem Netz der Gradmessung in Ostpreussen das in Fig. 1. gezeichnete Viereck mit zwei Diagonalen heraus, und wählen von den Originalmessungen der Gradmessung in Ostpreussen diejenigen aus, welche sich auf dieses Viereck beziehen. (Die Messungen in Kalleninken sind mit einem schwächeren Instrument gemacht, als die Messungen auf Nidden, Lattenwalde und Gilge; da es sich aber hier nur um ein einfaches Rechenbeispiel handelt, so werden wir von diesem Unterschiede absehen, und alle Originalmessungen als gleichberechtigt in die Ausgleichung einführen.)

Fig. 1.
Viereck der Gradmessung in Ostpreussen.



Die Beobachtungen und die Ausgleichung für die Station Nidden haben wir bereits im vorigen § 71. behandelt; für die übrigen Stationen geben wir die Originalmessungen nicht mehr, sondern nur die Ergebnisse der Stationsausgleichungen; es sind dieses zuerst die ausgeglichenen Winkel und dann die Gewichts-Coefficienten:

Station Nidden.	Winkel.	Gewichts-Coefficienten.	
Kalleninken—Gilge . .	$A^1 = 26°14'52{,}205''$	$[\alpha\alpha] = +0{,}0611$	$[\alpha\beta] = +0{,}0175$ (1)
Kalleninken—Lattenwalde	$A^2 = 87\ 4\ 53{,}085$		$[\beta\beta] = +0{,}0764$ (1)
Station Lattenwalde.			
Nidden—Kalleninken . .	$A^3 = 45°25'28{,}827''$	$[\alpha\alpha] = +0{,}1431$	$[\alpha\beta] = +0{,}0745$ (2)
Nidden—Gilge	$A^4 = 72\ 48\ 53{,}486$		$[\beta\beta] = +0{,}0805$ (2)
Station Kalleninken.			
Gilge—Lattenwalde . .	$A^5 = 62°58'36{,}167''$	$[\alpha\alpha] = +0{,}1667$	$[\alpha\beta] = +0{,}0833$ (3)
Gilge—Nidden	$A^6 = 110\ 28\ 23{,}667$		$[\beta\beta] = +0{,}1667$ (3)
Station Gilge.			
Lattenwalde—Kalleninken	$A^7 = 89°37'54{,}583$	$[\alpha\alpha] = +0{,}3333$	(4)

Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist nach den allgemeinen Regeln von § 58. leicht anzugeben; man hat:

$W = 7$ Winkel,
$p = 4$ Punkte,
$l = 6$ Linien, darunter $l' = 1$ einseitig gemessene Linie, also nach (12) § 58. S. 174

$l - 2p + 3 = 1$ Seitengleichung,
$l - l' - p + 1 = 2$ Dreiecksgleichungen,
$W - 2p + 4 = 3$ Gleichungen im Ganzen.

Als Grundlinie wählen wir nach S. 168 der „Gradmessung in Ostpreussen" die Seite:

Nidden—Lattenwalde $= 14\,047{,}7228$ Toisen $= 27\,379{,}522$ Meter (5)
($log = 4.147\,6059{\cdot}3$) ($log = 4.437\,4258{\cdot}6$)

Als Krümmungshalbmesser zur Excessberechnung nimmt Bessel auf S. 253 der Gradmessung in Ostpreussen den Äquatorhalbmesser der Erde, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, nämlich $r = 3\,271\,628{,}89$ Toisen $= 6\,376\,522$ Meter.

($log = 6.80458$ für Meter) und damit wird:

für Toisen:	für Meter:	
$log \frac{\varrho''}{2r^2} = 1.98387 - 10$	$log \frac{\varrho''}{2r^2} = 1.40423 - 10$	(6)

Ohne diese Annahme des Krümmungshalbmessers hier weiter zu erörtern, behalten wir die Konstante (6) bei, berechnen mit der Basis (5) und den bei (1)—(4) angegebenen Winkeln das Netz vorläufig durch und finden die sphärischen Excesse:

für das Dreieck $L\,G\,K$: $\varepsilon = 1{,}430''$
„ „ „ $L\,N\,K$: $\varepsilon = 1{,}835''$

Nun stellen wir die Winkel nach den Angaben (1)—(4) in Dreiecken zusammen:

Lattenwalde	$A^4 - A^3 =$	$27°23'34{,}659''$	Nidden . .	$A^2 =$	$87°\ 4'53{,}085''$
Gilge . .	$A^7 =$	$89\ 37\ 54{,}583$	Lattenwalde	$A^3 =$	$45\ 25\ 23{,}827$
Kalleninken	$A^5 =$	$62\ 58\ 36{,}167$	Kalleninken	$A^6 - A^5 =$	$47\ 29\ 47{,}500$
		$180°\ 0'\ 5{,}409''$			$180°\ 0'\ 4{,}412''$
	soll	$180\ 0\ 1{,}430$		soll	$180\ 0\ 1{,}835$
		$w = +3{,}979''$			$w = +2{,}577''$ (7)

Indem wir die Winkelverbesserungen mit (1) , (2) , ... (7) bezeichnen, haben wir die (7) entsprechenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(4) - (3) + (7) + (5) + 3{,}979'' = 0 \\ (2) + (3) + (6) - (5) + 2{,}577 \;\; = 0\end{array}\right\} \quad (8)$$

Zur Bildung der Seitengleichung kann man für G als Centralpunkt die Seite GK auf zweifache Art aus GL ableiten, dieses giebt:

$$\text{Es soll sein } \frac{\sin A^4 \sin A^5 \sin A^1}{\sin (A^2 - A^1) \sin A^6 \sin (A^4 - A^3)} = 1$$

was auf folgende logarithmische Rechnung führt:

			Diff. für 10″
$A^4 =$	72° 48′ 58,486″	$log\ sin\ A^4$ | 9.980 1680·4	+ 65
$A^5 =$	62 58 36,167″	$log\ sin\ A^5$ | 9.949 7909·0	+ 107
$A^1 =$	26 14 52,205″	$log\ sin\ A^1$ | 9.645 6725·3	+ 427
		Summe Z | 9.575 6314·7	
$A^2 - A^1 =$	60° 50′ 0,880″	$log\ sin\ (A^2 - A^1)$ | 9.941 1176·2	+ 117
$A^6 =$	110 28 23,667	$log\ sin\ A^6$ | 9.971 6634·1	— 78
$A^4 - A^3 =$	27 23 34,659	$log\ sin\ (A^4 - A^3)$ | 9.662 8434·6	+ 406
		Summe N | 9.575 6244·9	

Summe Z — Summe $N = w = + 69{\cdot}8$.

Damit wird die Seitengleichung für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:
$+ 0{,}65\,(4) + 1{,}07\,(5) + 4{,}27\,(1) - 1{,}17\,(2-1) + 0{,}78\,(6) - 4{,}06\,(4-3) + 6{,}98 = 0$

Wenn man die Coefficienten mit den Cotangenten nach (26) § 57. S. 168 genauer berechnet, und auch das Absolutglied nach dem Legendreschen Satz kontroliert (vgl. (10) § 59. S. 197), so wird vorstehende Gleichung mit mehr Decimalen:

$$\left.\begin{array}{r}+ 0{,}6511\,(4) + 1{,}0739\,(5) + 4{,}2698\,(1) - 1{,}1751\,(2-1) + 0{,}7861\,(7) \\ - 4{,}0630\,(4-3) + 7{,}0100 = 0\end{array}\right\} \quad (9)$$

Wenn man nach den Nummern ordnet, und dabei wieder eine Decimale fallen lässt, bekommt man:

$$+ 5{,}445\,(1) - 1{,}175\,(2) + 4{,}063\,(3) - 3{,}412\,(4) + 1{,}074\,(5) + 0{,}786\,(6) + 7{,}010 = 0 \quad (10)$$

Nun ist alles so weit vorbereitet, dass die Ausgleichung nach der Formelanweisung von § 55. S. 156–160 beginnen kann. Wir haben diese ganze Ausgleichung in der Tabelle auf S. 244—245 vereinigt, wobei jedoch die *klein gedruckten Teile*, welche sich auf ein Funktions-Gewicht *nach* der Ausgleichung beziehen, vorerst ausser Betracht bleiben. Folgendes ist der Gang der Rechnung:

I. Man setzt die Coefficienten der Bedingungsgleichungen (9) und (8) in die Tabelle S. 244. Diese Coefficienten sind ebenso wie auf S. 157 mit $A\,B\,C$ bezeichnet.

II. Man setzt die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. von (1)—(4) S. 240 ebenfalls tabellarisch auf S. 244 ein (vgl. S. 158).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

III. Die Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ u. s. w. werden nach den Formeln von S. 158 berechnet, z. B.:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1 &= A_1\,[\alpha\,\alpha] + A_2\,[\alpha\,\beta] + A_3\,[\alpha\,\gamma] + \ldots\\ &= 5{,}445 \times 0{,}0611 - 1{,}175 \times 0{,}0175\\ &= 0{,}3327 - 0{,}0206 = +\,0{,}3121.\end{aligned}$$

IV. Ausrechnung der Normalgleichungs-Coefficienten [I I] u. s. w. nach S. 158, z. B.:

$$\begin{aligned}[\mathrm{I\,I}] = [A\,\mathfrak{A}] = &+ 5{,}445 \times 0{,}3121\\ &- 1{,}175 \times 0{,}0053\\ &+ \ldots\ldots \text{ zusammen} = +\,3{,}3628.\end{aligned}$$

$[\mathrm{I\,II}] = [A\,\mathfrak{B}]$ oder $= [\mathfrak{A}\,B]$, mit Probe $= -\,0{,}0544$ u. s. w.

So erhält man die Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned}+\,\underline{3{,}3628\,k_1} - 0{,}0544\,k_2 + 0{,}3084\,k_3 + 7{,}010 &= 0\\ +\,\underline{0{,}5745\,k_2} - 0{,}1519\,k_3 + 3{,}979 &= 0\\ +\,\underline{0{,}3861\,k_3} + 2{,}577 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Die Auflösung, welche bei IV. S. 245 in zwei Reduktionen angedeutet ist, giebt die Korrelaten:

V. $\qquad k_1 = -\,1{,}384 \qquad k_2 = -\,9{,}520 \qquad k_3 = -\,9{,}313 \qquad (12)$

und nebenbei auch die Fehlerquadratsumme des Netzes:

V. $\qquad [\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}] = 71{,}5863 \qquad (13)$

Die Korrelaten k setzt man auf S. 244 nach III. hinauf und hat dann die Winkelkorrektionen nach S. 159 unmittelbar, z. B.:

VI.
$$\begin{aligned}(1) &= \mathfrak{A}_1\,k_1 + \mathfrak{B}_1\,k_2 + \mathfrak{C}_1\,k_3\\ (1) &= -\,0{,}3121 \times 1{,}384 \ldots - 0{,}0175 \times 9{,}313\\ (1) &= -\,0{,}4319 - 0{,}1630 = -\,0{,}5949''\end{aligned} \qquad (14)$$

Zur Probe kann man auch die Hilfsgrössen [1] [2] u. s. w. benützen, z. B. nach S. 159:

VII. $\qquad [1] = A_1\,k_1 + B_1\,k_2 + \ldots = 5{,}445\,(-\,1{,}384) = -\,7{,}5358$

Diese [1] [2] u. s. w. sind auf S. 244 als VII. oben unter I. beigesetzt.

Hat man sie alle berechnet, so hat man nach den Gewichtsgleichungen von S. 159:

$$\begin{aligned}(1) &= [1]\,[\alpha\,\alpha] + [2]\,[\alpha\,\beta] + \ldots\\ &= -\,7{,}536 + 0{,}0611 - 7{,}687 + 0{,}0175\\ (1) &= -\,0{,}4604 - 0{,}1345 = -\,0{,}5949\end{aligned} \qquad (15)$$

übereinstimmend mit (14). Alle diese Winkelverbesserungen sind unter der Bezeichnung (a) in dem am Schluss S. 343 angegebenen Abrisse enthalten.

Wenn alle diese Winkelkorrektionen (1) (2) ... (7) so kontrolliert sind, so fügt

man sie zu den ursprünglich gegebenen Winkeln hinzu, und hat dann folgende ausgeglichene Winkel:

Nidden	$A^1 + (1) =$	26° 14′ 51,610″
	$A^2 + (2) =$	87 4 52,366
Kalleninken	$A^3 + (3) =$	45° 25′ 22,694″
	$A^4 + (4) =$	72 48 57,696
Lattenwalde	$A^5 + (5) =$	62° 58′ 35,018″
	$A^6 + (6) =$	110 28′ 21,792
Gilge	$A^7 + (7) =$	89° 37′ 51,410″

(16)

Damit lässt sich das Netz ohne Widerspruch berechnen, und zwar giebt die sphärische Dreiecksberechnung mit 7 stelligen Logarithmen unter Zugrundlegung der schon oben bei (5) angegebenen Basisseite $L\,N$ die Seitenlogarithmen, welche in dem nachfolgenden Abriss enthalten sind. Dabei sind auch die in (16) bereits mitgeteilten ausgeglichenen Winkel nochmals in Form von Richtungen vorgeführt.

Abriss der Netzausgleichung zu Fig. 1. S. 239 nach Bessels Methode.

Zielpunkt	Stations-Ausgleichung A	Netzverbesserung (a)	Netz-Ausgleichung $A + (a)$	$\log S$
		1. Station Nidden		
Kalleninken	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	4.132 6080·0
Gilge . . . . . A^1	26 14 52,205	— 0,595″	26 14 51,610	4.268 2865·1
Lattenwalde . . . A^2	87 4 53,085	— 0,719	87 4 52,366	4.147 6059·3
		2. Station Lattenwalde		
Nidden	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	4.147 6059·3
Kalleninken . . . A^3	45 25 23,827	— 1.133″	45 25 22,694	4.279 4379·2
Gilge . . . . . A^4	72 48 58,486	— 0,790	72 48 57,696	4.229 2360·8
		3. Station Kalleninken		
Gilge	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	3.942 2898·3
Lattenwalde . . . A^5	62 58 36,167	— 1,149″	62 58 35,018	4.279 4379·2
Nidden . . . . A^6	110 28 23,667	— 1,875	110 28 21,792	4.132 6080·0
		4. Station Gilge		
Lattenwalde	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	4.229 2360·8
Kalleninken . . . A^7	89 37 54,583	— 3,173″	89 37 51,410	3.942 2898·3

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnungs-Ordnung.		*Bedingungsgleichungen.* (1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	w
I.	A	+ 5,445	− 1,175	+ 4,063	− 3,412	+ 1,074	+ 0,786		+ 7,010
	B			− 1,000	+ 1,000	+ 1,000		+ 1,000	+ 3,979
	C		+ 1,000	+ 1,000		− 1,000	+ 1,000		+ 2,577
	f		+ 0,107	− 4,063	+ 4,063	+ 1,929	− 1,929	− 0,013	
VII.		[1] = − 7,536	[2] = − 7,687	[3] = − 5,416	[4] = − 4,798	[5] = − 1,693	[6] = − 10,401	[7] = − 9,520	

Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ ... oder numeriert [1.1], [1.2] ...

		1	2	3	4	5	6	7	
II.	(1)	+ 0,0611	+ 0,0175						
	(2)	+ 0,0175	+ 0,0764						
	(3)			+ 0,1431	+ 0,0745				
	(4)			+ 0,0745	+ 0,0805				
	(5)					+ 0,1667	+ 0,0833		
	(6)					+ 0,0833	+ 0,1667		
	(7)							+ 0,3333	

		Übertragungs-Coefficienten $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$ ...							Correlaten s. unten V.
III.	$\mathfrak{A}$	+ 0,3121	+ 0,0053	+ 0,3270	+ 0,0282	+ 0,2445	+ 0,2205		$k_1 = -1{,}384$
	$\mathfrak{B}$			− 0,0686	+ 0,0060	+ 0,1667	+ 0,0833	+ 0,3333	$k_2 = -9{,}520$
	$\mathfrak{C}$	+ 0,0175	+ 0,0764	+ 0,1431	+ 0,0745	− 0,0833	+ 0,0833		$k_3 = -9{,}313$
	q	+ 0,0019	+ 0,0082	− 0,2787	+ 0,0244	+ 0,1609	− 0,1609	− 0,0043	
VI.	(. .)	− 0,595 = (1)	− 0,719 = (2)	− 1,133 = (3)	− 0,790 = (4)	− 1,149 = (5)	− 1,875 = (6)	− 3,173 = (7)	

		Normalgleichungen.							
		k_1	k_2	k_3	w	k_1	k_2	k_3	k'
IV.		$+\underline{3{,}3628}$	$-0{,}0544$	$+0{,}3084$	$+\ 7{,}0100$	$+\underline{3{,}363}$	$-0{,}054$	$+0{,}308$	$-1{,}168$
			$+\underline{0{,}5745}$	$-0{,}1519$	$+\ 3{,}9790$		$+\underline{0{,}574}$	$-0{,}152$	$+0{,}459$
				$+\underline{0{,}3861}$	$+\ 2{,}5770$			$+\underline{0{,}386}$	$-0{,}592$
					$+\ \underline{0{,}0000}$				$+\underline{1{,}853}$
			$+\underline{0{,}5736}$	$-0{,}1469$	$+\ 4{,}0924$		$+\underline{0{,}574}$	$-0{,}147$	$+0{,}440$
				$+\underline{0{,}3578}$	$+\ 1{,}9341$			$+\underline{0{,}358}$	$-0{,}485$
					$-\underline{14{,}6130}$				$+\underline{1{,}447}$
		$k_3 = -\frac{2{,}9822}{0{,}3202}$		$+0{,}3202$	$+\ 2{,}9822$			$+\underline{0{,}320}$	$-0{,}372$
		$= -9{,}313$			$-\underline{43{,}8110}$				$+\underline{1{,}111}$
V.		$-1{,}384$ $= k_1$	$-9{,}520$ $= k_2$	$-9{,}313$ $= k_3$	$-71{,}5863$ $= -[\mathfrak{v}\mathfrak{v}]$				$+0{,}677$ $= \frac{1}{P}$

§ 73. Genauigkeitsbestimmung für die Bessel sche Dreiecksnetz-Ausgleichung.

Das im vorhergehenden § 72. behandelte Viereckbeispiel zeigt unmittelbar die Bessel sche Methode, welche zuerst bei der Gradmessung in Ostpreussen 1834 zur Anwendung kam, und auch bei den darauf folgenden Preussischen Triangulierungen beibehalten wurde. Bessel hat seine Methode ohne Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen; und erst in den Arbeiten der Landesaufnahme seit 1870 haben wir die naturgemässe Weiterentwicklung der Bessel schen Methode auch in Hinsicht auf die Genauigkeitsuntersuchungen, welche wir nun an unserem Viereckbeispiel behandeln:

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird für jede Station durch die Stationsausgleichung geliefert, wie für Nidden in (21) § 71. S. 239 angegeben wurde.

Für alle 4 Stationen wurde so erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Nidden} & m = \sqrt{\frac{70{,}2}{53}} = \pm 1{,}15 \\ \text{Lattenwalde} & m = \sqrt{\frac{68{,}6}{48}} = \pm 1{,}20 \\ \text{Kalleninken} & m = \sqrt{\frac{183{,}3}{22}} = \pm 2{,}89 \\ \text{Gilge} & m = \sqrt{\frac{12{,}6}{5}} = \pm 1{,}59 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Diese Bestimmungen entsprechen der ersten Formel m_1 oder μ_1 S. 157. Alle 4 Stationen zusammen geben nach der zweiten Formel m_1 oder μ_1 S. 157:

$$m_1 = \sqrt{\frac{70{,}2 + 68{,}6 + 183{,}3 + 12{,}6}{53 + 48 + 22 + 5}} = \sqrt{\frac{334{,}7}{128}} = \pm 1{,}62'' \quad (2)$$

Übergehend zu der Fehlerquadratsumme, welche in der Netzausgleichung zu Tage tritt (bei der Landesaufnahme mit $[\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]$ bezeichnet), haben wir nach S. 159, unten, 3 Formeln, welche wir mit dem Material der Tabelle S. 244—245 alle ausrechnen:

1) $[v''\,v''] = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] = (1)\,[1] + (2)\,[2] + (3)\,[3] + \ldots$

	$(\cdot)$	$[\cdot]$	$(\cdot)\,[\cdot]$
1.	$-0{,}595$	$-7{,}536$	$+4{,}484$
2.	$-0{,}719$	$-7{,}687$	$+5{,}527$
3.	$-1{,}133$	$-5{,}416$	$+6{,}136$
4.	$-0{,}790$	$-4{,}798$	$+3{,}790$
5.	$-1{,}149$	$-1{,}693$	$+1{,}945$
6.	$-1{,}875$	$-10{,}401$	$+19{,}502$
7.	$-3{,}173$	$-9{,}520$	$+30{,}207$
			$71{,}591 = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]$ (3)

2) $[v''\,v''] = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] = -[w\,k]$

$w_1 = +7{,}010$	$k_1 = -1{,}384$	$-w_1 k_1 = +9{,}702$
$w_2 = +3{,}979$	$k_2 = -9{,}520$	$-w_2 k_2 = +37{,}880$
$w_3 = +2{,}577$	$k_3 = -9{,}313$	$-w_3 k_3 = +24{,}000$
		$-[w\,k] = 71{,}582 = [\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}]$ (4)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$3)\quad [v''\,v''] = [\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}] = \frac{w_1{}^2}{[\mathrm{I\,I}]} + \frac{[w_2 \,.\, 1]^2}{[\mathrm{II\,II}\,.\,1]} + \frac{[w_3 \,.\, 2]^2}{[\mathrm{III\,III}\,.\,2]}$$

$$= \frac{7{,}0100^2}{3{,}3628} + \frac{4{,}0924^2}{0{,}5736} + \frac{2{,}9822^2}{0{,}3202}$$

$$= 14{,}613 + 29{,}198 + 27{,}775 = 71{,}586 = [\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}] \qquad (5)$$

Dasselbe Resultat (5) steht übrigens auch schon unten auf S. 245, wo es schematisch gelegentlich mitberechnet worden ist.

Wir haben also nun in hinreichender Übereinstimmung aus (3) (4) und (5):

$$[\mathfrak{V}\,\mathfrak{V}] = 71{,}58.$$

Da die Anzahl der Netzbedingungsgleichungen $r = 3$ ist, so erhält man den mittleren Richtungsfehler aus der Netzausgleichung nach der Formel m_2 unten auf S. 159:

$$m_2 = \sqrt{\frac{71{,}58}{3}} = \pm 4{,}88'' \qquad (6)$$

Obgleich unser Beispiel in Bezug auf die Gewichtsbestimmung auf Kalleninken ein fingiertes ist (wie schon zu Anfang von § 72. S. 239 bemerkt wurde), so wird doch die allgemeine Erfahrung auch hier bestätigt, dass die Netzausgleichung einen grösseren mittleren Fehler m_2 ergiebt, als die Stationsausgleichungen $m_1 = +1{,}62''$ nach (2).

Aus den Stationen und aus dem Netz zusammen hat man nun nach der Formel für m oben auf S. 160:

$$m = \sqrt{\frac{334{,}7 + 71{,}6}{128 + 3}} = \sqrt{\frac{406{,}5}{131}} = \pm 1{,}76'' \qquad (7)$$

Da in dieser allgemeinen Formel (7) die Stationsausgleichungen, wie immer, bedeutend überwiegen, so ist (7) nicht erheblich verschieden von (2).

Um auch eine Anwendung der Theorie der Funktionsgewichte zu haben, bestimmen wir noch das Gewicht der Seite $G\,K$ als Funktion der als fehlerfrei angenommenen Basis $L\,N$ und der ausgeglichenen Viereckswinkel, d. h. es handelt sich um die Funktion:

$$G\,K = L\,N\,\frac{\sin A^2 \sin (A^4 - A^3)}{\sin (A^6 - A^5) \sin A^7}$$

oder für die Rechnung bequemer, um die logarithmische Funktion:

$$F = \log\sin A^2 + \log\sin (A^4 - A^3) - \log\sin (A^6 - A^5) - \log\sin A^7 \qquad (8)$$

wobei unter $A^1\,A^2\,\ldots$ die ausgeglichenen Winkel verstanden sind. Die partiellen Differentialquotienten dieser Funktion werden in gleicher Weise berechnet, wie die Coefficienten $A_1\,A_2\,\ldots$ der Seitenbedingungsgleichung (9) oder (10) § 72. S. 241. Die Resultate sind für Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$f_1 = 0\ ,\ f_2 = +0{,}107\ ,\ f_3 = -4{,}063\ ,\ f_4 = +4{,}063\ ,\ f_5 = +1{,}929$$
$$f_6 = -1{,}929\ ,\ f_7 = -0{,}013$$

Diese f fügt man der Tabelle S. 244 in der Abteilung I. bei (kleingedruckt).

Dann folgt die Berechnung der q nach den Formeln von S. 160. Diese q schliessen sich auf S. 244 unmittelbar den $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ an. Man hat:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

	q	f	fq
$q_1 =$	$0{,}107 \times 0{,}0175 = +0{,}0019$		
$q_2 =$	$0{,}107 \times 0{,}0764 = +0{,}0082$	$+0{,}107$	$+0{,}0009$
$q_3 = -4{,}063 \times 0{,}1431 + 4{,}063 \times 0{,}0745 = -0{,}2787$		$-4{,}063$	$+1{,}1324$
$q_4 = -4{,}063 \times 0{,}0745 + 4{,}063 \times 0{,}0805 = +0{,}0244$		$+4{,}063$	$+0{,}0991$
$q_5 = 1{,}929 \times 0{,}1667 - 1{,}929 \times 0{,}0833 = +0{,}1609$		$+1{,}929$	$+0{,}3104$
$q_6 = 1{,}929 \times 0{,}0833 - 1{,}929 \times 0{,}1667 = -0{,}1609$		$-1{,}929$	$+0{,}3104$
$q_7 = -0{,}013 \times 0{,}3333 = -0{,}0043$		$-0{,}013$	$+0{,}0000$
			$1{,}8532$ (10)
			$= [fq]$

Hier haben wir die Berechnung der Produkt-Summe $[fq]$ sogleich an die Berechnung der q angeschlossen.

Es folgt die Berechnung der Ersatzglieder nach den Doppelformeln von S. 160:

	A	q	Aq	$\mathfrak{A}$	f	$\mathfrak{A}f$
1.	$+5{,}445$	$+0{,}0019$	$+0{,}0103$	$+0{,}3121$		$0{,}0000$
2.	$-1{,}175$	$+0{,}0082$	$-0{,}0096$	$+0{,}0053$	$+0{,}107$	$+0{,}0006$
3.	$+4{,}063$	$-0{,}2787$	$-1{,}1324$	$+0{,}3270$	$-4{,}063$	$-1{,}3286$
4.	$-3{,}412$	$+0{,}0244$	$-0{,}0833$	$+0{,}0282$	$+4{,}063$	$+0{,}1146$
5.	$+1{,}074$	$+0{,}1609$	$+0{,}1720$	$+0{,}2445$	$+1{,}929$	$+0{,}4716$
6.	$+0{,}786$	$-0{,}1609$	$-0{,}1260$	$+0{,}2205$	$-1{,}929$	$-0{,}4253$
7		$-0{,}0043$	$0{,}0000$		$-0{,}013$	$0{,}0000$
			$-1{,}1690$			$-1{,}1671$
			$= [Aq]$			$= [\mathfrak{A}f]$

Die übrigen Ersatzglieder werden ebenso berechnet; alle 3 Ersatzglieder sind $-1{,}168 \quad +0{,}459 \quad -0{,}592$. Diese werden nebst dem schon bei (10) angegebenen $[fq] = 1{,}853$ in der Tabelle S. 245 rechts (im Kleingedruckten) beigesetzt, worauf die Elimination ganz von selbst auf den Wert führt:

$$\frac{1}{P} = 0{,}677$$

Dieses entspricht der Formel für $\frac{1}{P}$ unten auf S. 160, es kann auch ausführlicher so geschrieben werden:

$$\frac{1}{P} = 1{,}853 - \frac{1{,}168^2}{3{,}363} - \frac{0{,}440^2}{0{,}573} - \frac{0{,}372^2}{0{,}320}$$

$$= 1{,}853 - 0{,}400 - 0{,}338 - 0{,}432 = 0{,}677$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler ist bereits in (7) berechnet, $m = 1{,}76''$, also nun nach der Schlussformel von S. 130:

$$M = m\sqrt{\frac{1}{P}} = 1{,}76\sqrt{0{,}677} = 1{,}448$$

Dieses ist ein mittlerer Fehler in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, es ist also nach der Ausgleichung:

$$log\, G\, K = 3.942\,2898{\cdot}4 \pm 14{\cdot}5 \quad .$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 74. Die Besselsche Nullpunkts-Korrektion z.

Die Besselsche Methode rechnet durchaus mit *Winkeln*, und nicht mit *Richtungen;* auf jeder Station mit s Strahlen werden $s-1$ Winkel als unabhängige Unbekannte eingeführt (während die Zahl der Richtungen $= s$ wäre). Es sind daher die Grössen x' x'' x''' auf den Stationen Winkelkorrektionen, und ebenso sind auch die (1) (2) (3) ... Winkelkorrektionen im Netz.

Wir wollen für die Station Nidden unseres Vierecks von § 72. die allmähliche Verbesserung nach § 71. und § 72. zusammenstellen:

Station Nidden:

Zielpunkt:	erste Annahme S. 238:	Stations-Ausgleichung S. 237:	
Kalleninken	0° 0′ 0″		0° 0′ 0,000″
Gilge	26 14 50	$x' = +2{,}205''$	26 14 52,205
Lattenwalde	87 4 50	$x'' = +3{,}085$	87 4 53,085

Zielpunkt:	Stations-Ausgleichung S. 243:	Netz-Ausgleichung S. 243 und S. 243:		Anschnittszahlen:
Kalleninken	0° 0′ 0,000″		0° 0′ 0,000″	$[p^\circ] = 43$
Gilge	26 14 52,205	(1) $= -0{,}595$	26 14 51,610	$[p'] = 31$
Lattenwalde	87 4 53,085	(2) $= -0{,}719$	87 4 52,366	$[p''] = 24$
				$[p] = 98$

Wir haben hier sogleich die Anschnittszahlen nach der Stations-Tabelle § 71. S. 238 hinzugesetzt, weil hierauf sich eine passende Verteilung der Netzverbesserungen (1) und (2) auf alle *drei* Strahlen gründen lässt, man rechnet nämlich nach Bessel:

$$-z = \frac{[p^\circ]\,0 + [p'](1) + [p'''](2)}{[p^\circ] + [p'] + [p'']} = \frac{[p'](1) + [p''](2) + \ldots}{[p]} \qquad (1)$$

$$-z = \frac{31(-0{,}595) + 24(-0{,}719)}{98} = \frac{-35{,}701}{98} = -0{,}364$$

Diese Änderung bringt man an allen Winkeln und an dem Nullwert des Anfangsstrahls an, und reduziert damit die Winkel auf Richtungen:

Zielpunkt:	Stations-Ausgleichung:	Netz-Ausgleichung:	
Kalleninken	0° 0′ 0,000″	$-0{,}364$	359° 59′ 59,636″
Gilge	26 14 52,205	$-0{,}595 - 0{,}364 = -0{,}959$	26 14 51,246
Lattenwalde	87 4 53,085	$-0{,}719 - 0{,}364 \quad -1{,}083$	87 4 52,002

Sachlich hat man offenbar gar nichts geändert, denn die *Differenzen* der Richtungen, auf welche es allein ankommt, sind dieselben geblieben. Deswegen ist auch diese von Bessel bei der Gradmessung in Ostpreussen eingeführte Richtungs-Reduktion später (z. B. bei der Landesaufnahme) als überflüssig wieder fallen gelassen worden, zumal die Formel (1) für z, im allgemeinen gar nicht streng begründet werden, sondern nur als Hilfsmittel zu einer passenden Verteilung der (1) (2) (3) ... auf alle Strahlen, empfohlen werden kann.

Um dieses näher zu untersuchen, betrachten wir die Nullpunktsverbesserungen in den einzelnen Sätzen, nämlich nach (9) § 71. S. 235:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{aligned} -z_1 &= \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x''' - [l_1]}{[p_1]} \\ -z_2 &= \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x''' - [l_2]}{[p_2]} \\ -z_3 &= \frac{p_3' x' + p_3'' x'' + p_3''' x''' - [l_3]}{[p_3]} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wenn man den $z_1\ z_2\ z_3$ bzw. die Gewichte $[p_1]\ [p_2]\ [p_3]$ zuteilt, und dem entsprechend den Mittelwert (z) bildet, so erhält man:

$$\text{Mittelwert } -(z) = \frac{[p_1] z_1 + [p_2] z_2 + [p_3] z_3}{[p_1] + [p_2] + [p_3]} \quad (3)$$

und mit Einsetzung der Werte $z_1\ z_2\ z_3$ aus der Gleichungsgruppe (2):

$$-(z) = \frac{[p'] x' + [p''] x'' + [p'''] x''' - [l]}{[p]} \quad (4)$$

Wir haben früher in § 71. diesen Mittelwert (z) nicht bestimmt, weil weder dieser, noch auch die Einzelwerte $z_1\ z_2\ z_3 \ldots$ für die Netzausgleichung gebraucht wurden, jedoch kann man nun zusehen, was aus (z) wird, wenn man in (4), statt der Werte $x'\ x''\ x'''$, welche die Stationsausgleichungen geliefert haben, die entsprechenden Werte der Netzausgleichung einsetzt. Infolge der Netzausgleichung gehen die $x'\ x''\ x'''$ über in $x' + (1)$, $x'' + (2)$, $x''' + (3)$, und (z) soll übergehen in $(z) + z$, d. h. man erhält aus (4) folgendes:

$$-((z) + z) = \frac{[p'] (x' + (1)) + [p''] (x'' + (2)) + [p'''] (x''' + (3)) - [l]}{[p]} \quad (5)$$

Vergleicht man dieses wieder mit (4), so folgt:

$$-z = \frac{[p'] (1) + [p''] (2) + [p'''] (3)}{[p]} \quad (6)$$

Dieses ist die zu Anfang angegebene Bessel'sche Formel (1).

Das Bessel'sche z ist also die Änderung, welche das arithmetische Mittel (z) der einzelnen Satz-Nullpunkts-Verbesserungen $z_1\ z_2\ z_3$, oder das Mittel der Stationswinkel-Verbesserungen $x'\ x''\ x'''$, durch Zuziehung der Netz-Verbesserungen (1) (2) (3) ... erfährt.

Eine bestimmte in der Gesamtausgleichung liegende Veranlassung, diese Mittel zu bilden, liegt aber nicht vor, die Bessel'sche Ausgleichung verzichtet von vornherein auf symmetrische Fehlerverteilung, weil auf jeder Station *ein* Strahl als Anfangsstrahl bevorzugt wird, und diesem Umstand kann nachträglich durch Berechnung des willkürlichen z nicht mehr abgeholfen werden.

Es giebt nur wenige Fälle, in welchen die Berechnung des Bessel'schen z als passende Näherung einem Bedürfnis entspricht, wenn es nämlich sich darum handelt, die Fehlerverteilung in Hinsicht auf etwaige unbekannte Fehlerquellen zu untersuchen; in diesem Falle muss man *jedem* Strahl einen Fehler zuteilen, und kann nicht auf jeder Station einen Strahl als Anfangsstrahl korrektionslos lassen.

Man vergleiche hiezu eine Erörterung von Helmert in der Vierteljahrsschrift der astron Gesellschaft 1877, S. 206—208, und von Schreiber in der Zeitschr. f. Verm. 1879, S. 103.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 75. Theorie der vollen Richtungssätze.

Die Berechnung voller Richtungssätze haben wir bereits in § 68. behandelt; es zeigte sich, dass diese Berechnung an sich lediglich in der Mittelbildung aus den einzelnen Ablesungen besteht, und es hat sich auch daran die Berechnung eines mittleren Richtungsfehlers leicht angeschlossen. Indessen konnten wir die Begründung für jene Fehlerberechnung in § 68. noch nicht streng geben, und da auch sonst noch manches hiezu zu sagen ist, behandeln wir die vollen Richtungssätze hier nochmals, indem wir dieselben als besonderen Fall der allgemeinen Richtungsausgleichung von § 70. auffassen.

Wenn wir bei s Sichten oder Zielpunkten in jedem Satze eine Anzahl von n vollen Sätzen haben, so geben die Formeln (7) § 71. S. 234:

die Satzgewichte $[p^\circ] = [p'] = [p''] = [p'''] \ldots = n$ (1)

und bei s Zielpunkten $[p_1] = [p_2] = [p_3] \ldots = s$ (2)

Damit werden die Normalgleichungs-Coefficienten nach (11) und (12) § 71. S. 236:

$$\left.\begin{array}{l|l|l} (a\,a) = n - \frac{n}{s} & -(a\,b) = \frac{n}{s} & -(a\,c) = \frac{n}{s} \\ & (b\,b) = n - \frac{n}{s} & -(b\,c) = \frac{n}{s} \\ & & (c\,c) = n - \frac{n}{s} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} -(a\,l) = [l'] - \frac{[l]}{s} \\ -(b\,l) = [l''] - \frac{[l]}{s} \\ -(c\,l) = [l'''] - \frac{[l]}{s} \\ (l\,l) = [l\,l] - \frac{[[l_n]^2]}{s} \end{array}\right\} \quad (3)$$

Die voll geschriebenen Normalgleichungen sind daher:

$$\text{Anzahl} = s-1 \left\{\begin{array}{lll} \left(n - \frac{n}{s}\right) x' & -\frac{n}{s} x'' & -\frac{n}{s} x''' - \left([l'] - \frac{[l]}{s}\right) = 0 \\ -\frac{n}{s} x' + \left(n - \frac{n}{s}\right) x'' & & -\frac{n}{s} x''' - \left([l''] - \frac{[l]}{s}\right) = 0 \\ -\frac{n}{s} x' & -\left(\frac{n}{s}\right) x'' + \left(n - \frac{n}{s}\right) x''' & -\left([l'''] - \frac{[l]}{s}\right) = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Zum Zweck der Auflösung nach x' x'' x''' werden alle diese Gleichungen addiert und geben:

$$\frac{n}{s} x' + \frac{n}{s} x'' + \frac{n}{s} x''' - \frac{[l]}{s} = 0 \quad (5)$$

Vergleicht man diese Summengleichung (5) mit den einzelnen Gleichungen (4) so erhält man die Auflösungen:

$$x' = \frac{[l']}{n} \qquad x'' = \frac{[l'']}{n} \qquad x''' = \frac{[l''']}{n} \quad (6)$$

d. h. ein einfaches Resultat, welches mit der Mittelbildung in § 68. übereinstimmt.

Das mittlere Fehlerquadrat einer Richtung wird nach (15) § 71. S. 236, weil die Anzahl aller gemessenen Richtungen $R = n\,s$ ist:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{R - n - (s-1)} = \frac{[v\,v]}{n\,s - n - (s-1)} = \frac{[v\,v]}{(n-1)(s-1)} \quad (7)$$

Um die Summe $[v\,v]$ zu bestimmen, muss man die einzelnen v ausrechnen und quadrieren, was hier wohl der einzige zweckmässige Weg ist, (vgl. die kleingedruckte Anmerkung am Schlusse von § 71. S. 239) und zwar wollen wir nun zeigen, dass

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

das schon in § 68. fast ohne Theorie gefundene Verfahren den Formeln von § 71. entspricht.

Wir wollen dazu der Zahlenrechnung von § 68. mit unseren Formeln folgen, jedoch zuvor bemerken, dass in § 68. und § 71. die Zahlentabellen in Bezug auf Spalten und Linien verschieden angeordnet sind, indem in § 68. die Sätze in Vertikalspalten und in § 71. die Sätze in Horizontallinien stehen. Nachfolgendes entspricht § 68. S. 225:

Zielpunkt	Satz_1	Satz_2	Satz_3	Richtungsmittel
P°	l_1°	l_2°	l_3°	$\frac{[l^\circ]}{n} = 0$
P'	l_1'	l_2'	l_3'	$\frac{[l']}{n} = x'$
P''	l_1''	l_2''	l_3''	$\frac{[l'']}{n} = x''$
. .	. .	. .	. .	. . . . .
Satzmittel	$\frac{[l_1]}{[p_1]}$	$\frac{[l_2]}{[p_2]}$	$\frac{[l_3]}{[p_3]}$	$\frac{x'+x''+..}{[p_1]} = \frac{x'+x''+..}{[p_2]} = ..$
Satzverschiebung	$\frac{[l_1]}{[p_1]} - \frac{x'+x''}{[p_1]}$	$\frac{[l_2]}{[p_2]} - \frac{x'+x''}{[p_2]}$	$\frac{[l_3]}{[p_3]} - \frac{x'+x''}{[p_3]}$	
	$= z_1$	$= z_2$	$= z_3$	$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = 0$
Verschobene Sätze	$l_1^\circ - z_1$	$l_2^\circ - z_2$	$l_3^\circ - z_3$	0
	$l_1' - z_1$	$l_2' - z_2$	$l_3' - z_3$	x'
	$l_1'' - z_1$	$l_2'' - z_2$	$l_3'' - z_3$	x''
	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. .
Satzmittel	$\frac{[l_1]}{[p_1]} - z_1$	$\frac{[l_2]}{[p_2]} = z_2$	$\frac{[l_3]}{[p_3]} - z_3$	
Übrig bleibende Fehler v	$v_1^\circ = 0 - (l_1^\circ - z_1)$	$v_2^\circ = 0 - (l_2^\circ - z_2)$	$v_3^\circ = 0 - (l_3^\circ - z_3)$	
	$v_1' = x' - (l_1' - z_1)$	$v_2' = x' - (l_2' - z_2)$	$v_3' = x' - (l_3' - z_3)$	
	$v_1'' = x'' - (l_1'' - z_1)$	$v_2'' = x'' - (l_2'' - z_2)$	$v_3'' = x'' - (l_3'' - z_3)$	
	. . . . .	. . . . .	. . . . .	

Diese v sind übereinstimmend mit den v in (4) § 71. S. 234 (nur sind jene in § 71. nach Spalten und Linien umgekehrt geordnet im Vergleich mit diesen); damit ist die in § 68. gelehrte Berechnung der v und der $[v\,v]$ und dann die Berechnung des mittleren Fehlers theoretisch begründet.

Gewichtsberechnung für volle Sätze.

Die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ ... zu den Normalgleichungen (4) bekommt man nach (20) § 28. S. 90 dadurch, dass man die Absolutglieder der Normalgleichungen durch $-1, 0, 0 \ldots$ ersetzt, d. h. man bekommt aus (4) folgende Gewichtsgleichungen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\text{Anzahl} = s-1 \left\{ \begin{array}{llll} \left(n-\frac{n}{s}\right)[\alpha\alpha] - & \frac{n}{s}[\alpha\beta] - & \left(\frac{n}{s}\right)[\alpha\gamma] - \ldots = 1 \\ -\frac{n}{s}[\alpha\alpha] + & \left(n-\frac{n}{s}\right)[\alpha\beta] - & \frac{n}{s}[\alpha\gamma] - \ldots = 0 \\ -\frac{n}{s}[\alpha\alpha] - & \frac{n}{s}[\alpha\beta] + & \left(n-\frac{n}{s}\right)[\alpha\gamma] - \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots = 0 \end{array} \right. \tag{8}$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, bildet man zuerst ihre Summe:

$$\frac{n}{s}[\alpha\alpha] + \frac{n}{s}[\alpha\beta] + \frac{n}{s}[\alpha\gamma] + \ldots = 1$$

Diese Summengleichung zu jeder einzelnen Gleichung der Gruppe (8) hinzugefügt giebt:

$$\begin{array}{llll} n[\alpha\alpha] & \ldots\ldots & & = 2 \\ & n[\alpha\beta] & \ldots\ldots & = 1 \\ & & n[\alpha\gamma] & = 1 \end{array}$$

und da ähnliche Beziehungen auch für $[\beta\beta]$ u. s. w. gelten, haben wir nun:

$$[\alpha\alpha] = [\beta\beta] = \quad [\gamma\gamma] = \ldots \quad = \frac{2}{n} \tag{9}$$

$$[\alpha\beta] = [\alpha\gamma] = \ldots [\beta\gamma] = \ldots \quad = \frac{1}{n} \tag{10}$$

Die $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]\ldots$ sind die Gewichtsreciproken der Winkel x' , x'' , $x'''\ldots$ welche der zweite, dritte ... Strahl , P' , P'' , $P'''\ldots$ mit dem ersten Strahl P° bilden (vgl. Fig. 1. S. 232) und für den Winkel $P'\,P''$, welcher $= x'' - x'$ ist, erhält man die Gewichts-Reciproke nach der Theorie von § 29.

(mit $f_1 = -1$, $f_2 = +1$, $f_3 = 0$ in (3) S. 92):

$$\frac{1}{P(x'\,x'')} = [\alpha\alpha] - 2[\alpha\beta] + [\beta\beta] = \frac{2}{n} - \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \frac{2}{n} \tag{11}$$

Dasselbe gilt für jeden Winkel zwischen je zwei Strahlen eines vollen Richtungssatzes, und deswegen können wir nun allgemein aussprechen:

Wenn eine Gruppe von n gleichartigen Richtungssätzen mit beliebig vielen Strahlen durch Mittelbildung in *einen* Satz zusammengezogen wird, so hat jedes ausgeglichene Richtungs-Mittel das Gewicht $= n$, und jeder Winkel zwischen zwei solchen Richtungen das Gewicht $= \frac{n}{2}$, wobei das Gewicht $= 1$ zu einer ursprünglichen Richtung gehört, oder in Zusammenstellung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Gewicht einer beobachteten Richtung} = 1 \\ \text{„ „ ausgeglichenen Richtung} = n \\ \text{„ eines ausgeglichenen Winkels} = \frac{n}{2} \end{array}\right\} \tag{12}$$

Eine Nebenbemerkung wollen wir noch anstellen in Bezug auf die Fehlerberechnung in einem so zusammengefassten Richtungssatze. Wie die soeben angestellte Gewichtsbestimmung (12) zeigt, kann man statt n beobachteter einzelner Richtungen, deren Mittelwert als *eine* Richtung mit dem Gewichte $= n$ in weitere Rechnungen, z. B. in eine Netzausgleichung, einführen, gerade wie bei dem arithmetischen Mittel in § 7.; und wenn mehrere ungleichartige Sätze je in sich wiederholt, zusammen ausgeglichen werden sollen, so kann man auch statt aller gleichgewichtigen ursprünglichen Einzelsätze die Mittel aus den gleichartigen Sätzen als

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

ungleichgewichtige Elemente in die Ausgleichung einführen, so lange es sich nur um die Ausgleichung selbst und um Gewichte handelt, z. B. die ganze Tabelle für die Station Nidden in § 71. auf S. 238 könnte vor der Ausgleichung in 3 Sätzen dargestellt werden, von denen der erste nur l° und l'' mit $p_1 = 12$, der zweite l° und l' mit $p_2 = 19$ und der dritte l° , l' , l'' mit $p_3 = 12$ enthielte. Damit würde man genau dieselben x' , x'' auch $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\beta\,\beta]$ erhalten, wie bei der ausführlichen Rechnung in § 71., aber die Summe $[v\,v]$ und der mittlere Fehler würden anders und viel weniger zuverlässig.

Wollte man das Mittel aus n Sätzen als *einen* Satz mit dem Gewicht $= n$ (ohne andere Sätze oder Satzmittel) in sich selbst ausgleichen, und die Formeln des § 71. auf diesen Fall anwenden, so würde man natürlich zunächst den Satz selbst mit dem Gewicht $= n$ wiederfinden, wollte man aber auch die Fehlerberechnung mit $[v\,v]$ darauf anwenden, so würde man finden:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{(n-1)\,(s-1)} = \frac{0}{0} \tag{13}$$

oder in Worten: Wenn lauter volle Sätze in der Anzahl n vorliegen, so besteht die Stationsausgleichung lediglich in einer Mittelbildung, wodurch *ein* Satz vom Gewichte $= n$ erhalten wird, der aber an sich keinen Aufschluss über die Genauigkeit giebt. Zur Genauigkeitsuntersuchung muss man vielmehr auf die einzelnen Sätze zurückgehen.

§ 76. Besonderer Fall dreier Sichtstrahlen.

Der Fall *dreier* Sichten, welche in verschiedenen Kombinationen zusammen gemessen sind, bietet besonderes Interesse, weil in diesem Falle, ebenso wie bei der Mittelbildung aus gleichartigen Sätzen, es möglich sein wird, das ganze Ergebnis der Ausgleichung in Form von 3 einzelnen *Richtungen* mit gewissen Gewichten darzustellen. Bei mehr als drei Sichten ist das im Allgemeinen nicht mehr der Fall.

Wir wollen den Fall dreier Sichtstrahlen zuerst in (1)—(10) noch *nicht* erschöpfend behandeln, sondern zunächst nur annehmen, dass die 3 *Winkel* gemessen sind, welche zwischen den 3 Strahlen möglich sind.

Wir haben hiezu zwei Figuren gezeichnet, Fig. 1. und Fig. 2., von denen die

Fig. 1.
3 Richtungen und 3 Winkel.

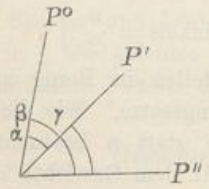
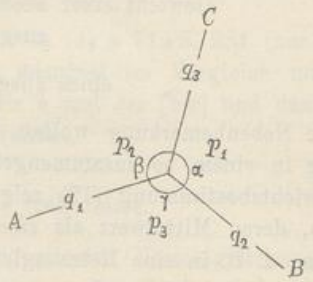


Fig. 2.
3 Richtungen und 3 Winkel.



erste Fig. 1. sich mehr den früheren Bezeichnungen von § 71. anschliesst, während Fig. 2. mehr der Symmetrie Rechnung trägt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach Fig. 2. nehmen wir folgendes an:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Strahlen} & A & B & C & & \\ \text{Gemessene Winkel} & CB=\alpha & \text{mit dem} & \text{Gewicht} & p_1 & \\ \text{„} \quad \text{„} & AC=\beta & \text{„} \quad \text{„} & \text{„} & p_2 & \\ \text{„} \quad \text{„} & BA=\gamma & \text{„} \quad \text{„} & \text{„} & p_3 & \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die drei Winkel α , β , γ in Fig. 2. müssen der Bedingung genügen:

Es soll sein $\alpha+\beta+\gamma-360°=0$

Wegen der Beobachtungsfehler wird werden:

$$\alpha+\beta+\gamma-360°=w \quad (2)$$

Zur Tilgung des Widerspruches w werden die Verbesserungen v_1 , v_2 , v_3 angebracht, so dass wird:

$$(\alpha+v_1)+(\beta+v_2)+(\gamma+v_3)=0$$

Dieses mit dem vorhergehenden zusammengenommen giebt:

$$v_1+v_2+v_3+w=0 \quad (3)$$

Dieses ist eine Bedingungsgleichung von der Form (4) § 43. S. 126, d. h. es ist:

$$a_1=1 \qquad a_2=1 \qquad a_3=1 \quad (4)$$

Die Ausgleichung selbst, die uns hier weniger interessiert, wird lediglich darauf führen, den Widerspruch w in (2) umgekehrt proportional den Gewichten p_1 , p_2 , p_3 auf die drei Winkel α , β , γ zu verteilen (ähnlich wie in dem Dreiecksbeispiel S. 34).

Wir wollen aber dann das Gewicht P_α des ausgeglichenen Winkels α bestimmen nach der Anleitung von (13) S. 125, welche in unserem Falle giebt:

$$\frac{1}{P_\alpha}=\left[\frac{ff}{p}.1\right]=\left[\frac{ff}{p}\right]-\frac{\left[\frac{af}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} \quad (5)$$

Da die Ausgleichungsfunktion $F=\alpha$ ist, also $f_1=1$ und $f_2=0$, $f_3=0$, so wird mit den Coefficienten a in (4) und mit den Gewichten p in (1) sehr einfach:

$$\left[\frac{ff}{p}\right]=\frac{1}{p_1}\ ,\ \left[\frac{af}{p}\right]=\frac{1}{p_1}\ ,\ \left[\frac{aa}{p}\right]=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\left[\frac{1}{p}\right]$$

Aus diesen Vorbereitungen setzt sich (5) so zusammen:

$$\frac{1}{P_\alpha}=\frac{1}{p_1}-\left(\frac{1}{p_1}\right)^2\frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{P_\alpha}=\frac{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)}{\left[\frac{1}{p}\right]} \quad (6)$$

Dieses stimmt überein mit der Bedeutung von (17) und (21) S. 34 (mit geändertem Zeichen p_α statt p_1 u. s. w.) und man kann auch unsere Formel (6) wieder ebenso wie früher die Formeln von S. 34 kurz so begründen, dass man das Gewicht des ausgeglichenen Winkels α zusammensetzt aus dem Gewichte p_1 des gemessenen Winkels α selbst und dem Gewichte $\frac{p_2 p_3}{p_2+p_3}$ der Bestimmung von α auf dem Umweg über $360°-(\beta+\gamma)$.

Indessen, solche Nebenentwicklungen nicht weiter verfolgend, betrachten wir

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

die zweite Form in (6), welcher man noch eine andere sehr wichtige Bedeutung unterlegen kann, indem man schreibt:

$$\frac{1}{P_\alpha} = \frac{1}{q_3} + \frac{1}{q_2} \tag{7}$$

wobei

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \qquad \frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{8}$$

Hier haben q_3 und q_2 die Bedeutung unabhängiger *Richtungs*-Gewichte.

Wenn man die Formeln (8) auf alle Kombinationen 1.2 , 2.3 , 2.3 anwendet und auch noch etwas umformt, so hat man folgendes:

$$\frac{1}{q_1} = \frac{\frac{1}{p_2}\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_1}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad \text{oder} \quad q_1 = (p_2 + p_3) + \frac{p_2 p_3}{p_1} \tag{9a}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_3}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_2}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad , \quad q_2 = (p_3 + p_1) + \frac{p_3 p_1}{p_2} \tag{9b}$$

$$\frac{1}{q_3} = \frac{\frac{1}{p_1}\frac{1}{p_2}}{\left[\frac{1}{p}\right]} = \frac{p_3}{p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3} \quad , \quad q_3 = (p_1 + p_2) + \frac{p_1 p_2}{p_3} \tag{9c}$$

Hiezu gilt auch (7) in allen Kombinationen; und wir können nun den Satz aussprechen, dass, in Hinsicht auf die ausgeglichenen Winkel α β γ, man die durch Ausgleichung erlangte Genauigkeit darstellen kann durch Richtungsgewichte q_1 , q_2 , q_3, aus welchen sich die Winkelgewichte P_α , P_β , P_γ nach der Ausgleichung ebenso zusammensetzen, wie wenn die q zu unabhängigen Richtungsmessungen gehörten. (Vgl. hiezu Fig. 2.)

Als Gewichts-Einheit, $p = 1$, dient hiebei eine Winkelmessung (α, β oder γ) vom Gewichte 1, und wenn wir nun die Änderung machen wollen, dass ein *Richtungs*gewicht zur Einheit wird, so müssen wir nach (3) § 70. S. 231 statt (9a) schreiben:

$$q_1 = \frac{p_2 + p_3}{2} + \frac{p_2 p_3}{2 p_1} \tag{10}$$

wobei nun z. B. p_1 das Gewicht der gemessenen Richtung B und das Gewicht der gemessenen Richtung C ist, welche nach Fig. 2. den Winkel α zusammensetzen, wobei ausserdem angenommen ist, dass auch ein Satz $A\,C$ mit 2 Richtungsgewichten p_2 und ein Satz $B\,A$ mit 2 Richtungsgewichten p_3 gemessen ist.

Die Formel (9a) oder (10) hat das eigenthümliche, dass sie $q_1 = \infty$ giebt, wenn $p_1 = 0$ wird; wenn also der Winkel α gar nicht gemessen ist, aber der Winkel β mit dem Gewicht p_2 und der Winkel γ mit dem Gewicht p_3, so bekommt die Richtung A das Gewicht $q_1 = \infty$, die Richtung B das Gewicht $q_2 = p_3$ und die Richtung C das Gewicht $q_3 = p_2$; oder man kann sagen, wenn nur 2 Winkel zwischen 3 Sichten gemessen sind, so werden die Richtungsgewichte nur eine erzwungene Form, welche die ursprünglichen Winkelgewichte wieder in sich schliesst. Der Umstand, dass einzelne Gewichte unendlich werden, schadet übrigens nichts, wenn man solche Messungen in Richtungsform in eine Triangulierungsausgleichung nach bedingten

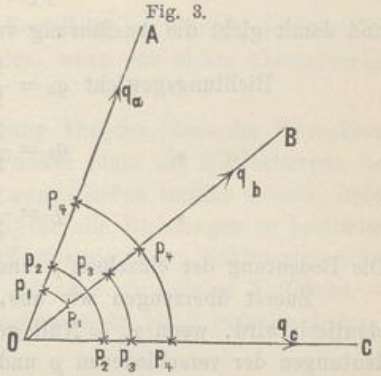
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beobachtungen einführen will, weil hiebei (nach § 40.) stets die Gewichts*reciproken* gebraucht werden, z. B. $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$, $\left[\frac{a\,b}{p}\right]$ u. s. w. auszurechnen ist, was mit einzelnen $p = \infty$ entsprechende Glieder-Null giebt, ohne die Rechnung formell zu beeinträchtigen.

Allgemeinster Fall für 3 Sichten.

Ausser den drei möglichen *Winkeln* zwischen drei Sichten kann auch noch ein *Richtungssatz* gemessen sein, welcher alle 3 Sichten zusammen trifft, und dann haben wir den allgemeinsten Fall der Messungs-Combinationen zwischen 3 Sichten, wie in Fig. 3. gezeigt und in nachfolgendem Schema dargestellt ist, im Anschluss an die Bezeichnungen von § 71.

Fig. 3.



Satz 1	$p_1{}^\circ\ p_1'\ .\ .$	dabei ist $[p_1] = 2\,p_1$	
Satz 2	$p_2{}^\circ\ .\ .\ p_2''$	$[p_2] = 2\,p_2$	(11)
Satz 3	$.\ .\ p_3'\ p_3''$	$[p_3] = 2\,p_3$	
Satz 4	$p_4{}^\circ\ p_4'\ p_4''$	$[p_4] = 3\,p_4$	

Wenn man hierauf die allgemeinen Formeln (11) § 71. S. 236 anwendet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} (a\,a) &= p_1 + p_3 + p_4 - \frac{p_1^2}{2\,p_1} - \frac{p_3^2}{2\,p_3} - \frac{p_4^2}{3\,p_4} = \frac{3\,p_1 + 3\,p_3 + 4\,p_4}{6} \\ -(a\,b) \qquad & \qquad \frac{p_3^2}{2\,p_3} + \frac{p_4^2}{3\,p_4} = \frac{3\,p_3 + 2\,p_4}{6} \\ (b\,b) &= p_2 + p_3 + p_4 - \frac{p_2^2}{2\,p_2} - \frac{p_3^2}{2\,p_3} - \frac{p_4^2}{3\,p_4} = \frac{3\,p_2 + 3\,p_3 + 4\,p_4}{6} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Zur Gewichtsberechnung brauchen wir hieraus nach § 17. S. 58—59:

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \quad (13)$$

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{[b\,b]}{D}\ ,\quad [\alpha\,\beta] = \frac{-[a\,b]}{D}\ ,\quad [\beta\,\beta] = \frac{[a\,a]}{D} \quad (14)$$

Die Ausführung mit (12) giebt:

$$D = \frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)}{12} \quad (15)$$

Daraus kann man zunächst die *Winkel*gewichte bilden; nämlich das Gewicht $P\,(A\,B)$ des Winkels $A\,B$ und das Gewicht $P\,(A\,C)$ des Winkels $A\,C$ sind so bestimmt:

$$\frac{1}{P\,(A\,B)} = [\alpha\,\alpha] \quad \text{und} \quad \frac{1}{P\,(A\,C)} = [\beta\,\beta] \quad (16)$$

der Winkel $B\,C$ setzt sich zusammen aus $A\,C - A\,B$ und deswegen wird das Gewicht des Winkels $B\,C$ nach (11) und (12) S. 78 (mit $f_1 = -1$, $f_2 = +1$) bestimmt durch:

$$\frac{1}{P\,(B\,C)} = [\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] - 2\,[\alpha\,\beta] \quad (17)$$

All dieses kann man auf die Form von *Richtungs*gewichten q bringen, indem man bestimmt, dass sein soll:

$$\frac{1}{P(A\,B)} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_b}\ ,\quad \frac{1}{P\,(A\,C)} = \frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_c}\ ,\quad \frac{1}{P\,(B\,C)} = \frac{1}{q_b} + \frac{1}{q_c} \quad (18)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses sind 3 Gleichungen zur Bestimmung von q_a , q_b , q_c, wozu die 3 Gleichungen (16) und (17) gerade hinreichen; man findet aus (16) , (17) , (18) die Auflösungen:

$$\frac{1}{q_a} = [\alpha\,\beta] \quad , \quad \frac{1}{q_b} = [\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] \quad , \quad \frac{1}{q_c} = [\beta\,\beta] - [\alpha\,\beta] \tag{19}$$

Vor der Einsetzung wollen wir noch zur Abkürzung schreiben:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = [p] \tag{20}$$

und damit giebt die Ausführung von (19) mit (13)—(15):

$$\left.\begin{aligned} \text{Richtungsgewicht } q_a &= \frac{1}{2}\,\frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,[p]}{3\,p_3 + 2\,p_4} \\ \text{„ } q_b &= \frac{1}{2}\,\frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,[p]}{3\,p_2 + 2\,p_4} \\ \text{„ } q_c &= \frac{1}{2}\,\frac{3\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) + 4\,p_4\,[p]}{3\,p_1 + 2\,p_4} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Die Bedeutung der einzelnen p und q liegt in Fig. 3. S. 257.

Zuerst überzeugen wir uns, dass q_c nach (21) mit dem früheren q_1 in (10) identisch wird, wenn $p_4 =$ Null gesetzt wird, wie es sein muss, wenn man die Bedeutungen der verschiedenen p und q in Fig. 2. und Fig. 3. vergleicht.

Wir wollen die Formeln (21) auf den Fall unseres Beispieles Station Nidden von S. 238 anwenden, und haben dann:

	$A =$ Kalleninken	$B =$ Gilge	$C =$ Lattenwalde
Satz $_1$	$p_1 = 19$	$p_1 = 19$	. . .
Satz $_2$	$p_2 = 12$	. . .	$p_2 = 12$
Satz $_3$	$p_3 = 0$	. . .	. . .
Satz $_4$	$p_4 = 12$	$p_4 = 12$	$p_4 = 12$

(22)

Nach (20) und (21): $[p] = 19 + 12 + 12 = 43$

$$p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3 = 19 \times 12 = 228$$

$$q_a = \frac{1374}{24} = 57{,}25 \quad , \quad q_b = \frac{1374}{60} = 22{,}90 \quad , \quad q_c = \frac{1374}{81} = 16{,}96 \tag{23}$$

Zur Probe haben wir von früher (21) § 71. S. 239:

$$[\alpha\,\alpha] = 0{,}0611 \qquad [\alpha\,\beta] = 0{,}0175 \qquad [\beta\,\beta] = 0{,}0764$$

also nach (19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_a} &= 0{,}0175 & \frac{1}{q_b} &= 0{,}0436 & \frac{1}{q_c} &= 0{,}0589 \\ q_a &= 57{,}14 & q_b &= 22{,}94 & q_c &= 16{,}98 \end{aligned} \tag{24}$$

Die Ergebnisse von (23) und (24) stimmen genügend überein.

Zur Vergleichung wollen wir auch die sogenannten „Anschnittszahlen“ hersetzen, welche man zuweilen als Richtungsgewichte genommen hat.

Als „Anschnittszahl“ wurde genommen die Anzahl von Einstellungen, welche eine Sicht im ganzen Verlaufe der Messungen auf einer Station erfahren hat, ohne Rücksicht auf die übrigen Sichten und die Verbindungen der Sichten unter sich.

Das Beispiel (22) giebt nach dieser Erklärung die Anschnittszahlen:

	Kalleninken	Gilge	Lattenwalde
Anschnittszahl	$q_a' = 43$	$q_b' = 31$	$q_c' = 24$

(25)

Wollte man diese (25) als Näherungen für die richtigen Gewichte (23) oder

(24) gelten lassen, so würde man also in A erheblich zu wenig und in B und C zu viel erhalten.

Wir wollen auch nochmals die Eigenthümlichkeit hervorheben, dass ein Richtungsgewicht $q = \infty$ werden kann, z. B. $p_3 = 0$ und $p_4 = 0$ giebt $q_a = \infty$ und dabei $q_b = \frac{1}{2} p_1$ und $q_c = \frac{1}{2} p_2$, also wieder wie schon bei (9) und (10) bemerkt wurde, nur gezwungene Richtungsform und thatsächlich Zerfällung in Winkelgewichte. Dasselbe wird auch stattfinden bei mehr als 3 Strahlen, wenn gar nichts überschüssiges gemessen ist.

Wir wollen hieran auch noch die Bemerkung knüpfen, dass die Viereckausgleichung von § 72, da das Viereck in keinem Punkte mehr als 3 Richtungen hat, auch nach dem Verfahren der Richtungsgewichte ausgeglichen werden könnte, indem man einfach die Gewichte q nach den Formeln (21) für alle Richtungen zu bestimmen und dann im wesentlichen nach § 59. (jedoch mit Zuziehung dieser Richtungsgewichte) zu verfahren hätte. Als Anwendung im Grossen ist aber ein solches Verfahren unmöglich, weil die Punkte eines Netzes im Allgemeinen mekr als 3 Strahlen haben.

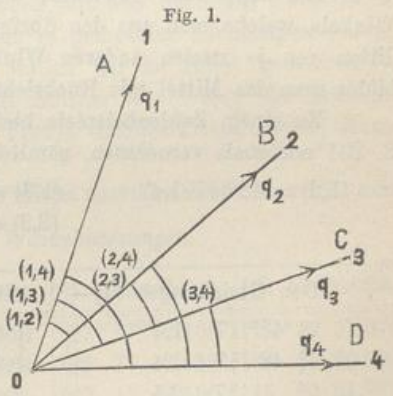
§ 77. Winkelmessung in allen Combinationen.

Die Winkelmessung in allen Combinationen ist nach den vollen Sätzen (§ 75.) und dem Falle dreier Strahlen (§ 76.) die dritte wichtige Anordnung von Winkelmessungen, weil sie, wie die beiden vorher erwähnten, die Ausgleichung mit der Form von Richtungsgewichten bieten wird.

Schon von Gauss und Gerling als Ideal gepriesen und von Hansen 1871 theoretisch behandelt, ist die Winkelmessung in allen Combinationen in neuester Zeit durch General Schreiber bei der Landesaufnahme zu neuem Leben gebracht worden, und bildet seit etwa 1880 den Grundton der preussischen Triangulierungen I. Ordnung.

Schon in § 67. haben wir die vorliegende Aufgabe mit einem Beispiele nach Gerling behandelt, und zwar mit gleichen und mit ungleichen Gewichten. Die ungleichen unregelmässig zerstreuten Gewichte sind aber in diesem Falle nicht erwünscht; gerade die *gleichen* Gewichte in Verbindung mit der gleichmässigen Verteilung geben dem Verfahren die Geschmeidigkeit und Übersichtlichkeit, welche seine Vorteile ausmachen.

Fig. 1.



Damit nehmen wir nun mit Fig. 1. an, man habe zwischen 4 Strahlen alle 6 möglichen Winkel gleichartig gemessen, nämlich:

Gemessene Winkel

(1,2) , (1,3) , (1,4) , (2,3) , (2,4) , (3,4) (1)

Als unabhängige Unbekannte sollen die 3 Winkel zwischen dem ersten Strahl und den 3 folgenden Strahlen gelten, welche zur Unterscheidung von den gemessenen Winkeln (1,2) , (1,3) , (1,3) nun mit [1,2] , [1,3] , [1,4] bezeichnet werden, und damit bekommen wir für die 6 gemessenen Winkel folgende 6 Fehlergleichungen:

Fehlergleichungen.

	[1,2]	[1,3]	[1,4]	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)	(3,4)
$v_{12} =$	[1,2]	. . .	. . .	—(1,2)	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$v_{13} =$	. . .	[1,3]	. . .	. . .	—(1,3)	. . .	. . .	. . .	. . .
$v_{14} =$	. . .	. . .	[1,4]	. . .	. . .	—(1,4)	. . .	. . .	. . .
$v_{23} =$	—[1,2]	+[1,3]	. . .	. . .	. . .	. . .	—(2,3)	. . .	. . .
$v_{24} =$	—[1,2]	. . .	+[1,4]	. . .	. . .	. . .	. . .	—(2,4)	. . .
$v_{34} =$	. . .	—[1,3]	+[1,4]	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	—(3,4)

(2)

Daraus bildet man die

Normalgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \underline{3\,[1,2]} - [1,3] - [1,4] - (1,2) \quad . . \quad . . + (2,3) + (2,4) \quad . . = 0 \\ -[1,2] + \underline{3\,[1,3]} - [1,4] \quad . . - (1,3) \quad . . - (2,3) \quad . . + (3,4) = 0 \\ -[1,2] - [1,3] + \underline{3\,[1,4]} \quad . . \quad . . - (1,4) \quad . . - (2,4) - (3,4) = 0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Um diese Normalgleichungen aufzulösen, bildet man zuerst deren Summe:

$$[1,2] + [1,3] + [1,4] - (1,2) - (1,3) - (1,4) = 0 \quad (4)$$

Diese Summengleichung (4) zu jeder einzelnen der Gleichungen (3) addiert, giebt, ohne weitere Elimination sofort die Auflösungen nach den 3 Unbekannten:

$$\text{Winkel } [1,2] = \frac{2\,(1,2) + (1,3) - (2,3) + (1,4) - (2,4)}{4} \quad (5)$$

$$\text{Winkel } [1,3] = \frac{2\,(1,3) + (1,4) - (3,4) + (1,2) + (2,3)}{4} \quad (6)$$

$$\text{Winkel } [1,4] = \frac{2\,(1,4) + (1,2) + (2,4) + (1,3) + (3,4)}{4} \quad (7)$$

Diese Auflösungen kann man in Worten so darstellen: Um irgend einen Winkel $[i, k]$ endgültig zu berechnen, nimmt man zunächst seine unmittelbare eigene Messung (i, k) mit doppeltem Gewichte, und dazu *ein*gewichtig alle diejenigen Werte des Winkels, welche man aus den übrigen Winkelmessungen durch Subtraktion oder Addition von je zweien anderen Winkeln zusammensetzen kann, und aus all diesem bildet man das Mittel mit Rücksicht auf die Gewichte.

Zu einem Zahlenbeispiele hiefür wollen wir das Gerling'sche Beispiel von § 67. S. 231 nochmals vornehmen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} (1,2) = 48^\circ\,17'\,1{,}4'' & (1,3) = 96^\circ\,52'\,16{,}8'' & (1,4) = 152^\circ\,54'\,6{,}8'' \\ & (2,3) = 48^\circ\,35'\,14{,}3'' & (2,4) = 104^\circ\,37'\,7{,}8'' \\ & & (3,4) = 56^\circ\,1'\,48{,}9'' \end{array}\right\} \quad (8)$$

Den Gleichungen (4)—(6) entspricht folgende Ausrechnung:

$\left\{\begin{array}{l} 48^\circ\,17'\,1{,}4'' \\ 48\;17\;1{,}4 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l} 96^\circ\,52'\,16{,}8'' \\ 96\;52\;16{,}8 \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l} 152^\circ\,54'\,6{,}8'' \\ 152\;54\;6{,}8 \end{array}\right.$
17 2,5	17,9	9,2
16 59,0	15,7	5,7
4,3	27,2	28,5

$$\left.\begin{array}{lll} [1,2] = 48^\circ\,17'\;\;1{,}075'' & [1,3] = 96^\circ\,52'\;16{,}800'' & [2,3] = 152^\circ\,54'\;\;7{,}125'' \\ \text{Ebenso auch } [2,3] = 48^\circ\,35'\;15{,}725'' & [2,4] = 104^\circ\,37'\;\;6{,}050'' \\ & [3,4] = \;\;56^\circ\;\;1'\;50{,}325'' \end{array}\right\} \quad (9)$$

Diese ausgeglichenen $[1,2]\ldots$ mit den gemessenen $(1,2)$ verglichen, geben die übrigbleibenden Fehler v und deren Quadrate:

$$\left.\begin{array}{llll} v_{12} = -\,0{,}225'' & v_{13} = \;\;0{,}000'' & v_{14} = +\,0{,}325 \\ & v_{23} = +\,1{,}425 & v_{24} = -\,1{,}750 \\ & & v_{34} = +\,1{,}425 \\ v^2 \ldots \;\; 0{,}0506 & 0{,}0000 & 0{,}1056 \\ & 2{,}0306 & 3{,}0625 \\ & & 2{,}0306 \end{array}\right\} \quad (10)$$

$$[v\,v] = 7{,}2799\;,\quad m = \sqrt{\frac{7{,}2799}{6-3}} = \pm 1{,}56''$$

Dieses m ist der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels (vor der Ausgleichung).

Wir wollen einen Schritt weiter gehen, und die Rechnung in die Form von *Richtungen* bringen, indem wir $(2,1) = -(1,2)$ einführen, und auch noch der Symmetrie wegen $(1,1) = 0$ und $(2.2) = 0$ hinzufügen, so dass die Gleichung (5) folgende Gestalt annimmt:

$$\text{Winkel } [1,2] = \frac{(1,1)+(1,2)+(1,3)+(1,4)}{4} - \frac{(2,1)+(2,2)+(2,3)+(2,4)}{4}$$

Die ausgeglichenen Richtungen (bzw. deren Verbesserungen), sollen nach Fig. 1. mit A , B , $C\ldots$ bezeichnet werden, dann hat man für 3 Strahlen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Richtung } A = -\dfrac{(1,1)+(1,2)+(1,3)+(1,4)+\ldots}{s} \\ \text{Richtung } B = -\dfrac{(2,1)+(2,2)+(2,3)+(2,4)+\ldots}{s} \\ \text{Richtung } C = -\dfrac{(3,1)+(3,2)+(3,3)+(3,4)+\ldots}{s} \\ \ldots\ldots \text{ u. s. w. } \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (11)$$

dann braucht man nur die hiernach berechneten A , B , $C\ldots$ wie unabhängig in *einem* Satze gemessene Richtungen von einander zu subtrahieren, um alle ausgeglichenen Winkel zu erhalten; oder man kann auch mit den nach den Formeln (11) berechneten Richtungen weiter rechnen, wie wenn es gemessene Richtungen wären.

Die Anwendung der neuen Formeln (11) wollen wir an einem grösseren Beispiele mit 5 Sichtstrahlen zeigen, und zwar mit Station Keulenberg der Märkisch-Schlesischen Kette in dem Werke „Die Königl. Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, II. Teil, Berlin 1874", S. 357—361.

Wenn man alle dort angegebenen Werte im Mittel zusammenzieht, so erhält man:

I. Station Keulenberg. 10 Winkelmessungen.

	1. Collm.	2. Strauch.	3. Brautberg.	4. Brandberg.	5. Hochstein.
1.	0° 0′ 0,000″	25° 54′ 20,367″	76° 40′ 49,008″	127° 17′ 42,100″	175° 20′ 21,075″
2.		25 54 20,000	76 40 47,658	127 17 42,958	175 20 20,392
3.			76 40 49,000	127 17 43,100	175 20 21,725
4.				127 17 42,000	175 20 20,667
5.					(12)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses sind 10 *Winkel*, welche aber in der *Form* von 14 Richtungen zusammengestellt sind, indem die 5 Werte der ersten Linie erhalten wurden aus 4 Winkeln, welche sämtlich den linken Schenkel Collm = 0° 0′ 0″ gemeinsam haben, und ebenso in der zweiten Linie 3 Winkel, welche alle den linken Schenkel Strauch = 25° 54′ 20″ gemeinsam haben.

Aus der vorstehenden Tabelle bilden wir mit Absonderung von Näherungswerten folgende zweite Tabelle:

II. Station Keulenberg. Ausgleichung von 10 Winkeln in Richtungsform.

	1. 0° 0′ 0″	2. 25° 54′ 20″	3. 76° 40′ 49″	4. 127° 17′ 42″	5. 175° 20′ 21″	Quer-Summe
1.	0,000″	+ 0,367″	+ 0,008″	+ 0,100″	+ 0,075″	+ 0,550″
2.	− 0,367	0,000	− 1,342	+ 0,958	− 0,608	− 1,359
3.	− 0,008	+ 1,342	0,000	+ 1,100	+ 0,725	+ 3,159
4.	− 0,100	− 0,958	− 1,100	0,000	− 0,333	− 2,491
5.	− 0,075	+ 0,608	− 0,725	+ 0,333	0,000	+ 0,141
Summen S	− 0,550	+ 1,359	− 3,159	+ 2,491	− 0,141	
Mittel	$A = -0{,}110''$	$B = +0{,}272''$	$C = -0{,}632''$	$D = +0{,}498''$	$E = -0{,}028''$	
Ausgeglichene Richtung	359° 59′ 59,890″	25° 54′ 20,272″	76° 40′ 48,368″	127° 17′ 42,498″	175° 20′ 20,972″	} (13)
oder	0° 0′ 0,000″	25° 54′ 20,382″	76° 40′ 48,478″	127° 17′ 42,608″	175° 20′ 21,082″	

Die letzte Linie ist aus der vorhergehenden entstanden durch Zufügung von 0,110″, um die Anfangsrichtung wieder auf 0° 0′ 0″ zu bringen.

Diese Ausgleichung (12)—(13) bietet in etwas anderer Form dasselbe, was zuerst in der Abhandlung von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 220 u. S. 232 gegeben wurde. Unsere Summen S sind $= s - \sigma$ jener Abhandlung S. 220.

Um auch den mittleren Fehler zu bestimmen, hat man jedenfalls den sicheren Weg, auf die eigentlichen 10 Winkelmessungen zurückzugreifen, und sie mit den ausgeglichenen Winkeln (die man durch Subtraktionen aus (13) erhält) zu vergleichen. Wir wollen dieses im folgenden thun, indem wieder mit (1,2) ein gemessener und mit [1,2] ein ausgeglichener Winkel bezeichnet wird:

(1,2) = 25° 54′ 20,367″
[1,2] = 25 54 20,382
v_{12} = + 0,015

v	v^2
+ 0,015	0,0002
− 0,530	0,2809
+ 0,508	0,2581
+ 0,007	0,0000
+ 0,438	0,1918
− 0,732	0,5358
+ 0,308	0,0949
+ 0,030	0,0009
− 0,121	0,0146
− 0,193	0,0372
$[v\,v]$ =	1,4144

(1,3) = 76° 40′ 49,008″
[1,3] = 76 40 48,478
v_{13} = − 0,530

(2,3) = 50° 46′ 27,658″
[2,3] = 50 46 28,096
v_{23} = + 0,438

(1,4) = 127° 17′ 42,100″
[1,4] = 127 17 42,608
v_{14} = + 0,508

(2,4) = 101° 22′ 22,958″
[2,4] = 101 22 22,226
v_{24} = − 0,732

(3,4) = 50° 36′ 54,100″
[3,4] = 50 36 54,130
v_{34} = + 0,030

(1,5) = 175° 20′ 21,075″
[1,5] = 175 20 21,082
v_{15} = + 0,007

(2,5) = 49° 26′ 0,392″
[2,5] = 49 26 0,700
v_{25} = + 0,308

(3,5) = 98° 39′ 32,725″
[3,5] = 98 39 32,604
v_{35} = − 0,121

(4,5) = 48° 2′ 38,667″
[4,5] = 48 2 38,474
v_{45} = − 0,193

$$m = \sqrt{\frac{1{,}4144}{10-4}} = \pm 0{,}486'' \qquad (14)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses m ist der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels (mittlerer Winkelfehler vor der Ausgleichung).

Ausser dieser unmittelbar sich darbietenden Berechnung (14) kann man auch eine Berechnung von $[v\,v]$ an die Ausrechnung von (13) anschliessen, indem man der Formel (8) S. 85 folgt, welche wegen der einfachen Form unseres Falles, mit $[a\,b] = 0$, $[a\,c] = 0$ u. s. w. sich 50 darstellt:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} \cdots \tag{15}$$

Die Ausrechnung nach (15) giebt mit den Zahlen der Tabelle von (13) folgendes:

l	l^2			
+ 0,367	0,1347	$[a\,l] = -0{,}550$	$[a\,l]^2 = 0{,}3025$	$[a\,a] = 5$
+ 0,008	0,0001	$[b\,l] = +1{,}359$	$[b\,l]^2 = 1{,}8469$	$[b\,b] = 5$
+ 0,100	0,0100	$[c\,l] = -3{,}159$	$[c\,l]^2 = 9{,}9793$	$[c\,c] = 5$
+ 0,075	0,0056	$[d\,l] = +2{,}491$	$[d\,l]^2 = 6{,}2051$	$[d\,d] = 5$
− 1,342	1,8010	$[e\,l] = -0{,}141$	$[e\,l]^2 = 0{,}0199$	$[e\,e] = 5$
+ 0,958	0,9178		18,3537	
− 0,608	0,3697			
+ 1,100	1,2100			
+ 0,725	0,5256			
− 0,333	0,1109			
	5,0854			

$$[v\,v] = 5{,}0854 - \frac{18{,}3537}{5} = 5{,}0854 - 3{,}6707 = 1{,}4147 \tag{16}$$

Dieses stimmt genügend mit 1,4144, also auch wieder der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels

$$m = \sqrt{\frac{1{,}4147}{10-4}} = \pm 0{,}486'' \tag{17}$$

Der Nenner $10 - 4 = 6$ gilt hier für 5 Strahlen; im allgemeinen Falle mit s Strahlen ist die Anzahl der Winkel in allen Combinationen $= \frac{s\,(s-1)}{2}$ und die Anzahl der unabhängigen Winkel $= s - 1$, also nach (19) § 28. S. 87:

$$n - u = \frac{s\,(s-1)}{2} - (s-1) = \frac{(s-1)\,(s-2)}{2}$$

also der mittlere Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{2\,[v\,v]}{(s-1)\,(s-2)}} \tag{18}$$

und der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{[v\,v]}{(s-1)\,(s-2)}} \tag{19}$$

Die Ausrechnung (16) entspricht der „Königl. Preuss. Landestriangulation, II. Teil, 1874", S. 361, welcher wir unser Beispiel entlehnt haben, es steht nämlich dort:

$$(V\,V) = (V_0\,V_0) - \frac{(a\,n)^2}{(a\,a)} - \frac{(b\,n)^2}{(b\,b)} - \ldots = 82{,}05 - 22{,}01 = 60{,}04 \text{ mit Divisor} = 116.$$

Dieses ist mit unserem (16) und (17) deswegen nicht unmittelbar zu vergleichen, weil in der Landestriangulation S. 357—360, 120 Einzelwinkel (je aus l und r zusammengesetzt) verwertet sind, welche

wir in unserer Tabelle (12) in 10 *Mittel*werte zusammengezogen und auch nur als 10 Winkel weiter benützt haben. Jener „Divisor = 116" ist entstanden aus 120 — 4 entsprechend unserem 10 — 4. Der Abzug — 22,01 steht auch noch in inniger Beziehung zu unserem 18,3537 in (16), es ist nämlich bei der Landestriangulation S. 360 $(a\,l) = -3{,}30$, $(a\,a) = 30$ u. s. w., woraus $\frac{3{,}30^2 + 8{,}15^2 + \ldots}{30} = \frac{660{,}63}{30}$ $= 22{,}021$ oder das 6fache unseres Abzuges 3,6707.

Das im Vorstehenden benützte Beispiel Station Keulenberg, Beobachter *Schreiber*, Mai—Juni 1872 (Preuss. Landes-Triang., II. Teil, 2. Abt. 1874, S. 357—361) stammt aus der ersten Zeit der Einführung von Winkelmessungen in allen Combinationen, und zwar mit je 12facher Wiederholung jedes einzelnen Winkels in Fernrohrlage I. oder II. Diese Wiederholungszahl 12 bei $s = 5$ Richtungen ist aber noch nicht der später weiter ausgebildeten Schreiber'schen Methode entsprechend, welche bei 5 Richtungen nur 10 Wiederholungen nimmt, wie in unserem späteren § 79. gezeigt werden wird.

Gewichtsbestimmung.

Aus den Normalgleichungen (3) S. 260, welche sich auf Winkel beziehen, erhält man nach (20) § 28. S. 90 folgende Gewichtsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 3\,[\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] - [\alpha\,\gamma] &= 1 \\ -[\alpha\,\alpha] + 3\,[\alpha\,\beta] - [\alpha\,\gamma] &= 0 \\ -[\alpha\,\alpha] - [\alpha\,\beta] + 3\,[\alpha\,\gamma] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, bildet man wieder ihre Summe:

$$[\alpha\,\alpha] + [\alpha\,\beta] + [\alpha\,\gamma] = 1$$

dieses zu jeder einzelnen der Gleichungen (20) addiert giebt:

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{2}{4} \quad , \quad [\alpha\,\beta] = 0 \quad , \quad [\alpha\,\gamma] = 0$$

dieses gilt aber zunächst nur für den besonderen Fall von 4 Sichtstrahlen; allgemein für s Strahlen bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} &[\alpha\,\alpha] = \frac{2}{s} \quad , \quad [\alpha\,\beta] = 0 \quad , \quad [\alpha\,\gamma] = 0 \quad , \quad [\alpha\,\delta] = 0 \\ \text{und} \quad &[\alpha\,\beta] = 0 \quad , \quad [\beta\,\beta] = \frac{2}{s} \quad , \quad [\beta\,\gamma] = 0 \quad , \quad [\beta\,\delta] = 0 \\ &\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \text{u. s. w.} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Die $[\alpha\,\alpha]$, $[\beta\,\beta]$, ... sind die reciproken Werte der Winkelgewichte nach der Ausgleichung, es ist also das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels bei s Strahlen in unserem Falle $P = \frac{s}{2}$, also in dem kleinen Gerling'schen Beispiel (8)—(10) mit $s = 4$ Strahlen, $P = 2$ und folglich der mittlere Fehler eines Winkels nach der Ausgleichung $M = m : \sqrt{2} = \pm 1{,}10''$.

Da alle $[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma] \ldots =$ Null sind, kann man die Winkelgewichte auch leicht in Richtungsgewichte zerfällen, wenn nämlich q_1 , q_2 , $q_3 \ldots$ die Richtungsgewichte nach der Ausgleichung sind: so muss sein:

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{P} = \frac{2}{s}$$

also

$$\frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2} = \frac{1}{s} \quad , \quad q_1 = q_2 = \ldots = s \qquad (22)$$

Dabei ist als Einheit das Gewicht eines gemessenen Winkels angenommen; wird ein Richtungsgewicht als Einheit genommen, welches gleich dem doppelten Winkelgewicht ist, so werden die P und die q nach der Ausgleichung die Hälften der vorigen. Wir wollen dieses alles übersichtlich zusammenstellen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zwischen s Strahlen werden die Winkel in allen $\frac{s(s-1)}{2}$ Combinationen gemessen, wobei $(s-1)$ unabhängige Winkel oder s Richtungen bestimmt werden.

Wenn ein gemessener *Winkel* das Gewicht $= 1$ hat, so erhält jeder Winkel nach der Ausgleichung das Gewicht $P = \frac{s}{2}$ oder jede ausgeglichene Richtung das Gewicht $q = s$ (z. B. $s = 2$ giebt $P = 1$ und $q = 2$).

Wenn eine gemessene *Richtung* das Gewicht $= 1$ hat, also ein gemessener Winkel das Gewicht $= \frac{1}{2}$, so erhält jeder Winkel nach der Ausgleichung das Gewicht $P = \frac{s}{4}$ und jede ausgeglichene Richtung das Gewicht $q = \frac{s}{2}$ (z. B. $s = 2$ giebt $P = \frac{1}{2}$ und $q = 1$ wie es sein muss).

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird immer nach den schon früher angegebenen Formeln (18) oder (19) berechnet, wozu $[v\,v]$ nach dem Beispiel (14) oder (16) zu bestimmen ist.

Zweite Entwicklung für Winkelmessung in allen Combinationen.

Um die wichtige und elegante Ausgleichung unseres Falles nach allen Beziehungen zu beleuchten, wollen wir noch eine *zweite* von allem früheren unabhängige Entwicklung vornehmen, und dabei von vornherein auf Richtungen ausgehen, deren ausgeglichene Werte mit A, B, C, D nach Fig. 1. S. 259 bezeichnet seien; die gemessenen Winkel seien (1,2) , (1,3) u. s. w.

Dann nehmen die Fehlergleichungen statt (1) folgende Form an:

$$\left.\begin{array}{l} v_{12} = -A + B \ldots\ldots -(1,2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{13} = -A \ldots + C \ldots\ldots -(1,3) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{14} = -A \ldots\ldots + D \ldots\ldots -(1,4) \ldots\ldots\ldots \\ v_{23} = \ldots -B + C \ldots\ldots\ldots\ldots -(2,3) \ldots\ldots \\ v_{24} = \ldots -B \ldots + D \ldots\ldots\ldots\ldots -(2,4) \ldots \\ v_{34} = \ldots\ldots -C + D \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots -(3,4) \end{array}\right\} \quad (23)$$

Wenn man diese 6 Ausdrücke der v einzeln quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} [v\,v] = 3A^2 & -2AB & -2AC & -2AD & +2A(& (1,2)+(1,3)+(1,4)) & \\ +3B^2 & -2BC & -2BD & +2B(& & (2,3)+(2,4)-(1,2)) & \\ +3C^2 & -2CD & +2C(& & & (3,4)-(1,3)-(2,3)) & \\ +3D^2 & +2D(& & & & -(1,4)-(2,4)-(3,4)) & \\ & & & & & +(1,2)^2+(1,3)^2+\ldots(3,4)^2 & \end{array}\right\} \quad (24)$$

Dieses wird zunächst auf folgende Form gebracht:

$$\begin{array}{rrrrrrr} [v\,v] = A(& 3A- & B- & C- & D) & +2A(& (1,2)+(1,3)+(1,4)) \\ +B(- & A+3B- & C- & D) & & +2B(& (2,3)+(2,4)-(1,2)) \\ +C(- & A- & B+3C- & D) & & +2C(& (3,4)-(1,3)-(2,3)) \\ +D(- & A- & B- & C+3D) & & +2D(& -(1,4)-(2,4)-(3,4)) \\ & & & & & & +(1,2)^2+(1,3)^2+\ldots(3,4)^2 \end{array}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun wird die an sich willkürliche Bedingung eingeführt:

$$A + B + C + D = 0 \tag{25}$$

und damit wird, wenn zugleich $(1,3) = -(3,1)$ u. s. w. gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned}[vv] = {} & 4A^2 + 2A\big((1,2) + (1,3) + (1,4)\big) + (1,2)^2 + (1,3)^2 \\ & + 4B^2 + 2B\big((2,3) + (2,4) + (2,1)\big) + (1,4)^2 + (2,3)^2 \\ & + 4C^2 + 2C\big((3,4) + (3,1) + (3,2)\big) + (2,4)^2 + (3,4)^2 \\ & + 4D^2 + 2D\big((4,1) + (4,2) + (4,3)\big)\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Bedingung, dass dieses (26) ein Minimum werde, führt auf:

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{(1,2) + (1,3) + (1,4)}{4} \\ B &= -\frac{(2,3) + (2,4) + (2,1)}{4} \\ C &= -\frac{(3,4) + (3,1) + (3,2)}{4} \\ D &= -\frac{(4,1) + (4,2) + (4,3)}{4}\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Dieses stimmt überein mit dem früheren (11) S. 261, indem dort $(1,1) = 0$ u. s. w. zugesetzt wurde. Setzt man nun wieder die A, B, C, D aus (27) in (26), so erhält man:

$$[vv] = (1,2)^2 + (1,3)^2 + (1,4)^2 + (2,3)^2 + (2,4)^2 + (3,4)^2 - 4(A^2 + B^2 + C^2 + D^2)$$

dieses gilt für 4 Strahlen; allgemein für s Strahlen hat man:

$$\left.\begin{aligned}[vv] = {} & (1,2)^2 + (1,3)^2 + (1,4)^2 \ldots (2,3)^2 + (2,4)^2 + \ldots \quad (s-1,s)^2 \\ & - s(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + \ldots S^2)\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dieses ist übereinstimmend mit dem früheren (15) S. 263, womit nun alles auf verschiedenen Wegen bestimmt ist.

Winkelmessung in symmetrischer Anordnung.

Nicht bloss bei Winkelmessungen in allen Combinationen, d. h. Combinationen der Strahlen zu je *zweien*, kann man die Ausgleichungs-Ergebnisse der Station in Form von Richtungen mit Richtungsgewichten darstellen, sondern auch noch in dem allgemeineren Falle der Stationsbeobachtungen in irgendwie symmetrischer Anordnung.

Dieser Fall ist von *Vogler* und *Helmert* in der „Zeitschr. f. Verm. 1885" S. 49—59 und S. 263—266 behandelt worden. Auch hier, wie bei Winkelmessungen mit je 2 Strahlen findet man eine Zerfällung der Gewichtsgleichungen in Einzelgewichte. Wenn man p Strahlen in symmetrischen Sätzen von je i Richtungen, also in $\binom{p}{i}$ Combinationen beobachtet, so wird das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels $P = \frac{p}{2i}\binom{p-2}{i-2}$, oder wenn die Zahl der Strahlen $= s$ gesetzt wird, so ist $P = \frac{s}{2i}\binom{s-2}{i-2}$, also mit $i = 2$, wird $\binom{s-2}{i-2} = 1$ und $P = \frac{s}{4}$. Dabei ist das Gewicht einer gemessenen *Richtung* $= 1$ gesetzt.

Würde man das Gewicht eines gemessenen *Winkels* $= 1$ setzen, so würde das Gewicht eines ausgeglichenen Winkels werden $P = \frac{s}{i}\binom{s-2}{i-2}$, also mit $i = 2$ würde $P = \frac{s}{2}$, was mit unserem Ergebnis von S. 265 stimmt.

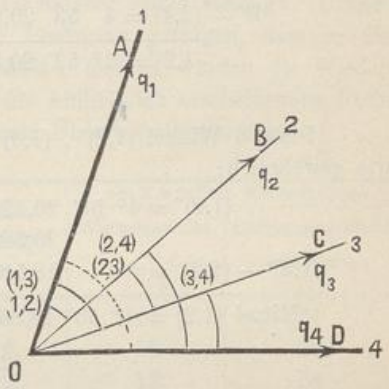
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 78. Winkelmessung in allen Combinationen mit Anschlusszwang.

Bei Ausgleichung freier Dreiecksnetze, mit denen wir uns in diesem Kapitel hauptsächlich beschäftigen, kommt Anschlusszwang nur ausnahmsweise vor. (Ein praktisches Beispiel dazu bietet die in dem späteren § 80. zu behandelnde Elbkette).

Um indessen alles im Zusammenhange zu haben, was sich auf Winkelmessungen in allen Combinationen bezieht, wollen wir auch den Anschlusszwang mit 2 festen Strahlen, nach Fig. 1., hier behandeln, indem dabei angenommen wird, es seien $O\,A$ und $O\,D$ zwei *feste* aus älteren Messungen und Ausgleichungen unabänderlich festliegende Strahlen, an welche zwei neue Strahlen $O\,B$ und $O\,C$ durch Winkelmessungen angeschlossen werden sollen.

Fig. 1.



Nach den Regeln von General *Schreiber* (Zeitschr. f. Verm. 1878 S. 217) sind zwei solche feste Anschlussstrahlen bezüglich der Anordnung der Beobachtungen wie *eine* einzige Richtung anzusehen und jede neue zu bestimmende Richtung ist ebenso oft mit der einen wie mit der anderen Anschlussrichtung zu verbinden.

In Fig. 1. ist angenommen, dass $O\,A$ und $O\,B$ zwei feste Richtungen sind, welche einen unabänderlich gegebenen Winkel W zwischen sich fassen, und die neuen Strahlen $O\,B$ und $O\,C$ sollen durch Winkelmessungen gegen A und D und unter sich bestimmt werden.

Es seien gemessen:

Winkel	(1,2)	mit	dem	Gewichte	1
„	(1,3)	„	„	„	1
„	(1,4)	„	„	„	0 d. h. *nicht* gemessen
„	(2,3)	„	„	„	2
„	(2,4)	„	„	„	1
„	(3,4)	„	„	„	1

Bei dieser Anordnung kann man die ganze Behandlung auf den Fall *eines* festen Strahles A, d. h. auf den Fall gänzlich freier Winkelmessung zwischen 3 Strahlen A, B, C zurückführen, indem man bei gegebenem Winkel $A\,O\,D = W$ den Winkel (2,4) reduziert auf $W - (2,4) = (1,2)$ und ebenso $W - (3,4) = (1,3)$.

Wir wollen dieses sogleich an einem Beispiele erproben, und zwar aus der „Vermessung der freien Hansestadt Bremen, von *Geisler*, 1890", S. 18—19, Station Weyerberg, wo 2 feste Strahlen und 2 neue Strahlen vorhanden sind, nämlich:

1. Bremen	A	$= 207°\ 40'\ 32{,}91''$ fest gegeben
2. Oberblockland	B	
3. Scharmbeck	C	
4. Garlstedt	D	$= 291°\ 6'\ 9{,}47''$ fest gegeben
	$[1,4] = W = D - A =$	$83°\ 25'\ 36{,}56''$

Die 5 gemessenen Winkel stellen wir nun nebst dem fest gegebenen [1,4] in gleicher Form zusammen, wie wenn [1,4] auch gemessen wäre:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$(1,2) = 4° 53' 20{,}18''$ $(1,3) = 71° 38' 27{,}73''$ $[1,4] = 83° 25' 36{,}56'' = W$

$(2,3) = 66° 45' 8{,}99''$
$(2,3) = 66 \quad 45 \quad 8{,}99$ $(2,4) = 78° 32' 15{,}69''$
$(3,4) = 11° 47' 9{,}22''$

Nach dem angegebenen Prinzip der Reduktion von 4. auf 1. erhält man:

$(1,2) = 4° 53' 20{,}18''$ $(1,3) = 71° 38' 27{,}73''$
$W - (2,4) = 4 \quad 53 \quad 20{,}87$ $W - (3,4) = 71 \quad 38 \quad 27{,}34$
$(1,2)' = 4° 53' 20{,}525''$ $(1,3)' = 71° 38' 27{,}535''$
$(2,3)' = 66° 45' 8{,}990''$

Diese 3 Winkel $(1,2)'$, $(1,3)'$ und $(2,3)'$ werden nun unter sich ausgeglichen wie gewöhnlich:

$(1,2)' = 4° 53' 20{,}525''$ $(1,3)' = 71° 38' 27{,}535''$
$20{,}525$ $27{,}535$
$(1,3)' - (2,3)' = 18{,}545$ $(1,2)' + (2,3)' = 29{,}515$
Mittel $[1,2] = 4° 53' 19{,}865''$ $[1,3] = 71° 38' 28{,}195''$

$(2,3)' = 66° 45' 8{,}990''$
$8{,}990$
$(1,3)' - (1,2)' = 7{,}010$
Mittel $[2,3] = 66° 45' 8{,}330''$

Diese ausgeglichenen Winkel stimmen überein mit den von Geisler auf S. 19 der Bremer Triangulierung auf anderem Wege erhaltenen Werten, und indem man diese Winkel an die festen Richtungen anschliesst, hat man das Schluss-Ergebnis:

Station Weyerberg.

1. Bremen	$A = 207° 40' 32{,}91''$		fest gegeben
2. Oberblockland	$B = 212 \quad 33 \quad 52{,}77$		eingeschaltet
3. Scharmbeck	$C = 279 \quad 19 \quad 1{,}10$		„
4. Garlstedt	$D = 291 \quad 6 \quad 9{,}47$		fest gegeben

Dieses ist ein Messungsabriss in Form von orientierten Richtungswinkeln (Katasterbezeichnung „Neigungen"), die zwei neuen Richtungen B und C gehen in eine Netzausgleichung oder eine Coordinatenausgleichung als beobachtet ein.

Bei *Winkel*messung auf einer Station mit Anschluss an beliebig viele feste Strahlen kann man die Winkelausgleichung und die Fehlerberechnung, kurz alles, was sich auf eine solche Station bezieht, mittelst des angegebenen formellen Kunstgriffs immer auf den Fall *eines* festen Strahles, oder was hier dasselbe ist, auf den Fall völlig freier Strahlen zurückführen, so dass es nicht nötig ist, für Stations-Winkelausgleichung mit Anschlusszwang an feste Strahlen besondere Formeln aufzustellen.

§ 79. Triangulierung nach Schreibers Methode.

Nachdem in § 77. S. 265 erkannt ist, dass die Winkelmessung in allen Combinationen sich nach der Stationsausgleichung darstellen lässt als *ein* Satz von Richtungsmessungen mit einem gewissen Gewichte für jede ausgeglichene Richtung, kann

man auch einsehen, dass ein ganzes Dreiecksnetz mit lauter so behandelten Stationen schlechthin nach Richtungen ausgeglichen werden kann, ähnlich wie an den zwei kleinen Beispielen von § 59. und § 61. früher gezeigt worden ist.

Der einzige Unterschied besteht noch darin, dass zwar alle ausgeglichenen Richtungen *derselben* Station gleichgewichtig sind, dass aber *verschiedene* Stationen mit verschieden vielen Sichten, ungleichgewichtige Richtungen ergeben, weil das Gewicht nach der Ausgleichung von der Anzahl der Sichten selbst abhängt. Diesem Umstande wurde von General Schreiber dadurch Rechnung getragen, dass er die Combinationsmessungen an sich mehrfach wiederholte, und es wurden die Wiederholungszahlen n der Stationen so bemessen, dass die schliesslich erscheinenden Richtungsgewichte möglichst gleich werden, wie folgende Übersichtstabelle zeigt:

Anzahl der Strahlen einer Station s	ohne Wiederholung			Wiederholungszahl $2n$	bei $2n$facher Wiederholung	
	Anzahl der Winkel $s\frac{s-1}{2}$	Richtungsgewicht für Messung	Richtungsgewicht für Ausgleichung		Winkelgewicht $p=\frac{ns}{2}$	Richtungsgewicht $q=2p=ns$
2	1	1	1,0	24	12	24
3	3	1	1,5	16	12	24
4	6	1	2,0	12	12	24
5	10	1	2,5	10	12,5	25
6	15	1	3,0	8	12	24
7	21	1	3,5	8	14	28
8	28	1	4,0	6	12	24

Als Messung für die Gewichtseinheit $p = 1$ zählt hiebei die Messung einer Richtung in *einer* Fernrohrlage I oder II, oder, was dasselbe bedeutet, die Messung eines Winkels in zwei Fernrohrlagen I und II. Die angegebene Wiederholungszahl $2n$ bezieht sich auf Richtungen oder Winkel in *einer* Fernrohrlage, also $2n = 24$ malige Wiederholung eines Winkels bedeutet $n = 12$ Messungen des Winkels in Fernrohrlage I und $n = 12$ Messungen in Fernrohrlage II bei denselben Kreisstellungen wie in Lage I. Bei den Messungen der Landesaufnahme sind die Fernrohrlagen I und II (in den amtlichen Druckwerken gewöhnlich mit l und r bezeichnet) stets auseinandergehalten, und auf diese getrennten Messungen der beiden Fernrohrlagen beziehen sich also die Wiederholungszahlen $2n$.

Die Wiederholungen werden nun natürlich nicht an denselben Kreisstellungen gemacht, sondern zur Eliminierung der Teilungsfehler an Kreisstellungen, welche für n Wiederholungen je um $\frac{360°}{2n}$ oder $\frac{180°}{n} = d$ gegenseitig verdreht sind, so dass die Kreisstellungen $0, d, 2d, 3d \ldots$ auftreten. Weiter kommt es darauf an, die Kreisstellungen auf die $\frac{s(s-1)}{2}$ Winkel so zu verteilen, dass keine Richtung in irgend einer Kreisstellung mehr als *ein*mal vorkommt, und dass die Anzahl der Kreisstellungen möglichst klein wird. Da man nun $\frac{s(s-1)}{2}$ Winkel zu messen, also $s(s-1)$ Richtungseinstellungen paarweise zu machen hat, also in einer Kreisstellung höchstens s Richtungen vorkommen dürfen, wenn s eine gerade Zahl ist, und höchstens $s-1$ Richtungen, wenn s eine ungerade Zahl ist, so muss irgend eine Richtung in zwei

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

aufeinander folgenden Kreisstellungen um den Betrag $\frac{180°}{n(s-1)} = \delta$ oder $\frac{180°}{ns} = \delta$ verändert erscheinen, je nachdem $(s-1)$ eine ungerade Zahl ist, oder s eine ungerade Zahl.

Nach diesen Grundsätzen sind die nachfolgenden Tabellen aufgestellt (nach Mitteilung von General Schreiber in „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 215—217 und „Königl. Preuss. Landes-Triangulation", IV. Teil, die Elbkette, 1891, S. 54—55). Dabei bedeuten I und II die Fernrohrlagen und 0° , 15° , 30° ... die Kreisstellungen.

$s = 2$ Richtungen , $s\frac{s-1}{2} = 1$ Winkel , $n(s-1) = 12$, $d = \frac{180°}{12} = 15°$, $\delta = \frac{180°}{12} = 15°$
$n = 12$

Winkel	I	I	I	I	I	I	II	II	II	II	II	II
1,2	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°

$s = 3$ Richtungen , $s\frac{s-1}{2} = 3$ Winkel , $ns = 24$, $d = \frac{180°}{8} = 22{,}5°$, $\delta = \frac{180°}{24} = 7{,}5°$
$n = 8$

Winkel	I	I	I	I	II	II	II	II
1,2	0°	22,5°	45°	67,5	90°	112,5°	135°	157,5°
1,3	7,5°	30°	52,5°	75°	97,5°	120°	142,5°	165°
2,3	15°	37,5°	60°	82,5°	105°	127,5°	150°	172,5°

$s = 4$ Richtungen , $s\frac{s-1}{2} = 6$ Winkel , $n(s-1) = 18$
$n = 6$

Winkel	I	I	I	II	II	II
1,2	0°	30°	60°	90°	120°	150°
1,3	10	40	70	100	130	160
1,4	20	50	80	110	140	170
2,3	20	50	80	110	140	170
2,4	10	40	70	100	130	160
3,4	0	30	60	90	120	150

$d = \frac{180°}{6} = 30°$
$\delta = \frac{180°}{18} = 10°$

$s = 5$ Richtungen , $s\frac{s-1}{2} = 10$ Winkel , $ns = 25$
$n = 5$

Winkel	I	I	I	II	II	II
1,2	0°	36°	72°		108°	144°
1,3	7,2	43,2	79,2		115,2	151,2
1,4	14,4	50,4	86,4		122,4	158,4
1,5	21,6	57,6	93,6		129,6	165,6
2,3	14,4	50,4	86,4		122,4	158,4
2,4	21,6	57,6		93,6	129,6	165,6
2,5	28,8	64,8		100,8	136,8	172,8
3,4	28,8	64,8		100,8	136,8	172,8
3,5	0	36		72	108	144
4,5	7,2	43,2		79,2	115,2	151,2

$d = \frac{180°}{5} = 36°$
$\delta = \frac{180°}{25} = 7{,}2°$

Zu der Tabelle für $s = 5$ wollen wir bemerken, dass das frühere Beispiel von § 77. S. 262. Station Keulenberg, auch $s = 5$ Strahlen hat, aber nicht $n = 5$ Wiederholungen, sondern $n = 6$; d. h. jenes Beispiel Keulenberg von 1872 war zwar in Hinsicht auf die Winkelmessungen in allen Combinationen, aber noch nicht in Hinsicht auf die Wiederholungszahlen nach der neuen Schreiberschen Methode angeordnet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$s = 6$ Richtungen, $s\,\frac{s-1}{2} = 15$ Winkel

$n = 4$, $d = \frac{180°}{4} = 45°$

$n(s-1) = 20$ $\delta = \frac{180°}{20} = 9°$

Winkel	I	I	II	II
1,2	0°	45°	90°	135°
1,3	9	54	99	144
1,4	18	63	108	153
1,5	27	72	117	162
1,6	36	81	126	171
2,3	36	81	126	171
2,4	27	72	117	162
2,5	9	54	99	144
2,6	18	63	108	153
3,4	0	45	90	135
3,5	18	63	108	153
3,6	27	72	117	162
4,5	36	81	126	171
4,6	9	54	99	144
5,6	0	45	90	135

$s = 7$ Richtungen, $s\,\frac{s-1}{2} = 21$ Winkel

$n = 4$, $d = \frac{180°}{4} = 45°$

$ns = 28°$ $\delta = \frac{180°}{28} = 6{,}4286°$

Winkel	I	I	II	II
1,2	0,0°	45,0°	90,0°	135,0°
1,3	6,4	51,4	96,4	141,4
1,4	12,9	57,9	102,9	147,9
1,5	19,3	64,3	109,3	154,3
1,6	25,7	70,7	115,7	160,7
1,7	32,1	77,1	122,1	167,1
2,3	13,9	57,9	102,9	147,9
2,4	19,3	64,3	109,3	154,3
2,5	25,7	70,7	115,7	160,7
2,6	32,1	77,1	122,1	167,1
2,7	38,6	83,6	128,6	173,6
3,4	25,7	70,7	115,7	160,7
3,5	32,1	77,1	122,1	167,1
3,6	38,6	83,6	128,6	173,6
3,7	0,0	45,0	90,0	135,0
4,5	38,6	83,6	128,6	173,6
4,6	0,0	45,0	90,0	135,0
4,7	6,4	51,4	96,4	141,4
5,6	6,4	51,4	96,4	141,4
5,7	12,9	57,9	102,9	147,9
6,7	19,3	64,3	109,3	154,3

Diese vorstehenden Tabellen gelten für freie Stationen; dagegen für Stationen mit Anschlusszwang wird nach § 78. verfahren, wie folgendes Beispiel zeigt, mit 2 festen Richtungen 1. und 2. und 3 neuen Richtungen 3. 4. 5.

Winkel	I	I	I . II	I . II	II	II
1,3	0°	. .	60°	. .	120°	. .
2,3	. .	30°	. .	90°	. .	150°
1,4	10	. .	70	. .	130	. .
2,4	. .	40	. .	100	. .	160
1,5	20	. .	80	. .	140	. .
2,5	. .	50	. .	110	. .	170
	I	I	I	II	II	II
3,4	20°	50°	80°	110°	140°	170°
3,5	10	40	70	100	130	160
4,5	0	30	60	90	120	150

Dieses Täfelchen ist wie folgt zu lesen:

Winkel 1,3 wird gemessen:

in der Kreisstellung 0°, Hingang und Rückgang in Fernrohrlage I

„ „ „ 60 , Hingang in I, Rückgang in II

„ „ „ 120 , Hingang und Rückgang in II.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Winkel 2, 3 wird gemessen:

in der Kreisstellung 30°, Hingang und Rückgang in Fernrohrlage I
„ „ „ 90 , Hingang in I, Rückgang in II
„ „ „ 150 , Hingang und Rückgang in II u. s. w.

Da jeder Winkel im ganzen ebenso oft in Fernrohrlage I wie in Fernrohrlage II gemessen werden muss, so ist es bei ungerader Kreisstellungszahl nicht anders zu machen, als mindestens in *einer* Kreisstellung Hingang und Rückgang in verschiedenen Fernrohrlagen zu messen.

Wenn die Winkelmessungen nach den vorstehenden Regeln auf allen Stationen angeordnet und ausgeglichen sind, so nimmt die Netzausgleichung in allem Wesentlichen die Form der Richtungsausgleichungen von § 59. und § 61. an, nur mit dem kleinen Unterschied, dass die einzelnen Richtungen nicht alle gleiches Gewicht (Gewicht = 1) haben, sondern Gewichte, welche nach der Tabelle auf S. 269 zwischen 24 und 28 schwanken. Man könnte vielleicht wohl auch die Gewichtsunterscheidungen zwischen 24, 25 und äusserstenfalls 28 vernachlässigen, doch bringt deren Mitführung gar keine Schwierigkeit.

Der Nachweiss, dass die allgemeine Besselsche Netzausgleichung von § 72. mit § 55. durch die Schreibersche Winkelmessung in allen Combinationen übergeht in Netzausgleichung mit einzelnen Richtungen, ist in unserer vorigen 3. Auflage, 1890, S. 252—256 im einzelnen formell geführt worden, was wir diesesmal übergehen wollen, da der Grundgedanke dazu im Vorhergehenden genügend dargelegt ist. Statt dessen wollen wir im nächsten § 80. noch ein Netz-Beispiel zu dem besprochenen Verfahren betrachten.

§ 80. Die Elbkette.

Zu einem Beispiel der Triangulierungsbehandlung nach Schreibers Winkel-Methode nehmen wir die „Elbkette", deren Netzbild auf S. 280—281 gegeben ist, nach dem amtlichen Werke: „Die königl. preussische Landestriangulation". Hauptdreiecke. Vierter Teil. Die Elbkette. Zweite Abteilung, die Beobachtungen und deren Ausgleichung, gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Berlin 1891, (vgl. Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 399 und 1891, S. 455—459. Zur Anlage dieser Kette im Allgemeinen ist mitzuteilen:

Die Elbkette hat im Osten und im Westen feste Anschlüsse, welche in der Zeichnung auf S. 280—281 durch *starke Linien* angedeutet sind, nämlich:

im Osten Küstenvermessung:

Eichstädt-Eichberg $\log S = 4.619\,7943 \cdot 5$
Azimut $(Et - Eg)$ $= 177° 19' 53{,}221''$
„ $(Eg - Et)$ $= 357° 21' 14{,}480''$

im Westen: Baursberg-Havighorst $\log S = 4.430\,7451 \cdot 8$
Baursberg-Kaiserberg $\log S = 4.638\,2214 \cdot 6$

Winkel Havighorst-Baursberg-Kaiserberg $= 236° 39' 50{,}203''$

Der Anschluss im Osten ist ein in allen Beziehungen fester, während im Westen, mit zwei Seiten und einem Winkel, nur ein Anschluss in Hinsicht auf die *relative* Lage der drei Punkte Kaiserberg, Baursberg, Havighorst stattfindet.

Abgesehen von den Nebenpunkten Schwarzenberg, Lüneburg und Brockhöfe hat die Elbkette:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$p = 28$ Punkte,
$l = 62$ zweiseitige Sichtlinien.

Es folgen hieraus nach den Regeln (11) S. 173:

$l - 2p + 3 = 9$ Seitengleichungen
und $l - p + 1 = 35$ Dreiecksgleichungen.
Im Ganzen 44 Bedingungsgleichungen.

Hiezu kommen aber noch zwei Seitengleichungen (V und XLVI) für linearen Zwangsanschluss, erstens im Westen mit den zwei Seiten Kaiserberg-Baursberg und Baursberg-Havighorst, und zweitens eine durchlaufende Seitengleichung von Westen nach Osten bei Eichstädt-Eichberg. Was den *Winkel*zwang in Baursberg betrifft, so erzeugt dieser nicht eine neue Gleichung, sondern wird dadurch ausgedrückt, dass die Richtungen von Baursberg nach Kaiserberg und nach Havighorst beide die *gleiche* Verbesserung erhalten. (Verbesserung (6) in der Gesamtnumerierung.)

Was die Anordnung der Messungen betrifft, so besteht die Eigentümlichkeit, dass die Messungen teils nach der alten Bessel schen Satzmethode, teils nach der Schreiber schen Methode ausgeführt sind, und zwar in folgender Verteilung (S. 280—281):

Stationen mit Winkelmessung in allen Combinationen nach Schreiber s Methode.

1.	Kaisersberg	2	Sichten
2.	Stade	3	„
3.	Baursberg	5	„ (4)
4.	Litberg	4	„
5.	Havighorst	3	„
6.	Vahrendorf	5	„
7.	Wilsede	5	„
8.	Steinhöhe	5	„
9.	Hohen-Bünstorf	6	„
10.	Lüss	3	„
11.	Glienitz	4	„
12.	Redemoissel	4	„
13.	Pugelatz	6	„
14.	Höhbeck	7	„
16.	Zichtauer Berg	3	„
	Summe	65	Sichten

Stationen mit Richtungsmessungen nach der alten, Bessel schen Methode.

15.	Dolchauer Berg	6	Sichten
17.	Polkern	4	„
18.	Woltersdorf	6	„
19.	Ruhnerberg	3	„
20.	Hexenberg	3	„
21.	Landsberg	5	„
22.	Arneburg	6	„
23.	Stöllner Berg	7	„
24.	Gollwitzer Berg	5	„
25.	Götzer Berg	5	„
26.	Hagelsberg	3	„
27.	Eichstädt	3	„
28.	Eichberg	3	„
	Summe	59	Sichten

Im Ganzen $65 + 59 = 124$ Sichten, entsprechend den schon vorher erwähnten $l = 62$ zweiseitigen gemessenen Verbindungslinien.

Die Station Bauersberg hat *zwei* feste Anschlussrichtungen, weshalb die Winkelmessung und Ausgleichung nach dem in § 78. beschriebenen Verfahren geschah.

Die Station Baursberg giebt nochmals Gelegenheit zur Ausgleichung von Winkeln mit Anschluss an zwei feste Richtungen. Man hat nämlich aus „Kön. Preuss. Landes-Triang., Hauptdreiecke, IV. Teil", die Elbkette 1891, S. 69—70 durch Mittelbildung die folgenden 9 gemessenen Winkel und dazu einen fest gegebenen Winkel [1,5].

1. Havighorst	2. Vahrendorf	3. Litberg.	4. Stade.	5. Kaiserberg.
	$(1,2) = 50° 46' 35{,}17''$ $p=1$	$(1,3) = 107° 55' 45{,}37''$ $p=1$	$(1,4) = 178° 56' 37{,}13''$ $p=1$	$[1,5] = 236° 41' 37{,}75''$ fest gegeben
		$(2,3) = 57° 9' 10{,}24''$ $p=2$	$(2,4) = 128° 10' 3{,}29''$ $p=2$	$(2,5) = 186° 55' 0{,}50''$ $p=1$
			$(3,4) = 71° 0' 52{,}95''$ $p=2$	$(3,5) = 128° 45' 51{,}98''$ $p=1$
				$(4,5) = 57° 44' 58{,}60''$ $p=1$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zuerst eliminiert man den Anschlusszwang, wobei wir nur noch die Sekunden schreiben:

$(1,2) = 35{,}17''$	$(1,3) = 45{,}37''$	$(1,4) = 37{,}13''$
$[1,5] - (2,5) = 37{,}25$	$[1,5] - (3,5) = 45{,}77$	$[1,5] - (4,5) = 39{,}15$
Mittel $(1,2) = 36{,}21''$	Mittel $(1,3) = 45{,}57''$	Mittel $(1,4) = 38{,}14''$
Dazu von oben:	$(2,3) = 10{,}24$	$(2,4) = 3{,}29$
		$(3,4) = 52{,}95$

Diese 6 Winkel haben nun alle $p = 2$, sind also gleichgewichtig. Man gleicht dieselben so aus:

$(1,2) = \begin{cases} 36{,}21'' \\ 36{,}21 \end{cases}$	$(1,3) = \begin{cases} 45{,}57'' \\ 45{,}57 \end{cases}$	$(1,4) = \begin{cases} 38{,}14'' \\ 38{,}14 \end{cases}$	$(2,3) = \begin{cases} 10{,}24'' \\ 10{,}24 \end{cases}$
$(1,3) - (2,3) = 35{,}33$	$(1,4) - (3,4) = 45{,}19$	$(1,2) + (2,4) = 39{,}50$	$(1,3) - (1,2) = 9{,}36$
$(1,4) - (2,4) = 34{,}85$	$(1,2) - (2,3) = 46{,}45$	$(1,3) + (3,4) = 38{,}52$	$(3,4) - (2,4) = 10{,}34$
Mittel $[1,2] = 35{,}65''$	$[1,3] = 45{,}70''$	$[1,4] = 38{,}58''$	$[2,3] = 10{,}04''$

Ebenso auch noch $[2,4] = 2{,}92''$ und $[3,4] = 52{,}88''$.

Wenn man alles zusammen nimmt, die Grade und Minuten wieder zusetzt, und das Ergebnis der Ausgleichung in Form eines Richtungssatzes mit Havighorst als Anfang $= 0°\,0'\,0''$ schreibt, so hat man:

1. Havighorst	=	0° 0′	0,00″
2. Vahrendorf	=	50 46	35,65
3. Litberg	=	107 55	45,70
4. Stade	=	178 56	38,58
5. Kaiserberg	=	236 41	37,75

Betrachten wir weiter beispielshalber die Station Litberg näher, so sehen wir zuerst, dass dieselbe 4 Richtungen hat: Baursberg, Vahrendorf, Wilsede, Stade; es ist daher nach der Tabelle von § 79. auf S. 270 mit $s = 4$ gemessen worden, d. h. 6 Winkel mit $n = 6$ facher Wiederholung in Lage I und II oder $2n = 12$ facher Wiederholung der Einzellagen. Es treten daher auf S. 72—73 des amtlichen Werkes „Elbkette“ im Ganzen 72 Winkelmessungen auf mit den Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} 24\,A = +1{,}35'' & A = +0{,}056'' \\ 24\,B = +1{,}20 & B = +0{,}050 \\ 24\,C = -3{,}80 & C = -0{,}158 \\ 24\,D = +1{,}25 & D = +0{,}052 \end{array}\right\} \quad (a)$$

Die hiezu gehörigen Gewichtsgleichungen werden ebenso einfach, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} (10) = 0{,}0417\ [10] \\ (11) = 0{,}0417\ [11] \\ (12) = 0{,}0417\ [12] \\ (13) = 0{,}0417\ [13] \end{array}\right\} \quad (b)$$

Diese Gewichtsgleichungen sind entsprechend den Gewichtsgleichungen XV auf S. 159, deren erste heisst:

$$(1) = (\alpha\,\alpha)\,[1] + (\alpha\,\beta)\,[2] + (\alpha\,\gamma)\,[3]$$

Es ist also in der vorstehenden Gleichungsgruppe (*b*):

$$(\alpha\,\alpha) = (\beta\,\beta) = (\gamma\,\gamma) = 0{,}0417 = \frac{1}{24}$$
$$(\alpha\,\beta) = (\alpha\,\gamma) = \ldots = 0$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auch die vorstehende Gruppe (a) ist im allgemeinen Falle durch die viel umständlicheren Gleichungen III und VIII c unten auf S. 156 vertreten.

Man sieht also deutlich, dass die Schreiber sche Methode in der allgemeinen alten Bessel schen Methode von S. 156—160 in aller Strenge mit enthalten ist, aber viel einfacher ist als jene.

In allem übrigen verweisen wir auf das oben S. 272 citierte amtliche Original-Werk „die Elbkette".

Litteratur-Angaben zu § 75.—80.

Die ersten allgemeinen theoretischen Untersuchungen über Stations- und Netzausgleichungen mit Winkeln und Richtungen hat *Hansen* angestellt in seinen Abhandlungen „Von der Methode der kleinsten Quadrate 1868—1871", (vgl. die Anmerkung unten auf S. 145). Hansen hat bereits die 3 Fälle erkannt, in welchen Stationsausgleichungen in Form von unabhängigen Richtungen dargestellt werden können, nämlich 1) lauter volle Sätze, 2) nicht mehr als 3 Strahlen, 3) Winkelmessung in allen Combinationen. Namentlich diesen dritten Fall hat Hansen behandelt in „fortgesetzte geodätische Untersuchungen, bestehend in 10 Supplementen" u. s. w. Abh. d. math. phys. Cl. d. K. sächs. Ges. d. Wiss., IX. Band, 1871, S. 169—184, „das Beobachtungsverfahren betreffend, welches Gauss in der Hannöver schen Gradmessung angewendet hat."

General *Schreiber* hat die Methode der Winkelmessung in allen Combinationen, sowohl theoretisch behandelt als auch praktisch verwertet in dem amtlichen Werk: „Die Königl. Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, II. Teil., 2. Abteilung, Berlin 1874". Dazu gehört auch „Über die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtungen auf der Station", von Schreiber, „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 209—237 und Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen, Schreiber, „Zeitschr. f. Verm., 1879", S. 97—149.

Die Charakterisierung des Verfahrens der Winkelmessung in allen Combinationen ist von General Schreiber in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 209—211 gegeben worden, wobei die Zeichen p, n, q *andere* Bedeutungen haben als in unserem Vorhergehenden, wie folgt:

Wenn auf einer Station n Richtungen vorhanden und p volle Beobachtungsreihen oder $\frac{p}{2}$ volle Sätze (zwei Beobachtungsreihen hin und her bilden einen Satz) gemessen sind, so ist mit $n\,p$ Einstellungen das Gewicht p für jede Richtung erreicht, wobei das Gewicht einer einmaligen Richtungsbeobachtung gleich 1 gesetzt ist. Misst man dagegen jeden Winkel q mal, so ist die Anzahl der Einstellungen gleich $n\,(n-1)\,q$, (da n Richtungen $^1/_2\,n\,(n-1)$ Winkel bilden). Um daher in beiden Fällen gleiche Gewichte der Resultate zu erhalten, muss man haben:

$$\frac{n\,q}{2} = p, \quad \text{woraus} \quad q = \frac{2\,p}{n}$$

Es wird somit das Gewicht p für jede Richtung erreicht:

1) mit $n\,p$ Einstellungen bei Messung voller Sätze,

2) mit $2\,(n-1)\,p$ Einstellungen bei Messung von Winkeln.

Demnach erfordern Winkelbeobachtungen mehr, niemals aber doppelt so viel Einstellungen als Richtungsbeobachtungen, selbst nicht in deren günstigstem Falle (bei vollen Sätzen). Je weniger es auf einer Station möglich gewesen ist, in lauter vollen Sätzen zu beobachten (was schon bei Stationen von 4 Richtungen selten möglich ist), um so mehr geht die Überlegenheit der Richtungsbeobachtungen bezüglich der Einstellungszahl verloren; immerhin bleiben die letzteren gegen Winkelbeobachtungen im Vorteil. Oder mit andern Worten: je länger auf einer Station die Beobachtungsreihen, desto weniger Einstellungen sind nötig, um ein bestimmtes Gewicht der Resultate zu erreichen.

Trotz dieses Ergebnisses und im Widerspruch mit der seit Bessel allgemein befolgten geodätischen Praxis bin ich bei der Preussischen Landestriangulation (1868—1874) immer mehr zu der Überzeugung gekommen, dass die Überlegenheit langer Beobachtungsreihen gegenüber den kurzen, im Sinne der wie oben berechneten Gewichte, nur eine nominelle, an wirklicher Genauigkeit aber eine illusorische ist; dass vielmehr kurze Beobachtungsreihen den langen, insbesondere aber die kürzesten allen andern, d. h. *reine Winkelbeobachtungen den Richtungsbeobachtungen vorzuziehen sind, weil sie bei gleichem Zeitaufwand genauere Resultate geben.*

Die Gründe, die mich zu der oben ausgesprochenen Ansicht geführt haben, sind folgende:

1. Eine kurze Beobachtungsreihe giebt die Richtungsunterschiede im Allgemeinen genauer,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

als eine lange, und dies ist um so mehr der Fall, je weniger fest die Aufstellung des Instrumentes und dieses selbst ist. Der obige Vergleich der Einstellungszahlen bei gleichen Gewichten der Resultate wird dadurch wesentlich zu Gunsten der Winkelbeobachtungen modifiziert. Dies tritt im stärksten Masse bei Pfeilerdrehung hervor, die bei Triangulationen in flachen, und selbst in bergigen, aber waldreichen Gegenden gar nicht zu vermeiden ist.

2. Bei kurzen Beobachtungsreihen kann man in derselben Zeit mehr Einstellungen machen, als bei langen, besonders aus dem Grunde, weil bei diesen der Zeitverlust infolge des Ausbleibens von Lichtern und sonstiger Unterbrechungen viel grösser ist, als bei jenen.

3. Bei Anwendung von Winkelbeobachtungen kann auf jeder Station nach einem bestimmten, im voraus entworfenen Beobachtungsplan, welcher die Anzahl der Messungen jedes Winkels, die Fernrohr- und Kreislagen u. s. w. genau vorschreibt, beobachtet werden, während eine derartige Anordnung für Richtungsbeobachtungen undurchführbar ist. Bei erstern wird dadurch eine weit vollständigere Elimination von konstanten Fehlern und Teilungsfehlern möglich.

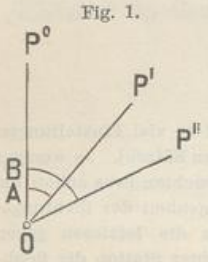
4. Auf den meisten Stationen giebt es eine oder mehrere Richtungen, deren Beobachtung weit schwerer und seltener als die der übrigen, und nur mittelst rascher Wahrnehmung einzelner Gelegenheiten von kurzer Dauer gelingt. Zur Ausnützung solcher Gelegenheiten ist die Winkelmethode weit geeigneter als die Richtungsmethode.

Diese Erwägungen und Erfahrungen sind es, die mich schon seit dem Jahre 1871 zur ausschliesslichen Anwendung von Winkelbeobachtungen geführt haben (vgl. Hauptdreiecke, 2. Band, 2. Abteilung: die Stationen Marienberg, Brautberg, Keulenberg, Brandberg und Schneekoppe der Märkisch-Schlesischen Kette, sowie im 3. Bande sämtliche Stationen des Märkischen Netzes); aber erst 1875 habe ich dieser Methode diejenige Ausbildung gegeben, in der sie seitdem konsequent von der trigonometrischen Abteilung für alle Messungen erster Ordnung angewandt ist, und zwar mit grossem Gewinn, nicht nur an Genauigkeit, sondern auch an Zeit.

§ 81. Allgemeine Beziehungen zwischen Winkelausgleichung und Richtungsausgleichung.

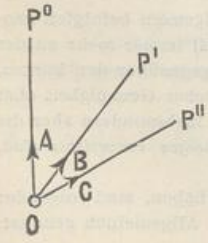
Nachdem wir im Bisherigen schon manche Beziehungen zwischen Winkeln und Richtungen betrachtet haben, z. B. die Stationsausgleichung von Winkelmessungen in allen Combinationen sowohl mit Winkeln als auch mit Richtungen als Unbekannten (§ 77.), wollen wir noch eine zur Aufklärung im Allgemeinen nützliche Theorie vorführen aus dem Werke: „Die Königlich Preussische Landestriangulation". Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Zweite Abteilung. Berlin 1874. Auf S. 303—313 daselbst findet sich eine Abhandlung von *Schreiber:* „Vereinfachte Form der Stationsausgleichungsresultate", deren Grundgedanken darin besteht, dass den Stationsausgleichungsresultaten nicht (wie bei Bessel) die Form von *Winkeln* ..., sondern die Form von *Richtungen* gegeben wird.

Fig. 1.



Wenn 3 Strahlen $O\,P^\circ$ $O\,P'$ $O\,P''$ mehrfach eingeschnitten sind, so kann man als Unbekannte der Ausgleichung zunächst die 2 *Winkel* A , B betrachten, welche die Strahlen $O\,P'$ $O\,P''$ mit dem Strahl $O\,P^\circ$ bilden (Fig. 1.). In dieser Weise wird bei der Besselschen Ausgleichung verfahren (welche in unserem § 71. gelehrt wurde). Wir gehen nun aber zu einer anderen Anschauung über, und betrachten nach Fig. 2. die 3 *Richtungen* $A\,B\,C$ als Unbekannte, dann ist vorerst so viel klar, dass $B - A$ nach Fig. 2. $= A$ nach Fig. 1. ist, oder allgemeiner:

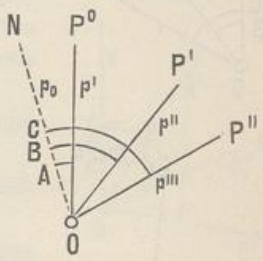
Fig. 2.



Annahme Fig. 1.		Annahme Fig. 2.	
Winkel A	= Richtungsunterschied	$B - A$	(1)
„ B	„	$C - A$	
. . . . .			

Um die zweite Annahme aus der ersten hervorgehen zu lassen, erinnere man sich, dass „Richtungen" nichts anderes sind, als Winkel, welche die geodätischen Strahlen $O\,P^\circ$ $O\,P'$ $O\,P''$ mit irgend *einem*, seiner geodätischen Lage nach unbekannten, aber für alle Richtungen gemeinsamen Anfangsstrahl $O\,N$ bilden, weshalb die Richtungen A , B , C von Fig. 2. ausführlicher durch Fig. 3. dargestellt werden können. Wenn nun in Fig. 3. $O\,N$ ebenfalls ein geodätischer, miteingeschnittener Strahl *wäre*, so würde man offenbar für Fig. 3. ein Normalgleichungssystem von der allgemeinen Form (10) §. 71. S. 235 erhalten, nämlich:

Fig. 3.



$$\left.\begin{aligned}(a\,a)\,A + (a\,b)\,B + (a\,c)\,C + (a\,l) &= 0\\ (a\,b)\,A + (b\,b)\,B + (b\,c)\,C + (b\,l) &= 0\\ (a\,c)\,A + (b\,c)\,B + (c\,c)\,C + (c\,l) &+ 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wobei die Coefficienten $(a\,a)$ $(a\,b)\ldots$ die Bedeutungen von § 71. S. 236 haben, jedoch so, dass (nach Fig. 3.) p° dem fingierten Strahl $O\,N$ entspricht, p' dem Strahl P° u. s. w.

Um vollends die Normalgleichungen (2) völlig dem Falle von Fig. 3. oder Fig. 2. anzupassen, hat man nichts zu thun, als alle p°, d. h. $p_1{}^\circ$, $p_2{}^\circ$, $p_3{}^\circ \ldots =$ Null zu setzen. Thut man dieses in (8) , (9) und (11) § 71. S. 235—236, so findet man:

$$\begin{aligned}(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = [p'] &- \frac{p_1'}{[p_1]}(p_1' + p_1'' + p_1''' + \ldots)\\ &- \frac{p_2'}{[p_2]}(p_2' + p_2'' + p_2''' + \ldots)\\ &- \frac{p_3'}{[p_3]}(p_3' + p_3'' + p_3''' + \ldots)\end{aligned}$$

Nun ist aber in diesem Falle, weil alle $p^\circ = 0$ sind,

$$\begin{aligned}[p_1] &= p_1' + p_1'' + p_1''' + \ldots\\ [p_2] &= p_2' + p_2'' + p_2''' + \ldots \quad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

also $$(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = [p'] - (p_1' + p_2' + p_3' + \ldots) = 0$$

Auf ähnliche Weise beweist man auch, dass alle anderen Vertikalreihen der Normalgleichungen (2) die Summe Null geben, d. h.:

$$\left.\begin{aligned}(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) &= 0\\ (a\,b) + (b\,b) + (b\,c) &= 0\\ (a\,c) + (b\,c) + (c\,c) &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

$$(a\,l) + (b\,l) + (c\,l) = 0 \qquad (4)$$

Naturgemäss haben wir damit gefunden, dass ein Normalgleichungssystem von der Form (2), welches sich auf *Richtungen* A , B , $C\ldots$ bezieht, keine eindeutige Auflösung zulässt, denn diese Gleichungen (2) sind vermöge (3) und (4) nicht untereinander unabhängig.

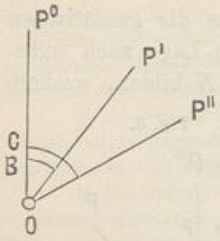
Obgleich die elementare Algebra die Unmöglichkeit einer eindeutigen Auflösung der Gleichungen (2) lehrt, wollen wir dieses doch noch unmittelbar verfolgen: Wenn A , B , C ein System ist, welches den Gleichungen (2) genügt, und man setzt an deren Stelle bzw. $A + z$, $B + z$, $C + z$, so hat man aus (2):

$$(a\,a)\,(A + z) + (a\,b)\,(B + z) + (a\,c)\,(C + z) + (a\,l) = 0,$$

d. h.: $$(a\,a)\,A + (a\,b)\,B + (a\,c)\,C + (a\,l) + \{(a\,a) + (a\,b) + (a\,c)\}\,z = 0$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 4.

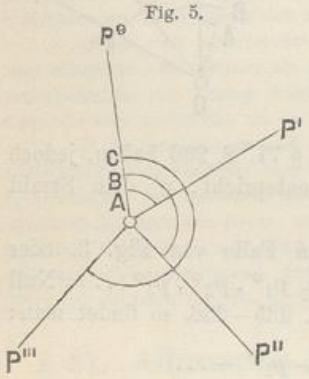


Der erste Teil verschwindet wegen (2) und der zweite Teil wegen (3); es ist also die Gleichung, welche für A, B, C befriedigt war, auch für $A+z$, $B+z$, $C+z$ allgemein richtig.

Da eine Richtung unbestimmt bleibt, so kann man eine solche $=0$ setzen, z. B. $A=0$ gesetzt, giebt aus (2):

$$\left.\begin{aligned}(a\,b)\,B+(a\,c)\,C+(a\,l)&=0\\(b\,b)\,B+(b\,c)\,C+(b\,l)&=0\\(b\,c)\,B+(c\,c)\,C+(c\,l)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Fig. 5.



Wegen (3) und (4) kann man hier eine Gleichung beliebig weglassen, z. B. die erste, und dann erhält man die Winkel B und C (Fig. 4.) eindeutig bestimmt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(b\,b)\,B+(b\,c)\,C+(b\,l)&=0\\(b\,c)\,B+(c\,c)\,C+(c\,l)&=0\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Die umgekehrte Operation, nämlich Winkelgleichungen in Richtungsgleichungen zu verwandeln, ergiebt sich ebenfalls aus (3) und (4), wie an einem Zahlenbeispiel erläutert werden soll.

Wenn gegeben ist (zu Fig. 5.):

$$\left.\begin{aligned}+27\,A-\;9\,B-\;4\,C+13{,}4&=0\\-\;9\,A+18\,B-\;6\,C-\;7{,}0&=0\\-\;4\,A-\;6\,B+15\,C-12{,}9&=0\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

so bildet man die Summengleichung:

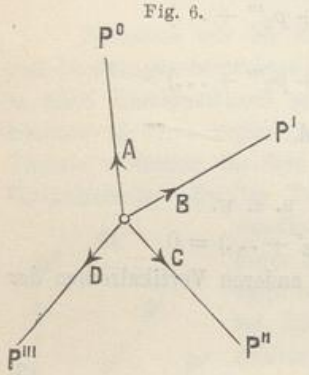
$$+14\,A+3\,B+5\,C-6{,}5=0$$

und diese setzt man mit Änderung der Vorzeichen zu den Gleichungen (7); also:

Summen:

$$\left.\begin{array}{r|l}-22 & -14\,A-\;3\,B-\;5\,C+\;6{,}5=0\\+14 & +27\,A-\;9\,B-\;4\,C+13{,}4=0\\+\;3 & -\;9\,A+18\,B-\;6\,C-\;7{,}0=0\\+\;5 & -\;4\,A-\;6\,B+15\,C-12{,}9=0\end{array}\right\}\qquad(8)$$

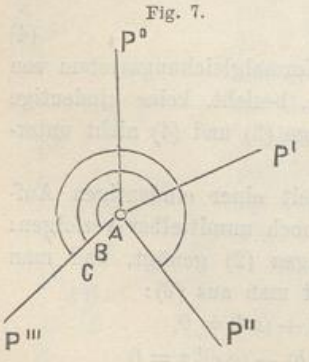
Fig. 6.



Endlich bildet man daraus, mit Verschiebung der Bezeichnungen $A\,B\,C\,D$ nach Fig. 1. und Fig. 2.:

$$\left.\begin{aligned}+22\,A-14\,B-\;3\,C-\;5\,D+\;6{,}5&=0\\-14\,A+27\,B-\;9\,C-\;4\,D+13{,}4&=0\\-\;3\,A-\;9\,B+18\,C-\;6\,D-\;7{,}0&=0\\-\;5\,A-\;4\,B-\;6\,C+15\,D-12{,}9&=0\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Fig. 7.



Dadurch haben wir nun die 3 Normalgleichungen (7), welche sich auf 3 Winkel A, B, C von Fig. 5. beziehen, umgewandelt in 4 Normalgleichungen (9) mit 4 Richtungen A, B, C, D von Fig. 6.

Man kann nun wieder irgend eine *andere* Richtung $=0$ setzen, z. B. D, und erhält damit aus (9):

$$\left.\begin{aligned}+22\,A-14\,B-\;3\,C+\;6{,}5&=0\\-14\,A+27\,B-\;9\,C+13{,}4&=0\\-\;3\,A-\;9\,B+18\,C-\;7{,}0&=0\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses Winkelsystem (10) bezieht sich auf dieselben 4 Strahlen wie das Winkelsystem (7), abgesehen von den Bezeichnungen $A\,B\,C$ (vgl. Fig. 5. und 7.). Man kann also durch Vermittlung von Richtungen ein Winkelsystem auf andere Nullpunkte reduzieren.

Wir wollen diese allgemeine Theorie dazu benützen, bzw. daran erproben, dass wir den schon in § 77. erledigten Fall von Winkelmessungen in allen Combinationen *nochmals* vornehmen:

Fig. 8.

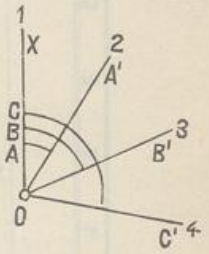


Fig. 8. stellt einen solchen Fall mit 4 Strahlen und 6 Winkeln vor.

Zwischen den Strahlen 1, 2, 3, 4 sind alle 6 Winkelcombinationen (1,2) (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) (3,4) gemessen.

Die 3 Winkel $A\,B\,C$ von Fig. 8. seien die unabhängigen Unbekannten, dann hat man für die erste Messung die Fehlergleichung:

$$v_{12} = A - (1,2),$$

oder für die 4te Messung besteht die Fehlergleichung:

$$v_{23} = B - A - (2,3) \text{ u. s. w.}$$

Alle 6 derartigen Fehlergleichungen sind (ebenso wie in (2) S. 260):

$$\left.\begin{array}{l} v_{12} = +A \quad . . \quad . . - (1,2) \\ v_{13} = \quad . . + B \quad . . - (1,3) \\ v_{14} = \quad . . \quad . . + C - (1,4) \\ v_{23} = -A + B \quad . . - (2,3) \\ v_{24} = -A \quad . . + C - (2,4) \\ v_{34} = \quad . . - B + C - (3,4) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

die Normalgleichungen hiezu:

$$\left.\begin{array}{rrrr} 3\,A - & B - & C - (a\,l) = 0 \\ - A + 3\,B - & C - (b\,l) = 0 \\ - A - & B + 3\,C - (c\,l) = 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Die Absolutglieder hiezu sind (ebenso wie bei (3) S. 260):

$$\left.\begin{array}{l} (a\,l) = (1,2) - (2,3) - (2,4) \\ (b\,l) = (1,3) + (2,3) - (3,4) \\ (c\,l) = (1,4) + (2,4) + (3,4) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Nach dem Verfahren, welches an dem Beispiel von (7) bis (9) erläutert wurde, wird das auf Winkel $A\,B\,C$ bezügliche System (12) in ein für Richtungen giltiges System umgewandelt, worin nach Fig. 8. jetzt die Richtungen X, A', B', C' statt der Winkel $A\,B\,C$ eingeführt sind.

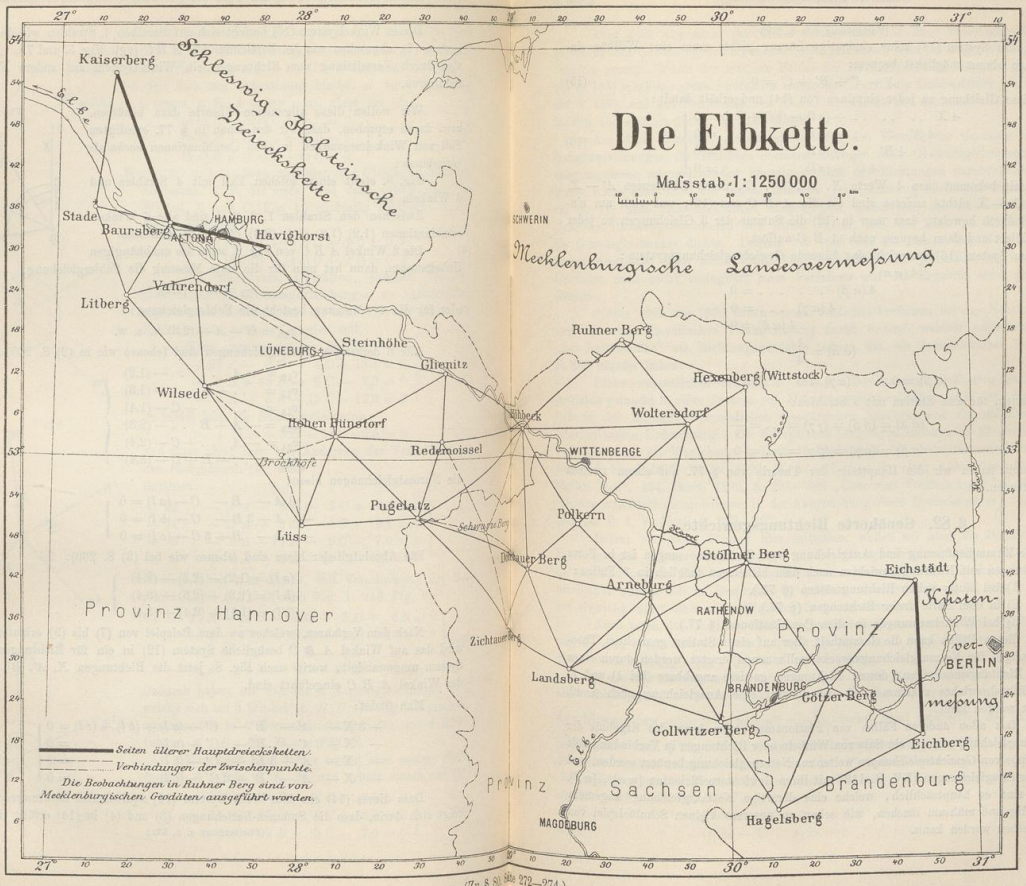
Man findet:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} +3\,X - & A' - & B' - & C' + (a\,l) + (b\,l) + (c\,l) = 0 \\ - X + 3\,A' - & B' - & C' - (a\,l) & = 0 \\ - X - & A' + 3\,B' - & C' - (b\,l) & = 0 \\ - X - & A' - & B' + 3\,C' - (c\,l) & = 0 \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Dass dieses (14) ein dem Winkelsystem (12) äquivalentes Richtungssystem ist, zeigt sich darin, dass die Summen-Beziehungen (3) und (4) in (14) erfüllt sind.

(Fortsetzung s. S. 282.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN



(Zu § 81 Seite 272—274.)

(Fortsetzung von S. 279.)

Da das System (14) keine eindeutige Lösung giebt, muss eine Willkür eintreten; man nimmt möglichst bequem:

$$X + A' + B' + C' = 0 \tag{15}$$

addiert diese Gleichung zu jeder einzelnen von (14) und erhält damit:

$$\left.\begin{aligned} 4X \;..\;..\;.. + (a\,l) + (b\,l) + (c\,l) &= 0 \\ 4A' \;..\;.. - (a\,l) &= 0 \\ 4B' \;.. - (b\,l) &= 0 \\ 4C' + (c\,l) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Damit bekommt man 4 Werte X, A', B', C', deren Differenzen $A' - X$, $B' - X$, $C' - X$ nichts anderes sind als die $A\ B\ C$ aus (12), was sich am einfachsten dadurch beweist, dass man in (12) die Summe der 3 Gleichungen zu jeder einzeln addiert und dann bequem nach $A\ B\ C$ auflöst.

Dem System (16) entspricht das folgende Gewichtsgleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4(\alpha\,\alpha) \;...\;...\;... &= 0 \\ 4(\alpha\,\beta) \;...\;... &= 0 \\ 4(\alpha\,\gamma) \;... &= 0 \\ 4(\alpha\,\delta) &= 0 \end{aligned}$$

woraus

$$(\alpha\,\alpha) = \frac{1}{4}$$

$$(\alpha\,\beta) = 0 \qquad (\alpha\,\gamma) = 0 \qquad (\alpha\,\delta) = 0$$

oder allgemein für eine Station mit s Strahlen:

$$(\alpha\,\alpha) = (\beta\,\beta) = (\gamma\,\gamma) = \ldots = \frac{1}{s}$$

$$(\alpha\,\beta) = (\alpha\,\gamma) = (\beta\,\gamma) = \ldots = 0$$

Damit haben wir die Hauptteile der Theorie von § 77. auf einem zweiten Wege gefunden.

§ 82. Genäherte Richtungsgewichte.

Die Zusammenfassung und Ausgleichung von Stationsmessungen ist in Form von Richtungen mit Richtungsgewichten nach dem bisherigen möglich in 3 Fällen:

1) bei lauter vollen Richtungssätzen (§ 75.),
2) in dem Falle *dreier* Richtungen (§ 76.),
3) bei Winkelmessungen in allen Combinationen (§ 77.)

In diesen Fällen kann die Gesamtheit aller auf einer Station gemachten Theodolitmessungen für Netzausgleichungszwecke vollkommen ersetzt werden durch *einen* Satz von Richtungsmessungen, dessen Richtungen gewisse angebbare (bei 1) und 3) gleiche) Einzelgewichte zukommen, so dass darauf eine Ausgleichung nach § 40. gegründet werden kann.

In fast allen anderen Fällen von Stationsmessungen kann das Ergebnis der Stationsausgleichung nur als ein Satz von Winkeln oder Richtungen in Verbindung mit einer Gruppe von *Gewichtsgleichungen* weiter zur Netzausgleichung benützt werden, und diese Gewichtsgleichungen (XV. S. 159) mit ihren Gewichtscoefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]\ldots$ sind es hauptsächlich, welche eine derartige Netzausgleichung ungemein schwerfällig und mühsam machen, wie schon an unserem kleinen Schulbeispiel von § 72. gesehen werden kann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aber auch abgesehen von dieser Rechenmühe hat diese Bessel sche Netzausgleichung mit Gewichtsgleichungen sich stets mit einem noch wichtigeren Übelstande behaftet gezeigt, indem der mittlere Fehler der *Netz*ausgleichung (m_2 oder μ_2 unten auf S. 159) erheblich grösser gefunden wurde als der mittlere *Stations*fehler (m_1 oder μ_1 auf S. 157), was auf Fehlerursachen hindeutet, welche auf den Stationen verborgen bleiben und erst im Netze zu Tage treten.

Alle diese Umstände haben schon lange den Wunsch der Geodäten erzeugt, Netzausgleichungen für beliebige Stationsmessungen ohne Gewichtsgleichungen, mit näherungsweise anzunehmenden Einzelgewichten der Richtungen durchzuführen. So wurde schon etwa 1850 die grosse britische Triangulierung (Ordnance trigonometrical survey) nach Einzelgewichten ausgeglichen, wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungsmessungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen als Genauigkeitsmass diente. Damals vor 1858 war die Theorie der Netzausgleichungen überhaupt noch nicht völlig klar vorhanden, und jedenfalls den britischen Geodäten noch nicht verfügbar; jenes Verfahren war das Ergebnis einer gesunden Empirie.

Später, etwa um 1870 haben wir ein ähnliches Verfahren bei der Neuausgleichung der alten Bayerischen Triangulierung durch *v. Orff*, welcher schlechtweg die „Anschnittszahlen" als Richtungsgewichte nahm, wie wir beispielshalber in § 76. S. 258 gezeigt haben.

Einen wesentlichen Fortschritt hat die Bestimmung genäherter Richtungsgewichte gemacht in einer Theorie von *Helmert*, welche enthalten ist in der „Veröffentlichung des Königlich preussischen Geodätischen Instituts und Centralbureaus der internationalen Erdmessung. Die Europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft, Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen", Berlin 1893, S. 37—42, und in einer Abhandlung in „Astr. Nachrichten", 134. Band, 1893, S. 281—296 „Über eine Vereinfachung bei der Einführung von Stationsergebnissen in der Ausgleichung eines Dreiecksnetzes." (Bericht hierüber Z. f. V. 1894, S. 212—222).

Indem wir diese Theorie hier mitteilen, wollen wir auch die Helmert schen Bezeichnungen wegen des Anschlusses an die citierten Originalschriften, hier beibehalten, und müssen dazu zuerst bemerken, dass nun mit q eine Gewichts-*Reciproke* bezeichnet werden soll im Gegensatz zu unserem vorhergehenden § 76. u. s. w., wo q das Gewicht selbst einer ausgeglichenen Richtung war.

Auch seien die Gewichts-Coefficienten, welche in unserem früheren § 28. teils mit Q_1 , Q_2 , Q_3, teils mit $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]$ u. s. w. bezeichnet waren, nun in erster Linie mit Q_{22} , Q_{23} , Q_{24} u. s. w. bezeichnet.

Wenn eine Stationsausgleichung nach § 71. vorliegt mit zwei Winkeln x' und x'' als unabhängigen Unbekannten, so findet man die Gewichte von x' und x'' bei der Ausgleichung bzw. $p' = \dfrac{1}{[\alpha\,\alpha]}$ und $p'' = \dfrac{1}{[\beta\,\beta]}$, wobei $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$ die Gewichts-Coefficienten nach § 28. und § 29. sind. Auch das Gewicht P der Differenz $x'' - x'$, d. h. des Winkels zwischen den zwei Strahlen P' und P'' von Fig. 1. S. 232 lässt sich angeben, denn es ist $x'' - x'$ eine lineare Funktion der unabhängigen x' und x'', nämlich nach (1) S. 92.:

$$x'' - x' = F = f_1 x' + f_2 x'' + f_3 x'''$$

wobei $$f_1 = -1 \quad , \quad f_2 = +1 \quad , \quad f_3 = 0$$

folglich nach (3) S. 92:

$$\frac{1}{P} = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\beta] + [\beta\,\beta]$$

Eine solche Formel gilt für jeden nach der Ausgleichung erhaltenen Winkel, und wenn wir nach dem vorhergehenden Citate die Gewichtscoefficienten anders bezeichnen, nämlich $[\alpha\,\alpha] = Q_{22}$, $[\alpha\,\beta] = Q_{23}$, $[\beta\,\beta] = Q_{33}$, und die Winkel selbst $x' = (1,2)$, $x'' = (1,3)$, also $x'' - x' = (2,3)$, so wird die Gewichtsreciproke des Winkels (2,3) ausgedrückt durch

$$q_{23} = Q_{22} - 2\,Q_{23} + Q_{33}$$

Nach diesen Festsetzungen über die Wahl der Bezeichnungen betrachten wir zunächst den Fall einer Stationsausgleichung mit 4 Strahlen.

Zwischen diesen 4 Strahlen 1, 2, 3, 4 bestehen 6 Winkel, welche nach der Ausgleichung folgende Gewichte haben sollen:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Winkel } (1,2) \text{ mit Gewicht} = 1 : Q_{22} & = 1 : q_{12} \\ \text{„ } (1,3) \text{ „ „} \quad 1 : Q_{33} & = 1 : q_{13} \\ \text{„ } (1,4) \text{ „ „} \quad 1 : Q_{44} & = 1 : q_{14} \\ \text{„ } (2,3) \text{ „ „} \quad 1 : (Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23}) & = 1 : q_{23} \\ \text{„ } (2,4) \text{ „ „} \quad 1 : (Q_{22} + Q_{44} - 2\,Q_{24}) & = 1 : q_{24} \\ \text{„ } (3,4) \text{ „ „} \quad 1 : (Q_{33} + Q_{44} - 2\,Q_{34}) & = 1 : q_{34} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Nun soll *ein* Satz von Richtungsmessungen mit Einzelgewichten der einzelnen Strahlen an die Stelle des Ausgleichungsergebnisses gesetzt werden; sind die Reciproken der Einzelgewichte der 4 Strahlen bzw. q_1 , q_2 , q_3 , q_4, so müssen die Gleichungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{lll} q_{12} = q_1 + q_2 & q_{13} = q_1 + q_3 & q_{14} = q_1 + q_4 \\ & q_{23} = q_2 + q_3 & q_{24} = q_2 + q_4 \\ & & q_{34} = q_3 + q_4 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn nur *drei* Strahlen vorhanden wären, so würden auch nur 3 von diesen Gleichungen vorhanden sein, nämlich:

$$\left.\begin{array}{ll} q_{12} = q_1 + q_2 & q_{13} = q_1 + q_3 \\ & q_{23} = q_2 + q_3 \end{array}\right\} \quad (3)$$

und daraus lassen sich die 3 Unbekannten q_1 , q_2 , q_3 geradezu bestimmen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \dfrac{q_{12} + q_{13} - q_{23}}{2} \\ q_2 = \dfrac{q_{12} - q_{13} + q_{23}}{2} \\ q_3 = \dfrac{-q_{12} + q_{13} + q_{23}}{2} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Wenn man nach (1) hier einführt:

$$q_{12} = Q_{22} \quad , \quad q_{13} = Q_{33} \quad , \quad q_{23} = Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23},$$

so erhält man aus (4) die Gewichtsreciproken (ebenso wie (19) S. 258):

$$q_1 = Q_{23} \quad , \quad q_2 = Q_{22} - Q_{23} \quad , \quad q_3 = Q_{33} - Q_{23} \quad (5)$$

Durch diese Gleichungen (3)—(5) haben wir in neuer Form nochmals dasselbe gefunden, was als Spezialfall schon in § 76. behandelt worden ist, nämlich dass in dem besonderen Falle *dreier* Strahlen die Stationsausgleichung sich stets in der Form von Richtungen mit Einzelgewichten $\frac{1}{q}$ der ausgeglichenen Richtungen erledigen lässt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun kehren wir zu dem Falle von 4 Strahlen mit den Gleichungen (1) und (2) zurück.

Da man hier 6 Gleichungen in der Gruppe (2) und nur 4 Unbekannte q_1, q_2, q_3, q_4 hat, ist eine völlige Lösung nicht möglich, es sollen daher die 4 Werte q so bestimmt werden, dass sie den Gleichungen (2) möglichst (nach der M. d. kl. Q.) genügen. Betrachtet man die obenstehenden 6 Gleichungen (2) als Fehlergleichungen, so geben sie folgende 4 Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{llll} \underline{3\,q_1} + q_2 + q_3 + q_4 - s_1 = 0 & \text{wo} & s_1 = q_{12} + q_{13} + q_{14} & \\ q_1 + \underline{3\,q_2} + q_3 + q_4 - s_2 = 0 & & s_2 = q_{12} + q_{23} + q_{24} & \\ q_1 + q_2 + \underline{3\,q_3} + q_4 - s_3 = 0 & & s_3 = q_{13} + q_{23} + q_{34} & \\ q_1 + q_2 + q_3 + \underline{3\,q_4} - s_4 = 0 & & \underline{s_4 = q_{14} + q_{24} + q_{34}} & \\ & & S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 & \end{array}\right\} \quad (6)$$

Die Auflösung dieser 4 Gleichungen giebt:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Gewichts-Reciproke } q_1 = \frac{s_1}{2} - \frac{S}{12} & & \\ \quad " \quad " \quad q_2 = \frac{s_2}{2} - \frac{S}{12} & \text{mit der Summe} & \\ \quad " \quad " \quad q_3 = \frac{s_3}{2} - \frac{S}{12} & q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = \frac{S}{6} & \\ \quad " \quad " \quad q_4 = \frac{s_4}{2} - \frac{S}{12} & & \end{array}\right\} \quad (7)$$

Dieses (6) und (7) gilt für den besonderen Fall mit 4 Strahlen; im allgemeinen Falle mit n Strahlen ist eine ganz analoge allgemeinere Behandlung zu machen, wobei die Normalgleichungen statt (6) folgende werden:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{(n-1)\,q_1} + q_2 + q_3 + \ldots + q_n - s_1 = 0 \\ q_1 + \underline{(n-1)\,q_2} + q_3 + \ldots + q_n - s_2 = 0 \\ q_1 + q_2 + \underline{(n-1)\,q_3} + \ldots + q_n - s_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1 + q_2 + q_3 + \ldots \underline{(n-1)\,q_n} - s_n = 0 \end{array}\right\} \quad (8)$$

Die Absolutglieder s haben hier folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{array}{l} q_{12} + q_{13} + q_{14} + \ldots q_{1n} = s_1 \\ q_{21} + q_{23} + q_{24} + \ldots q_{2n} = s_2 \\ q_{31} + q_{32} + q_{34} + \ldots q_{3n} = s_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underline{q_{n1} + q_{n2} + q_{n3} + \ldots q_{(n-1)n} = s_n} \\ s_1 + s_2 + s_3 + \ldots s_n = S \end{array}\right\} \quad (9)$$

(dabei ist $q_{12} = q_{21}$, $q_{13} = q_{31}$ u. s. w.)

Zur Probe hat man direkt aus den Q:

$$S = 2\,(n-1)\,(Q_{22} + Q_{33} + Q_{44} + \ldots Q_{nn}) - 4\,(Q_{23} + Q_{24} + \ldots + Q_{34} + \ldots Q_{(n-1)n}) \quad (10)$$

Die allgemeine Formel zur Berechnung eines q ist:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \frac{s_1}{n-2} - \frac{S}{2\,(n-1)\,(n-2)} \\ q_2 = \frac{s_2}{n-2} - \frac{S}{2\,(n-1)\,(n-2)} \text{ u. s. w.,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (11)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wobei noch die Summenprobe besteht:

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots q_n = \frac{S}{2\,(n-1)} \tag{12}$$

Geht man auf die Bedeutung von s und S als Funktionen der Q zurück, so findet man die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{2\,(Q_{23} + Q_{24} + \ldots)}{(n-1)\,(n-2)} \\ q_2 &= q_1 + Q_{22} - \frac{2\,(Q_{23} + Q_{24} + Q_{25} + \ldots Q_{2n})}{n-2} \\ q_3 &= q_1 + Q_{33} - \frac{2\,(Q_{32} + Q_{34} + Q_{35} + \ldots Q_{3n})}{n-2} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

u. s. w., wobei in den Summen nur nichtquadratische Indices zu beachten sind, also nur z. B. Q_{32} , $Q_{34}\ldots$ nicht aber Q_{33}, u. s. w.

Wir betrachten bei n Strahlen die $(n-1)$ Winkel, welche irgend ein Strahl mit den übrigen Strahlen bildet, z. B. den Strahl 1 in Verbindung mit den Strahlen 2, 3, 4 ..., dann kann man die Fehlerquadratsumme für solche $n-1$ Winkel doppelt ausdrücken, sowohl in den q_{12} , $q_{13}\ldots$ als auch in den q_1 , q_2 , $q_3\ldots$, nämlich wegen (9):

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \ldots = s_1$$

oder zweitens wegen der Normalgleichung (8):

$$(q_1 + q_2) + (q_1 + q_3) + (q_1 + q_4) + \ldots = (n-1)\,q_1 + q_2 + q_3 + \ldots = s_1 \tag{14}$$

Diese beiden Summen sind also *gleich*, was sehr zu Gunsten der Näherungen q_1 , q_2, q_3 , q_4 spricht, während es nicht günstig ist, dass die Abweichungen zwischen q_{12} und $q_1 + q_2$ u. s. w. in der Ausgleichung alle als *gleich* zulässig behandelt wurden. Den besonderen Fall nur *dreier* Strahlen haben wir bereits bei (3)—(5) als Zwischenbemerkung abgehandelt, und wir haben in (5) gesehen, dass man die Reciproken q der Richtungsgewichte schlechthin in den Gewichtscoefficienten ausdrücken kann; indessen kann man in diesem einfachen Falle auch alles in den Normalgleichungs-Coefficienten $[a\,a]$, $[a\,b]$, $[b\,b]$ selbst ausdrücken, denn nach (18) und (19) S. 58 ist:

$$[\alpha\,\alpha] = Q_{22} = \frac{[b\,b]}{D} \quad , \quad [\alpha\,\beta] = Q_{23} = \frac{-[a\,b]}{D} \quad , \quad [\beta\,\beta] = Q_{33} = \frac{[a\,a]}{D} \tag{15}$$

wo

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$$

daraus findet man in Verbindung mit (5):

$$q_1 = \frac{-[a\,b]}{D} \quad , \quad q_2 = \frac{[b\,b] + [a\,b]}{D} \quad , \quad q_3 = \frac{[a\,a] + [a\,b]}{D} \tag{16}$$

dieses (15) gilt dann, wenn die Stationsausgleichung mit 2 *Winkeln* als Unbekannten gemacht ist; wenn dagegen 3 *Richtungen* als Unbekannte eingeführt sind, so werden die Normalgleichungen folgende Formen annehmen:

$$\left.\begin{aligned} (a\,a)\,A + (a\,b)\,B + (a\,c)\,C + (a\,l) &= 0 \\ (a\,b)\,A + (b\,b)\,B + (b\,c)\,C + (b\,l) &= 0 \\ (a\,c)\,A + (b\,c)\,B + (c\,c)\,C + (c\,l) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Da A, B, C *Richtungen* (und nicht zwei Winkel) sind, können diese 3 Gleichungen nicht unabhängig sein, sondern nach (3) § 81. S. 277 bestehen die Beziehungen:

$$(a\,a) + (a\,b) + (a\,c) = 0 \ , \ (a\,b) + (b\,b) + (b\,c) = 0 \ , \ (a\,c) + (b\,c) + (c\,c) = 0 \tag{18}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und *eine* der 3 Unbekannten ist willkürlich, weshalb etwa $A = 0$ gesetzt wird und dann bleibt von (17) nur:

$$\left.\begin{aligned}(b\,b)\,B + (b\,c)\,C + (b\,l) &= 0\\ (b\,c)\,B + (c\,c)\,C + (c\,l) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Bei *zwei* Gleichungen kann man aber wieder die Gewichtscoefficienten Q unmittelbar in den Coefficienten $(b\,b)$ $(b\,c)$ ausdrücken, nämlich ebenso wie bei (15):

$$\left.\begin{aligned}Q_{22} = \frac{(c\,c)}{(b\,b)\,(c\,c) - (b\,c)\,(b\,c)}\quad , \quad Q_{33} = \frac{(b\,b)}{(b\,b)\,(c\,c) - (b\,c)\,(b\,c)}\\ Q_{23} = \frac{-(b\,c)}{(b\,b)\,(c\,c) - (b\,c)\,(b\,c)}\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Wegen (18) lässt sich (20) mit (5) auf folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{q_1} &= (a\,a) - \frac{(a\,b)\,(a\,c)}{(b\,c)}\\ \frac{1}{q_2} &= (b\,b) - \frac{(a\,b)\,(b\,c)}{(a\,c)}\\ \frac{1}{q_3} &= (c\,c) - \frac{(a\,c)\,(b\,c)}{(a\,b)}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

In den allgemeinen Formeln muss auch der Fall inbegriffen sein, dass zwischen n Strahlen alle $n\frac{n-1}{2}$ Winkel gleichgewichtig gemessen sind. Setzt man dabei das Gewicht eines gemessenen Winkels $= 1$, so werden nach § 77. S. 265 nach der Ausgleichung alle Winkelgewichte $= \frac{n}{2}$, also die Reciproken der Gewichte werden:

$$q_{12} = q_{13} = q_{14} = \cdots q_{1\,(n-1)} = \frac{2}{n}$$

dann nach (9):

$$q_{12} + q_{13} + q_{14} + \cdots + q_{1\,(n-1)} = \frac{2\,(n-1)}{n} = s_1$$

Ebenso auch s_2 , s_3 ... s_n und also $S = n\,s_1 = 2\,(n-1)$

Also nun nach (11):

$$q_1 = \frac{2\,(n-1)}{n\,(n-2)} - \frac{2\,(n-1)}{2\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{1}{n}$$

d. h. das Gewicht einer ausgeglichenen Richtung ist $= n$, als Ergebnis des Näherungsverfahrens, was mit dem strengen Verfahren stimmt.

Hat man endlich m volle Sätze bei n Strahlen, so sind nach der Mittelbildung alle Richtungsgewichte $= m$ oder die Reciproken der Winkelgewichte:

$$q_{12} = q_{13} = \cdots \quad = \frac{2}{m}$$

also

$$s_1 = s_2 = \cdots \quad = \frac{2\,(n-1)}{m}\quad , \quad S = \frac{2\,n\,(n-1)}{m}$$

$$q_1 = \frac{2\,(n-1)}{(n-2)\,m} - \frac{2\,n\,(n-1)}{2\,m\,(n-1)\,(n-2)} = \frac{1}{m}$$

also wieder Übereinstimmung mit der strengen Theorie.

Das Helmert sche Näherungsverfahren befolgt also in den betrachteten 3 Fällen,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

in welchen strenge Richtungsgewichte möglich sind, die strenge Theorie und schliesst sich im übrigen näherungsweise an.

Um ein vollständiges Beispiel zu haben, nehmen wir eine Stationsausgleichung, welche an anderem Orte (Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen I. S. 66) völlig durchgerechnet wurde, nach Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Auflage. Berlin 1870, S. 57.

Station Lautern:

Sternberg ,	Paulinen ,	Schippenbeil ,	Rössel	
$p_1^\circ = 18$	$p_1' = 18$	$p_1'' = 18$	$p_1''' = 18$	$[p_1] = 72$
$p_2^\circ = 6$	. .	. .	$p_2''' = 6$	$[p_2] = 12$
. .	$p_3' = 6$	$p_3'' = 6$	$p_3''' = 6$	$[p_3] = 18$
$[p^\circ] = 24$	$[p'] = 24$	$[p''] = 24$	$[p'''] = 30$	$[p] = 102$

Nach (11) § 71. S. 236 berechnet man:

$$(a\,a) = 24 - \frac{18}{72}18 - \ldots - \frac{6}{18}6 = 17{,}50$$

$$(a\,b) = -\frac{18}{72}18 \quad \ldots - \frac{6}{18}6 = -6{,}50 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Stationsausgleichung selbst interessiert uns hier nicht, sondern nur die Gewichtsbestimmungen; wir bilden daher sofort die Gewichtsgleichungen nach (20) S. 90:

Auflösung

$$\begin{aligned} &+\underline{17{,}50\,[\alpha\,\alpha]} - 6{,}50\,[\alpha\,\beta] - 6{,}50\,[\alpha\,\gamma] - 1 = 0 && [\alpha\,\alpha] = 0{,}094\\ &- 6{,}50\,[\alpha\,\alpha] + \underline{17{,}50\,[\alpha\,\beta]} - 6{,}50\,[\alpha\,\gamma] = 0 && [\alpha\,\beta] = 0{,}052\\ &- 6{,}50\,[\alpha\,\alpha] - 6{,}50\,[\alpha\,\beta] + \underline{20{,}50\,[\alpha\,\gamma]} = 0 && [\alpha\,\gamma] = 0{,}046 \end{aligned}$$

Die beiden anderen Gruppen von Gewichtsgleichungen geben auch noch:

$$[\beta\,\beta] = 0{,}093 \quad , \quad [\beta\,\gamma] = 0{,}046 \quad , \quad [\gamma\,\gamma] = 0{,}078$$

Wenn wir nun die Bezeichnungen Q nach (1) anwenden, haben wir:

$$\left.\begin{aligned} Q_{22} &= [\alpha\,\alpha] = +0{,}094 = q_{12} & Q_{23} &= 0{,}052\\ Q_{33} &= [\beta\,\beta] = +0{,}093 = q_{13} & Q_{24} &= 0{,}046\\ Q_{44} &= [\gamma\,\gamma] = +0{,}078 = q_{14} & Q_{34} &= 0{,}046 \end{aligned}\right\} \quad 0{,}144$$

$$\begin{aligned} Q_{22} + Q_{33} - 2\,Q_{23} &= 0{,}094 + 0{,}093 - 0{,}104 = +0{,}083 = q_{23}\\ Q_{22} + Q_{44} - 2\,Q_{24} &= 0{,}094 + 0{,}078 - 0{,}092 = +0{,}080 = q_{24}\\ Q_{33} + Q_{44} - 2\,Q_{34} &= 0{,}093 + 0{,}078 - 0{,}092 = +0{,}079 = q_{34} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{12} + q_{13} + q_{14} &= s_1 = 0{,}265\\ q_{12} + q_{23} + q_{24} &= s_2 = 0{,}257\\ q_{13} + q_{23} + q_{34} &= s_3 = 0{,}255\\ q_{14} + q_{24} + q_{34} &= s_4 = 0{,}237 \end{aligned}\right\} \quad S = 1{,}014 \;,\; \frac{S}{12} = 0{,}0845$$

Dann nach (7):

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 0{,}1325 - 0{,}0845 = 0{,}0480\\ q_2 &= 0{,}1285 - 0{,}0845 = 0{,}0440\\ q_3 &= 0{,}1275 - 0{,}0845 = 0{,}0430\\ q_4 &= 0{,}1185 - 0{,}0845 = 0{,}0340 \end{aligned}\right\} \quad 0{,}1690 = \frac{S}{6} \text{ (Probe)}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um auch noch die Formeln (13) anzuwenden, haben wir mit $n = 4$:

$$q_1 = \frac{0{,}144}{3} = 0{,}048$$
$$q_2 = 0{,}048 + 0{,}094 - 0{,}098 = 0{,}044$$
$$q_3 = 0{,}048 + 0{,}093 - 0{,}098 = 0{,}043$$
$$q_4 = 0{,}048 + 0{,}078 - 0{,}092 = 0{,}034$$

Damit haben wir alle q und deren Reciproken, d. h. die Richtungsgewichte $\frac{1}{q}$ berechnet, und sogar mit Proben.

Nun handelt es sich noch darum, zu sehen, wie genau die Näherungsgewichte mit den strengen Gewichten oder die Näherungs-Gewichts-Reciproken mit den strengen Gewichtsreciproken aller Winkel übereinstimmen. Z. B. der erste Winkel Sternberg-Paulinen hat die strenge Gewichtsreciproke $q_{12} = 0{,}094$ und genähert $q_1 + q_2 = 0{,}092$ was sehr nahe stimmt.

Für alle 6 Winkel ergiebt sich folgende Vergleichung:

streng	genähert	Abweichung	
$q_{12} = 0{,}094$	$q_1 + q_2 = 0{,}092$	$-0{,}002$	
$q_{13} = 0{,}093$	$q_1 + q_3 = 0{,}091$	$-0{,}001$	durchschnittliche
$q_{14} = 0{,}078$	$q_1 + q_4 = 0{,}082$	$+0{,}004$	Abweichung
$q_{23} = 0{,}083$	$q_2 + q_3 = 0{,}087$	$+0{,}004$	$= 0{,}0025$
$q_{24} = 0{,}080$	$q_2 + q_4 = 0{,}078$	$-0{,}002$	oder 3 %
$q_{34} = 0{,}079$	$q_3 + q_4 = 0{,}077$	$-0{,}002$	

Dieses sind die Gewichts-Reciproken; wir wollen auch noch die Gewichte selbst ausrechnen und mit den Anschnittszahlen vergleichen:

	Gewicht	Anschnittszahl	Abweichung
$q_1 = 0{,}048$	$1 : q_1 = 20{,}8$	$[p^\circ] = 24$	$+3{,}2$
$q_2 = 0{,}044$	$1 : q_2 = 22{,}7$	$[p'] = 24$	$+1{,}3$
$q_3 = 0{,}043$	$1 : q_3 = 23{,}3$	$[p''] = 24$	$+0{,}7$
$q_4 = 0{,}034$	$1 : q_4 = 29{,}4$	$[p'''] = 30$	$+0{,}6$

Durchschnitt 1,45 oder 6 %.

Die Anschnittszahlen weichen von den Näherungsgewichten im Mittel nur um 6 % ab, es könnten daher die Anschnittszahlen in diesem Falle wohl auch noch als Näherungsgewichte benützt werden, indessen ist unser Fall ein sehr einfacher; im allgemeinen werden die Anschnittszahlen grössere Abweichungen von den theoretischen Gewichten geben.

Ein grösseres Beispiel zur Vergleichung zwischen den strengen und den genäherten Winkelgewichten, sowie zwischen den genäherten Richtungsgewichten und den Anschnittszahlen giebt die bereits citierte Helmertsche Abhandlung in „Astr. Nachr., 134. Band, 1893", S. 287; es ist eine spanische Station mit 12 Richtungen; die strengen q_{12}, q_{13} ... weichen von den genäherten $q_1 + q_2$, $q_1 + q_3$ ... ab im Mittel um 11 %, äusserstenfalls um 30 %. Zwischen den q und den Reciproken der Anschnittszahlen besteht eine durchschnittliche Abweichung von 31 %.

Ebendaselbst S. 289 wird auch über die Anwendung des Näherungsverfahrens auf 12 Stationen mit zusammen 71 Richtungen berichtet. Zwischen den strengen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

q_{12} , q_{13} als Gewichts-Reciproken der Winkel und den genäherten $q_1 + q_2$, $q_1 + q_3 \cdots$ ergab sich im Mittel eine Abweichung von 9 %.

Zur weiteren Charakterisierung des Verfahrens wird noch auf S. 290—291 der citierten Astr. Nachr. für das kleine Württembergische aus 6 Dreiecken bestehenden Dreiecksnetz für Erdmessung (von E. Hammer, Stuttgart 1892) die von Helmert nach seinem Näherungsverfahren durchgeführte Ausgleichung mitgeteilt, in Vergleichung mit der strengen Ausgleichung. Die grösste Differenz der beiderseitigen Ergebnisse für die 33 möglichen Winkel beträgt 0,038″; die mittere Veränderung ist $\pm$ 0,014″ bei einem mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels von $\pm$ 0,47″ und einem mittleren Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels von $\pm$ 0,4″. Letzteres bekundet eine mittlere Veränderung von nur $\pm$ 3,5 % und eine maximale Änderung von 9,5 %.

Teilungsfehler und Netzfehler.

Die im vorstehenden behandelte Theorie betrifft nur die reinen Messungsfehler im engeren Sinne, nämlich Einstellungsfehler (mit dem Fernrohr) und Ablesungsfehler (am Mikroskop oder Nonius), oder die „*nackten*“ Beobachtungsfehler. Die Teilungsfehler des Theodolitkreises können durch symmetrische Kreisverstellungen in den verschiedenen Messungssätzen teilweise eliminiert sein, sie spielen aber immer noch eine Rolle in dem Gesamtfehler einer Richtung.

Im Allgemeinen darf für eine Sicht nicht schlechthin *ein* Beobachtungsfehler angenommen werden, sondern eine Zusammenwirkung von verschiedenen Fehlerursachen, welche teils unregelmässig, (nackter Beobachtungsfehler) teils regelmässig oder gar konstant sind.

Als konstante Fehler treten auf: Die Instrumentalfehler, besonders die regelmässigen Teilungsfehler und die zufälligen Teilungsfehler, die persönlichen Fehler des Beobachters bei der Auffassung der Zielpunkte, Centrierungsfehler, zeitliche Veränderungen in der Lage der Stationen — „aus den verschiedensten Gründen“ — und seitliche Brechungen der Lichtstrahlen in der Luft. Wenn diese Fehler unter Umständen bei verschiedenen Gruppen der Winkelmessungen einer Station von Gruppe zu Gruppe in wechselnder Weise wirken, so ist ihr Einfluss ein systematischer.

Von dieser Anschauung ausgehend verfährt Helmert auf S. 36 der oben S. 283 citierten Veröffentlichung weiter so:

Angenommen man habe einen Satz unabhängiger ungleich gewichtiger Richtungen, von denen eine das Gewicht n habe, oder mit n facher Einstellung einer ideellen Einheitsvisur gleichgewichtig sei, und es sei μ der mittlere nackte Beobachtungsfehler für die Gewichtseinheit, so ist $\frac{\mu^2}{n}$ der mittlere nackte Beobachtungsfehler der fraglichen Richtung. Ferner sei $\frac{\tau^2}{r}$ der Einfluss des zufälligen Teilungsfehlers bei r gleich verteilten Einstellungen. Dann hat man das mittlere Fehlerquadrat der Richtung nach dem bisherigen $= \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r}$.

Nun wird aber hierzu noch ein mittlerer *Netz*richtungsfehler ν genommen, welcher sich aus den konstanten Fehlern zusammensetzt, die in der Regel auf den Stationen verborgen bleiben und erst in den Widersprüchen des *Netzes* erkannt

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

werden können. Dazu gehören auch Reste regelmässiger Teilungsfehler und anderer systematischer Einflüsse, die eigentlich durch das Messverfahren eliminiert sein sollten.

Auf diese Weise wird das vollständige mittlere Fehlerquadrat einer Richtung dargestellt durch:

$$M^2 = \frac{\mu^2}{n} + \frac{\tau^2}{r} + \nu^2 \qquad (22)$$

Um ν^2 kennen zu lernen wurde ein Durchschnittswert von M^2 aus den Widersprüchen der Dreiecksabschlüsse oder aus älteren Netzausgleichungen und zum Teil aus der Vergleichung von Stationsergebnissen verschiedener Epochen entnommen, μ^2 und τ^2 aber nach Möglichkeit geschätzt. Nach S. 55, 56, 89, 109, 110, 125 der citierten Veröffentlichung sind solche Ermittlungen $\nu^2 = 0{,}19$, $0{,}43$, $0{,}09$, $0{,}18$, $0{,}09$, $0{,}15$, $0{,}09$

$$\text{Im Mittel } \nu^2 = 0{,}17 \text{ oder } \nu = \pm 0{,}4'' \qquad (23)$$

Dieser Netzfehler $\nu = \pm 0{,}4''$ ist ein verhältnismässig *hoher* Wert!

Noch eine Eigentümlichkeit wird auf S. 37 hinzugefügt: Wenn auf derselben Station Messungen aus verschiedenen Jahren mit einander zu verbinden waren, so wurde zunächst M^2 für jede Epoche für sich berechnet. Dafür sprach das Auftreten *grosser Differenzen* selbst in den besten Messungen *verschiedener Jahre*, wobei es allerdings unaufgeklärt blieb, was die Gründe solcher Änderungen mit *der Zeit* sein mögen.

§. 83. Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz mit Ausgleichung von Helmert.

Aus der Veröffentlichung des geodätischen Instituts von 1893 (Citat s. oben S. 283) entnehmen wir von S. 87—95 das „Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz", welches in unserer nachfolgenden Fig. 1. dargestellt ist, und wir führen die Hauptmomente der Richtungsausgleichung vor, welche nach der neuen Helmertschen Gewichtstheorie (im vorigen § 82.) gemacht ist.

Das Netz hat 10 Stationen folgender Herkunft:

Belgische Messungen	Belgische und Preussische Messungen	Preussische Messungen
Nederweert Lommel Peer Montaigu Tongres	Roermond Ubagsberg Henri-Chapelle	Erkelenz Langschoss
$M_B = \frac{0{,}89''}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}63''$	$M_B = \pm 0{,}73''$, $M_P = \begin{cases} \pm 0{,}79'' \\ \pm 0{,}66'' \end{cases}$	$M_P = \frac{0{,}73''}{\sqrt{2}} = \pm 0{,}52''$

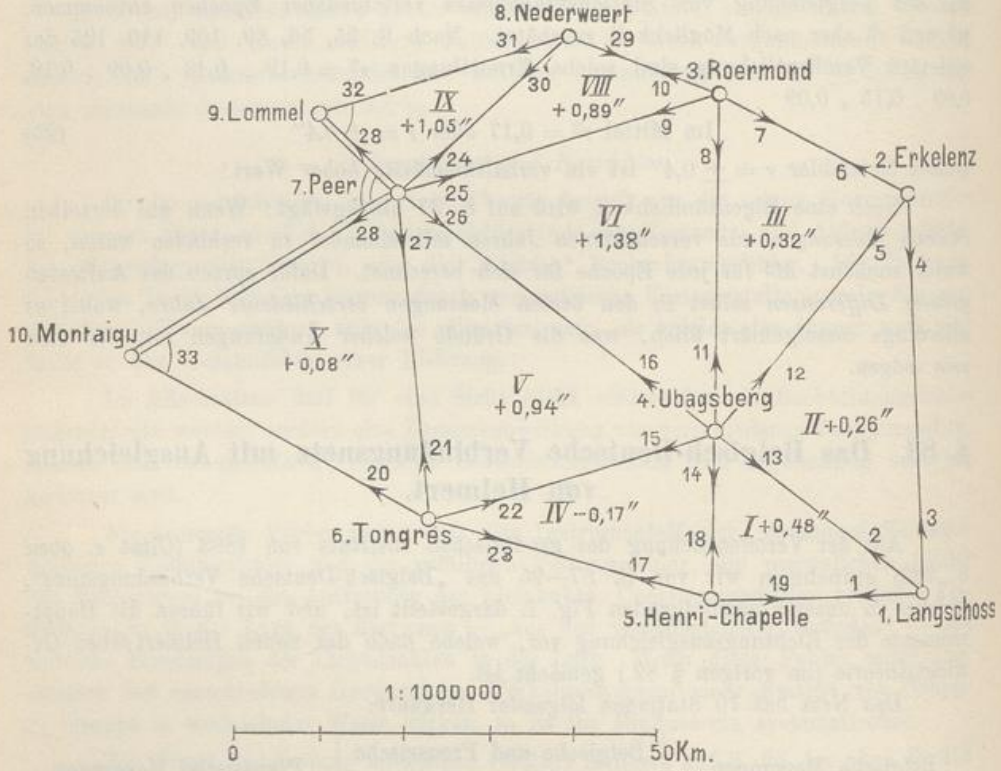
Die hier sofort beigesetzten mittleren Winkelfehler $\pm 0{,}89''$ und $\pm 0{,}73$ sind aus Dreiecksschlüssen der Belgischen Triangulierung und des neueren rheinischen Dreiecksnetzes des geodätischen Institutes im Allgemeinen ermittelt, und geben den mittleren Fehler einer im Netz ausgeglichenen Belgischen Richtung oder Preussischen Richtung bzw. $= \pm 0{,}63''$ und $\pm 0{,}52''$, während die Vergleichungen auf den An-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

schluss-Stationen grössere Beträge ergaben, nämlich $\pm 0{,}73''$ für Belgien, und $+ 0{,}79''$ für Preussen 1861, $\pm 0{,}66''$ für Preussen 1869.

Aus solchen Erwägungen wurde für Belgien im Allgemeinen $M = \pm 0{,}64''$, $M^2 = \pm 0{,}41$ angenommen, und für Preussen die M^2 nach der Theorie der Gleichung (22) im vorigen § 82. S. 291 im einzelnen bestimmt, was auf S. 89—90 der Veröffentlichung selbst nachzusehen ist.

Fig. 1.
Das Belgisch-Deutsche Verbindungsnetz.



Als Gewichtseinheit ist derjenige Wert $p = \frac{1}{q}$ genommen, welcher zu dem mittleren Fehlerquadrat $M^2 = 0{,}17$ einer in das Netz eingehenden Richtung gehört, also:

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{1}{p} = \frac{M^2}{0{,}17} = \left(\frac{M}{0{,}412}\right)^2 = \text{Gewichts-Reciproke} \\ p &= \frac{0{,}17}{M^2} = \left(\frac{0{,}412}{M}\right)^2 = \text{Gewicht einer Richtung} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

So sind die Gewichte p bemessen, welche in dem vollständigen Abrisse der Netzausgleichung auf S. 293 angegeben sind.

Das Netz ist nicht ein völlig freies, sondern ein auf den 3 Stationen Lommel, Peer und Montaigu festgebundenes Netz, wodurch die Bedingungsgleichungen in jener nordwestlichen Gegend beeinflusst werden.

Ehe darauf eingegangen wird, ist zu den „beobachteten Richtungen“ eine Bemerkung zu machen bei den Stationen Lommel und Montaigu, weil in dem Abrisse

Ausgleichungs-Abriss des Belgisch-Deutschen Verbindungsnetzes.

No.	Zielpunkt	vor der Ausgleichung: mittl. Fehler M	$q=\frac{1}{p}=\left(\frac{M}{0{,}412}\right)^2$	beobachtete Richtung A	nach der Ausgleichung: Netzverbess. v	ausgeglichene Richtung $A+v-v_1$ u.s.w.	$v\sqrt{p}=\frac{0{,}412\,v}{M}$	$v^2p=\frac{v^2}{q}$
				1. Langschoss.				
1	H. Ch.	± 0,79″	3,7	0° 0′ 0,00″	+ 1,30″	0° 0′ 0,00″	0,67″	0,45
2	Ub.	0,34	0,7	37 39 39,16	— 0,29	37 39 37,57	0,35	0,12
3	Er.	0,34	0,7	89 38 19,68	+ 0,04	89 38 18,42	0,05	0,00
				2. Erkelenz.				
4	La.	± 0,32″	0,6	0° 0′ 0,00″	+ 0,27″	0° 0′ 0,00″	0,35″	0,12
5	Ub.	0,41	1,0	42 11 47,80	— 0,29	42 11 47,24	0,29	0,08
6	Ro.	0,41	1,0	117 3 49,47	— 0,16	117 3 49,04	0,16	0,03
				3. Roermond.				
7	Er.	± 0,34″	0,7	0° 0′ 0,00″	+ 0,26″	0° 0′ 0,00″	0,31″	0,10
8	Ub.	0,34	0,7	64 6 33,96	— 0,06	64 6 33,64	0,07	0,00
9	Pe.	0,37	0,8	140 18 33,79	— 0,15	140 18 33,38	0,17	0,03
10	Ne.	0,37	2,9	182 4 19,06	— 0,24	182 4 18,56	0,14	0,02
				4. Ubagsberg.				
11	Ro.	± 0,34″	0,7	0° 0′ 0,00″	+ 0,07″	0° 0′ 0,00″	0,08″	0,01
12	Er.	0,34	0,7	41 1 27,05	— 0,06	41 1 26,92	0,07	0,00
13	La.	0,34	0,7	126 51 1,84	— 0,10	126 51 1,67	0,12	0,01
14	H. Ch.	0,49	1,4	183 39 50,22	+ 0,45	183 39 50,60	0,37	0,14
15	To.	0,37	0,8	255 2 35,84	+ 0,16	255 2 35,93	0,17	0,03
16	Pe.	0,37	0,8	309 6 7,89	— 0,30	309 6 7,52	0,33	0,11
				5. Henri-Chapelle.				
17	To.	± 0,47″	1,3	0° 0′ 0,00″	+ 0,50″	0° 0′ 0,00″	0,44″	0,19
18	Ub.	0,47	1,3	76 53 13,63	— 0,53	76 53 12,60	0,46	0,21
19	La.	0,47	1,3	162 24 47,82	+ 0,03	162 24 47,35	0,03	0,00
				6. Tongres.				
20	Mo.	± 0,64″	2,4	0° 0′ 0,00″	+ 0,58″	0° 0′ 0,00″	0,37″	0,14
21	Pe.	0,64	2,4	55 26 16,96	+ 0,35	55 26 16,73	0,22	0,05
22	Ub.	0,64	2,4	134 41 43,47	— 1,22	134 41 41,67	0,77	0,59
23	H. Ch.	0,64	2,4	166 25 45,66	+ 0,28	166 25 45,36	0,18	0,03
				7. Peer.				
24	Ne.	± 0,73″	3,1	0° 0′ 0,00″	+ 0,04″	0° 0′ 0,00″	0,02″	0,00
25	Ro.	0,70	2,9	28 32 11,13	+ 0,56	28 32 11,65	0,33	0,11
26	Ub.	0,70	2,9	81 26 24,22	— 1,10	81 26 23,08	0,64	0,41
27	To.	0,43	1,1	128 7 30,03	— 0,01	128 7 29,98	0,97	0,01
28	Mo.	0,34	0,7	192 34 27,58	+ 0,13	192 34 27,67	0,16	0,03
28	Lo.	0,34	0,7	267 43 23,04	+ 0,13	267 43 23,13	0,16	0,03
				75° 8′ 55,46″				
				8. Nederweert.				
29	Ro.	± 0,64″	2,4	0° 0′ 0,00″	+ 0,56″	0° 0′ 0,00″	0,36″	0,13
30	Pe.	0,64	2,4	109 42 5,72	— 0,76	109 42 4,40	0,48	0,23
31	Lo.	0,64	2,4	137 11 35,79	+ 0,21	137 11 35,44	0,13	0,02
				9. Lommel.				
. .	Ne.	± 0,00″	. .	0° 0′ 0,00″		0° 0′ 0,00″		
32	Pe.	0,90	4,8	60 13 54,99	— 1,93″	60 13 53,06	0,87″	0,76
				10. Montaigu.				
. .	Pe.	± 0,00″	. .	0° 0′ 0,00″		0° 0′ 0,00″		
33	To.	0,71	3,0	60 6 48,90	+ 0,01″	60 6 48,91	0,01″	0,00
								4,19

$$m=\sqrt{\frac{4{,}19}{11}}=\pm 0{,}62''$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

S. 293 für 32 und 33 nicht eigentlich Richtungen, sondern Winkel eingesetzt sind, indem z. B. auf Montaigu die Richtung von Peer als fest und fehlerfrei betrachtet und nur die Richtung nach Tongres als fehlerhaft mit den Gewichtsreciproken $q = 3{,}0$ eingeführt ist. Warum das so angeordnet ist, hängt wahrscheinlich mit den Gewichtsuntersuchungen zusammen; rein formell betrachtet hätte die Sache auch so gemacht werden können, dass zwei Messungsrichtungen Montaigu-Peer und Montaigu-Tongres mit Gewichtsreciproken je $= 1{,}5$ angesetzt würden, und ähnlich auf Lommel.

Auf der Station Peer ist der Winkel zwischen Montaigu und Lommel unabänderlich fest gegeben $= 75° 8' 55{,}46''$, was in den beobachteten Richtungen A auf S. 293 bereits dadurch ausgedrückt ist, dass die Richtungen Peer-Montaigu und Peer-Lommel mit dieser Differenz in Ansatz gebracht sind. (Man kann sich etwa denken, die Stationsausgleichung auf Peer sei nach § 78. gemacht.) Damit nun durch die Netzausgleichung dieser Anschlusswinkel nicht nochmals geändert werde, sind die Richtungsverbesserungen Peer-Montaigu und Peer-Lommel beide *gleich* anzunehmen und deswegen mit derselben Nummer 28 und 28 bezeichnet.

Nach diesem zu den Bedingungsgleichungen übergehend, betrachten wir zuerst das Netz als völlig frei, und dann wäre bei $p = 10$ Punkten und $l = 18$ Linien hin und her, nach den Regeln von (17) S. 176, $l - 2p + 3 = 1$ Seitengleichung und $l - p + 1 = 9$ Dreiecksgleichungen (mit $180° +$ Excess) zu berücksichtigen. Diese 10 Gleichungen sind jedenfalls da, aber es kommt wegen des Anschlusses im Nordwesten noch eine Zwangsseitengleichung hinzu, so dass im Ganzen 11 Bedingungsgleichungen auftreten werden.

Betrachten wir zuerst die 9 Dreiecksschlüsse, so werden dieselben ganz ebenso gemacht, wie früher bei den kleinen Beispielen S. 178 und S. 189. Z. B. das erste Dreieck I. giebt:

(1,2)	=	37° 39′	39,16″
(13,14)	=	56 48	48,38
(18,19)	=	85 31	34,19
		180° 00′	0,73″
soll		180° + Excess	1,25
Widerspruch		$W =$	$+ 0{,}48''$

Also die zugehörige Bedingungsgleichung:

$$\text{I.} \quad -v_1 + v_2 - v_{13} + v_{14} - v_{18} + v_{19} + 0{,}48'' = 0 \qquad \text{(a)}$$

Die übrigen Dreiecksschlussgleichungen werden ebenso gebildet:

$$\text{II.} \quad -v_2 + v_3 - v_4 + v_5 - v_{12} + v_{13} + 0{,}26'' = 0 \qquad \text{(b)}$$
$$\text{III.} \quad -v_5 + v_6 - v_7 + v_8 - v_{11} + v_{12} + 0{,}32'' = 0 \qquad \text{(c)}$$
$$\text{IV.} \quad -v_{14} + v_{15} - v_{17} + v_{18} - v_{22} + v_{23} - 0{,}17'' = 0 \qquad \text{(d)}$$
$$\text{V.} \quad -v_{15} + v_{16} - v_{21} + v_{22} - v_{26} + v_{27} + 0{,}94'' = 0 \qquad \text{(e)}$$
$$\text{VI.} \quad -v_8 + v_9 + v_{11} - v_{16} - v_{25} + v_{26} + 1{,}38'' = 0 \qquad \text{(f)}$$
$$\text{VIII.} \quad -v_9 + v_{10} - v_{24} + v_{25} - v_{29} + v_{30} + 0{,}89'' = 0 \qquad \text{(h)}$$
$$\text{IX.} \quad +v_{24} - v_{28} - v_{30} + v_{31} + v_{32} + 1{,}05'' = 0 \qquad \text{(i)}$$
$$\text{X.} \quad -v_{20} + v_{21} - v_{27} + v_{28} + v_{33} + 0{,}08'' = 0 \qquad \text{(k)}$$

Die Widersprüche $+ 0{,}48''$ zu I. , $+ 0{,}26''$ zu II. u. s. w. sind auch in dem Netzbilde Fig. 1. S. 292 in den betreffenden Dreiecken eingeschrieben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Übergehend zu den Seitengleichungen haben wir für das Centralsystem Ubagsberg, als Sinusrechnung durch die Dreiecke I , II , III , VI , V , IV die Bedingung:

$$\frac{sin\,(2,3)\,sin\,(5,6)\,sin\,(8,9)\,sin\,(26,27)\,sin\,(22,23)\,sin\,(18,19)}{sin\,(1,2)\,sin\,(4,5)\,sin\,(7,8)\,sin\,(25,26)\,sin\,(21,22)\,sin\,(17,18)} = 1$$

Die Ausrechnung ist ebenso wie schon früher auf S. 180 und S. 192, weshalb wir hier nur einen Teil der Ausrechnung schreiben:

		Diff. für 10″
$(2,3) = 51°\ 58'\ 40{,}52''$	$log\ sin\ (2,3) = 9.896\,4014$	165
$(5,6) = 74\ \ 52\ \ 1{,}67$	„ „ $(5,6) = 9.984\,6727$	57
. . . . .	. . . . .	
	log Zähler $= 9.449\,8818$	

Ebenso log Nenner $= 9.449\,8995$

$w = \quad -177$

Also die lineare Seitengleichung zunächst in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale:

$$+1{,}65\,(v_3 - v_2) + 0{,}57\,(v_6 - v_5) + \ldots \quad -2{,}73\,(v_2 - v_1) - 17{,}7 = 0$$
$$+1{,}65\ v_3 - 4{,}38\,v_2 \ldots \quad -17{,}7 = 0 \qquad (g')$$

Diese streng zu erfüllende Bedingungsgleichung wollen wir noch mit 2 dividieren, wodurch sie nun, voll ausgeschrieben, wird:

$$\left.\begin{array}{l} +1{,}37\,v_1 - 2{,}19\,v_2 + 0{,}82\,v_3 + 1{,}16\,v_4 - 1{,}45\,v_5 + 0{,}29\,v_6 + 0{,}51\,v_7 \\ -0{,}77\,v_8 + 0{,}26\,v_9 + 0{,}25\,v_{17} - 0{,}33\,v_{18} + 0{,}08\,v_{19} + 0{,}20\,v_{21} \\ -1{,}91\,v_{22} + 1{,}71\,v_{23} + 0{,}79\,v_{25} - 1{,}79\,v_{26} + 1{,}00\,v_{27} - 8{,}85 = 0 \end{array}\right\} \qquad (g)$$

Der Umstand, dass wir die ursprüngliche Gleichung (g′) mit 2 dividiert haben, um die endgültige Gleichung (g) zu erhalten, beruht auf dem Wunsche, die Coefficienten aller Bedingungsgleichungen möglichst einander *gleich* zu machen, und da alle vorhergehenden Gleichungen (a) bis (k) die Coefficienten $= 1$ (nämlich $+1$ oder -1) hatten, war es angezeigt, auch die Coefficienten in (g′) noch etwas zu verkleinern, doch ist das nur eine Sache der Rechenbequemlichkeit, und von Willkür abhängig, ob man in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale, oder wie hier in halben solchen Einheiten rechnen will (vgl. den späteren § 84. und 85.).

Man könnte für die Seitengleichung (g′), d. h. für deren wichtiges Absolutglied $-17{,}7$ auch noch eine Kontrollrechnung nach dem Legendre'schen Satze machen, wie in (8) S. 181, doch sei davon jetzt nicht die Rede.

Dagegen wollen wir nun die andere, nämlich die *Zwangs*-Seitenberechnung zum Anschluss an die *beiden* Grundlinien Lommel-Peer und Peer-Montaigu vornehmen.

Als unabänderlich sind gegeben:

Lommel-Peer	Peer-Montaigu	
$log\ s_1 = 4.155\,0338{\cdot}4$	$log\ s_2 = 4.570\,5942{\cdot}6$	(2)

Wir rechnen nach der sogenannten Additamentenmethode (in unserem III. Bande Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890, S. 240–243) und berechnen das logarithmische Additament einer Seite s nach der Formel $\frac{\mu}{6\,r^2}\,s^2$, wo $\mu = 0{,}43429$ und r der Erdhalbmesser in unserem Falle für 51° 10′ Breite $log\ r = 6.80495$, dieses giebt:

$$\frac{\mu}{6\,r^2}\,s_1{}^2 = \ldots \quad 3{\cdot}6 \qquad \frac{\mu}{6\,r^2}\,s_2{}^2 = \ldots \quad 24{\cdot}6$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Werte von den obigen $log\, s_1$ und $log\, s_2$ abgezogen geben:

$$log\, s_1' = 4.155\,0334{\cdot}8 \qquad log\, s_2' = 4.570\,5918{\cdot}0 \tag{3}$$

$$log \frac{s_1'}{s_2'} = 9.584\,4416{\cdot}8$$

und nun besteht nach dem Anblick des Netzbildes Fig. 1. S. 292 folgende Gleichung:

$$\frac{s_1'\ sin\,(32)\ sin\,(29{,}30)\ sin\,(8{,}9)\ sin\,(15{,}16)\ sin\,(20{,}21)}{s_2'\ sin\,(30{,}31)\ sin\,(9{,}10)\ sin\,(16{,}11)\ sin\,(21{,}22)\ sin\,(33)} = 1$$

Die Ausrechnung giebt zunächst in Einheiten der 6ten Logarithmen-Decimale:

$$1{,}21\, v_{32} - 0{,}75\,(v_{30} - v_{29}) + 0{,}52\,(v_9 - v_8) + \ldots \quad - 2{,}36\,(v_{10} - v_9) \ldots \quad - 6{,}2 = 0$$

Wenn man wieder halbiert und nach den Nummern der v ordnet und zusammenfasst, bekommt man die vollständige lineare Zwangsanschluss-Seitengleichung:

$$\left.\begin{array}{l} + 0{,}26\, v_8 \ - 1{,}44\, v_9 \ + 1{,}18\, v_{10} + 0{,}86\, v_{11} + 0{,}76\, v_{15} - 1{,}62\, v_{16} \\ + 0{,}73\, v_{20} - 0{,}93\, v_{21} + 0{,}20\, v_{22} - 0{,}38\, v_{29} - 1{,}65\, v_{30} + 2{,}03\, v_{31} \\ - 0{,}61\, v_{32} + 0{,}61\, v_{33} + 3{,}10 = 0 \end{array}\right\} \tag{l}$$

Nun besitzen wir in (a) (b) ... (l) die richtige Anzahl von 11 linearen Bedingungsgleichungen, welche zuvörderst in eine Tabelle, ähnlich wie früher in (12) S. 182 oder S. 194—195 geordnet werden müssen. Zur Raumersparung sind wir genötigt, diese Tabelle hier nur anzudeuten:

		1	2	3	4	5	6	7	8	. .
$\frac{1}{p} = q =$		3,7	0,7	0,7	0,6	1,0	1,0	0,7	0,7	. .
1	a	− 1	+ 1	.	.	.	.	.	.	. .
2	b	.	− 1	+ 1	− 1	+ 1	.	.	.	. .
3	c	.	.	.	.	− 1	+ 1	− 1	+ 1	. .
4	d	.	.	.	.	.	.	.	.	. .
5	e	.	.	.	.	.	.	.	.	. .
6	f	.	.	.	.	.	.	.	− 1	. .
7	g	+ 1,37	− 2,19	+ 0,82	+ 1,16	− 1 45	+ 0,29	+ 0,51	− 0,77	. .
. .	. .	.	.	.	.	.	.	.	.	. .

(4)

Es folgt die Berechnung der Summen $\left[\frac{a\,a}{p}\right]$ u. s. w. als Coefficienten der Normalgleichungen (5) S. 126, z. B.:

$$\left[\frac{a\,a}{p}\right] = [q\,a\,a] = \quad 3{,}7 + 0{,}7 \ldots \qquad = + 9{,}1$$

$$\left[\frac{a\,b}{p}\right] = [q\,a\,b] = - 0{,}7 \ldots \qquad = - 1{,}4$$

$$\left[\frac{a\,c}{p}\right] = [q\,a\,c] = \qquad = 0$$

. . . . . .

$$\left[\frac{a\,g}{p}\right] = [q\,a\,g] = - 1{,}37 \times 3{,}7 - 2{,}19 \times 0{,}7 \ldots \qquad = - 6{,}07$$

$$\left[\frac{g\,g}{p}\right] = [q\,g\,g] = \quad 1{,}37^2 \times 3{,}7 + 2{,}19^2 \times 0{,}7 + 0{,}82^2 \times 0{,}7$$

$$= \quad 7{,}00 + 3{,}36 + 0{,}47 \ldots \qquad = 42{,}70$$

. . . . . .

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nachdem so alle Coefficienten ohne Schwierigkeiten ausgerechnet sind, bildet man die Normalgleichungen (5) S. 126, welche in abgekürzter Schreibweise (nach S. 80 unten) sich so darstellen:

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}	k_{11}	w
+ 9,1	− 1,4	.	− 2,7	.	.	− 6,07	.	.	.	.	+ 0,48
	+ 4,4	− 1,7	.	.	.	− 0,05	.	.	.	.	+ 0,26
		+ 4,8	.	.	− 1,4	+ 0,84	.	.	.	− 0,42	+ 0,32
			+ 9,6	− 3,2	.	+ 7,92	.	.	.	+ 0,13	− 0,17
				+ 10,4	− 3,7	+ 1,23	.	.	− 3,5	+ 0,80	+ 0,94
					+ 8,8	− 6,73	− 3,7	.	.	+ 0,57	+ 1,38
						+ 42,70	+ 2,08	.	− 0,62	− 1,81	− 8,85
							+ 14,5	− 5,5	.	+ 1,52	+ 0,89
								+ 13,4	− 0,7	+ 5,90	+ 1,05
									+ 9,6	− 2,15	+ 0,08
										+ 31,97	− 3,10

Die Auflösung dieser Normalgleichungen giebt:

$k_1 = + 0{,}0010$ $\quad k_5 = - 0{,}3748$ $\quad k_9 = - 0{,}2897$
$k_2 = - 0{,}1459$ $\quad k_6 = - 0{,}2942$ $\quad k_{10} = - 0{,}1082$
$k_3 = - 0{,}2329$ $\quad k_7 = + 0{,}2569$ $\quad k_{11} = + 0{,}1849$
$k_4 = - 0{,}3213$ $\quad k_8 = - 0{,}3025$

Mit diesen Werten k berechnet man die Verbesserungen v nach den Formeln (3) S. 120, wobei man der Tabelle (4) nach Vertikalspalten folgt, z. B.:

$$p_1 v_1 = - k_1 + 1{,}37\, k_7 = - 0{,}001 + 0{,}352 = + 0{,}351$$

dabei ist

$$\frac{1}{p_1} = q_1 = 3{,}7$$

also $v_1 = + 1{,}30''$, wie es bereits auf S. 293 eingeschrieben ist.

Übrigens macht man diese Ausrechnung aller v selbst tabellarisch, wie früher S. 194—195 gezeigt worden ist, weshalb dazu nun nichts weiter bemerkt wird. Die Ausrechnung der verbesserten Richtungen durch Zufügung der v zu den gemessenen Richtungen ist auch auf der Abriss-Tabelle S. 293 bereits gemacht, und es wäre dazu nur zu bemerken, dass die ausgeglichenen Richtungen $A + v$ nochmals in jedem Satze so verschoben wurden, dass der Satz wieder mit 0° 0′ 0″ beginnt, was rein formelle Änderung ist.

Das nächste ist nun, auch die ausgeglichenen *Winkel* als Differenzen der Richtungen auszuziehen, die 9 Dreiecke auf 180° 0′ 0″ + Excess zu erproben und alle Dreiecksseiten auszurechnen. Anleitung dazu ist nicht nötig, da solche Ausrechnungen bereits auf S. 183—184 und auf S. 196—197 durchgenommen sind; die Dreiecksseiten können in unserem Falle im Anschluss an die Basisseiten (2) bzw. (3) nach der „Additamentenmethode“ oder auch nach dem Legendreschen Satze berechnet werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Folgendes sind hiefür die Ergebnisse, nur mit Nummern nach Fig. 1. S. 292 bezeichnet:

1.	$log\, s =$	4.415 6477	19.	15.	$log\, s =$	4.546 5598	22.
2.	„	4.491 6525	13.	16.	„	4.676 9917	26.
3.	„	4.663 3423	4.	17.	„	4.534 6840	23.
5.	„	4.650 8960	12.	20.	„	4.610 2294	33.
6.	„	4.423 9849	7.	21.	„	4.592 9508	27.
8.	„	4.591 5057	11.	24.	„	4.429 2849	30.
9.	„	4.579 5859	25.	28.	„	4.570 5943	(33.)
10.	„	4.284 9536	29.	28.	„	4.155 0338	(32.)
14.	„	4.279 0039	18.	31.	„	4.490 4037	32.

Mehr Interesse bietet die Verteilung der v und die aus den v zu ziehenden Genauigkeitsberechnungen. Wir haben in dem Gesamtabriss S. 293 ausser den v selbst auch die $v\sqrt{p}$ und die $v^2 p$ nebst der Summe $[v^2 p]$ ausgerechnet, welche den mittleren Gewichtseinheitsfehler giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2 p]}{11}} = \pm 0{,}62'' \qquad (5)$$

(Man hat dazu auch die Probe $-[w k]$, welche ausgerechnet ebenfalls sehr nahe $= 4{,}2$ giebt übereinstimmend mit $[v^2 p] = 4{,}19$).

Dieses $m = \pm 0{,}62''$ ist zu vergleichen mit der ursprünglichen Festsetzung $M = 0{,}412''$ bei (1) als Gewichtseinheitsfehler *vor* der Ausgleichung, und das Verhältnis $0{,}62 : 0{,}41 = 1{,}5$ pflegt in solchen Fällen als Massstab für die Güte der Genauigkeitsschätzung vor der Ausgleichung genommen zu werden. In unserem Falle sind also bei 1,5 die Fehler im Allgemeinen nach der Ausgleichung um 50 % grösser als vor der Ausgleichung erwartet war, und ein ähnliches Verhältnis pflegt sich in solchen Fällen in der Regel einzustellen und gilt noch als befriedigend, während ein erheblich grösserer Wert des Verhältnisses $m : M$ als 1,5 vielleicht Veranlassung geben könnte, die Ausgleichung mit neuen Gewichtsannahmen zu wiederholen. —

Auch abgesehen von diesem Verhältnis $m : M$, welches im Allgemeinen gilt, bietet die Abrisstabelle von S. 293 noch Stoff zu Überlegungen, ob in den *einzelnen* Richtungsfällen die Schätzungen gut waren. Es sind nämlich die $v\sqrt{p}$ die auf die Gewichtseinheit $p = 1$ reduzierten Fehler, und man wird desshalb nun nachsehen, welche $v\sqrt{p}$ erheblich grösser als $0{,}41''$ sind? Doppelt so gross als $0{,}41''$ oder noch grösser sind nur die zwei Fälle v_{27} und v_{32}, welche nun etwa Veranlassung zu näherer Untersuchung geben könnten, von welcher aber hier, wo wir das Ganze nur als formelles Schulbeispiel durchgenommen haben, nicht die Rede sein kann.

Überblicken wir zum Schluss nochmals im Ganzen die neue Helmertsche Theorie der Netzausgleichung, so finden wir darin Fortschritte gegen früher in mehr als einer Hinsicht. Zuvörderst ist die Theorie mit den *Richtungs*gewichten $1 : q$ eine Vervollkommnung der früheren roheren Annahmen von „Anschnittszahlen" als Gewichten, und in solchen Fällen, welche bei der Längengradmessung die Regel waren, bei welchen nämlich bereits strenge Ausgleichungen nach Bessels Theorie mit den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$... in bequemster Weise zur Verfügung bereit

lagen, war die neue Theorie der q ausgezeichnet am Platze. Wenn aber künftig die $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. für den Zweck der q besonders auszurechnen sein werden, wird die Bequemlichkeit des neuen Verfahrens vermindert, während die sonstigen Vorzüge bestehen bleiben.

Das zweite unterscheidende Merkmal der neuen Theorie gegen frühere Verfahren ist die Einführung des *Netzrichtungsfehlers* r in der Gleichung (22) S. 291, welcher im Mittel zu $r = \pm 0{,}4''$ gefunden wurde; und es ist nur zu fragen, mit welchem Grade von Zuverlässigkeit ein solches r wohl im einzelnen Falle eingeführt werden kann? —

§ 84. Günstigste Wahl der Seitengleichung im Viereck.

Am Schlusse von § 58. S. 178 haben wir eine Frage, betreffend die günstigste Form der Seitengleichung in einem Vierecke kurz erwähnt und auf den Schluss dieses Kapitels verschoben, so dass wir nun diese Sache zu behandeln haben.

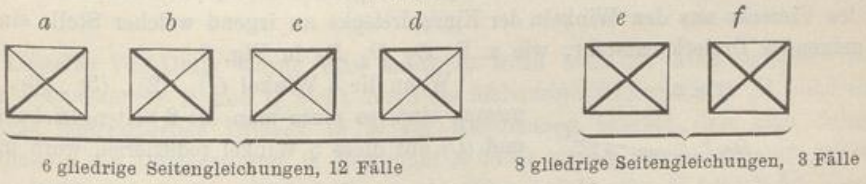
Ebenso wie die Winkelsummen-Bedingungen in verschiedenen Formen ausgedrückt werden konnten (s. § 57. Gleichungen (14)—(17) S. 167, so kann auch die Bedingung übereinstimmender Seitenberechnung in einem Viereck in verschiedenen Formen festgelegt werden, und es ist für die Schärfe der Rechnung nicht gleichgültig, welche von diesen Formen gewählt wird.

Eine erste Regel, welche sich von selbst darbietet, lautet, man soll die *spitzen* Winkel, welche bei Schnittpunktsbestimmungen auftreten, unmittelbar in die Seitengleichungen einführen; man erhält dadurch grosse Cotangenten als Coefficienten.

Eine erste tiefergehende Untersuchung dieser Frage wurde von *Zachariae* angestellt in dem Werke „Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten", aus dem Dänischen ins Deutsche übersetzt von *Lamp*, S. 152 u. ff. Wir haben hierüber in der „Zeitschr. für Verm. 1880" S. 65—73 berichtet und noch einige Ergebnisse hinzu gewonnen, wie im Folgenden dargelegt wird:

Das Wesen der Seitengleichung im Viereck besteht darin, dass, bei Annahme einer beliebigen Seite als Basis, jede andere Seite auf allen möglichen Wegen aus dieser Basis übereinstimmend erhalten werden muss, man hat daher zunächst so viele Formen von Seitengleichungen, als die Zahl der Kombinationen der 6 Seiten zu zweien beträgt, nämlich $\frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$. Diese 15 Fälle sind durch Fig. 1. a, b, c, d, e, f veranschaulicht.

Fig. 1.

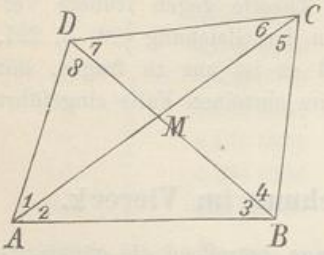


a bis d enthalten je 3 Kombinationen, nämlich die Verbindung von je 2 solchen Seiten, welche einen Winkelpunkt gemeinsam haben, e und f enthalten zusammen 3 Fälle, nämlich die Verbindungen von je 2 Gegenseiten und die Diagonalenkombination doppelt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Z. B. entspricht es der Fig. 1. *a*, wenn in Fig. 2. bestimmt wird, dass $A\,D$ aus der Basis $A\,B$ abgeleitet, eindeutig werden soll, d. h.:

Fig. 2.
Vollständiges Viereck.



$$A\,D = \frac{A\,B\,sin\,(3)}{sin\,(8)} = \frac{A\,B\,sin\,(3+4)\,sin\,(6)}{sin\,(5)\,sin\,(7+8)} \tag{1}$$

oder

$$\frac{sin\,(3)\,sin\,(5)\,sin\,(7+8)}{sin\,(3+4)\,sin\,(6)\,sin\,(8)} = 1 \tag{2}$$

Genau dieselbe Gleichung bekommt man durch die Bestimmung, dass $A\,C$ aus der Basis $A\,B$ gleichwertig hervorgehe, überhaupt liefert jede der Figuren *a*, *b*, *c*, *d* nur je *eine* Gleichung, welche mit Bezugnahme auf Fig. 2. bzw. mit (A) , (B) , (C) , (D) bezeichnet sein möge.

Ferner entspricht es der Fig. 1. *e*, wenn in Fig. 2. bestimmt wird, dass $D\,C$ aus $A\,B$ abgeleitet eindeutig werde, d. h.:

$$D\,C = \frac{A\,B\,sin\,(1+2)\,sin\,(4)}{sin\,(8)\,sin\,(5+6)} = \frac{A\,B\,sin\,(3+4)\,sin\,(1)}{sin\,(5)\,sin\,(7+8)}$$

oder

$$\frac{sin\,(1+2)\,sin\,(4)\,sin\,(5)\,sin\,(7+8)}{sin\,(1)\,sin\,(3+4)\,sin\,(5+6)\,sin\,(8)} = 1 \tag{3}$$

Die Fälle *a* bis *d* Fig. 1. liefern 6 gliederige, *e* und *f* liefern 8 gliederige Seitengleichungen.

Wir behandeln zunächst nur die Fälle Fig. 1. *a* bis *d*, d. h. die Zentralsysteme (A) , (B) , (C) , (D) und machen folgende Vergleichung der Günstigkeit:

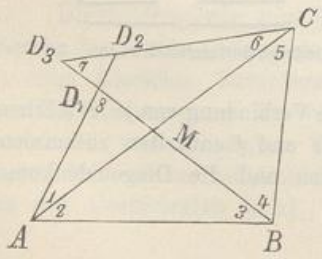
Den Zentralsystemen (A) und (B) entsprechen die folgenden 2 Bedingungsgleichungen:

$$(A) \qquad \frac{sin\,(3)\,sin\,(5)\,sin\,(7+8)}{sin\,(6)\,sin\,(8)\,sin\,(3+4)} = 1 \tag{4}$$

$$(C) \qquad \frac{sin\,(2)\,sin\,(4)\,sin\,(7+8)}{sin\,(1)\,sin\,(7)\,sin\,(3+4)} = 1 \tag{5}$$

Diese 2 Gleichungen können aber nicht unmittelbar verglichen werden, weil sie sich auf verschiedene Winkel beziehen. Es wird nun zunächst angenommen, dass entweder nur 5 Winkel gemessen sind, welche keine Winkelgleichung, aber eben deswegen eine Seitengleichung bilden, oder dass beim Vorhandensein weiterer Winkelmessungen die hierauf bezüglichen Summenproben stimmen, oder kurz, wir nehmen zunächst an, dass alle *einzelnen* Dreiecke für sich schliessen, dass aber bei der Zusammensetzung dieser einzelnen Dreiecke zu einem Viereck, oder bei der Konstruktion des Vierecks aus den Winkeln der Einzeldreiecke an irgend welcher Stelle ein fehlerzeigendes Dreieck entsteht, wie z. B. $D_1\ D_2\ D_3$ in Fig. 3.

Fig. 3.



Wenn die 5 Winkel (1) , (2) , (5) , (6) , (8) gemessen sind, so muss man die 2 Seitengleichungen (A) und (C) auf diese 5 Winkel reduzieren, wozu man hat:

$$\left.\begin{aligned} (3) &= 180° - (1+2+8) \\ (7)+(8) &= 180° - (1+6) \\ (3)+(4) &= 180° - (2+5) \\ (4) &= (1)+(8)-(5) \\ (7) &= 180° - (1+6+8) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Damit gehen (A) und (C) über in:

$$(A') \qquad \frac{sin\,(1+2+8)\,sin\,(5)\,sin\,(1+6)}{sin\,(6)\,sin\,(8)\,sin\,(2+5)} = 1 \tag{7}$$

$$(C') \qquad \frac{sin\,(2)\,sin\,(1+8-5)\,sin\,(1+6)}{sin\,(1)\,sin\,(1+6+8)\,sin\,(2+5)} = 1 \tag{8}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, sondern es stellen sich Widersprüche ein, welche in logarithmischer Form in der Rechnung auftreten. Wenn man die Gleichung (7) vermöge ihrer Entstehung aus (1), (2) und (4) mit Fig. 3. vergleicht, so findet man:

$$\frac{sin\,(1+2+8)\,sin\,(5)\,sin\,(1+6)}{sin\,(6)\,sin\,(8)\,sin\,(2+5)} = \frac{A\,D_1}{A\,D_2} = 1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}$$

oder wenn man die Gleichung (7) logarithmisch ausführt, so erhält man auf der rechten Seite statt $log\,1 = 0$ den Widerspruch:

$$log\left(1 - \frac{D_1\,D_2}{A\,D_2}\right) = -\,\mu\,\frac{D_1\,D_2}{A\,D_2} \tag{9}$$

wo $\mu = 0{,}43429$ der logarithmische Modul ist. Dieser Wert (9) ist das Absolutglied der linearen Seitengleichung, welche durch Differentiieren von (7) entsteht, man hat daher, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, für den Zentralpunkt A das relative Mass für das Absolutglied der Seitengleichung:

$$(a) = \frac{D_1\,D_2}{A\,D} \tag{10}$$

wo im Nenner schlechthin $A\,D$ statt $A\,D_2$ hinreichend genau geschrieben ist.

Wenn man Alles analog für den Zentralpunkt C macht, so bekommt man:

$$(c) = \frac{D_2\,D_3}{C\,D} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) findet man die Vergleichung:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{D_1\,D_2}{D_2\,D_3}\,\frac{C\,D}{A\,D} \tag{12}$$

Es ist aber:

$$\frac{D_1\,D_2}{D_2\,D_3} = \frac{sin\,(7)}{sin\,(8)}$$

und nach Fig. 2:

$$\frac{C\,D}{A\,D}\,\frac{sin\,(7)}{sin\,(8)} = \frac{C\,M}{A\,M} \tag{13}$$

folglich ist das Verhältnis der Absolutglieder in den Seitengleichungen (7) und (8):

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{C\,M}{A\,M} \tag{14}$$

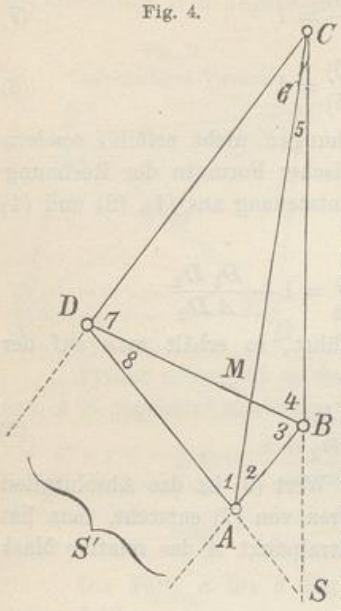
Dasselbe Verhältnis würde man erhalten, wenn man die Absolutglieder der Seitengleichungen für A und C nicht durch das fehlerzeigende Dreieck in D, sondern durch das fehlerzeigende Dreieck in B zur Anschauung brächte, wie man durch Wiederholung der Untersuchung in Bezug auf B finden würde, was jedoch auch schon daraus erhellt, dass in dem Verhältnis $(a):(c)$ keine auf D oder B bezügliche Viereckssgrösse vorkommt.

In dieser Vergleichung (14) der Absolutglieder ist der Zachariae sche Satz enthalten, denn für die Schärfe der logarithmischen Rechnung sind die Grössen der Absolutglieder der Seitengleichungen (A), (B), (C), (D) massgebend.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir machen die Vergleichung im Anschluss an Fig. 4. und erhalten Folgendes:

Fig. 4.



$$\left.\begin{array}{llll} A \text{ ist günstiger als } C & \text{weil} & AM < CM \\ B \;\;\, " \quad\;\; " \quad\;\; " \;\; D & " & BM < DM \\ A \;\;\, " \quad\;\; " \quad\;\; " \;\; B & " & AS' < BS' \\ A \;\;\, " \quad\;\; " \quad\;\; " \;\; D & " & AS < DS \\ B \;\;\, " \quad\;\; " \quad\;\; " \;\; C & " & BS < CS \\ D \;\;\, " \quad\;\; " \quad\;\; " \;\; C & " & DS' < CS' \end{array}\right\} \quad (14a)$$

Aus allen 6 Vergleichungen folgt, dass A der günstigste Zentralpunkt für den Ansatz einer Seitengleichung ist. Dabei sind nur die 6 gliederigen Seitengleichungen entspr. (Fig. 1. *a* bis *d*) verglichen.

Wie weit sich die Sache ändert, wenn nicht bloss 5 Winkel gemessen sind, oder allgemeiner ausgedrückt, wenn ausser einer Seitengleichung auch noch Winkelsummen mit Widerspruchsgliedern existieren, behandeln wir im Anschluss an ein Zahlenbeispiel, welches sich auf Fig. 4. bezieht, und zwar mag gelegentlich erwähnt werden, dass diese Figur das Schwerdsche Basisnetzviereck von S. 208 vorstellt, das wir in § 65. ausgeglichen haben. Die auf 1′ abgerundeten und insofern fingierten Winkel sind diese:

$$\left.\begin{array}{llll} (1) = 49^\circ\,44' & (1) = 49^\circ\,44' & (2) = 31^\circ\,38' & (7) = 76^\circ\,34' \\ (2) = 31\;\;38 & (8) = 25\;\;17 & (3) = 73\;\;22 & (4) = 67\;\;\;4 \\ (3) = 73\;\;22 & (7) = 76\;\;34 & (4) = 67\;\;\;4 & (6) = 28\;\;26 \\ (8) = 25\;\;17 & (6) = 28\;\;26 & (5) = \;\;7\;\;57 & (5) = \;\;7\;\;57 \\ \hline 180^\circ\;\;1' & 180^\circ\;\;1' & 180^\circ\;\;1' & 180^\circ\;\;1' \end{array}\right\} \quad (15)$$

Bezeichnet man die Winkelverbesserungen mit v_1, v_2 ..., so erhält man hieraus zunächst die (nicht von einander unabhängigen) 4 Winkelbedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + 1' = 0 \\ v_1 + v_8 + v_7 + v_6 + 1' = 0 \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + 1' = 0 \\ v_7 + v_4 + v_6 + v_5 + 1' = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Der Zentralpunkt A giebt eine Seitengleichung (2), welche auf folgende logarithmische Rechnung führt:

		log Diff. für 1′
$(7+8) = 101^\circ\,51'$	$\log\sin(7+8) = 9.99064$	$-\;2$
$(5) = \;\;7\;\;57$	$\log\sin(5) = 9.14085$	$+\;90$
$(3) = 73\;\;22$	$\log\sin(3) = 9.98144$	$+\;\;3$
	9.11293	
$(6) = 28^\circ\,26'$	$\log\sin(6) = 9.67773$	$+\;23$
$(3+4) = 140\;\;26$	$\log\sin(3+4) = 9.80412$	$-\;15$
$(8) = \;\;25\;\;17$	$\log\sin(8) = 9.63052$	$+\;27$
	9.11237	

$$9.11293 - 9.11237 = +\,0.00056$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also in Einheiten der fünften Dezimale hat man die Seitengleichung:

$$-2(v_7+v_8)+90\,v_5+3\,v_3-23\,v_6+15(v_3+v_4)-27\,v_8+56=0$$

(A) oder: $18\,v_3+15\,v_4+90\,v_5-23\,v_6-2\,v_7-29\,v_8+56=0$ (17)

Ganz in derselben Weise findet man auch die 3 Seitengleichungen für die Zentralpunkte B, C und D, nämlich:

(B) $+2\,v_1-19\,v_2+73\,v_5-17\,v_6+3\,v_7-27\,v_8+41=0$ (18)

(C) $+11\,v_1-21\,v_2-15\,v_3-20\,v_4+5\,v_7+2\,v_8+1=0$ (19)

(D) $+9\,v_1-2\,v_2+3\,v_3-5\,v_4+17\,v_5-6\,v_6+16=0$ (20)

In Verbindung mit dreien Gleichungen der Gruppe (16) genügt *eine* von den Gleichungen (17)—(20) zum allseitigen Schliessen des Vierecks, es muss daher möglich sein, alle diese 4 Gleichungen (17)—(20) auf *eine* Form zu bringen, und wenn etwa nur 5 Winkel gemessen wären, welche keine Winkelgleichung bildeten, so müsste *eine* einzige Seitengleichung bestehen, welche aus (17), (18), (19) oder (20) ableitbar sein müsste. Wir stellen daher die Aufgabe: Es sollen die 4 Gleichungsformen (17), (18), (19), (20) auf eine gemeinsame Form gebracht werden, in welcher nur v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 vorkommen, d. h. die Verbesserungen solcher 5 Winkel, welche für sich allein das Viereck mit einer Seitengleichung bestimmen:

Man hat nun mit Hilfe der Gruppe (16) alle übrigen v in v_1, v_2, v_5, v_6, v_8 auszudrücken, und damit diese übrigen v aus (17)—(20) zu eliminieren. Aus (16) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} v_3 &= -v_1-v_2-v_8-1\\ v_4 &= +v_1-v_5+v_8\\ v_7 &= -v_1-v_6-v_8-1 \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichungen (17)—(20) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (A')\quad & -1\,v_1-18\,v_2+75\,v_5-21\,v_6-30\,v_8+40=0\\ (B')\quad & -1\,v_1-19\,v_2+73\,v_5-20\,v_6-30\,v_8+38=0\\ (C')\quad & +1\,v_1-6\,v_2+20\,v_5-5\,v_6-8\,v_8+11=0\\ (D')\quad & +1\,v_1-5\,v_2+22\,v_5-6\,v_6-8\,v_8+13=0 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Abgesehen von einer erklärlichen Abrundungsunsicherheit von ± 1 in den Coefficienten sind diese 4 Gleichungen algebraisch identisch, wie es sein soll, praktisch genommen ist aber die erste (A') wegen der grösseren Coefficienten allen anderen vorzuziehen.

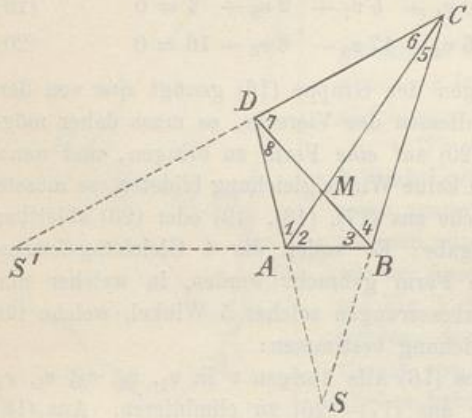
Das Verhältnis der Coefficienten und Absolutglieder in den Gleichungen (22), nämlich $40:38:11:13$ hängt nicht von der Wahl der 5 Winkel (1), (2), (5), (6), (8) ab, sondern nur von der Gestalt des Vierecks, und dieses theoretische Verhältnis stellt sich immer ein, wenn die Gleichungen auf irgend welche 5 Winkel reduziert werden. Wenn aber mehr als 5 Winkel gemessen sind, so ist ein solches Reduzieren praktisch nicht nötig, wenn z. B. die 8 Winkel von Fig. 4. gemessen sind, so kann man irgend eine der Gleichungen (17)—(20) unmittelbar in die Rechnung einführen; fragt man aber hiebei wieder nach der Grösse der Absolutglieder, so ist doch wieder das Verhältnis derselben in den reduzierten Gleichungen (22) massgebend, denn die Gleichungen (16) und alle hierauf bezüglichen Operationen, durch welche der Übergang zwischen (A) und (A'), (B) und (B') etc. vermittelt wird, sind im Vergleich mit den logarithmischen Absolutgliedern selbst als fehlerfrei zu betrachten.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

8 gliederige Seitengleichungen.

Das Bisherige ist im Wesentlichen von *Zachariae* in dem Eingangs citierten Buche angegeben worden; es sind dabei nur die 4 Formen *a*, *b*, *c*, *d* Fig. 1. berücksichtigt worden. (S. 299.)

Fig. 5.
Zentralpunkte S und S'.



Eine Vervollständigung dieser Theorie ist nun zunächst in dem Sinn möglich, dass auch die 8 gliederigen Seitengleichungen *e* und *f* von Fig. 1. hinzugezogen werden. Betrachten wir zuerst die 8 gliederige Seitengleichung (3), so kann man derselben eine Beziehung zu dem Punkt S von Fig. 5. geben, es ist nämlich:

$$SB = SA \frac{\sin(1+2)}{\sin(3+4)}$$

$$SD = SB \quad \frac{\sin(4)}{\sin(8)}$$

$$SC = SD \frac{\sin(7+8)}{\sin(5+6)}$$

$$SA = SC \quad \frac{\sin(5)}{\sin(1)}$$

Alles multipliziert giebt:

$$(S) \qquad \frac{\sin(1+2)\sin(4)\sin(5)\sin(7+8)}{\sin(8)\sin(5+6)\sin(1)\sin(3+4)} = 1$$

Dieses ist übereinstimmend mit (3).

Diese Gleichung (S) ist der Quotient aus (A) und (D), nämlich:

$$(A) \qquad \frac{\sin(7+8)\sin(5)\sin(3)}{\sin(6)\sin(3+4)\sin(8)} = 1$$

$$(D) \qquad \frac{\sin(5+6)\sin(3)\sin(1)}{\sin(4)\sin(1+2)\sin(6)} = 1$$

also wenn man die logarithmischen Absolutglieder mit (s), (a), (d) bezeichnet:

$$(s) = (a) - (d) \tag{23}$$

Dabei ist vorausgesetzt, dass bei (A) und (D) in *demselben Sinn* gezählt wird, d. h. wenn in (A) der Weg $DCBD$ von links nach rechts genommen ist, so muss auch in (D) der Weg $CBAC$ von links nach rechts genommen werden.

Mit analogen Bezeichnungen hat man auch

$$(s) = (b) - (c) \tag{24}$$

und ebenso findet man

$$(s') = (a) - (b) = (d) - (c) \tag{25}$$

Endlich kann man diejenige auf *e* und *f* (Fig. 1.) bezügliche 8 gliederige Gleichung, welche die Beziehung zwischen den Diagonalen AC und BD herstellt, dem Punkte M zuteilen, dem sie auch als Zentralpunkt zugehört, wenn man M als fingierte Winkelstation nimmt; die Gleichung heisst nämlich:

$$(M) \qquad \frac{\sin(1)\sin(3)\sin(5)\sin(7)}{\sin(2)\sin(4)\sin(6)\sin(8)} = 1 \tag{26}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Gleichung ist das Produkt aus (A) und (C) oder (B) und (D), z. B.:

$$(A) \qquad \frac{\sin(7+8)\sin(5)\sin(3)}{\sin(6)\sin(3+4)\sin(8)} = 1$$

$$(C) \qquad \frac{\sin(3+4)\sin(1)\sin(7)}{\sin(2)\sin(7+8)\sin(4)} = 1$$

woraus durch Multiplikation (26) folgt.

Die Absolutglieder geben die Beziehung:

$$(m) = (a) + (c) = (b) + (d) \qquad (27)$$

Dreiecksflächen als Mass der Günstigkeit.

Die *Zachariae*sche Theorie verlangt zur Auffindung des günstigsten Zentralpunktes nach (14 a) eine *sechs*fache Vergleichung von Diagonalenstrecken, um schliesslich aus allen 6 Vergleichungen den günstigsten Fall herauszufinden.

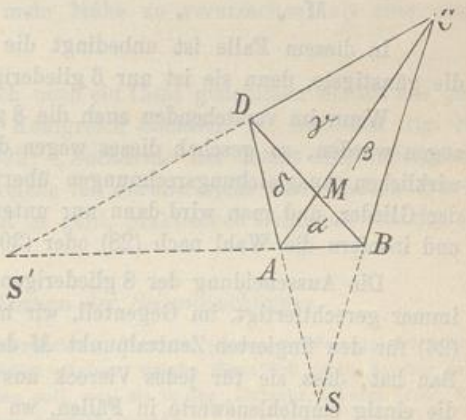
Dieses lässt sich auf eine viel bequemere mit *einem* Blick zu erledigende *Flächen*vergleichung zurückführen, wie wir nun zeigen werden:

Wir betrachten die Formel (14) in Verbindung mit Fig. 5. oder Fig. 6. und finden:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{CM}{AM} = \frac{\triangle BDC}{\triangle ABD}$$

d. h. die Absolutglieder (a) und (c) sind den *Flächen* der Dreiecke BDC und ABD proportional. Nimmt man nun noch die Gleichungen (23), (24), (26) und (25) hinzu, so bekommt man folgende Zusammenstellung, und damit das Gesamt-Ergebnis unserer Untersuchung:

Fig. 6.
Flächenverhältnisse $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ zu Gleichung (28) und (29).



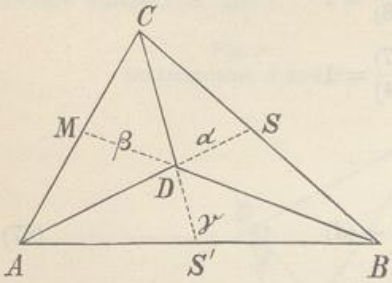
Zentralpunkt		Mass der Günstigkeit (Fig. 6.)		
A	mit 6 gliederiger Seitengleichung	Fläche	$\beta+\gamma$	(28)
B	„ „ „	„	$\gamma+\delta$	(28)
C	„ „ „	„	$\alpha+\delta$	(28)
D	„ „ „	„	$\alpha+\beta$	(28)
S	mit 8 gliederiger Seitengleichung	Fläche	$\gamma-\alpha$	(29)
S'	„ „ „	„	$\beta-\delta$	(29)
M	„ „ „	„	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$	(29)

Am günstigsten ist die Seitengleichung (26) für den Zentralpunkt M, jedoch ist dieselbe 8 gliederig.

Wenn 2 Viereckseiten *parallel* werden, so versagt die ihrem Schnitt entsprechende 8 gliederige Gleichung vollständig, wenn z. B. AB parallel DC ist, so

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 7.
Flächenverhältnisse $\alpha\ \beta\ \gamma$ zu Gleichung (30) und (31).



wird $\beta = \delta$ und die Gleichung für S' löst sich auf in $0 \ldots + 0 \ldots \ldots = 0$, was man auch direkt nachweisen kann.

Wenn die 4 Punkte $A\,B\,C\,D$ nicht ein eigentliches Viereck wie Fig. 6. bilden, sondern ein Dreieck $A\,B\,C$ mit einem Innenpunkt D, wie z. B. Fig. 7., so bekommt man folgende Vergleichung betreffs der Günstigkeit der 7 möglichen Seitengleichungen:

Zentralpunkt		Mass der Günstigkeit (Fig. 9.)	
A	mit 6 gliederiger Seitengleichung	Fläche	α
B	„ „ „	„	β
C	„ „ „	„	γ
D	„ „ „	„	$\alpha + \beta + \gamma$

(30)

S	mit 8 gliederiger Seitengleichung	Fläche	$\beta + \gamma$
S'	„ „ „	„	$\alpha + \beta$
M	„ „ „	„	$\alpha + \gamma$

(31)

In diesem Falle ist unbedingt die Seitengleichung für den Zentralpunkt D die günstigste, denn sie ist nur 6 gliederig und hat die grössten Zahlen-Coefficienten.

Wenn im vorstehenden auch die 8 gliederigen Formen zur Vergleichung beigezogen wurden, so geschah dieses wegen der theoretischen Vollständigkeit, denn bei wirklichen Ausgleichungsrechnungen überwiegt oft die Rücksicht auf geringe Zahl der Glieder, und man wird dann nur unter den 4 Fällen $A\,B\,C\,D$ zu wählen haben, und insofern die Wahl nach (28) oder (30) treffen.

Die Ausscheidung der 8 gliederigen Seitengleichungen ist aber durchaus nicht immer gerechtfertigt, im Gegenteil, wir halten die absolut günstigste Seitengleichung (26) für den fingierten Zentralpunkt M der Fig. 5., welche zudem so symmetrischen Bau hat, dass sie für jedes Viereck aus dem Kopf angeschrieben werden kann, für die einzig empfehlenswerte in Fällen, wo es auf scharfe Rechnung ankommt.

Beispielshalber haben wir die Ausgleichung des Hannoverschen Fünfecks Fig. 5. S. 189 nochmals gemacht unter Einführung der *schärfsten* 8 gliederigen Form für das Viereck Aegidius-Burg-Schanze-Steuerndieb, nämlich nach Fig. 1. S. 189:

$$\frac{sin\,(17-16)\,sin\,(14-13)\,sin\,(3-2)\,sin\,(20-19)}{sin\,(18-17)\,sin\,(15-14)\,sin\,(4-3)\,sin\,(21-20)} = 1$$

Die Ausrechnung mit den Winkeln von S. 190—191 gab in Einheiten der 6ten Logarithmendecimale:

$$+ 1{,}64\,(v_{17} - v_{16}) + 2{,}16\,(v_{14} - v_{13}) + 2{,}53\,(v_3 - v_2) + 2{,}41\,(v_{20} - v_{19})$$
$$+ 1{,}42\,(v_{17} - v_{18}) + 3{,}54\,(v_{14} - v_{15}) + 1{,}58\,(v_3 - v_4) + 2{,}25\,(v_{20} - v_{21}) + 6{,}5 = 0$$

oder geordnet:

$$- 2{,}53\,v_2 + 4{,}11\,v_3 - 1{,}58\,v_4 - 2{,}16\,v_{13} + 5{,}70\,v_{14} - 3{,}54\,v_{15}$$
$$- 1{,}64\,v_{16} + 3{,}06\,v_{17} - 1{,}42\,v_{18} - 2{,}41\,v_{19} + 4{,}66\,v_{20} - 2{,}25\,v_{21} + 6{,}5 = 0$$

Diese Gleichung wurde an Stelle der zweiten Gleichung (6) oben auf S. 194—195

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gesetzt und alles übrige gelassen; die Normalgleichungen werden an Stelle von S. 193 die folgenden (in abgekürzter Schreibweise nach S. 80 unten):

$$
\begin{aligned}
&+107{,}19k_1+\ 1{,}08k_2-3{,}41k_3+3{,}27k_4+0{,}08k_5+0{,}49k_6-0{,}87k_7-0{,}24k_8+18{,}20=0\\
&+122{,}13k_2-0{,}28k_3\ \ ..\ \ -0{,}58k_5-2{,}37k_6+2{,}32k_7+1{,}90k_8+\ 6{,}50=0\\
&+6{,}00k_3-2{,}00k_4\ \ ..\ \ ..\ \ -2{,}00k_7-2{,}00k_8-\ 1{,}02=0\\
&+6{,}00k_4-2{,}00k_5\ \ ..\ \ ..\ \ ..\ \ +\ 2{,}22=0\\
&+6{,}00k_5-2{,}00k_6\ \ ..\ \ -2{,}00k_8-\ 2{,}36=0\\
&+6{,}00k_6-2{,}00k_7+2{,}00k_8-\ 0{,}76=0\\
&+6{,}00k_7+2{,}00k_8+\ 2{,}30=0\\
&+6{,}00k_8+\ 4{,}30=0
\end{aligned}
$$

Die Auflösung gab:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= -0{,}175 & k_2 &= -0{,}027 & k_3 &= -0{,}386 & k_4 &= -0{,}366\\
k_5 &= +0{,}111 & k_6 &= +0{,}462 & k_7 &= -0{,}059 & k_8 &= -0{,}941
\end{aligned}
$$

Die Weiterrechnung gab die v ein klein wenig anders, als sie in der Tabelle II von S. 194—195 erhalten wurden und zwar zu Gunsten der *neuen* Ausgleichung; deshalb sind auf S. 196 diese *neuen* v und nicht die alten von S. 194—195 eingesetzt, wie bereits auf S. 195 im Kleingedruckten auseinandergesetzt ist. Die neue Rechnung mit der schärferen Seitengleichung hat also Verbesserungen bis zum Betrag von rund 0,01″ gebracht, ohne dabei mehr Mühe zu verursachen, als eine weniger günstige Seitengleichung.

Zur vorliegenden Frage mag auch noch ein Citat genommen werden aus „Astr. geod. Arbeiten f. d. Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, II. Abt. das trig. Netz, I. Ordnung von *A. Nagel*, 1890“, S. 492: „*Zachariae* hat zuerst eine tiefergehende Untersuchung dieser Frage angestellt, welche von *Jordan* nicht unwesentlich erweitert worden ist.“ Nagel macht dabei so gut es geht, praktischen Gebrauch von der fraglichen Theorie.

Division und Multiplikation der Seitengleichungen.

Im Anschluss an die vorstehende Untersuchung über die günstigste Seitengleichungsform möge auch noch eine andere Formfrage erledigt werden, welche eigentlich nicht hierher gehört, aber doch gelegentlich hier mit erörtert werden soll, weil sie in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236 in Zusammenhang mit der Seitengleichungsfrage gebracht wurde.

Es handelt sich darum, dass eine Seitengleichung, wenn ihre Coefficienten unbequem gross werden, beliebig mit 10, 100, 1000, kurz mit *jeder* beliebigen Zahl dividiert (oder auch multipliziert) werden darf, ohne dass ihr mathematischer Sinn oder ihre Schärfe geändert würde, wenn nur keine Wegwerfung von Decimalen stattfindet.

Dieses ist bereits in § 47. S. 134—135 angegeben (wie auch schon in den früheren Auflagen dieses Buches).

Diese einfache Sache scheint dem Verfasser oben erwähnter Bemerkungen in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236 nicht geläufig gewesen zu sein, als er 1893 in einem Buche über „M. d. kl. Q.“, S. 251 zu unserer vorstehenden Theorie schrieb: „Dabei wird sich ergeben, dass für die sehr kleinen Winkel verhältnismässig sehr grosse Coefficienten der Verbesserungen in die umgeformten Bedingungsgleichungen eintreten, wodurch in den weiteren Rechnungen die übrigen Coefficienten im Zusammenwirken erdrückt werden und dass daher die Benutzung zehnstelliger Logarithmen bei Auflösung der Endgleichungen u. s. w. noch keine genügende Genauigkeit erreichen lässt“ und in „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 236: dass „Jordan im § 69. seines Handbuches I. Band 1888 (übereinstimmend mit vorstehendem § 84.) immer nur die Wichtigkeit sehr grosser Coefficienten betont und danach nicht angenommen werden konnte, dass er die grossen Coefficienten durch Division wieder beseitigen werde.“

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Kritik giebt nun Veranlassung, die Sache jetzt noch deutlicher auszudrücken, als in der vorigen Auflage 1888, § 69. für nötig gehalten wurde.

Die Benennung „*grosse*" Coefficienten kann bei diesen Erörterungen zweierlei bedeuten, z. B. in den Gleichungen (22) S. 303 hat 30 v_8 einen *grossen* Coefficienten 30 im Vergleich mit 8 v_8, welches nur den *kleinen* Coefficienten 8 hat. Wenn man aber die erste Gleichung von (22) mit 10 dividiert und dazu die 4te Gleichung geradezu nimmt, so hat man:

$$-0{,}1\,v_1 - 1{,}8\,v_2 + 7{,}5\,v_5 - 2{,}1\,v_6 - 3{,}0\,v_8 + 4{,}0 = 0$$
$$+\ 1\,v_1 - 5\,v_2 + 22\,v_5 - 6\,v_6 - 8\,v_8 + 13 = 0$$

Nun könnte man sagen, 3,0 ist ein *kleiner* Coefficient im Vergleich mit 8; allein in anderem Sinne ist 3,0 doch ein grösserer Coefficient als 8, weil 3,0 aus $\frac{30}{10}$ entstanden mit ± 1 Einheit seiner letzten Stelle, auf $\frac{1}{30}$ oder 3,3 % seines Wertes genau ist, dagegen 8 mit ± 1 seiner letzten Stelle nur auf $\frac{1}{8}$ oder 12 % seines Wertes genau, oder nehmen wir die Coefficienten von v_5, nämlich 7,5 und 22, so ist 7,5 in dieser Form zwar kleiner als 22, aber doch ist 7,5 im Sinne der hier behandelten Theorie der grössere Coefficient, weil es auf die Stellung des Kommas nicht ankommt.

Oder kurz, die *grossen* Coefficienten sind deswegen die besseren, weil sie, mag man sie auch mit 10, 100 und beliebig dividieren, immer noch *relativ* genauer sind als die ursprünglich kleineren Coefficienten. Damit dürfte für jeden in solchen Sachen nicht unerfahrenen Rechner der Vorwurf „die grossen Coefficienten durch Division wieder zu *beseitigen*" – erledigt sein.

Wir werden im nächsten § 85. durch ein Zahlenbeispiel zu dieser Sache noch weitere Aufklärung geben, hier aber sei die ganz einfache Frage der Division der Gleichungen noch etwas weiter dargelegt.

In den beiden ersten Triangulierungsausgleichungen, welche wir haben, nämlich in dem „supplementum theoriae combinationis 1826", rechnet Gauss die Seitengleichungen in Einheiten der *siebenten* Logarithmenstelle, und dabei tritt der Übelstand ein, der oben mit „Erdrücken" der kleinen Coefficienten benannt wurde, denn es lautet z. B. die erste Normalgleichung in Art. 24. des suppl. theor. comb.:

$$-1{,}368 = +6\,A - 2\,B - 2\,C - 2\,D + 184{,}72\,F - 19{,}85\,G$$

Hier ist der Coefficient 184,72 zu gross, was in unserem Commentar hiezu (in Jordan-Steppes deutsches Vermessungswesen 1882, S. 13) bemerkt wurde.

Als Verfasser nach dem klassischen Muster des suppl. theor. comb. seine ersten Ausgleichungsversuche machte, welche in Taschenbuch der prakt. Geom. 1873, § 147 u. ff. veröffentlicht sind, wurde dem Gauss'schen Vorbild entsprechend ebenfalls in Einheiten der 7ten Log.-Stelle gerechnet aber in der folgenden Auflage, 1878, 2. Band S. 147—148 der daraus folgende Übelstand erkannt, und bei einem Teile der Ausgleichungen jenes Bandes berücksichtigt, durch Rechnung in Einheiten der 6ten Log.-Stelle und S. 148 dazu bemerkt: Man braucht überhaupt keine bestimmte Logarithmendecimale als Einheit der linearen Seitengleichungen zu nehmen, sondern man kann diese Seitengleichungen mit jeder beliebigen Konstanten multiplizieren. Man vergleiche hiezu auch eine Bemerkung in dem Werke „Die königl. preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, I. Teil, 2. Aufl., Berlin 1870", S. 24.

Seit unserer 3. Auflage haben wir bei solchen Ausgleichungen stets in Einheiten der 6. Logarithmendecimale gerechnet, was das bequemste ist.

Endlich sind die neueren Ausgleichungen von *Helmert* hier zu erwähnen, von denen ein Beispiel in unserem vorhergehenden § 83. enthalten ist. Es wird hier in der Gleichung (g) S. 295 in *halben* Einheiten der 6ten Logar.-Stelle gerechnet, wodurch der Vorteil entsteht, dass die Coefficienten der linearen Seitengleichungen noch mehr den Coefficienten + 1 oder — 1 der Dreiecksgleichungen nahe gebracht werden.

Man sieht aus diesen Citaten, dass die kleine formelle Frage der Masseinheit in den linearen Seitengleichungen bereits ihre Geschichte hat, und dem nicht unerfahrenen Rechner längst geläufig ist.

§ 85. Günstige und ungünstige Seitengleichung in einem Vierecks-Beispiel.

Zu weiterer Klarlegung der im vorigen § 84. behandelten Theorie für mehr oder weniger scharfe Aufstellung der Seitengleichung in einem Viereck wollen wir im Nachfolgenden ein Zahlenbeispiel durchrechnen mit einer Viereckform (Fig. 1.),

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

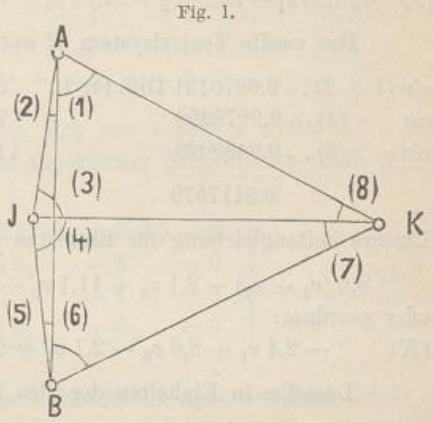
welche als charakteristisch für die Wahl des Zentralsystems bezeichnet worden ist (nach „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 176—182 und S. 235—240).

Die Anwendung unseres Flächensatzes (28) § 84. S. 305 giebt hier:

Zentralpunkt	Mass der Günstigkeit	
A	Dreiecksfläche	BJK
B	„	AJK
J	„	ABK
K	„	ABJ

(1)

Fig. 1.



Es ist also J der günstigste Zentralpunkt, weil die abgewandte Fläche ABK am grössten ist, und K erscheint als ungünstigster Zentralpunkt, weil die abgewandte Fläche ABJ am kleinsten ist.

Die Seitengleichungen für diese beiden Fälle sind:

Zentralpunkt J,
$$\frac{\sin(1+2)\sin(7)\sin(5)}{\sin(8)\sin(5+6)\sin(2)} = 1 \qquad (2)$$

Zentralpunkt K,
$$\frac{\sin(1+2)\sin(4)\sin(6)}{\sin(3)\sin(5+6)\sin(1)} = 1 \qquad (3)$$

Hierzu nehmen wir folgende Winkel als gemessen an:

$(1) = 62°\,14'\,30''$	$(1) = 62°\,14'\,30''$	$(2) = 5°\,42'\,33''$	$(4) = 84°\,17'\,25''$
$(8) = 27\ 45\ 30$	$(2) = 5\ 42\ 33$	$(3) = 84\ 17\ 26$	$(5) = 5\ 42\ 32$
$(7) = 27\ 45\ 28$	$(3) = 84\ 17\ 26$	$(4) = 84\ 17\ 25$	$(6) = 62\ 14\ 29$
$(6) = 62\ 14\ 29$	$(8) = 27\ 45\ 30$	$(5) = 5\ 42\ 32$	$(7) = 27\ 45\ 28$
$179°\,59'\,57''$	$179°\,59'\,59''$	$179°\,59'\,56''$	$179°\,59'\,54''$
$w = -3''$	$w = -1''$	$w = -4''$	$w = -6''$

(4)

Dazu gehören die Winkelbedingungsgleichungen:

unabhängig
$$\begin{cases} v_1 + v_8 + v_7 + v_6 - 3'' = 0 & (5) \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_8 - 1'' = 0 & (6) \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 - 6'' = 0 & (7) \end{cases}$$

abhängig
$$(v_2 + v_3 + v_4 + v_5 - 4'' = 0) \qquad (8)$$

Von diesen 4 Gleichungen sind aber nur 3 unabhängig, wir wollen etwa (5) (6) und (7) in die Ausgleichung aufnehmen. Ausserdem muss eine Seitengleichung genommen werden.

Das Zentralsystem J nach (2) giebt folgende trigonometrische Ausrechnung mit 7 stelligen Logarithmen:

$\sin(1+2)$	9.9670151	Diff. für 10″	86	$\sin$ (8)	9.6681466	Diff. für 10″	400
$\sin$ (7)	9.6681386		400	$\sin(5+6)$	9.9670134		86
$\sin$ (5)	8.9977101		2106	$\sin$ (2)	8.9977312		2106
	8.6328638				8.6328912		

Die dazu gehörige lineare Seitengleichung ist für Einheiten der 6ten Logar.-Stelle:

$$\left.\begin{array}{l} +0{,}86\,(v_1+v_2)+4{,}00\,v_7+21{,}06\,v_5-4{,}00\,v_8-0{,}86\,(v_5+v_6)-21{,}06\,v_2-27{,}4=0 \\ \text{oder geordnet:} \\ (J)\quad +0{,}86\,v_1-20{,}20\,v_2+20{,}20\,v_5-0{,}86\,v_6+4{,}00\,v_7-4{,}00\,v_8-27{,}4=0 \end{array}\right\} (9)$$

Das zweite Zentralsystem K mit der Gleichung (3) giebt:

sin (1 + 2) . .	9.9670151	Diff. für 10″	86	*sin* (3) . .	9.9978402	Diff. für 10″	21
sin (4) . .	9.9978399		21	*sin* (5 + 6) . .	9.9670134		86
sin (6) . .	9.9469029		111	*sin* (1) . .	9.9469040		110
	9.9117579				9.9117576		

Lineare Seitengleichung für Einheiten der 7. Decimale:

$$\left.\begin{array}{l} 8{,}6\,(v_1+v_2)+2{,}1\,v_4+11{,}1\,v_6-2{,}1\,v_3-8{,}6\,(v_5+v_6)-11{,}0\,v_1+3=0 \\ \text{oder geordnet:} \\ (K)\quad -2{,}4\,v_1+8{,}6\,v_2-2{,}1\,v_3+2{,}1\,v_4-8{,}6\,v_5+2{,}4\,v_6+3=0 \end{array}\right\} (10)$$

Dasselbe in Einheiten der 6ten Decimale:

$$-0{,}24\,v_1+0{,}86\,v_2-0{,}21\,v_3+0{,}21\,v_4-0{,}86\,v_5+0{,}24\,v_6+0{,}3=0 \qquad (11)$$

Wir wollen nun zuerst zeigen, dass man die Gleichung (9) in die Form (10) oder (11) überführen kann; man braucht nur v_7 und v_8 aus (9) zu eliminieren, nämlich aus (7) und (6) hat man:

$$v_7=-v_4-v_5-v_6+6''$$
$$v_8=-v_1-v_2-v_3+1''$$

Diese beiden in (9) eingesetzt werden geben:

$$+4{,}86\,v_1-16{,}20\,v_2+4{,}00\,v_3-4{,}00\,v_4+16{,}20\,v_5-4{,}86\,v_6-7{,}00=0 \qquad (12)$$

Wenn man dieses mit — 3 : 7 multipliziert, so kommt:

$$-2{,}08\,v_1+6{,}94\,v_2-1{,}71\,v_3+1{,}71\,v_4-6{,}94\,v_5+2{,}08\,v_6+3{,}00=0 \qquad (13)$$

dieses stimmt mit (10) zwar im Absolutgliede 3,0 überein, aber die Coefficienten selbst, welche in (11) und (13) ebenfalls stimmen sollten, weichen ganz erheblich ab, z. B. — 2,4 gegen — 2,08 u. s. w. und darin zeigt sich bereits die Überlegenheit der Gleichung (2) mit dem Zentralpunkt J über (3) mit dem Zentralpunkt K. Allerdings wenn die Absolutglieder in (9) und (10) trigonometrisch etwa mit 8—10 stelligen Logarithmen berechnet worden wären, überhaupt wenn diese Absolutglieder ganz scharf wären, so müsste auch die Umwandlung von (9) in (10) ebenfalls scharf stimmen. Wir haben aber absichtlich nur mit 7 stelligen Logarithmen gerechnet, um eben die unvermeidlichen Fehler dieser Rechnung ins richtige Licht zu stellen.

Nun sind uns aber die Coefficienten in (9) immer noch zu gross im Vergleich mit den Coefficienten 1 der Winkelsummengleichungen; wir wollen daher die Gleichung (9) mit 8 dividieren, indem dadurch der Mittelwert der Coefficienten nahezu auf 1 gebracht wird. Man erhält auf diesem Wege aus (9):

$$+0{,}108\,v_1-2{,}525\,v_2+2{,}525\,v_5-0{,}108\,v_6+0{,}500\,v_7-0{,}500\,v_5-3{,}425=0 \qquad (14)$$

Nun wollen wir die Ausgleichung unseres Vierecks völlig zweifach machen:

I. Ausgleichung mit den Bedingungsgleichungen (14), (5), (6), (7)
II. „ „ „ „ (10), (5), (6), (7).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Bedingungsgleichungen I. (14), (5), (6), (7) (15)

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	w
(14)	+ 0,108	— 2,525	. .	. .	+ 2,525	— 0,108	+ 0,500	— 0,500	— 3,425
(5)	+ 1	. .	. .	. .	. .	+ 1	+ 1	+ 1	— 3
(6)	+ 1	+ 1	+ 1	. .	. .	. .	. .	+ 1	— 1
(7)	. .	. .	. .	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	. .	— 6

Die zugehörigen Normalgleichungen finden sich mit $0{,}108^2 + 2{,}525^2 + \ldots = 13{,}275$ u. s. w. und im Ganzen erhält man in abgekürzter Schreibweise (nach (2) und (3) S. 80):

$$\left.\begin{array}{rrrrr} \underline{+\,13{,}275\,k_1} & . . & -\,2{,}917\,k_3 & +\,2{,}917\,k_4 & -\,3{,}425 = 0 \\ & \underline{+\,4\,k_2} & +\,2\,k_3 & +\,2\,k_4 & -\,3 = 0 \\ & & \underline{+\,4\,k_3} & . . & -\,1 = 0 \\ & & & \underline{+\,4\,k_4} & -\,6 = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = -\,0{,}0245 \quad , \quad k_2 = -\,0{,}2500 \quad , \quad k_3 = +\,0{,}3573 \quad , \quad k_4 = +\,1{,}6428 \quad (17)$$

Damit macht man die Ausrechnung der einzelnen v, indem man der Tabelle (15) nach Vertikalreihen folgt. Die Ergebnisse sind:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = +\,0{,}1047'' & v_2 = +\,0{,}4191'' & v_3 = +\,0{,}3573'' & v_4 = +\,1{,}6428'' \\ v_5 = +\,1{,}5810'' & v_6 = +\,1{,}3954'' & v_7 = +\,1{,}3806'' & v_8 = +\,0{,}1195'' \end{array}\right\} \quad (18)$$

Wenn man diese Verbesserungen den gemessenen Winkeln hinzufügt, so bekommt man statt der früheren (4) nun die ausgeglichenen Dreiecke:

$$\left.\begin{array}{ll} [1] = 62^\circ\,14'\,30{,}1047'' & [1] = 62^\circ\,14'\,30{,}1047'' \\ [8] = 27\;\;45\;\;30{,}1195 & [2] = \;\;5\;\;42\;\;33{,}4191 \\ [7] = 27\;\;45\;\;29{,}3806 & [3] = 84\;\;17\;\;26{,}3573 \\ [6] = 62\;\;14\;\;30{,}3954 & [8] = 27\;\;45\;\;30{,}1195 \\ \hline 180^\circ\;\;0'\;\;0{,}0002'' & 180^\circ\;\;0'\;\;0{,}0006'' \\ [2] = \;\;5^\circ\,42'\,33{,}4191'' & [4] = 84^\circ\,17'\,26{,}6428'' \\ [3] = 84\;\;17\;\;26{,}3573 & [5] = \;\;5\;\;42\;\;33{,}5810 \\ [4] = 84\;\;17\;\;26{,}6428 & [6] = 62\;\;14\;\;30{,}3954 \\ [5] = \;\;5\;\;42\;\;33{,}5810 & [7] = 27\;\;45\;\;29{,}3806 \\ \hline 180^\circ\;\;0'\;\;0{,}0002'' & 179^\circ\,59'\,59{,}9998'' \end{array}\right\} \quad (19)$$

Wie man sieht, schliessen alle 4 Dreiecke nahe auf 0,000″, und völlig genügend stimmen auch die Seitengleichungen, wie nachstehende Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen zeigen wird:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Zentralsystem } J & & \text{Zentralsystem } K \\ \sin[1+2] \;.\;. & 9.9670155 & \sin[1+2] \;.\;. \;\; 9.9670155 \\ \sin[7] \;\;\;.\;. & 9.6681441 & \sin[4] \;\;\;.\;. \;\; 9.9978403 \\ \sin[5] \;\;\;.\;. & 8.9977434 & \sin[6] \;\;\;.\;. \;\; 9.9469044 \\ & 8.6329030 & \qquad\qquad 9.9117602 \\ \sin[8] \;\;\;.\;. & 9.6681470 & \sin[3] \;\;\;.\;. \;\; 9.9978403 \\ \sin[5+6] \;.\;. & 9.9670159 & \sin[5+6] \;.\;. \;\; 9.9670159 \\ \sin[2] \;\;\;.\;. & 8.9977400 & \sin[1] \;\;\;.\;. \;\; 9.9469041 \\ & 8\;6329029 & \qquad\qquad 9.9117603 \end{array}\right\} \quad (20)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Damit ist unsere ganze erste Ausgleichung I ganz glatt vollendet und die dabei benützte Seitengleichung (9) mit dem Zentralpunkt J oder die Umformung (14) hat gar keine Übelstände, weder sachliche, noch rechnerisch formelle zur Folge gehabt.

Wir gehen über zur Ausgleichung II mit den Bedingungsgleichungen (10), (5), (6), (7). Es wurde derselbe Gang eingehalten wie bei I, wir können die Darstellung daher nun kürzer fassen. Die Normalgleichungen und deren Auflösungen sind:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} \underline{+168{,}26\,k_1} & .. & +4{,}10\,k_3 & -4{,}10\,k_4 & +3{,}00 = 9 \\ & \underline{+4\,k_2} & +2\,k_3 & +2\,k_4 & -3 = 0 \\ & & \underline{+4\,k_3} & .. & -1 = 0 \\ & & & \underline{+4\,k_4} & -6 = 0 \end{array}\right\} \quad (21)$$

$$k_1 = +0{,}01330 \quad , \quad k_2 = -0{,}2500 \quad , \quad k_3 = +0{,}3613 \quad , \quad k_4 = +1{,}6387 \quad (22)$$

Hier sollen $k_2\ k_3\ k_4$ mit den entsprechenden k in (17) stimmen, was ungefähr der Fall ist, aber bereits bei k_3 und k_4 Abweichungen giebt. Die Normalgleichungen (21) unterscheiden sich ungünstig von (16), indem die Coefficienten in (21) viel mehr unter sich ungleich sind als in (16); das rührt von der Seitengleichung (10) K her, welche erstens an und für sich ungünstig ist (nach der Theorie des vorigen § 84.) und zweitens in Einheiten der 7ten Logarithmen-Decimale angesetzt ist, was die Coefficienten mit ungeschickter Stellung der Decimal-Kommas auftreten lässt.

Rechnen wir nun mit den Correlaten (22) weiter, so erhalten wir die Winkelverbesserungen:

$$\left.\begin{array}{llll} v_1 = +0{,}0794'' & v_2 = +0{,}4757'' & v_3 = +0{,}3334'' & v_4 = +1{,}6666 \\ v_5 = +1{,}5243'' & v_6 = +1{,}4206'' & v_7 = +1{,}3887'' & v_8 = +0{,}1113 \end{array}\right\} \quad (23)$$

Hiermit die geschlossenen Dreiecke:

$$\left.\begin{array}{ll} [1] = 62^\circ\,14'\,30{,}0794'' & [1] = 62^\circ\,14'\,30{,}0794'' \\ [8] = 27\ 45\ 30{,}1113 & [2] = 5\ 42\ 33{,}4757 \\ [7] = 27\ 45\ 29{,}3887 & [3] = 84\ 17\ 26{,}3334 \\ [6] = 62\ 14\ 30{,}4206 & [8] = 27\ 45\ 30{,}1113 \\ \hline 180^\circ\ 0'\ 0{,}0000'' & 179^\circ\,59'\,59{,}9998'' \\ [2] = 5^\circ\,42'\,33{,}4757'' & [4] = 84^\circ\,17'\,26{,}6666'' \\ [3] = 84\ 17\ 26{,}3334 & [5] = 5\ 42\ 33{,}5243 \\ [4] = 84\ 17\ 26{,}6666 & [6] = 62\ 14\ 30{,}4206 \\ [5] = 5\ 42\ 33{,}5243 & [7] = 27\ 45\ 29{,}3887 \\ \hline 180^\circ\ 0'\ 0{,}0000'' & 180^\circ\ 0'\ 0{,}0002'' \end{array}\right\} \quad (24)$$

Dazu die Seitengleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} & \text{Zentralpunkt } J & \text{Zentralpunkt } K \\ \sin[1+2] & .. & 9.967\,0156 \\ \sin[7] & .. & 9.668\,1441 \\ \sin[5] & .. & 8.997\,7422 \\ & & 8.632\,9019 \\ \sin[8] & .. & 9.668\,1470 \\ \sin[5+6] & .. & 9.967\,0159 \\ \sin[2] & .. & 8.997\,7412 \\ & & 8.632\,9041 \\ & w = -22 & (!) \end{array}\right\} \quad (25)$$

$$\left.\begin{array}{lll} & & \\ \sin[1+2] & .. & 9.967\,0156 \\ \sin[4] & .. & 9.997\,8403 \\ \sin[6] & .. & 9.946\,9044 \\ & & 9.911\,7603 \\ \sin[3] & .. & 9.997\,8403 \\ \sin[5+6] & .. & 9.967\,0159 \\ \sin[1] & .. & 9.946\,9041 \\ & & 9.911\,7603 \end{array}\right\}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Betrachten wir diese zweite Ausgleichung (24) (25) mit der Seitengleichung (10) K, und ihre Vergleichung mit der ersten Ausgleichung (19) (21), der die Seitengleichung (9) J zu Grunde liegt, so fällt zuerst auf, dass die Dreiecks*schlüsse* (19) und (24) zwar beide vorzüglich stimmen, jedenfalls auf 0,001″, dass aber die einzelnen Winkel schon in 0,01″ und sogar um 0,05″ abweichen. Das erklärt sich daraus, dass die Winkelsummengleichungen (5) (6) (7) in beiden Fällen gleich scharf eingeführt sind, während die Seitengleichungen (9) J und (10) K ungleich scharf sind, und zwar zu Ungunsten von (10) K. Allerdings die Seitengleichung (10) K selbst stimmt in beiden Fällen auf die letzte Einheit der 7. Logarithmenstelle, aber in der zweiten Ausgleichung stimmt die andere Seitengleichung (9) J *nicht*, sondern lässt einen Fehler von 22 Einheiten der 7. Logarithmenstelle. (Vgl. (25) mit (20).

Damit ist nun die Vergleichung unbedingt zu Gunsten von (9) J nach dem Flächen-Satze von (28) § 84. S. 305 entschieden, denn diese Ausgleichung ist nicht nur numerisch gut (nahe gleiche Coefficienten der Normalgleichungen), sondern sie bringt, was die Hauptsache ist, *alle* Widersprüche zum Verschwinden, während bei (10) K das nur teilweise der Fall ist.

In dem bisher behandelten Beispiele waren die kleinsten Winkel immer noch 5° 43′, und man kann noch fragen, wie sich die Sache gestaltet in dem extremen Falle, dass die spitzen Winkel nur noch einige Minuten betragen.

Zu diesem Zwecke wollen wir unser erstes Beispiel mit Fig. 1. S. 309 so abändern, dass die Winkel (1), (8), (7), (6) von früher in (4) bleiben, während die Winkel (2), (3), (4), (5) folgende neue Werte annehmen sollen:

$$\left.\begin{array}{ll} (2) = 0^\circ\,5'\,33'' & (3) = 89^\circ\,54'\,26'' \\ (5) = 0\;\;5\;\;32 & (4) = 89\;\;54\;\;25 \end{array}\right\} \qquad (26)$$

dabei bleiben die Winkelsummen in allen 4 Dreiecken dieselben wie früher in (4) S. 309.

Dagegen die Seitengleichungen werden anders, nämlich bei der Rechnung mi 7 stelligen Logarithmen:

Zentralpunkt J			Zentralpunkt K		
(1 + 2)	9.9472719	111	(1 + 2)	9.9472722	111
(7)	9.6681386	400	(4)	9.9999994	0
(5)	7.2067128	129650	(6)	9.9469029	110
	6.8221233			9.8941745	
(8)	9.6681466	400	(3)	9.9999994	0
(5 + 6)	9.9472700	111	(5 + 6)	9.9472700	111
(2)	7.2080189	129650	(1)	9.9469040	110
	6.8234355			9.8941734	

(27)

In Einheiten der 6. Logarithmenstelle bekommt man aus diesem J (27):

$$1{,}11\,v_1 - 1295{,}39\,v_2 + 1295{,}39\,v_5 - 1{,}11\,v_6 + 4{,}00\,v_7 - 4{,}00\,v_8 - 1312{,}2 = 0 \qquad (28)$$

und aus K (27):

$$+ 0{,}01\,v_1 + 1{,}11\,v_2 - 1{,}11\,v_5 + 1{,}1 = 0 \qquad (29)$$

In diesen beiden Gleichungen sind die Coefficienten sehr ungleich; man darf deswegen, wenn man mit gewöhnlicher Rechenschärfe zufrieden sein will, die kleinen Glieder neben den grossen Gliedern vernachlässigen und erhält damit:

aus (28): $$- 1295{,}39\,(v_2 - v_5) - 1312{,}2 = 0 \quad (J) \qquad (30)$$

aus (29): $$+ 1{,}11\,(v_2 - v_5) + 1{,}1 = 0 \quad (K) \qquad (31)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beide Gleichungen geben eine Bedingung für die Differenz $v_2 - v_5$, die man so schreiben kann:

aus (30): $v_2 - v_5 + 1{,}0130'' = 0 \quad (J)$ (32)

aus (31): $v_2 - v_5 + 0{,}99'' \quad = 0 \quad (K)$ (33)

Im Ganzen stimmen diese beiden Gleichungen überein, aber die Gleichung (32), welche auf dem Zentralsystem J beruht, ist viel schärfer als die aus dem ungünstigen Zentralsystem K hergeleitete Gleichung (33), welche bei der Rechnung mit 7 stelligen Logarithmen hier einen Fehler von 0,02″ gebracht hat, der aber nur *zufällig* sehr klein ist und ganz gut auch 0,1″ werden könnte, denn 6 zusammen genommene 7 stellige Logarithmen in (27) werden im Mittel $0{\cdot}25\ \sqrt{6} = 0{\cdot}6$ Einheiten der 7. Decimale als Fehler bringen, was aber auch auf 2·0 Einheiten der 7. Stelle oder 0,2 Einheiten der 6. Stelle anwachsen kann und dann in (31) und (33) einen Fehler von 0,2″ erzeugt, während die andere Gleichung (32) J stets auf 0,001″ scharf bleibt.

Nachdem durch die vorstehenden Zahlenbeispiele aufs deutlichste gezeigt ist, dass die Theorie unseres vorhergehenden § 84. mit dem Zachariä schen Satze, „welcher von Jordan auf die anschauliche Form des Flächenmasses gebracht wurde" — vollständig richtig und praktisch sehr wertvoll ist, müssen wir noch eine Kritik und Controverse aus der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 175 bis 182 und S. 235—240 hier zum Abschluss bringen. —

Den ersten Teil dieser Sache, betreffend die beliebige *Division* der grossen Coefficienten haben wir bereits am Schlusse des vorigen § 84. S. 308 erledigt, und auch einen kleinen Rechenfehler, der in unseren Gleichungen (27)—(33) untergelaufen war, nämlich *log sin* $(1 + 2) = 9.9472719$ statt 9.9472722, haben wir im vorstehenden bei (33) insofern behandelt, als gezeigt wurde, dass ein solcher Fehler von 2 bis 3 Einheiten der 7. Decimale, welcher durch ungünstige Häufung von gewöhnlichen Abrundungen zusammen bei 6 Logarithmen vorkommen *kann*, gerade in der ungünstigen Gleichung (31) K *tausendfach* schlimmer wirkt als in der günstigen Gleichung (30) J, weil in letzterer die Coefficienten mehr als 1000 fach grösser sind als in (31) K. Also gerade der kleine Rechenfehler, welcher in „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 239 bemerkt wurde, spricht nicht gegen den „Zachariae-Jordan schen Satz", sondern am lautesten *für* denselben, indem dadurch gezeigt wird, wie die unvermeidlichen Abrundungsfehler bei 7 stelligen Logarithmen ganz verschieden wirken, je nachdem man eine günstige Gleichungsform mit grossen Coefficienten oder eine ungünstige Form mit kleinen Coefficienten anwendet.

Weiter wurde auf S. 239 „Zeitschr. f. Verm. 1894" gesagt: „Die kleinen Abweichungen, (welche bei günstiger oder ungünstiger Form der Seitengleichung auftreten), haben für die weitere Benützung der Winkel keine praktische Bedeutung, wenn man sich nicht gerade darauf versteift, die Dreiecksseiten aus den am schlechtesten geformten Dreiecken zu berechnen."

Dieses zeugt wieder von Missverständnis der Sache: Wenn wir in (32) oder (33) die Differenz $v_2 - v_5$ scharf auf 0,001″, also jedenfalls vollauf genügend für 0,01″ einführen, *oder* diese Differenz um $\pm$ 0,1″ bis $\pm$ 0,2″ schwankend einführen, so kommt das nicht bloss den „schlechtesten" Dreiecken, sondern *allen* Dreiecken und Winkeln zu Gute oder zu Schaden, und es wäre doch unrationell, in eine Ausgleichung, die man sonst auf 0,01″ führt, einen Fehler von 0,1″ hineinzutragen und also alle 0,01″ illusorisch zu machen, ohne dadurch die mindeste Arbeitserleichterung zu erzielen, aus keinem anderen Grunde, als weil der Rechner den inneren Zusammenhang zwischen den 0,1″ in der Bedingungsgleichung und den 0,01″ in den Verbesserungen nicht erfasst, oder sich der richtigen Theorie „nicht angeschlossen" hat.

Damit dürfte diese Sache genügend klar gelegt und der Vorteil der Theorie von § 84. genügend bewiesen sein. Zu der vorstehenden breiten Behandlung einer verhältnismässig einfachen Sache sind wir gezwungen worden durch die in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 235—240 mitgeteilten Verhältnisse.

Reihenfolge der Bedingungsgleichungen.

Wenn die Bedingungsgleichungen einzeln aufgestellt sind, so ist über die Ausgleichung im Übrigen so viel entschieden, dass jeder Gleichung eine bestimmte Korrelate k zukommt, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Bedingungsgleichungen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

weiter behandelt werden; jedoch ist für die Frage der Bequemlichkeit der Elimination auch diese Reihenfolge nicht gleichgültig.

Wir wollen das kleine Beispiel (15)—(16) im Vorstehenden S. 311 nochmals vornehmen und nun die Bedingungsgleichungen so umstellen:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
+v_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & +v_6 & +v_7 & +v_8 & -3=0 \\
+v_1 & +v_2 & +v_3 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & +v_8 & -1=0 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & +v_4 & +v_5 & +v_6 & +v_7 & \cdot\cdot & -6=0 \\
+0{,}108\,v_1 & -2{,}525\,v_2 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & +2{,}525\,v_5 & -0{,}108\,v_6 & +0{,}500\,v_7 & -0{,}500\,v_8 & -3{,}425=0
\end{array}$$

Die zugehörigen Normalgleichungen werden in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}
+\underline{4{,}000\,k_1} & +2{,}000\,k_2 & +2{,}000\,k_3 & \cdot\cdot & -3{,}000=0 \\
 & +\underline{4{,}000\,k_2} & \cdot\cdot & -2{,}917\,k_4 & -1{,}000=0 \\
 & & +\underline{4{,}000\,k_3} & +2{,}917\,k_4 & -6{,}000=0 \\
 & & & +\underline{13{,}275\,k_4} & -3{,}425=0
\end{array}\right\} \qquad (34)$$

Dieses sind *dieselben* Gleichungen wie (16) S. 311, nur in anderer Ordnung, welche insofern etwas bequemer ist, als die frühere Ordnung, weil zu Anfang nur ganze Zahlen 4, 2 u. s. w. als Coefficienten vorkommen.

Die Elimination in dieser neuen Ordnung giebt:

$$k_1 = -0{,}2500 \quad , \quad k_2 = +0{,}3567 \quad , \quad k_3 = +1{,}6430 \quad , \quad k_4 = -0{,}0252$$

Dieses stimmt im Wesentlichen mit dem früheren k in (17) S. 311; das neue $k_4 = -0{,}0252$ entspricht dem früheren $k_1 = -0{,}0245$ und zwar ist nun 0,0252 etwas weniger genau, weil bei der Elimination in der neuen, bequemeren Ordnung am Ende zu wenig Wertstellen übrig geblieben sind. Es ist das ein Beispiel dafür, dass die Bequemlichkeit mit den ganzen Zahlen 4, 2, 2 ... am Anfange noch nicht allein ausschlaggebend ist. Man muss immer darnach trachten, die Quotienten der ersten Reduktionen, nämlich $\frac{[ab]}{[aa]}$, $\frac{[ac]}{[aa]}$ u. s. w. möglichst *klein* zu haben, und namentlich ist zu vermeiden, dass ein solcher Quotient grösser als 1 werde, weil dadurch auch die Abrundungsunsicherheiten vergrössert übertragen würden. Zur Vergleichung von verschiedenen Eliminationsformen dieser Art können dienen das Hannoversche Fünfeck mit Normalgleichungen S. 193 und das frühere Lindener Sechseck in Handb. II. Band, 3. Aufl. 1893, S. 291.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1875", S. 411 hat Koppe zu einer Auflösung von 34 Normalgleichungen seiner Gotthardtriangulierung zwei Tabellen, Beilage *A* und Beilage *B* gegeben, von denen die erste eine unbequeme Ordnung und die zweite eine günstigere und zwar solche Reihenfolge hat, dass die vollen Glieder möglichst zusammenstehen, in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder zusammengedrängt.

Auch in der Triangulierungsausgleichung von Nagel (vgl. das Citat von S. 307) mit Auflösung von 159 Gleichungen sind die Normalgleichungen S. 579—604 so geordnet, dass in der Nähe der Diagonale der quadratischen Glieder die Glieder voll, und entfernt davon die Glieder leer sind.

§ 86. Ergänzungen zur Theorie der Stationsausgleichungen.

Zum Schluss des Kapitels über Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen haben sich noch einige Bemerkungen ergeben, welche die Stationsausgleichungen von § 69. bis 71., 75. bis 77. und 82. zusammen betreffen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

I. Ausrechnung der einzelnen z und v.

In der Näherungsausgleichung von § 69. S. 228 wird darauf ausgegangen, die Richtungsverbesserungen v sowohl nach Sätzen als auch nach Sichten geordnet (nach Linien und nach Spalten auf S. 228 geordnet) auf die Summen Null zu bringen, und wir wollen mit der Theorie von § 71. zeigen, dass dieses streng der Fall sein muss, d. h. dass nach der Stationsausgleichung in jedem einzelnen Satze $[v_n] = 0$ und für jede Sicht $[v^s] = 0$ sein muss.

Hiezu haben wir aus den Gleichungen (8) S. 235 durch Summierung der 3 ersten und dann der 3 letzten Gleichungen:

$$[p_1]z_1 + \quad [p_2]z_2 + \quad [p_3]z_3 + [p']x' + [p'']x'' + [p''']x''' - [l] = 0$$
$$([p_1] - p_1^\circ)z_1 + ([p_2] - p_2^\circ)z_2 + ([p_3] - p_3^\circ)z_3 + [p']x' + [p'']x'' + [p''']x''' - ([l] - [l^\circ]) = 0$$

Diese beiden Gleichungen zusammen geben:

$$p_1^\circ z_1 + p_2^\circ z_2 + p_3^\circ z_3 + [l^\circ] = 0 \tag{1}$$

Wenn man alle Sätze *einzeln* zählt, so sind die p° alle $= 1$, und man kann dann kurz so schreiben:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = -[l^\circ] \tag{2}$$

wobei die l° die Beobachtungswerte der ersten Richtung z. B. Kalleninken auf S. 238, sind. Diese l° kann man aber bekanntlich alle gleich Null machen, indem man jeden Satz mit 0° 0′ 0″ in der fraglichen Richtung beginnen lässt, und dann stellt sich (2) noch kürzer so dar:

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots = 0 \quad \text{oder} \quad [z] = 0 \tag{3}$$

Dann ist nach S. (234) in der ersten Kolumne von (4):

$$[v^\circ] = [z] - [l^\circ] = 0 \tag{4}$$

und in der zweiten Kolumne von (4) S. 234 hat man:

$$[v'] = p_1' z_1 + p_2' z_2 + p_3' z_3 + \ldots + [p']x' - [l'] \tag{5}$$

dieses ist aber gleich Null wegen der 4. Gleichung in (8) S. 235, und ebenso ist es auch mit $[v'']$, $[v''']$ u. s. w., d. h. wir haben nun gezeigt, dass die v nach Kolumnen addiert in allen Richtungen die Summen Null geben müssen.

Aber auch die Summierung nach Linien giebt dasselbe, z. B. die erste Linie in (4) S. 234 giebt:

$$[v_1] = [p_1]z_1 + p_1'x' + p_1''x'' + p_1'''x''' + \ldots - [l_1]$$

dieses ist gleich Null wegen der ersten Gleichung von (8) S. 235. Wir haben also nun beispielshalber bei 3 Sätzen mit 4 Zielpunkten:

$$\begin{array}{cccc|c} v_1^\circ & v_1' & v_1'' & v_1''' & [v_1] = 0 \\ v_2^\circ & v_2' & v_2'' & v_2''' & [v_2] = 0 \\ v_3^\circ & v_3' & v_3'' & v_3''' & [v_3] = 0 \\ \hline [v^\circ] = 0 & [v'] = 0 & [v''] = 0 & [v'''] = 0 & [v\,] = 0 \end{array} \tag{6}$$

Allerdings haben wir hier zunächst angenommen, dass alle $l^\circ = 0$ seien, allein wenn dieses auch nicht der Fall sein sollte, so braucht man nur $l' - l^\circ$ an Stelle von l' u. s. w. zu setzen, und alles bleibt dann wie im Vorstehenden.

Wir wissen also nun aus (6) ganz allgemein, dass die Fehlersummierung $[v] = 0$ nach Linien und nach Kolumnen, welche bei vollen Sätzen, in IV. S. 225 selbstverständlich war, auch bei beliebig verteilten lückenhaften Sätzen nach der Ausgleichung immer stattfinden muss, und dass also auch eine Näherungsausgleichung nach S. 228

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

als abgeschlossen und mit der strengen Ausgleichung hinreichend übereinstimmend zu betrachten ist, sobald jene Summen $[v] = 0$ nach Linien und Kolumnen genügend stimmen.

Die einzelnen Satzverschiebungen z hat man aus (9) S. 235:

$$z_1 = \frac{[l_1]}{[p_1]} - \frac{p_1' x' + p_1'' x'' + p_1''' x'''}{[p_1]} = L_1 - x_1$$

$$z_2 = \frac{[l_2]}{[p_2]} - \frac{p_2' x' + p_2'' x'' + p_2''' x'''}{[p_2]} = L_2 - x_2$$

$$z_3 = \ldots\ldots\ldots\

Die Summe aller z ist $+0{,}121 + 3{,}312 - 3{,}406 = +0{,}027$, was in diesem Falle hinreichend mit Null stimmt. Diese so berechneten z bringt man als Satzverschiebungen an allen Richtungsbeobachtungen an, worauf die Vergleichung mit den ausgeglichenen x' x'' auch alsbald alle v geben muss. Wir wollen dieses nur noch kurz andeuten:

Verschobene Sätze			$v = x - (l - z)$			$v^{\circ 2}$	v'^2	v''^2	
$l^\circ - z$	$l' - z$	$l'' - z$	v°	v'	v''				
$-0{,}958$	. .	$+4{,}042$	$+0{,}958$	. .	$-0{,}957$	0,92	. .	0,92	
$-1{,}333$	. .	$+4{,}417$	$+1{,}333$	. .	$-1{,}332$	1,78	. .	1,78	
$-1{,}208$	. .	$+4{,}292$	$+1{,}208$	. .	$-1{,}207$	1,46	. .	1,46	
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	
			Summe der ersten Gruppe			12,45	. .	12,45	
			„ „ zweiten „			11,81	11,81	. .	$[v\,v]$
			„ „ dritten „			6,43	8,65	6,46	=
						30,69	20,46	18,91	70,06

Die Gesamtsumme $[v\,v] = 70{,}06$ stimmt hinreichend mit 70,18 oder rund 70,2 von S. 237 und S. 239. (Vgl. hiezu S. 239 im Kleingedruckten.)

Der mittlere Fehler einer Richtungsmessung ist auf S. 239 bereits berechnet mit dem Nenner 98—45, wo $98 = [p^\circ] + [p'] + [p'']$ ist, und der Abzug 45 sich aus den 43 einzelnen z nebst x' und x'' erklärt. Um auch für jede der 3 *einzelnen* Sichten einen solchen mittleren Fehler zu berechnen, wollen wir die Verteilung der Abzüge so machen: die Abzüge für die z in den einzelnen Richtungen entsprechen den Abzügen bei (aa) , (bb) in (11) S. 236:

$$\left.\begin{aligned} [p^\circ] - \ldots &= 43 - \frac{12}{2} - \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 43 - 19{,}5 = 23{,}5 \\ [p'] - \ldots &= 31 - \ldots \quad \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 31 - 13{,}5 = 17{,}5 \\ [p''] - \ldots &= 24 - \frac{12}{2} \quad \ldots - \frac{12}{3} = 24 - 10{,}0 = 14{,}0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Für Winkelausgleichung kommt nun noch -2 wegen x' und x'' hinzu, und man hat dann den Abzug $43 + 2$, wie auf S. 239. Wenn wir aber nach Richtungen abtrennen wollen, so gelten 3 Richtungen als Unbekannte, aber dafür wieder *ein* z als willkürlich, und daraus folgen die Nenner:

$$\left.\begin{aligned} N^\circ &= 43 - 1 - 19{,}5 + 0{,}333 = 22{,}833 \\ N' &= 31 - 1 - 13{,}5 + 0{,}333 = 16{,}833 \\ N'' &= 24 - 1 - 10{,}0 + 0{,}333 = 13{,}333 \\ &\qquad\qquad \text{Summe} \quad 52{,}999 = 53 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Wenn man mit diesen Nennern und den im Vorhergehenden ausgerechneten v^2 die mittleren Fehler für die 3 einzelnen Sichten ausrechnet, so erhält man (vgl. S. 238):

$$\begin{array}{lll} \text{Kalleninken} & \text{Gilge} & \text{Lattenwalde} \\ m^\circ = \sqrt{\frac{30{,}69}{22{,}833}} & m' = \sqrt{\frac{20{,}46}{16{,}833}} & m'' = \sqrt{\frac{18{,}91}{13{,}333}} \\ = \pm 1{,}16'' & = \pm 1{,}10'' & = \pm 1{,}19'' \end{array} \qquad (9)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für alle 3 Sichten zusammen ist (wie schon auf S. 239 angegeben ist):

$$m = \sqrt{\frac{70{,}06}{53}} = \pm 1{,}15'' \tag{10}$$

Man kann auch m^2 aus den Einzelwerten $m^{\circ 2}$, m'^2 und m''^2 so zusammgesetzt denken (wie immer in solchen Fällen):

$$m^2 = \frac{N^\circ m^{\circ 2} + N' m'^2 + N'' m''^2}{N^\circ + N' + N''}$$

Die in (9) gemachte Zerlegung des mittleren Fehlers in die Teilfehler für die einzelnen Richtungen kann von praktischem Werte sein zur Untersuchung, ob infolge verschiedener Zielschärfe, verschiedene Arten der Signalisierung, Beleuchtung u. s. w. den einzelnen Richtungen verschiedene Gewichte zuzuteilen wären, abgesehen von der Verknüpfung der Sätze unter sich. (Weiteres hiezu s. S. 322—323.)

II. Stations-Ausgleichung in Richtungsform.

Um die Besselsche Stationsausgleichung von § 71., welche bei s Strahlen $s-1$ *Winkel* als Unbekannte hat, auf s *Richtungen* zu reduzieren, kann man nach der allgemeinen Theorie von § 81. die Summen der Normalgleichungs-Coefficienten bilden, wie in (7)—(9) S. 278 an einem Beispiele gezeigt ist.

Um dieses auf § 71. anzuwenden, wollen wir zuerst für die Coefficienten $(a\,a)$. $(a\,b)$ u. s. w. auf S. 236 noch besondere Teilbezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{array}{lll} (a\,a) = [p'] - [g'] \;\;, & (a\,b) = -[h'_{,,}] \;\;, & (a\,c) = -[h'_{,,,}] \\ & (b\,b) = [p''] - [g''] \;\;, & (b\,c) = -[h''_{,,,}] \\ & & (c\,c) = [p'''] - [g'''] \end{array}\right\} \tag{11}$$

Dabei sind mit g und h gewisse, aus den Gruppierungen der Sätze folgende Zahlen bezeichnet, deren Bildungsgesetze aus S. 236 und S. 237 leicht zu erkennen sind.

Wenn ein Normalgleichungs-System (10) S. 235 vorliegt mit 3 Winkeln x' , x'' , x''', so kann man nach § 81. daraus ein System für 4 Richtungen $x^\circ\, x'\, x''\, x'''$ bilden in dieser Weise:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{(A\,A)\,x^\circ} + (A\,a)\,x' + (A\,b)\,x'' + (A\,c)\,x''' + (A\,l) = 0 \\ \underline{(a\;a)\,x'} + (a\;b)\,x'' + (a\;c)\,x''' + (a\;l) = 0 \\ \underline{(b\;b)\,x''} + (b\;c)\,x''' + (b\;l) = 0 \\ \underline{(c\;c)\,x'''} + (c\;l) = 0 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Dabei muss sein:

$$\left.\begin{array}{l} (A\,A) + (A\,a) + (A\,b) + (A\,c) = 0 \\ (A\;a) + (a\;a) + (a\;b) + (a\;c) = 0 \\ (A\;b) + (a\;b) + (b\;b) + (b\;c) = 0 \\ (A\;c) + (a\;c) + (b\;c) + (c\;c) = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Diese Beziehungen sind durch § 81. bewiesen; man kann sie aber auch unmittelbar aus (11) nachweisen. Die $(A\,A)$ u. s. w. werden nach demselben Gesetze gebildet wie die $(a\,a)$ u. s. w., z. B. ist:

$$(A\,A) = [p^\circ] - [g^\circ] \;\;, \quad (A\,a) = -[h^\circ{}_{,}] \;\;, \quad (A\,b) = -[h^\circ{}_{,,}] \text{ u. s. w.}$$

Wenn man dann die Bedeutungen der g und h verfolgt, so findet man bald:

$$\left.\begin{array}{l} [g^\circ] + [h^\circ{}_{,}] + [h^\circ{}_{,,}] + [h^\circ{}_{,,,}] = [p^\circ] \\ [g'] + [h'_\circ] + [h'_{,,}] + [h'_{,,,}] = [p'] \\ [g''] + [h''_\circ] + [h''_{,}] + [h''_{,,,}] = [p''] \end{array}\right\} \tag{14}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auch im Übrigen braucht man nur eine Art Abzählung, ohne weitere Theorie, um die Gültigkeit der Gleichungen (13) und (12) unmittelbar einzusehen.

Praktischen Wert haben die Gleichungen (12) insofern zunächst nicht, als sie keine eindeutige Auflösung zulassen, man könnte sie zur Auflösung nach x°, x', x'', x''', etwa durch fortgesetztes Probieren benützen, wie schon Gerling mit solchen Gleichungen gethan hat.

Insofern die Summen $[g]$ und $[h]$ im Allgemeinen *kleiner* sind, als die $[p]$, kann man daran denken, die $(A\,A)$, $(a\,a)$, $(b\,b)$ u. s. w. als genäherte *Richtungsgewichte* in dem Sinne von § 82. anzunehmen, also z. B.:

Richtungsgewicht $P^\circ = (A\,A) = [p^\circ] - [g^\circ]$

S. 238: $P^\circ = 43 - \frac{12}{2} - \frac{19}{2} - \frac{12}{3} = 23{,}5$

Dabei ist $[p^\circ] = 43$ die auf S. 258 erwähnte „Anschnittszahl", und wenn man die $(A\,A)$, $(a\,a)$ u. s. w. als genäherte Richtungsgewichte nehmen wollte, so wäre damit ausgesprochen, dass die Richtungsgewichte im Allgemeinen *kleiner* als die Anschnittszahlen sein müssen, was nicht behauptet werden kann, denn nach S. 258 u. 259 sind die richtigen Richtungsgewichte teils kleiner, teils grösser als die Anschnittszahlen, ja die richtigen Richtungsgewichte können sogar unendlich werden, wie auf S. 259 gezeigt wurde und nachher noch besonders behandelt werden soll.

Auch manche andere Überlegungen mehr theoretischer Art führen dazu, dass die $(A\,A)$, $(a\,a)$ u. s. w., welche sich aus einer Gruppe von Sätzen stets rasch abzählen lassen würden, als genäherte Richtungsgewichte im Allgemeinen nicht eignen, und als erste rohe Näherungen für Richtungsgewichte bleiben also die Anschnittszahlen.

Wir haben das Beispiel von S. 228 mit 4 Sichten, welches dort in 3 Stufen genähert ausgeglichen ist, auch noch streng ausgeglichen, und dann die mittleren Richtungsfehler nach dem Verfahren von (7)—(9) getrennt behandelt und mit den Anschnittszahlen als theoretischen Gewichten zusammengenommen, worauf eine Vergleichung zwischen solcher Näherungsrechnung und strenger Rechnung möglich wird.

Was zunächst die strenge Ausgleichung von S. 228 betrifft, so zeigt sich, wie zu erwarten war, sehr nahe Übereinstimmung mit der Stufe III. von S. 229, und ausserdem die Gewichts-Coefficienten:

$$[\alpha\,\alpha] = 0{,}299 \qquad [\alpha\,\beta] = 0{,}098 \qquad [\alpha\,\gamma] = 0{,}081$$
$$[\beta\,\beta] = 0{,}263 \qquad [\beta\,\gamma] = 0{,}092$$
$$[\gamma\,\gamma] = 0{,}348$$

Mit Zuziehung des Gewichtseinheitsfehlers $m = \sqrt{\frac{17{,}97}{15}} = 1{,}09''$ oder rund $= 1{,}1''$ wurden damit die mittleren Fehler der 6 ausgeglichenen *Winkel* (nach den Formeln (1) S. 284 mit $[\alpha\,\alpha] = Q_{22}$, $[\alpha\,\beta] = Q_{23}$ u. s. w.) berechnet:

$$\left.\begin{array}{lll} \pm 0{,}60'' & \pm 0{,}56'' & \pm 0{,}65'' \\ & \pm 0{,}66'' & \pm 0{,}76'' \\ & & \pm 0{,}72'' \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Die Behandlung nach dem Verfahren von (7)—(9) hat ergeben:

$$m^\circ = \sqrt{\frac{4{,}75}{5{,}50}} = \pm 0{,}93'' \qquad m' = \sqrt{\frac{4{,}35}{3{,}17}} = \pm 1{,}17'' \qquad m'' = \sqrt{\frac{5{,}98}{3{,}83}} = \pm 1{,}25'' \qquad m''' = \sqrt{\frac{2{,}89}{2{,}50}} = \pm 1{,}08''$$

Dazu im Ganzen $m = \sqrt{\frac{17{,}97}{15}} = \pm 1{,}09''$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

(Dieses entspricht dem damit gleichen 1,09″ unten auf S. 229.)

Indem man dann noch die Anschnittszahlen von S. 228 als Richtungsgewichte nimmt, bekommt man die Richtungsfehler:

$$M^\circ = \frac{0{,}93}{\sqrt{10}} \quad M' = \frac{1{,}17}{\sqrt{6}} \quad M'' = \frac{1{,}25}{\sqrt{7}} \quad M''' = \frac{1{,}08}{\sqrt{5}}$$
$$= \pm 0{,}29'' \quad = \pm 0{,}48'' \quad = \pm 0{,}47'' \quad = \pm 0{,}48''$$

Endlich zur Vergleichung mit (15) die Winkelfehler, nämlich:

$$\sqrt{0{,}29^2 + 0{,}48^2} = \pm 0{,}56'' \text{ u. s. w., im Ganzen:}$$
$$\pm 0{,}56'' \quad \pm 0{,}55'' \quad \pm 0{,}56''$$
$$\pm 0{,}67'' \quad \pm 0{,}68''$$
$$\pm 0{,}67'' \qquad (16)$$

Dieses (16) stimmt mit dem strengen (15) ziemlich überein, doch kann natürlich kein allgemeiner Schluss aus einem solchen Zahlenbeispiel gezogen werden, welches nur andeuten soll, wie man etwa in erster Näherung (ohne Kenntnis der $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w.) rechnen könnte, wenn man zugleich die Verschiedenheit der Zielschärfen in den einzelnen Sichten mit berücksichtigen wollte. (Weiteres hiezu s. S. 322—323).

III. Vierter Fall strenger Richtungsgewichte.

Ausser den 3 Fällen strenger Richtungsgewichte, welche auf S. 282 als Anfang von § 82. aufgeführt sind, zu welchen auch noch die unten auf S. 266 (im Kleingedruckten) erwähnten Fälle symmetrischer Richtungssatz-Anordnungen als Erweiterungen des 3ten Falles gehören, giebt es auch noch einen 4ten Fall, der als hierher gehörig schon in § 76. S. 259 kurz erwähnt worden ist, nämlich den Fall von Winkelmessungen, welche alle *einen* Strahl gemeinsam haben, z. B. so:

	p_1°	p_1'	. .	. .
	p_2°	. .	p_2''	. .
	p_3°	. .	. .	p_3'''
Anschnittszahlen	$[p^\circ]$	p_1'	p_2''	p_3'''
Richtungsgewichte	∞	$\frac{p_1'}{2}$	$\frac{p_2''}{2}$	$\frac{p_3'''}{2}$

(17)

Wie man sofort einsieht, kann man all diesen Messungen einen Richtungssatz substituieren mit dem Anfangsgewichte $= \infty$ und den halben Anschnittszahlen als Gewichten der übrigen Richtungen, denn es ist dann z. B. das erste Winkelgewicht P' bestimmt durch

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{\infty} + \frac{2}{p_1'} = 0 + \frac{2}{p_1'}$$

also $P' = \frac{p_1'}{2}$ wie es sein soll.

Man kann auch sagen (wie schon S. 259), dass der Fall (17) nur gezwungen sich der Richtungsform fügt, und dass man gerade so gut die Winkel selbst in die weitere Ausgleichung einführen könnte.

In früherer Zeit, als man Repetitionswinkel mass, war der Fall (17) mit Auswahl *eines* gut beleuchteten Zielpunktes für p° sehr oft vorkommend.

Noch allgemeiner kann man sagen: Wenn bei s Strahlen nicht mehr als $s-1$ Winkel gemessen sind (also ohne Ausgleichung), so kann man dafür jedenfalls s Richtungen mit bestimmten Richtungs-Gewichten substituieren.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

IV. Schärfere Trennung der Fehler nach Richtungen.

Die Fehlertrennung, welche wir in den Gleichungen (7)—(9) S. 318 ohne Theorie angegeben haben, ist für den angegebenen Zweck hinreichend, aber nicht streng richtig, und kann nur auf umständlichem Wege, mit Zuziehung der Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$, $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. genauer gemacht werden. Obgleich zunächst kein dringliches Bedürfnis dazu vorliegt, wollen wir doch aus theoretischem Interesse dieses auch noch kurz behandeln:

Es handelt sich um Formeln von der Art (19) S. 87, wobei aber die Gesamtsumme $[v\,v]$ in verschiedene Gruppen $[v^\circ\,v^\circ]$, $[v'\,v']$, $[v''\,v'']\ldots$ zerfällt werden soll und auch die entsprechenden Nenner gesucht werden sollen, bzw. die Abzüge u°, u', $u\ldots$ in folgenden Formeln (für n Sätze mit s Richtungen):

$$\left.\begin{array}{ll} & m^{\circ 2} = \dfrac{[v^\circ\,v^\circ]}{[p^\circ] - u^\circ} \quad , \quad m'^2 = \dfrac{[v'\,v']}{[p'] - u'} \quad , \quad m''^2 = \dfrac{[v''\,v'']}{[p''] - u''} \text{ u. s. w.} \\ \text{wobei} & [v^\circ\,v^\circ] + [v'\,v'] + [v''\,v''] + \ldots = [v\,v] \\ & [p^\circ] + [p'] + [p''] + \ldots = [p] \\ \text{und} & u^\circ + u' + u'' + \ldots = u = n + s - 1 \text{ (vgl. (15) S. 236)} \end{array}\right\} \quad (18)$$

Der Weg, auf dem die Hauptformel (19) auf S. 86—87 gefunden wurde, ist nicht geeignet für die Trennung der u, dagegen kann man durch die Gewichts-Coefficienten von § 28. und die reduzierten Fehlergleichungen § 26. den Zweck erreichen. Man kann die Differenz $[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v]$ von S. 86 auffassen als Summe der mittleren Fehlerquadrate der v als Funktionen von x, y, z, woraus sich alsbald ergiebt:

$$[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v] = m^2\left([a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + 2\,[a\,b]\,[\alpha\,\beta] + 2\,[a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + \ldots + [b\,b]\,[\beta\,\beta] + \ldots\right) \quad (19)$$

Wegen (20) S. 90 ist die hier als Coefficient von m^2 erscheinende Klammer $= 1 + 1 + 1$ für 3 Unbekannte x, y, z, allgemein ist die Klammer $= u$ für u Unbekannte, und daraus ergiebt sich dann alsbald die Gleichung (19) S. 87. was als zweite Begründung dieser wichtigen Gleichung auftritt.

Um nun zur Trennung der u überzugehen, wollen wir die reduzierten Fehlergleichungen von § 26. betrachten. Wenn nämlich bei 3 Unbekannten x, y, z eine erste Unbekannte x eliminiert ist, und ein System von Gleichungen (5) S. 83 übrig geblieben ist, so entspricht diesen auch ein System (7) S. 83 mit nur noch 2 Elementen, welchem auch in (20) S. 90 nur 2 Elemente und dann ein Wert $u = 1 + 1 = 2$ zukommen, so dass im Ganzen doch wieder $n - 1 - 2 = n - 3$ herauskommt. In ähnlicher Weise wollen wir nun auch die Trennung der u bei unserer Stationsausgleichung vornehmen.

Was zuerst die z betrifft, so kann man deren Einfluss am besten bestimmen, indem man die x vorläufig als fehlerfrei annimmt, denn dann ist nach (9) S. 235 das z eines Satzes gleich dem Mittel aus allen Werten l dieses Satzes, also das mittlere Fehlerquadrat dieses z gleich $m^2 g$ (mit g nach (11) S. 319), und die zu dem vorhergehenden (19) analoge Theorie giebt dann alsbald die Abzüge $[g^\circ]$, $[g']$, $[g'']\cdots$ für die Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlerquadrates in den Richtungen P°, P', $P''\ldots$; d. h. wir haben damit dieselbe Berechnung, welche für die z ohne strenge Begründung bereits in (7) S. 318, mit $-19{,}5$, $-13{,}5$, $-10{,}0$ gegeben ist.

Schwieriger ist der Einfluss der x zu bestimmen. Nach Elimination der z vermittelst (9) S. 235 nehmen die v von (4) S. 234 folgende Formen an, wobei g und h die bereits oben in (11) auf S. 319 eingeführten Bedeutungen haben sollen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{für die Richtung } P^\circ: & v^\circ = - & h_{,}{}^\circ x' - & h_{,,}{}^\circ x'' - h_{,,,}{}^\circ x''' + \ldots \\
\text{„ „ „} \quad P': & v' = (1-g')x' - & h_{,,}{}' x'' - & h_{,,,}{}' x''' + \ldots \\
\text{„ „ „} \quad P'': & v'' = - h_{,}{}'' x' + (1-g'')x'' - & h_{,,}{}'' x''' + \ldots \\
\text{„ „ „} \quad P''': & v''' = - h_{,}{}''' x' - & h_{,,}{}''' x'' + (1-g''')x''' + \ldots
\end{array}\right\} \quad (20)$$

Dabei sind die Absolutglieder, welche wir hier nicht brauchen, weggelassen (durch . . . angedeutet). Zur Bedeutung der schon früher eingeführten h und g sei auch nochmals erwähnt, dass es lediglich die zu S. 236 erforderlichen Verhältniszahlen sind, und dass z. B. $h_{,,}{}''' = h_{,,,}{}''$ u. s. w.

Die Gleichungen (20) sind nun reduzierte Fehlergleichungen in dem Sinne von § 26., nämlich Fehlergleichungen für die v nach Elimination der z. Deswegen muss auch z. B. sein:

$$\left.\begin{array}{l}
[h_{,}{}^{\circ 2}] + [(1-g')^2] + [h_{,}{}''^2] + [h_{,}{}'''^2] = (a\,a) \text{ von (11) S. 236} \\
+ [h_{,}{}^\circ h_{,,}{}^\circ] - [(1-g')h_{,,}{}'] - [h_{,}{}''(1-g'')] + [h_{,}{}''' h_{,,}{}'''] = (a\,b) \text{ S. 236} \\
\text{u. s. w. . . . . .}
\end{array}\right\} \quad (21)$$

Man kann dieses aus der Einzelbedeutung der g und h durch Vergleichung mit (11) S. 236 leicht nachweisen.

All dieses haben wir auf das Zahlenbeispiel von S. 228 angewendet und gefunden:

0,757	+ 0,396	+ 0,174	0,868	+ 0,284	0,646
2,590	— 0,854	— 0,410	0,396	+ 0,062	0,174
0,396	— 0,854	+ 0,062	3,035	— 0,632	0,285
0,174	+ 0,062	— 0,410	0,285	— 0,632	2,146
3,917	— 1,250	— 0,584	4,584	— 0,918	3,251
$= (a\,a)$	$= (a\,b)$	$= (a\,c)$	$= (b\,b)$	$= (b\,c)$	$= (c\,c)$

Dazu wurde auch bestimmt (vgl. S. 320):

0,299	0,195	0,162	0,263	0,183	0,348
$= [\alpha\,\alpha]$	$= 2\,[\alpha\,\beta]$	$= 2\,[\alpha\,\gamma]$	$= [\beta\,\beta]$	$= 2\,[\beta\,\gamma]$	$= [\gamma\,\gamma]$

Damit berechnet sich der Abzug für den Nenner des Fehlerquadrats der ersten Richtung (für x°):

$$0{,}577\,[\alpha\,\alpha] + 0{,}396\,(2\,[\alpha\,\beta]) + 0{,}174\,(2\,[\alpha\,\gamma]) + \ldots = 0{,}837$$

und entsprechend die 3 anderen: 0,718 , 0,743 , 0,704.

Damit bekommt man die richtigen Nenner zur Berechnung der mittleren Fehlerquadrate der 4 einzelnen Richtungen von S. 228:

	P°	P'	P''	P'''	Quersumme
Anschnittszahlen	10	6	7	5	28
Abzüge für die z:	— 3,75	— 2,08	— 2,42	— 1,75	— 10,00
Abzüge für die x:	— 0,84	— 0,72	— 0,74	— 0,70	— 3,00
Nenner	5,41	3,20	3,84	2,55	15,00
Die Näherungswerte von S. 320 unten waren:					
Näherungen	5,50	3,17	3,83	2,50	

Jene Näherungen waren also genügend richtig. Obgleich die praktische Anwendung des Vorstehenden zunächst von geringer Bedeutung ist, schien uns doch die Theorie soweit wichtig, dass ihre, wenn auch nur sehr gedrängte Mitteilung am Platze war.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 87. Geographische Coordinaten und Azimute des Hannoverschen Fünfecks.

Nicht zur Ausgleichung selbst gehörig, aber aus praktischen Gründen daran anzuschliessen, sind die geographischen Coordinaten und die Azimute des Netzes Fig. 1. S. 189. Wir werden diese Werte hier als Nachtrag zu § 60.—64. bringen.

Die Grundwerte der geographischen Längen und Breiten im System der Landesaufnahme für die zwei Basispunkte Aegidius und Wasserturm sind bereits unter (4) S. 188 mitgeteilt, und im Anschluss hieran, mit den ausgeglichenen Winkeln und Seiten von § 61. und § 63. haben wir teils nach den Rechenvorschriften der Landesaufnahme, teils nach den Gauss schen Mittelbreiten-Formeln in unserem III. Bande, 3. Aufl. 1890, S. 398 folgendes berechnet:

Punkt	*Breite*			*Länge*		
Aegidius	52°	22′	14,9611″	27°	24′	24,6289″
Linden Wasserturm	52	21	49,9080	27	22	25,0167
Willmer	52	20	49,8613	27	25	44,2318
Steuerndieb	52	23	31,6871	27	27	22,9670
Schanze	52	24	58,1187	27	24	33,1515
Burg	52	24	2,3220	27	22	7,7967

Ferner Meridianconvergenzen und die sämtlichen geodätischen Azimute (von Nord über Ost gezählt) und dazu nochmals die Logarithmen der Dreiecksseiten von (5) S. 197 oder (12) S. 203:

Station Richtung	Meridianconvergenz γ Azimut α	*log S*
1. Aegidius.	$\gamma =$ 2° 50′ 49,56″	
Wasserturm . . .	$\alpha =$ 251 7 24,97	3.378 7016
Burg	.. 322 4 0,45	3.624 0521
Schanze	.. 1 49 45,68	3.702 8735
Steuerndieb . . .	.. 54 52 13,92	3.615 2086
Willmer	.. 150 11 30,10	3.481 5665
2. Wasserturm.	$\gamma =$ 2° 52′ 23,46″	
Burg	$\alpha =$ 355 27 7,19	3.613 3487
Aegidius	.. 71 5 50,25	3.378 7016
Willmer	.. 116 11 16,97	3.623 4413
3. Willmer.	$\gamma =$ 2° 49′ 43,18″	
Wasserturm . . .	$\alpha =$ 296 13 54,71	3.623 4413
Aegidius	.. 330 12 33,14	3 481 5665
Steuerndieb . . .	.. 20 28 3,69	3.727 4425
4. Steuerndieb.	$\gamma =$ 2° 48′ 31,02″	
Willmer	$\alpha =$ 200 29 21,87	3.727 4425
Aegidius	.. 234 54 35,17	3.615 2086
Burg	.. 279 3 48,07	3.780 5583
Schanze	.. 309 47 6,94	3.620 7673
5. Schanze.	$\gamma =$ 2° 50′ 49,06″	
Steuerndieb . . .	$\alpha =$ 129 44 52,37	3.620 7673
Aegidius	.. 181 49 52,40	3.702 8735
Burg	.. 237 54 0,02	3.511 0402
6. Burg.	$\gamma =$ 2° 52′ 42,26″	
Schanze	$\alpha =$ 57 52 4,85	3.511 0402
Steuerndieb . . .	.. 98 59 38,36	3.780 5583
Aegidius	.. 142 2 12,04	3.624 0521
Wasserturm . . .	.. 175 26 53,52	3.613 3487

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die hier mit aufgenommenen Meridianconvergenzen γ sind dieselben, wie schon auf S. 204 angegeben, und die Summen $\gamma + \alpha$ geben die ausgeglichenen T von S. 204.

Wenn man aus den vorher mitgeteilten Breiten und Längen wieder die Azimute, Meridianconvergenzen und die *log S* rückwärts berechnet, so wird man die letzten Stellen nicht völlig in Übereinstimmung finden, erstens aus begreiflichen Abrundungsgründen, zweitens aber auch deswegen, weil in den Rechnungen der Landesaufnahme die Meridianconvergenzen und Azimute nicht bloss aus den geographischen Coordinaten, sondern auch auf dem *schärferen* Wege der rechtwinkligen Coordinaten (14) S. 205 übertragen werden, was in vorstehenden γ und α geschehen ist.

Unsere in diesem § 87. zusammengestellten Werte nebst den früheren von § 61. und § 63. sind diejenigen, welche voraussichtlich in den „Abrissen und Coordinaten" der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, etwa Band XVII, veröffentlicht werden werden.

Kapitel III.

Punktbestimmung durch Coordinatenausgleichung.

§ 88. Allgemeines.

Im vorigen Kapitel haben wir die Ausgleichung von Triangulierungs-Netzen nach der Methode der *bedingten Beobachtungen* behandelt, wobei zuerst die Bedingungsgleichungen aufgesucht werden mussten, welche zwischen den gemessenen Winkeln oder Richtungen nach der Natur des geometrischen Netzzusammenhanges bestehen; worauf eine der Zahl dieser Bedingungsgleichungen gleiche Zahl von Normalgleichungen aufzulösen war.

Wir gehen nun über zu einer anderen Art der Ausgleichung trigonometrischer Messungen, wobei die *Coordinaten* der zu bestimmenden Punkte als unabhängige Unbekannte angenommen, und die gemessenen Winkel oder Richtungen als Funktionen dieser Coordinaten dargestellt werden, so dass darauf eine Ausgleichung nach *vermittelnden Beobachtungen gegründet werden kann.*

Der einfachste Fall von Coordinatenausgleichung liegt vor, wenn *ein* neuer Punkt an mehrere fest gegebene alte Punkte angeschlossen werden soll. Wir werden daher im folgenden zuerst auf diese einfachste Aufgabe ausgehen.

§ 89. Richtungs-Änderung und Coordinaten-Änderung.

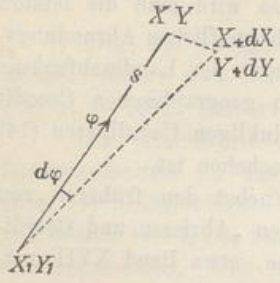
Bei allen Coordinatenausgleichungen werden wir eine Grundaufgabe wiederkehren sehen, welche wir deshalb ein- für allemal vorausschicken.

In Fig. 1. S. 326 haben wir einen festen Punkt P_1 mit den rechtwinkligen Coordinaten x_1 , y_1 und einen zweiten veränderlichen Punkt P mit den Coordinaten x y; die Entfernung von P_1 nach P sei $= s$ und der Richtungswinkel (Ka-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

tasterbenennung „Neigung") des Strahles von P_1 nach P sei $(P_1 P)$ oder kürzer bezeichnet $= \varphi$. Dann bestehen bekanntlich die Gleichungen:

Fig. 1.



$$y - y_1 = s \sin\varphi \qquad x - x_1 = s \cos\varphi \tag{1}$$

$$tang\,\varphi = \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{2}$$

oder

$$\varphi = arc\,tang \frac{y - y_1}{x - x_1} \tag{3}$$

(In Fig. 1. und Fig. 2. entsprechen X und Y den Zeichen x und y des Textes.)

Nun wollen wir den Punkt P nach P' rücken lassen, wobei seine Coordinaten von x , y übergehen in die nahe benachbarten $x + dx$, $y + dy$; und wir fragen, welche Änderung dadurch der Richtungswinkel φ erleidet? Insofern diese Änderung $d\varphi$ nur klein sein soll, werden wir sie durch Differentiieren bestimmen, nämlich nach (2):

$$d\varphi = \frac{\partial\, arc\,tang \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial x} dx + \frac{\partial\, arc\,tang \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial y} dy \tag{4}$$

die beiden Teile für sich abgeleitet geben:

$$\frac{\partial\, arc\,tang \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)^2} \left(-\frac{y - y_1}{(x - x_1)^2}\right)$$

und

$$\frac{\partial\, arc\,tang \frac{y - y_1}{x - x_1}}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y_1}{x - x_1}\right)^2} \left(\frac{1}{x - x_1}\right)$$

Wenn man daraus die Funktion (4) zusammenfassen will, beachtet man, dass in beiden Teilen im Nenner $(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2$ entsteht, welches $= s^2$ ist, und dadurch wird:

$$d\varphi = -\frac{y - y_1}{s^2} dx + \frac{x - x_1}{s^2} dy \tag{5}$$

Hier ist aber zu beachten, dass $d\varphi$ in analytischem Mass gilt; und wenn man $d\varphi$ nun in geometrisches Mass umsetzen will, so muss man es mit ϱ (= 206 265 für Sekunden alter Teilung) dividieren, oder man hat rechts mit ϱ zu multiplizieren, also:

in Sekunden:

$$d\varphi = -\frac{y - y_1}{s^2} \varrho\, dx + \frac{x - x_1}{s^2} \varrho\, dy \tag{6}$$

Wegen der ursprünglichen Gleichungen (1) kann man dieses (5) auch so schreiben:

$$d\varphi = -\frac{\varrho \sin\varphi}{s} dx + \frac{\varrho \cos\varphi}{s} dy \tag{7}$$

dieses (7) oder (6) ist die zu Anfang erwähnte für *alle* Coordinatenausgleichungen nötige Grundformel, (welche deshalb der Rechner auch alsbald auswendig wissen wird).

Logarithmische Herleitung der Grundformel.

So einfach auch die unmittelbare Differentiierung der Gleichung (3) war, lässt sie uns doch noch Gelegenheit, die Ableitung auch noch etwas anders, nämlich in

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

logarithmischer Form zu machen, um die Sache von allen Seiten zu betrachten. Schreiben wir nämlich die Gleichung (2) logarithmisch, so haben wir:

$$log\, tang\, \varphi = log\,(y - y_1) - log\,(x - x_1) \tag{8}$$

und dieses allseitig differentiiert giebt:

$$d\, log\, tang\, \varphi = \frac{1}{tang\, \varphi\, cos^2\, \varphi}\, d\varphi = \frac{d\, y}{y - y_1} - \frac{d\, x}{x - x_1}$$

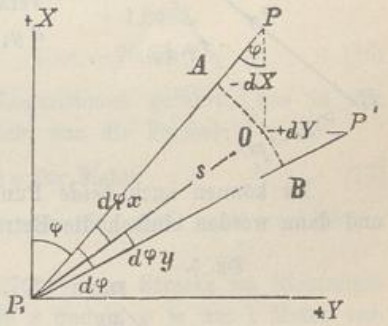
$$d\, \varphi = \frac{sin\, \varphi\, cos\, \varphi}{y - y_1}\, d\, y - \frac{sin\, \varphi\, cos\, \varphi}{x - x_1}\, d\, x$$

und wegen der Gleichungen (1) geht dieses sofort in (7) über (mit Zusetzung von ϱ).

Geometrische Deutung der Grundformel.

Man kann unsere Grundformel auch geometrisch begründen, nach Fig. 2. (in welcher $d\, X$ und $d\, Y$ dasselbe bedeuten sollen wie $d\, x$ und $d\, y$ im Text). Wir denken $d\, \varphi$ in zwei Teile $d\, \varphi_x$ und $d\, \varphi_y$ zerlegt, und lassen den Punkt P nicht auf *ein*mal nach P' rücken, sondern auf dem Umweg über die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks $P\, O = d\, x$ und $O\, P' = d\, y$. Dabei muss aber $d\, x$ im Sinne von Fig. 2. *negativ* sein, wie es auch eingeschrieben ist. Denkt man sich weiter die beiden Strecken $d\, x$ und $d\, y$ rechtwinklig zu der Strahlenrichtung φ projiziert, so bekommt man:

Fig. 2.



$$O\, A = -\, d\, x\, sin\, \varphi \qquad O\, B = +\, d\, y\, cos\, \varphi$$

$$d\, \varphi = d\, \varphi_x + d\, \varphi_y = \frac{O\, A}{s} + \frac{O\, B}{s}$$

also:

$$d\, \varphi = -\, \frac{sin\, \varphi}{s}\, d\, x + \frac{cos\, \varphi}{s}\, d\, y \tag{9}$$

Hier ist nur wieder ϱ als Faktor zuzusetzen, um Übereinstimmung mit der früheren Formel (7) zu erhalten.

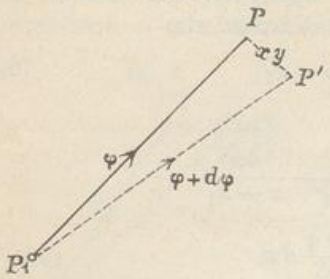
Diese geometrische Begründung der Gleichung (7) ist zwar anschaulicher als die analytische Differentiierung bei (4) und (8); die Differentiierung hat aber den Vorzug, dass sie allgemeiner gültig ist, und die Erörterung verschiedener *Vorzeichen*fragen, die sich an die Gleichungen (9) knüpfen würden, überflüssig macht.

Diesseitige und jenseitige Punktverschiebung.

In der ursprünglichen Annahme von Fig. 1. war P_1 ein fester Standpunkt und P ein veränderlicher Zielpunkt, und dafür gilt die Gleichung (6) oder (7); nun kann aber auch umgekehrt der Zielpunkt P fest und der Standpunkt P_1 veränderlich sein, und dann wird eine ganz ähnliche Formel gelten wie im vorigen Falle, nur mit dem Unterschiede, dass $\varphi \pm 180°$ an Stelle von φ tritt und dass deswegen $sin\, \varphi$ und $cos\, \varphi$ ihre Zeichen ändern. Dieses ist durch Fig. 3. und Fig. 4. noch deutlicher gemacht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

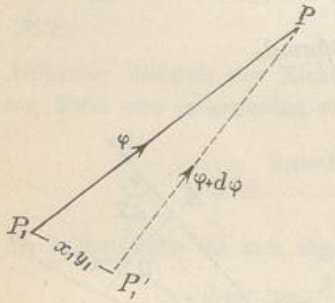
Fig. 3.



I. Fall. (Fig. 3.) Jenseitige Punktverschiebung. Der Standpunkt P_1 ist fest, der Zielpunkt P ist veränderlich mit den Coordinatenänderungen dx und dy. Dann ist die Richtungsänderung:

$$d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\, dx + \frac{\cos\varphi}{s}\varrho\, dy \qquad (10)$$

Fig. 4.

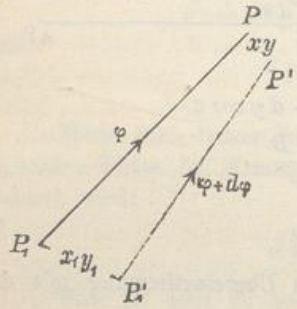


II. Fall. (Fig. 4.) Diesseitige Punktverschiebung. Der Zielpunkt P ist fest, und der Standpunkt P_1 ist veränderlich mit den Coordinatenänderungen dx_1 und dy_1. Dann ist die Richtungsänderung:

$$d\varphi = +\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\, dx_1 - \frac{\cos\varphi}{s}\varrho\, dy_1 \qquad (11)$$

Es können auch *beide* Punkte, Zielpunkt *und* Standpunkt veränderlich sein, und dann werden einfach die Beträge (10) und (11) addiert, nämlich:

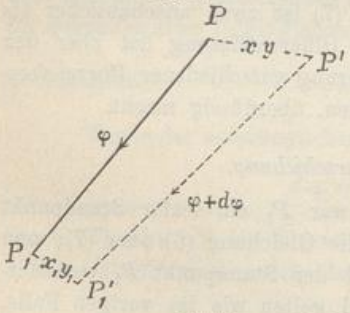
Fig. 5.



III. Fall. (Fig. 5.) Der Standpunkt P_1 erleidet Coordinatenänderungen dx_1 dy_1 und der Zielpunkt P erleidet Änderungen dx , dy; dann ist die Richtungsänderung:

$$d\varphi = -\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\,(dx - dx_1) + \frac{\cos\varphi}{s}\varrho\,(dy - dy_1) \qquad (12)$$

Fig. 6.



IV. Fall. (Fig. 6.) Man hat beiderseitige Coordinatenänderungen wie in Fig. 5., aber der Richtungswinkel φ ist diesesmal im umgekehrten Sinne gezählt. Dann hat man:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi &= +\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\,(dx - dx_1) - \frac{\cos\varphi}{s}\varrho\,(dy - dy_1) \\ \text{oder } d\varphi &= -\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\,(dx_1 - dx) + \frac{\cos\varphi}{s}\varrho\,(dy_1 - dy) \end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Richtungs-Coefficienten für Meter oder für Decimeter.

Die Coefficienten der Grundformel (6) oder (7) wollen wir besonders bezeichnen, mit a und b, nämlich:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$a = -\frac{\varrho}{s} \sin\varphi \qquad b = +\frac{\varrho}{s} \cos\varphi \tag{14}$$

oder

$$a = -\frac{\varrho}{s^2} \Delta y \qquad b = +\frac{\varrho}{s^2} \Delta x \tag{15}$$

Dabei bedeutet Δy eine Ordinatenänderung und Δx eine Abscissenänderung in dem Richtungssinne von φ, welcher in (15) stets besonders zu bemerken ist, während nach (14) die a und b lediglich eindeutige Funktionen von φ und s sind.

Man kann nun natürlich für jedes gegebene φ und s die Funktionen a und b ausrechnen, z. B.: für $s = 2700^m$ und $\varphi = 202° 17'$:

$\log \varrho$	5.3144	$\log \varrho$	5.3144
$\log s$	3.4314	$\log s$	3.4314
$\log\left(\frac{-\varrho}{s}\right)$	1.8830_n	$\log\left(\frac{\varrho}{s}\right)$	1.8830
$\log \sin\varphi$	9.5789_n	$\log \cos\varphi$	9.9663_n
$\log a$	1.4619		1.8493_n
$a = +28{,}97$		$b = -70{,}68$	

(16)

Diese Rechnung ist nur mit 4 stelligen Logarithmen geführt, was in den meisten Fällen ausreicht. Diesem Beispiel entspricht nun die Formel:

$$d\varphi = +28{,}97\, dx - 70{,}68\, dy \text{ für Meter} \tag{17}$$

wobei dx und dy Coordinatenänderungen in Metermass sind, weil auch s in Metern eingeführt wurde.

Oder die Gleichung (17) sagt: Wenn eine 2700^m lange Strecke im Richtungswinkel 202° 17' am jenseitigen Endpunkte sich in x und in y je um 1 Meter verschiebt, so ändert sich die Strahlenrichtung um $+28{,}97'' - 70{,}68'' = -41{,}71''$.

In sehr vielen Fällen sind die Coordinatenverschiebungen dx und dy erheblich kleiner als 1 Meter, weshalb die Rechnung sich angenehmer mit dx und dy in *Decimetern* gestaltet; in diesem Falle werden die a und b ebenfalls kleiner, nämlich $\frac{1}{10}$ der vorigen oder man hat für Decimeter:

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s} \sin\varphi & b &= +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s} \cos\varphi \\ &= -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2} \Delta y & &= +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2} \Delta x \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

und das vorige Zahlenbeispiel giebt:

$$d\varphi = +2{,}897\, dx - 7{,}068\, dy \text{ für Decimeter,}$$

d. h. wenn die Verschiebungen dx und dy je 1 Decimeter oder 0,1 Meter betragen, so ist die Richtungsänderung $d\varphi = +2{,}897'' - 7{,}068'' = -4{,}171''$ oder dasselbe, was man im ersten Falle mit $dx = dy = 0{,}1^m$ erhält.

Da wir später meistens mit dx und dy in Decimetern rechnen werden, und da die Entfernungen s am bequemsten in Kilometern gezählt werden, wollen wir dafür besondere Zeichen einführen, nämlich für $s = 1000^m = 1^{km}$:

$$-\frac{\varrho}{10}\frac{\sin\varphi}{1000} = \mathfrak{x} \qquad +\frac{\varrho}{10}\frac{\cos\varphi}{1000} = \mathfrak{y} \tag{19}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

oder weil $\varrho = 206\,265$ für Sekunden alter Teilung ist:

$$-20{,}6265\ sin\ \varrho = \mathfrak{x} \qquad +20{,}6265\ cos\ \varphi = \mathfrak{y} \tag{20}$$

Versteht man dann unter S die Entfernung in Kilometern, also $S = s : 1000$, so wird:

$$a = \frac{\mathfrak{x}}{S} \qquad b = \frac{\mathfrak{y}}{S} \tag{21}$$

für dx und dy in Decimetern, S in Kilometern.

§ 90. Verschiedene Hilfsmittel zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten.

Die Richtungs-Coefficienten, welche man bei ausgedehnten Ausgleichungsrechnungen immer braucht, sind nach (18) des vorigen § 89. für dx und dy in *Decimetern*:

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s}\ sin\ \varphi \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s}\ cos\ \varphi \tag{1}$$

oder

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2}\,\Delta y \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s^2}\,\Delta x \tag{2}$$

oder mit Vorbereitung für die Entfernung S in Kilometern:

für alte Teilung: $\mathfrak{x} = -20{,}6265\ sin\ \varphi \qquad \mathfrak{y} = +20{,}6265\ cos\ \varphi$ (3)

für neue Teilung: $\mathfrak{x} = -63{,}6620\ sin\ \varphi \qquad \mathfrak{y} = +63{,}6620\ cos\ \varphi$ (4)

$$a = \frac{\mathfrak{x}}{S} \qquad b = \frac{\mathfrak{y}}{S} \quad (S \text{ in Kilometern}) \tag{5}$$

Man kann diese a und b auf verschiedenen Wegen bestimmen, wie wir nun darlegen wollen:

I. Logarithmische Rechnung.

Das einfachste und nächstliegende Mittel, um diese Coefficienten zu bestimmen, ist die Ausrechnung mit 4—5 stelligen Logarithmen im Anschluss an die logarithmische Rechnung von φ und s selbst. Z. B.:

$$\begin{array}{llll}
P & y = -2784{,}96^m & x = +8326{,}92^m & \\
P_1 & y_1 = -1761{,}11 & x_1 = +10825{,}29 & \\
\hline
 & y - y_1 = -1023{,}85 & x - x_1 = -2498{,}37 & \\
 & = \Delta y & = \Delta x & \\
log\,\Delta y & 3.010226_n & 3.010226 & 3.397657 \\
log\,\Delta x & 3.397657_n & 9.578860 & 9.966291 \\
\hline
log\,tang\,\varphi & 9.612569 & 3.431366 & log\,s\ \ 3.431366 \\
 & & & log\,s^2\ 6.862732 \\
 & & s = 2700{,}12^m & \\
\varphi = 202^\circ\,17'\,1{,}3'' & & S = 2{,}70^{km} &
\end{array} \tag{6}$$

Dieses ist die gewöhnliche Berechnung von φ und s, an welche sich nun die Berechnung von a und b mit 4 stelligen Logarithmen anschliesst, in aller Ausführlichkeit geschrieben:

$$\begin{array}{ll|ll}
log\,-\frac{\varrho}{10} & 4.3144_n & log\,+\frac{\varrho}{10} & 4.3144 \\
log\,(1:s) & 6.5686 & log\,(1:s) & 6.5686 \\
log\,sin\,\varphi & 9.5789_n & log\,cos\,\varphi & 9.9663_n \\
\hline
log\,a & 0.4619 & log\,b & 0{,}8493_n \\
a = +2{,}897 & & b = -7{,}068 &
\end{array} \tag{7}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

oder nach den Formeln (2) S. 330:

$$\begin{array}{|r|l|r|l|}
\log -\frac{\varrho}{10} & 4.3144_n & \log +\frac{\varrho}{10} & 4.3144 \\
\log(1:s^2) & 3.1373 & \log(1:s^2) & 3.1373 \\
\log \Delta y & 3.0102_n & \log \Delta x & 3.3977_n \\
\hline
\log a & 0.4619 & \log b & 0.8494_n \\
a = +2{,}897 & & b = -7{,}068 &
\end{array} \qquad (8)$$

In Hinsicht auf die Vorzeichen merkt man sich ein für allemal, dass a das entgegengesetzte Vorzeichen von Δy und b dasselbe Vorzeichen mit Δx hat. (Für *Vorwärts*-Einschneiden Fig. 3. § 89. S. 328.)

Für erste Einführung in die trigonometrischen Einschneid-Ausgleichungen wird man diese logarithmische Rechnung der Coefficienten a und b immer nehmen, und erst wenn im übrigen eine gewisse Rechengewandtheit erlangt ist, lohnt es sich, auch die anderen Verfahren, die wir nachher unter II—VI beschreiben, auch kennen zu lernen und kritisch zu vergleichen.

II. Als zweites Hilfsmittel haben wir Hilfstafeln der Funktionen (3) und (4) berechnet und in unserem Anhange Seite [8]—[17] zusammengestellt. Z. B. für $\varphi = 202° 17'$ haben wir auf Seite [9] des Anhangs zunächst ganz roh (nur 202°):

$$\mathfrak{x} = +7{,}7 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}2$$

oder etwas schärfer auf Seite [10] für rund $202° 20'$ statt $202° 17'$:

$$\mathfrak{x} = +7{,}8 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}1$$

oder mit Interpolation mit $202° 17'$:

$$\mathfrak{x} = +7{,}82 \qquad \mathfrak{y} = -19{,}09$$

dann für $S = 2{,}70^{km}$ mit dem Rechenschieber dividiert:

$$a = +\frac{7{,}82}{2{,}70} = +2{,}90 \qquad b = -\frac{19{,}09}{2{,}70} = -7{,}07 \qquad (9)$$

Ähnlich auch für *neue* Teilung:

$$202° 17' = 224^g 76^c \qquad S = 2{,}70^{km}$$

nach S. [16]: $\mathfrak{x} = +24{,}14 \qquad \mathfrak{y} = -58{,}91$

$$a = +\frac{24{,}14}{2{,}70} = +8{,}9 \qquad b = -\frac{58{,}91}{2{,}70} = -21{,}8 \qquad (10)$$

Diese letzteren a und b entstehen auch aus (9) durch Multiplikation mit 3,09 oder Division mit 0,324, weil 1″ alte Teilung = $3{,}09^{cc}$ neue Teilung oder $1^{cc} = 0{,}324''$. Die Divisionen mit $S = 2{,}70$ bei (9) und (10) macht man mit dem Rechenschieber.

Was die hiebei nötigen Entfernungen s (oder S in Kilom.) betrifft, so nehmen wir dieselben gewöhnlich kurzer Hand aus dem Netzbilde der Triangulierung, welches für Stadttriangulierung in 1 : 10000 aufgetragen, hiezu vollauf genügt, aber auch in kleinerem Massstabe noch ausreicht. Auch rechnen wir die s nebenher 4 stellig logarithmisch, was immer noch erheblich weniger Mühe macht, als die a und b selbst logarithmisch auszurechnen.

Es besteht noch ein Grund zur Bevorzugung dieses Verfahrens II, nämlich die Einführung der *Entfernungen* s in das Ausgleichungsformular (§ 92. und § 93.). Diese Entfernungen s sind nämlich, auch abgesehen von ihrer Verwendung zur Ermittlung der Coefficienten a und b, auch deswegen in dem Ausgleichungsformular

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

erwünscht, weil sie zur Aufklärung und Beurteilung der Fehlerverteilung dienen. Wird z. B. der eine oder andere übrig bleibende Fehler v besonders gross, so wird man sich alsbald beruhigen, wenn er zu einem kleinen s gehört. Ein einziger Blick auf die Columne der s genügt oft zur Charakterisierung des ganzen Falles, z. B. alle Entfernungen s kleiner als 1 Kilometer ist ein Fall niederster Ordnung, in welchem erhebliche v viel eher zu dulden sind als in einer Ausgleichung mit s zwischen 1^{km} und 5^{km} u. s. w.

Kurz aus allen diesen Gründen ziehen wir eine Berechnungsart der a und b vor, welche von selbst auch die Entfernungen s in das Ausgleichungsformular hinein bringt.

III. Logarithmische Differenzen führen auch zu den Coefficienten a und b, wie folgendes Beispiel im Anschluss an (6) zeigen mag:

			logarithm. Tafel-Differenzen
$\Delta y = -1023{,}85$	$log\,\Delta y$	3.010226_n	b) 43· für $0{,}1^m$
$\Delta x = -2498{,}37$	$log\,\Delta x$	3.397657_n	a) 17· „ $0{,}1^m$
	$log\,tang\,\varphi$	9.612569	6·0 für 1″

$\varphi = 202° 17' 1''$

Nun sieht man sofort, ohne alle Theorie, dass eine Änderung $d\,y$ von $0{,}1^m$ sich logarithmisch durch $0{,}000043 = 43·$ und eine Änderung $d\,\varphi = 1''$ sich durch 6·0 ausdrückt, dass also $d\,y = 0{,}1^m$ den Wert $d\,\varphi = \frac{43}{6{,}0} = 7{,}1''$ und eine Änderung $d\,x = 0{,}1^m$ den Wert $\frac{17}{6{,}0} = 2{,}8$ bringen muss. Dieses sind aber gerade die gesuchten b und a, zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, und dann nach der Vorzeichenregel, welche bei (8) angegeben wurde:

$$a = +\frac{17}{6{,}0} = +2{,}8 \qquad b = -\frac{43}{6{,}0} = -7{,}2 \tag{11}$$

Diese Divisionen macht man mit dem Rechenschieber.

Diese Werte (11) stimmen mit (9) so nahe überein, als es möglich ist, wenn die Hauptrechnung für φ und s mit 6stelligen Logarithmen geführt wird. Würde man die Hauptrechnung 7stellig machen, so würden auch die Coefficienten a und b um eine Stelle genauer werden.

In Formeln drückt sich dieses Verfahren so aus:

$$a = -\frac{d\,log\,\Delta x}{d\,log\,tang\,\varphi} \qquad b = +\frac{d\,log\,\Delta y}{d\,log\,tang\,\varphi} \tag{12}$$

wobei die Tafeldifferenzen mit $d\,log\ldots$ bezeichnet sind, wo aber die Vorzeichen wohl zu beachten sind, z. B. oben $\Delta y = -1023{,}85$ giebt $d\,log\,\Delta y = -43·$ u. s. w. Am besten rechnet man übrigens bei diesem Verfahren zunächst ohne Rücksicht auf die Vorzeichen und setzt letztere erst nachher nach der Regel an, welche oben bei (8) angegeben wurde.

IV. Hilfstafel für $\varrho\ sin\,\varphi\,cos\,\varphi$. Diese Funktion ist der Gegenstand von „Logarithmische Hilfstafel zur Berechnung der Fehlergleichungs-Coefficienten beim Einschneiden nach der M. d. kl. Q. von *O. Seiffert*, Halle 1892“ (Zeitschr. f. Verm. 1893, S. 221). Es wird hier gesetzt:

$$a = -\frac{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{\Delta x}\varrho \qquad b = +\frac{sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{\Delta y}\varrho$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

was offenbar mit dem früheren (1) oder (2) gleichbedeutend ist (vorbehältlich des Faktors 0,1), und nun wird die Funktion herausgehoben:

$$\varrho \sin\varphi \cos = Z \tag{13}$$

also dann $$a = -\frac{Z}{\Delta x} \qquad b = -\frac{Z}{\Delta y} \tag{14}$$

Aus Seifferts Tafel, welche von 1′ zu 1′ und teilweise noch enger geht, haben wir einen kurzen Auszug gebildet und auf Seite [18] des Anhangs zusammengestellt mit Zufügung einer weiteren Funktion B, nämlich:

$$A = \frac{\varrho}{10} \sin\varphi \cos\varphi \text{ und } B = \frac{\varrho^2}{100} \sin\varphi \cos\varphi \tag{15}$$

indem $\log A$ und $\log B$ von 1° zu 1° bis 360° durchlaufend dargestellt ist. Man hat also dann:

$$a = -\frac{A}{\Delta x} \qquad b = +\frac{A}{\Delta y} \quad , \quad a\,b = -\frac{B}{s^2}$$

Z. B. für unser vorstehendes Beispiel mit $\varphi = 202°$ rund haben wir (zunächst ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

Tafel S. [18]						
$\log A$	3.8552	$\log A$	3.8552	$\log B$	8.1696
$\log \Delta x$	3.3977	$\log \Delta y$	3.0102	$\log s^2$	6.8627
$\log a$	0.4575	$\log b$	0.8450	$\log a\,b$	1.3069
$a = 2{,}9$		$b = 7{,}0$		$a\,b = 20{,}3$	

Die Vorzeichen von a und b bestimmt man nach der bei (8) angegebenen Regel, und zu $a\,b$ merkt man sich, dass es für φ im 1. und 3. Quadranten negativ, im 2. und 4. Quadranten positiv ist. Darnach wird:

$$a = +2{,}9 \qquad b = -7{,}0 \qquad a\,b = -20{,}3$$

Wir haben dieses Verfahren zuweilen zur Kontrolle *neben* anderen Verfahren angewendet, namentlich z. B. die $a\,b$ hiernach besonders berechnet, nachdem bereits die a und die b für sich schon anderwärts ermittelt waren und $a\,b$ als Produkt aus a und b bereits vorlag, so dass also durch $a\,b$ auch nochmals a und b selbst kontrolliert werden.

V. Massstäbe zur Bestimmung der Faktoren a—d für die Normalgleichungen bei trigonometrischen Ausgleichungsrechnungen u. s. w., entworfen durch den Kgl. Landmesser *Seyfert*, Abteilungsvorsteher im geodät. technischen Bureau der K. Generalkommission für Schlesien zu Breslau. Diese Massstäbe bestehen aus verschiedenen Strahlenbüscheln mit Querlinien, aus welchen nach Art der „Isoplethen“ die Richtungs-Coefficienten a und b entnommen werden. Über die Theorie giebt ein Bericht in der „Zeitschr. f. Verm. 1893“, S. 219—221, Auskunft.

VI. Graphische Tafel von *Franke*, mitgeteilt in dessen Schrift: „Coordinaten-Ausgleichung nach Näherungsmethoden, München 1884, S. 133—135 mit lithographierter Tafel im Anhang. Diese Tafel giebt in Isoplethenform die Funktionen $\frac{\varrho \sin\varphi}{10\,S}$ und $-\frac{\varrho \cos\varphi}{10\,S}$, wobei mit φ im Richtungswinkel und mit S in der Strahlenlänge eines Radial-Systems eingegangen und die Funktionen als rechtwinklige Coordinaten abgenommen werden.

VII. Rechenschieber von Voigt. Auf Veranlassung und Erfindung von W. Voigt in Flatow ist von Dennert und Pape eine besondere Teilung an der Rückseite der

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

„Zunge" des gewöhnlichen Rechenschieberstabes angebracht worden, mit deren Hilfe die Funktionen a und b entsprechend den Gleichungen (13) und (14) abgeschoben werden können. Weiteres hierüber, Gebrauchsanweisung und Genauigkeit, giebt Voigt in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 183—188.

Versuchen wir alle diese Verfahrungsarten zur Bestimmung der Richtungs-Coefficienten a und b zu vergleichen, so gebührt der unmittelbaren Ausrechnung mit 4—5stelligen Logarithmen der Vorzug bei allen wichtigen Fällen, z. B. I.—II. Ordnung, und auch im ersten Unterricht ist nichts anderes zu raten.

Dagegen bei glattem Betriebe zahlreicher Ausgleichungen III.—IV. Ordnung ist die logarithmische Ausrechnung der vielen a und b zu mühsam; hier haben wir mit den Hilfstafeln S. [8]—[17] die besten Erfahrungen gemacht, wobei die s aus dem Netzbilde der Triangulierung entnommen und die $\xi : s$ und $\eta : s$ mit dem Rechenschieber abgeschoben werden.

Die Methode der logarithmischen Differenzen (III im vorstehenden) wird viel gerühmt, aber sie hat für uns den Übelstand, dass man die logarithmischen Differenzen für Δx und Δy nicht kurzer Hand aus der Logarithmentafel herausschreiben kann, sondern jedesmal die *Stellung des Kommas* besonders überlegen muss. Auch ist man bei der scharfen Ausrechnung der Näherungen (φ) durch die Nebenrücksicht auf die a und b unangenehm gehindert. Im Vergleich mit der glatten Rechnung mit den Diff. für 10″, welche wir auf S. 180 bei Triangulierungsnetzen kennen gelernt haben, ist die Rechnung mit den log. Diff. bei Einschneideausgleichungen viel weniger nützlich.

Die *Seiffert* sche und ähnliche Hilfstafeln (Verfahren IV im vorstehenden) haben wir zu Kontrollrechnungen nützlich gefunden.

Die verschiedenen graphischen Hilfsmittel, und der Voigt sche Rechenschieber, werden zur Abwechslung in dem tötenden Einerlei der Rechenarbeit empfohlen.

Dass das Bedürfnis solcher Hilfsmittel besteht, wird durch die zahlreichen Erfindungen und Vorschläge auf diesem Gebiete bewiesen; die richtige Auswahl unter denselben zu treffen, wird den Erfahrungen und dem Gutdünken des einzelnen Rechners überlassen bleiben.

§ 91. Vorwärtseinschneiden mit drei Winkeln.

Als einfachsten Fall des Vorwärtseinschneidens mit Ausgleichung betrachten wir im Anschluss an Fig. 1. S. 335 Folgendes:

Es sind 3 Punkte P_1 , P_2 , P_3 durch ihre rechtwinkligen Coordinaten fest gegeben und ein neuer Punkt P soll durch Winkelmessungen auf P_1 , P_2 und P_3 bestimmt werden, z. B. durch Messung des Winkels $A P_1 P_2 = \beta_1$, dann $P_1 P_2 B = \beta_2$ und $P_2 P_3 C = \beta_3$.

Wenn nur *zwei* von diesen Winkeln β gemessen wären, so wäre der neue Punkt P eindeutig bestimmt, und seine Coordinaten könnten nach bekannten einfachen Regeln sofort endgültig berechnet werden.

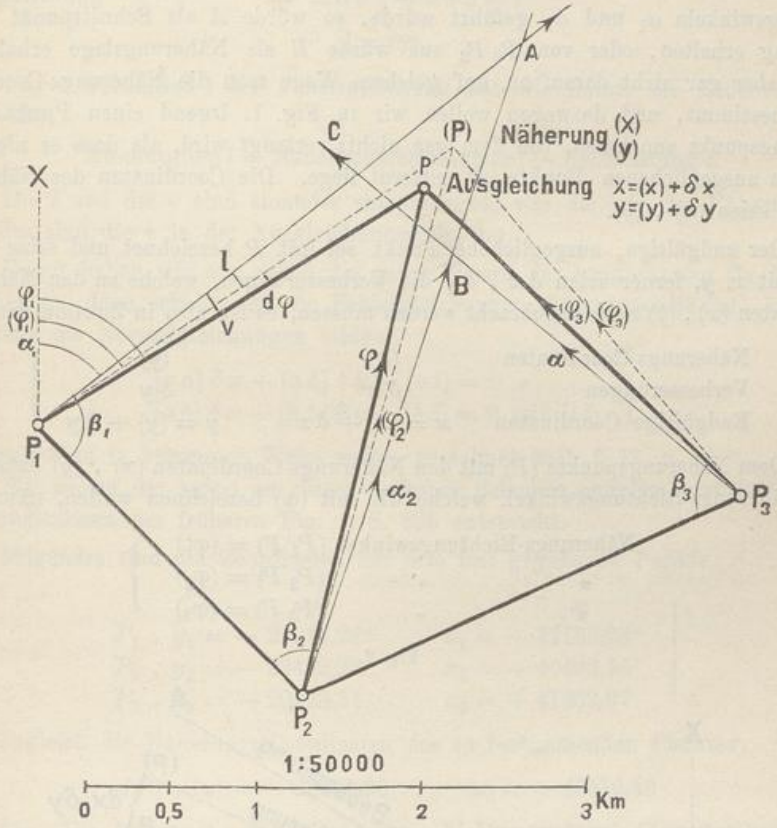
Wenn dagegen noch ein dritter Winkel β gemessen ist, so liegt eine Ausgleichungsaufgabe vor, welche wir nun durchführen werden.

Durch die 3 gemessenen Brechungswinkel β sind im Anschluss an die festen Linien $P_1 P_2$ und $P_2 P_3$ nach dem neuen Punkte P 3 Strahlen $P_1 A$, $P_2 B$ und $P_3 C$ bestimmt, welche sich aber wegen der Beobachtungsfehler nicht in *einem* Punkte P schneiden, sondern ein fehlerzeigendes Dreieck $A B C$ bilden werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir wollen uns zuerst überzeugen, dass man statt der beobachteten *Brechungs*winkel β sofort auch die *Richtungs*winkel α (Katasterbezeichnung „Neigungen") als beobachtet einführen kann, welche von den festen Punkten $P_1\, P_2\, P_3$ nach dem neuen

Fig. 1.



Punkte P hinführen. Jedenfalls kann man die Richtungswinkel $[P_1\, P_2]$ nebst $[P_2\, P_3]$ und $[P_3\, P_2]$ aus den Coordinaten der gegebenen Punkte fest berechnen, nämlich in bekannter Weise:

$$\left.\begin{aligned} tang\,[P_1\, P_2] &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ und } [P_2\, P_1] = [P_1\, P_2] \pm 180° \\ tang\,[P_3\, P_2] &= \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wenn nun die Brechungswinkel β_1 , β_2 , β_3 dazu gemessen sind, so hat man sofort auch die neuen Richtungswinkel:

$$\left.\begin{aligned} (P_1\, A) &= [P_1\, P_2] - \beta_1 = \text{Richtungswinkel } \alpha_1 \\ (P_2\, B) &= [P_2\, P_1] + \beta_2 = \quad \text{„} \quad \alpha_2 \\ (P_3\, C) &= [P_3\, P_2] + \beta_3 = \quad \text{„} \quad \alpha_3 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Diese Richtungswinkel α_1 , α_2 , α_3 werden wir nun wie unmittelbar *gemessene* Grössen weiter behandeln dürfen, denn die Anlagestrahlen $[P_1\, P_2]$ u. s. w. gelten als unabänderlich fest und fehlerfrei, es trägt sich daher der Fehler eines Winkels β geradezu auf α über.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das nächste Erfordernis ist die Gewinnung von Näherungs-Coordinaten des neuen Punktes P, die man sich leicht dadurch verschafft, dass man den Punkt P aus *zweien* der Winkel β bestimmt, d. h. indem man etwa die Vorwärtseinschneidung $P_1 P P_2$ mit der Basis $P_1 P_2$ in bekannter Weise durchrechnet, oder auch $P_2 P P_3$, oder sonstwie. Wenn z. B. die Rechnung mit der Basis $P_1 P_2$ und mit den zwei Richtungswinkeln α_1 und α_2 geführt würde, so würde A als Schnittpunkt für die Näherung erhalten, oder von $P_2 P_3$ aus würde B als Näherungslage erhalten; es kommt aber gar nicht darauf an, auf welchem Wege man die Näherungs-Coordinaten von P bestimmt, und deswegen wollen wir in Fig. 1. irgend einen Punkt (P) als Näherungspunkt annehmen, von dem gar nichts verlangt wird, als dass er nicht weit von dem ausgeglichenen Punkte P entfernt liege. Die Coordinaten des Näherungspunktes seien (x) , (y).

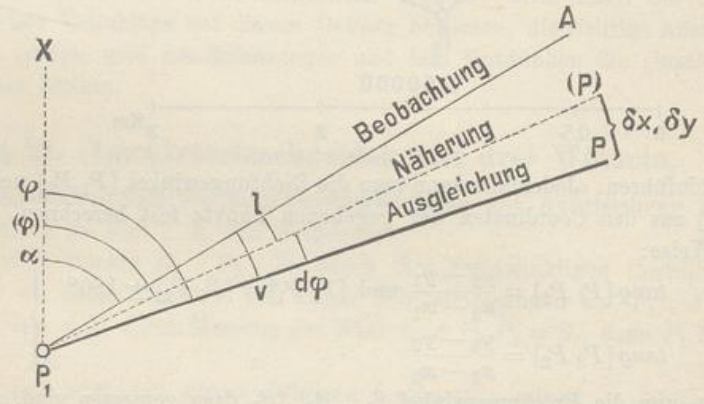
Der endgültige, ausgeglichene Punkt sei mit P bezeichnet und seine Coordinaten mit x, y, ferner seien δx , δy die Verbesserungen, welche an den Näherungs-Coordinaten (x) , (y) noch angebracht werden müssen, es ist also in Zusammenstellung:

Näherungs-Coordinaten	(x)	(y)	(3)
Verbesserungen	δx	δy	
Endgültige Coordinaten	$x = (x) + \delta x$	$y = (y) + \delta y$	

Dem Näherungspunkte (P) mit den Näherungs-Coordinaten (x) , (y) entsprechen auch Näherungs-Richtungswinkel, welche wir mit (φ) bezeichnen wollen, nämlich:

Näherungs-Richtungswinkel	$(P_1 P) = (\varphi_1)$	(4)
„ „	$(P_2 P) = (\varphi_2)$	
„ „	$(P_3 P) = (\varphi_3)$	

Fig. 2.



Ausser den bis jetzt eingeführten Richtungsbezeichnungen α für Beobachtung, (φ) für Näherung, nehmen wir auch noch φ für Ausgleichung und dazu noch deren Differenzen, wie in Fig. 2. besonders eingeschrieben ist, und dann wird es nicht schwer sein, vollends die Fehlergleichung für einen Strahl zu bilden. Es ist nämlich v die Differenz zwischen dem Ausgleichungswert φ und dem Beobachtungswert α also:

$$v = \varphi - \alpha = \big(\varphi - (\varphi)\big) + \big((\varphi) - \alpha\big) = d\varphi + l \qquad (5)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Da der Übergang von (φ) auf φ einer Coordinatenverschiebung δx , δy entsprechen soll, so haben wir nach den Grundformeln von § 89.:

$$\varphi - (\varphi) = d\varphi = a\,\delta x + b\,\delta y \tag{6}$$

also nach (5) und (6):

Fehlergleichung
$$v = a\,\delta x + b\,\delta y + l \tag{7}$$

wo
$$l = (\varphi) - \alpha \tag{8}$$

Das Absolutglied l der Fehlergleichung hat wie immer die Bedeutung (vgl. S. 44—45):

$$\text{Absolutglied } l = \text{Näherungsrechnung } (\varphi) - \text{Beobachtung } \alpha \tag{8 a}$$

Die l und die v sind einander entsprechend; was die l in der Näherungsrechnung, das sind die v in der Ausgleichungsrechnung.

Damit haben wir nun schon die ganze Theorie der Ausgleichung für Vorwärtseinschneiden, denn sobald man die Fehlergleichungen (7) aufgestellt hat, kann man wie immer die Normalgleichungen bilden:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,\delta x + [a\,b]\,\delta y + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,\delta x + [b\,b]\,\delta y + [b\,l] &= 0 \text{ mit } [l\,l] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und damit wird in bekannter Weise weiter gerechnet nach § 13. u. ff.

Wir wollen das sofort an einem einfachen Beispiele erproben, welches ungefähr den Verhältnissen der früheren Fig. 1. S. 335 entspricht.

Folgendes sind die Coordinaten der drei fest gegebenen Punkte:

$$\left.\begin{array}{lll} & y & x \\ P_1\,, & y_1 = -25014{,}26^{\text{m}} & x_1 = +42133{,}28^{\text{m}} \\ P_2\,, & y_2 = -23406{,}93 & x_2 = +40493{,}76 \\ P_3\,, & y_3 = -20728{,}34 & x_3 = +41632{,}97 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Zugleich die Näherungs-Coordinaten des zu bestimmenden Punktes:

$$(P)\,,\ (y) = -22501{,}20 \qquad (x) = +43512{,}40 \tag{11}$$

Aus (10) berechnet man die festen Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigungen") in bekannter Weise:

$$\left.\begin{aligned} [P_1\,P_2] &= 135^\circ\ 34'\ \ 5'' \text{ oder } [P_2\,P_1] = 315^\circ\ 34'\ \ 5'' \\ \text{und} \quad [P_2\,P_3] &= \ \ 66^\circ\ 57'\ 35'' \ \text{„} \ [P_3\,P_2] = 246^\circ\ 57'\ 35'' \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Nun sollen die 3 Winkel gemessen sein:

$$\beta_1 = 74^\circ\,19'\,41'' \qquad \beta_2 = 61^\circ\,8'\,10'' \qquad \beta_3 = 69^\circ\,42'\,28'' \tag{13}$$

Diese gemessenen Brechungswinkel zu den festen Richtungswinkeln (12) hinzugefügt geben die neuen Richtungswinkel α, nämlich:

$$\left.\begin{array}{lll} [P_1\,P_2] = \ 135^\circ\,34'\ \ 5'' & [P_2\,P_1] = 315^\circ\,34'\ \ 5'' & [P_3\,P_2] = 246^\circ\,57'\,35'' \\ -\beta_1 = -\ 74\ \ 19\ \ 41 & +\beta_2 = \ \ 61\ \ \ 8\ \ 10 & +\beta_3 = \ \ 69\ \ 42\ \ 28 \\ \hline \alpha_1 = \ \ 61^\circ\,14'\,24'' & \alpha_2 = \ \ 16^\circ\,42'\,15'' & \alpha_3 = 316^\circ\,40'\,03'' \end{array}\right\} \tag{14}$$

Nun folgt die Berechnung der Näherungs-Richtungswinkel (φ) u. s. w. und damit verbindet man sogleich auch die Berechnung der Coefficienten a und b nach § 89. Dieses ist in folgender Tabelle enthalten:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnung von (φ) nebst a und b. (15)

Punkte B A	$y_b - y_a = \Delta y$, $x_b - x_a = \Delta x$, $(AB) = (\varphi)$ $tang(\varphi) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$			Entfernung s mit Spalte rechts	$a =$ $-\frac{0{,}1\,\varrho}{s^2}\Delta y$	$b =$ $+\frac{0{,}1\,\varrho}{s^2}\Delta x$
	y	x	(φ)			
(P)	— 22501,20	+ 43512,40	3.400203	3.4002	$0{,}1\,\varrho$ ..	4.3144
P_1	— 25014,26	+ 42133,28	3.139602	9.9428	s^2 ..	6.9148
	+ 2513,06	+ 1379,12	0.260601	3.4574	7.3996	7.3996
					3.4002	3.1396
					0.7998	0.5392
			$(\varphi_1) =$	$s =$	$a = -6{,}31$,	$b = +3{,}46$
			61° 14′ 34″	2867m		
(P)	— 22501,20	+ 43512,40	2.956999	3.4798		4.3144
P_2	— 23406,93	+ 40493,76	3.479812	9.9813		6.9970
	+ 905,73	+ 3018,64	9.477187	3.4985	7.3174	7.3174
					2.9570	3.4798
					0.2744	0.7972
			$(\varphi_2) =$	$s =$	$a = -1{,}88$,	$b = +6{,}29$
			16° 42′ 6″	3152m		
(P)	— 22501,20	+ 43512,40	3.248674	3.2740		4.3144
P_3	— 20728,34	+ 41632,97	3.274026	9.8618		6.8244
	— 1772,86	+ 1879,43	9.974648	3.4122	7.4900	7.4900
					3.2487	3.2740
					0.7387	0.7640
			$(\varphi_3) =$	$s =$	$a = +5{,}48$,	$b = +5{,}81$
			316° 40′ 17″	2584m		

Die Vergleichung der so berechneten (φ) mit den unter (14) gegebenen beobachteten α giebt die Absolutglieder $l = (\varphi) - \alpha$ nach (8), und dazu setzen wir auch sogleich die in der vorstehenden Tabelle berechneten Coefficienten a und b:

beobachtet α	Näherung (φ)	$(\varphi) - \alpha = l$	a	b
61° 14′ 24″	61° 14′ 34″	+ 10″	— 6,3	+ 3,5
16 42 15	16 42 6	— 9″	— 1,9	+ 6,3
316 40 3	316 40 17	+ 14″	+ 5,5	+ 5,8

(16)

Daraus auch sofort die Summen-Coefficienten für die Normalgleichungen, alles möglichst abgerundet:

a^2	b^2	$a\,b$	$a\,l$	$b\,l$	l^2
40	12	— 22	— 63	+ 35	100
4	40	— 12	+ 17	— 57	81
30	34	+ 32	+ 77	+ 81	196
+ 74	+ 86	— 2	+ 31	+ 59	377

(17)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Normalgleichungen werden also:

$$+74\,\delta x - 2\,\delta y + 31 = 0$$
$$-2\,\delta x + 86\,\delta y + 59 = 0 \text{ mit } [ll] = 377.$$

Die Elimination nebst Gewichts- und Fehlerberechnung machen wir doppelt, und zwar bei so kleinen Zahlen schlechthin mit dem Rechenschieber, nach der Anleitung von (2)—(3) S. 63:

	+ 74	− 2	+ 31		+ 86	− 2	+ 59
		+ 86	+ 59			+ 74	+ 31
		− 0	+ 1			− 0	+ 1
			+ 377				+ 377
			− 13				− 40
$[bb.1]=86$		+ 86	+ 60	$[aa.1]=74$		+ 74	+ 32
			+ 364				+ 337
			− 42				− 14
			$[ll.2]=322$				$[ll.2]=323$

$$\delta y = -\frac{60}{86} = -\ 0{,}70^{dm} = -\ 0{,}070^{m} \qquad \delta x = -\frac{32}{74} = -\ 0{,}43^{dm} = -\ 0{,}043^{m} \qquad (18)$$

hiezu $(y) = -22501{,}20$ Näherung (11) S. 337 $(x) = +43512{,}40$

$$y = -22501{,}27^{m} \qquad x = +43512{,}36^{m} \qquad (19)$$

Mit diesen ausgeglichenen Coordinaten y , x berechnet man die ausgeglichenen Richtungswinkel φ ebenso wie früher die Näherungen (φ) in der Tabelle (15) S. 338. Die so erhaltenen φ vergleicht man wieder mit den gemessenen α, wie folgende Tabelle zeigt:

beobachtet α	ausgeglichen φ	$\varphi - \alpha = v$	v^2
61° 14′ 24″	61° 14′ 34″	+ 10	100
16 42 15	16 42 2	− 13	169
316 40 3	316 40 10	+ 7	49
			318

(19 a)

Die so erhaltene Summe $[v^2] = 318$ muss mit den $[ll.2] = 322$ oder 323 der Elimination bei (18) stimmen, was hier genügend der Fall ist; und nun hat man den mittleren Fehler einer Beobachtung mit rund $[v^2] = 320$:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{320}{1}} = \pm 18'' \qquad (20)$$

und die mittleren Coordinatenfehler nach (10) und (11) auf S. 57 unten:

$$m_y = \frac{18}{\sqrt{86}} = \pm 1{,}9^{dm} \qquad m_x = \frac{18}{\sqrt{74}} = \pm 2{,}1^{dm}$$

also zusammen mit (19) hat man das Schlussergebnis:

$$y = -22501{,}27^{m} \pm 0{,}19^{m} \qquad x = +43512{,}36^{m} \pm 0{,}21^{m} \qquad (21)$$

Alles dieses, was wir hier, um die allmähliche Entstehung zu zeigen, in einzelnen Gleichungen und Tabellengruppen vorgeführt haben, werden wir im folgenden

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 92. in *einem* tabellarischen Schema an einem mehr praktischen Beispiele vorführen, inzwischen aber noch eine Bemerkung über die Probe für $[v^2] = [l\,l\,.\,2]$ machen, und dazu noch einen Nachtrag zu dem früheren § 27. bringen.

Bei 2 Unbekannten hat man nach (17) S. 53 oder auch nach (8) S. 85 die Probe:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (22)$$

Dieses giebt in unserem Falle unmittelbar bei (19a) $[v^2] = 318$ und dann bei (18):

$$[l\,l\,.\,2] = 377 - 13 - 42 = 322 \text{ und } 377 - 40 - 14 = 323$$

und alle 3 Werte 318, 322, 323 stimmen nach Massgabe der eingehaltenen Rechenschärfe (Abrundung auf 1") genügend zusammen.

Es giebt aber noch eine andere Kontrollformel, welche in unserem früheren theoretischen § 27. S. 85 nicht mitgeteilt, welche auch, soweit uns bekannt, in den Gauss'schen Originalschriften (vgl. S. 3—4) noch nicht vorkommt. Nach Helmert, Ausgleichungsrechnungen nach der M. d. kl. Q. 1872, S. 106 wird die fragliche Formel so gefunden:

Eine einzelne Fehlergleichung ist nach (1) S. 80:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l$$

Dieses mit l multipliziert und zugleich auf alle Gleichungen ausgedehnt und addiert giebt:

$$[v\,l] = [a\,l]\,x + [b\,l]\,y + [c\,l]\,z + \ldots + [l\,l]$$

Dann jede Fehlergleichung mit ihrem v multipliziert und alles addiert giebt:

$$[v\,v] = [a\,v]\,x + [b\,v]\,y + [c\,v]\,z + \ldots \quad [l\,v]$$

Nun ist aber wegen der Normalgleichungen:

$$[a\,v] = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + \ldots + [a\,l] = 0$$
$$[b\,v] = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \text{ u. s. w.}$$

Es folgt daher aus den vorstehenden beiden Gleichungen für $[v\,l]$ und $[v\,v]$:

$$[v\,v] = [l\,l] + [a\,l]\,x + [b\,l]\,y + [c\,l]\,z + \ldots \qquad (23)$$

Diese Gleichung haben wir in § 27. nachzutragen.

Bei nur zwei Unbekannten δx und δy giebt dieselbe:

$$[v\,v] = [l\,l] + [a\,l]\,\delta x + [b\,l]\,\delta y \qquad (24)$$

und mit Anwendung auf das vorstehende Zahlenbeispiel (18):

$$[v\,v] = 377 - 31 \times 0{,}43 - 59 \times 0{,}70$$
$$[v\,v] = 377 - 13 - 41 = 323.$$

§ 92. Vorwärtseinschneiden mit Richtungen.

Ganz in derselben Weise, wie das im vorigen § 91. durchgeführte Einschneiden mit 3 Strahlen, welche durch je einen Winkel festgelegt sind, kann auch das Vorwärtseinschneiden mit beliebig vielen Strahlen behandelt werden unter der Voraussetzung, dass diese Strahlen als *gleichgewichtig* betrachtet werden dürfen. Das ist streng theoretisch gewöhnlich nicht der Fall; wir werden aber erst später (in § 97.—98.) die dazu gehörigen feineren Theorieen behandeln und hier kurzer Hand *annehmen*, es seien gleiche Gewichte vorhanden.

In den Abrissen S. 204 und S. 207 haben wir gesehen, wie an das Fünfeck

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

von S. 189 auch die *neuen* Strahlen nach den neuen Punkten Hochschule und Dreifaltigkeit von S. 185 mit angeschlossen bzw. eingebunden worden sind, z. B. ist auf S. 207 auf Station 1. Aegidius neben den 5 alten Strahlen 1. 2. 3. 4. 5. auch noch Hochschule = 315° 2′ 32,6″ als beobachtet angegeben (sowie auch Dreifaltigkeit = 35° 3′ 47,7″) und dieses 315° 2′ 32,6″ werden wir nun genau ebenso in eine Vorwärts-Einschneide-Ausgleichung einführen, wie das $\alpha_1 = 61° 14' 24''$, welches in Fig. 1. § 91. S. 335 durch Anschluss von β_1 an den festen Strahl $P_1 P_2$ erhalten wurde. Der Unterschied besteht allerdings, dass in Fig. 1. S. 335 die neue Richtung α_1 nur an *einen* alten festen Strahl $P_1 P_2$ angeschlossen ist, dagegen Aegidius-Hochschule in Fig. 1. S. 185 an *fünf* alte feste Strahlen (vorausgesetzt, dass *ein* Satz mit allen Strahlen auf Aegidius gemessen wäre); aber wie schon gesagt, wir wollen von solchen Unterscheidungen hier absehen und, der laufenden Praxis entsprechend, die Strahlen zum Vorwärtseinschneiden als *gleich*gewichtig annehmen. Ausserdem wollen wir im Gegensatz zu dem ersten Zahlenbeispiele von § 91. nun die ganze Rechnung in ein planmässig angelegtes *Rechnungsformular* S. 343 einsetzen, welches seit Jahren bei unseren praktischen Einschneide-Ausgleichungen gebraucht ist.

Nach dem Anblick des Netzes Fig. 1. S. 185 wollen wir den Punkt Hochschule vorwärts einschneiden von den 4 festen Punkten aus: Steuerndieb, Aegidius, Wasserturm, Burg, und wir füllen demnach oben auf S. 343 die ersten Spalten bis α nach dem früheren Abrisse von S. 207 aus.

Nach diesem brauchen wir für den eingeschnittenen Punkt Hochschule Näherungs-Coordinaten, welche etwa aus beliebigen zweien der gemessenen α berechnet werden können, nach dem Schema von S. 296 unseres II. Bandes, 3. Aufl. 1893. In Fällen wie der unsrige S. 185 hat man solche Näherungs-Coordinaten längst schon von den Centrierungen her u. s. w. Woher die Näherungen stammen ist gleichgültig; wir haben in unserem Falle:

Hochschule Näherung $(y) = -24709{,}8^m$, $(x) = -26868{,}3^m$.

Zu der ganzen nun folgenden trigonometrischen Berechnung, Richtungswinkel (φ) und φ u. s. w. schicken wir die Bemerkung voraus, dass ein rechtwinkliges *ebenes* Coordinatensystem als gültig angenommen ist, dass also alle die kleinen Korrektionen von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$, welche in § 64. S. 205—206 und in dem Abrisse S. 207, zu dem Netze S. 189 noch berücksichtigt worden sind, beim Übergang zu den Einschneide-Ausgleichungen nun schlechthin vernachlässigt werden, so dass die Zehntels-Sekunden (0,1″) nicht mehr richtig sein können. Wenn wir trotzdem auf 0,1″ formell rechnen, so hat das nur den Sinn, dass die Sekunden selbst vor Abstumpfung geschützt werden sollen, und dass immerhin noch etwa 0,3″ richtig erhalten wird.

Die auf irgend welche Weise erlangten Näherungs-Coordinaten (x) , (y) werden auf S. 342 eingesetzt nebst den von S. 206 zu holenden Coordinaten der fest gegebenen Punkte, worauf die Berechnung der (φ) und nebenbei auch die Berechnung der genäherten Entfernungen s erfolgt. Die so erhaltenen (φ) setzt man oben auf S. 343 ein, berechnet dazu $(\varphi) - \alpha = l$ und die l^2.

Es folgt die zweite Gruppe von S. 343, bei welcher die Coefficienten a und b mit der Hilfstafel S. [10]—[15] des Anhangs berechnet werden. Die dazu nötigen s haben wir auf S. 342 mit 4 stelligen Logarithmen nebenbei berechnet, man kann die s aber sehr oft auch genügend aus einem Netzbilde S. 185 abnehmen, wenn

(Fortsetzung auf S. 344.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnung der Richtungswinkel zu der Ausgleichung S. 343:

Punkt P Punkt A (S. 206)	y_p x_p $y_p - y_a = \Delta y$	x_p x_a $x_p - x_a = \Delta x$	$log\ \Delta y$ $log\ \Delta x$ $log\ tang\ (A\ P)$	Entfernung s mit Spalte rechts
		I. Vor der Ausgleichung.		
Hochschule . Steuerndieb .	— 24709,800 — 19888,668 — 4821,132	— 26868,300 — 25951,884 — 916,416	3.683149 2.962093 0.721056 $(\varphi_1) = 259° 14' 14{,}7''$	3.6831 9.9923 3.6908 $s_1 = 4907^m$
Hochschule . Aegidius . .	— 24709,800 — 23271,813 — 1437,987	— 26868,300 — 28308,395 + 1440,095	3.157755 3.158391 9.999364 $(\varphi_2) = 315° 2' 31{,}0''$	3.1584 9.8498 3.3086 $s_2 = 2035^m$
Hochschule . Wasserturm .	— 24709,800 — 25538,488 + 828,688	— 26868,300 — 29071,474 + 2203,174	2.918391 3.343049 9.575342 $(\varphi_3) = 20° 36' 46{,}7''$	3.3430 9.9713 3.3717 $s = 2353^m$
Hochschule . Burg . . .	— 24709,800 — 25842,799 + 1132,999	— 26868,300 — 24977,399 + 1890,901	3.054230 3.276669 9.777561 $(\varphi_4) = 149° 4' 14{,}2''$	3.2767 9.9334 3.3433 $s = 2204^m$
		II. Nach der Ausgleichung.		
Hochschule . Steuerndieb .	— 24709,769 — 19888,668 — 4821,101	— 26868,306 — 25951,884 — 916,422	3.683146 3.962096 0.721050 $\varphi_1 = 259° 14' 14{,}2''$	
Hochschule . Aegidius . .	— 24709,769 — 23271,813 — 1437,956	— 26868,306 — 28308,395 + 1440,089	3.157746 3.158390 9.999356 $\varphi_2 = 315° 2' 32{,}9''$	
Hochschule . Wasserturm .	— 24709,769 — 25538,488 + 828,719	— 26868,306 — 29071,474 + 2203,168	2.918408 3.343048 9.575360 $\varphi_3 = 20° 36' 49{,}5''$	
Hochschule . Burg . . .	— 24709,769 — 25842,799 + 1133,030	— 26868,306 — 24977,399 — 1890,907	3.054241 3.276671 9.777570 $\varphi_4 = 149° 4' 12{,}3''$	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Vorwärtseinschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Eingeschnittener Punkt Hochschule (Fig. 1. S. 185).

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α (A S. 207)	Näherungs-Richtungwinkel (φ) S. 342	$(\varphi) - \alpha = l$	l^2
1	Steuerndieb	Hochschule	259° 14′ 15,1″	259° 14′ 14,7″	— 0,4″	0,16
2	Aegidius	„	315 2 32,6	315 2 31,0	— 1,6	2,56
3	Wasserturm	„	20 36 50,0	20 36 46,7	— 3,3	10,89
4	Burg	„	149 4 12,3	149 4 14,2	+ 1,9	3,61
			57 50,0	57 46,6	— 3,4	17,22

№	φ	ξ	η Hilfstafel Anhang Seite [10]-[15]	s km	$\frac{\xi}{s} = a$	$\frac{\eta}{s} = b$	l	a^2	b^2	ab +	ab −	al +	al −	bl +	bl −
1	259° 10′	+ 20,3	— 3,9	4,91	+ 4,2	— 0,8	— 0,4	18	1		— 3		— 2	+ 0	
2	315 0	+ 14,6	+ 14,6	2,04	+ 7,2	+ 7,2	— 1,6	52	52	+ 52		— 12			— 12
3	20 40	— 7. 3	+ 19,3	2,35	— 3,1	+ 8,2	— 3,3	10	67		— 25	+ 10			— 27
4	149 0	— 10,6	— 17,7	2,20	— 4,8	— 8,0	+ 1,9	23	64	+ 38		— 9			— 15
								+ 103	+ 184	+ 62		— 13			— 54

	$[a$	$a]$ + 103	$[b$	$b]$ + 62	$[l$	$l]$ −13	Nötigenfalls 3. Probe: $[vv] = [ll] + [a]\delta x + [b]\delta y$	$[b$ + 184	$[a$	$[l$	
				+ 184		−54			+ 62	−54	$b]$
				− 37		+ 8			+ 103	−13	$a]$
						+ 17			− 21	+ 18	
						− 2				+ 17	$l]$
										−16	
$\delta y =$	+ 0,31 dm	$[b\,b.1] =$	+ 147			−46		$[a\,a.1] =$	+ 82	+ 5	$\delta x =$ — 0,06 dm
$\delta y =$	+ 0,031 m					+15				+ 1	$\delta x =$ — 0,006 m
$(y) =$	— 24709,800					−14				− 0	$(x) =$ — 26868,300
$y =$	— 24709,769 m			$[ll.2] =$		+ 1			$[ll.2] =$	+ 1	$x =$ — 26868,306 m

Nr.	Nötigenfalls Probe für $\delta\varphi$: $a\,\delta x + b\,\delta y = \delta\varphi$	$\varphi - (\varphi)$	Gemessene Richtung α (s. oben)	Endgültiger Richtungswinkel φ (S. 342)	$\varphi - \alpha = v$	v^2
1	— 0,3 — 0,2	— 0,5″ — 0,5	259° 14′ 15,1″	259° 14′ 14,2″	— 0,9	0,81
2	— 0,4 + 2,2	+ 1,8 + 1,9	315 2 32,6	315 2 32,9	+ 0,3	0,09
3	+ 0,2 + 2,5	+ 2,7 + 2,8	20 36 50,0	20 36 49,5	— 0,5	0,25
4	+ 0,3 — 2,5	— 2,2 — 1,9	149 4 12,3	149 4 12,3	— 0,0	0,00
		Probe	57 50,0	57 48,9	— 1,1	1,15

$[vv] = [ll.2] = 1{,}2$ $\quad n - 2 = 2$

$\log [vv]$	0.0792	$\log m^2$	9.7782	$\log m^2$	9.7782
$\log (n-2)$	0.3010	$\log [bb.1]$	2.1673	$\log [aa.1]$	1.9138
$\log m^2$	9.7782	$\log m\,y^2$	7.6109	$\log m\,x^2$	7.8644
$\log m$	9.8891	$\log m\,y$	8.8054	$\log m\,x$	8.9322
$m = \pm 0{,}8''$		$m\,y = \pm 0{,}06^{dm}$		$m\,x = \pm 0{,}09^{dm}$	

Schluss-Ergebnis:

Hochschule $y = -24709{,}768^m + 0{,}006^m$ $\quad x = -26868{,}306^m \pm 0{,}009^m$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

man nur in der ganzen Rechnung die Rechenschärfe dem Sinn des Ganzen anpasst. Die Divisionen $\frac{x}{s} = a$ und $\frac{y}{s} = b$ macht man mit dem Rechenschieber oder geradezu, und dann geht die Ausrechnung der a^2 , b^2 , ab u. s. w. in der zweiten Gruppe von S. 443 auch rasch.

Ebenso auch die Elimination nach der Vorschrift von (18) und (19) § 91. S. 339 mit dem Rechenschieber und mit der Probe $[ll.2] = +1$ links und $[ll.2] = +1$ rechts. Die dritte Probe $[ll.2] = [ll] + [al]x + [bl]y$ haben wir nur für den Notfall mit hingeschrieben; sie stimmt in unserem Falle auch genügend.

Nachdem die δy und δx zu den Näherungen (y) und (x) hinzugefügt, und dadurch die endgültigen Coordinaten y und x erhalten sind, wird die zweite untere Hälfte von S. 342 ausgefüllt und die endgültigen φ berechnet, welche dann wieder nach S. 343 rechts unten herüber zu setzen sind, und mit $\varphi - \alpha = v$ und v^2 die Schlussprobe $[vv] = 1{,}75$ geben, welches mit $[ll.2] = 1$ genügend stimmt.

Wenn die Probe $[vv] = [ll.2]$ hinreichend stimmt, (und was *„hinreichend“* ist, hat der Rechner bald im Gefühl), — dann kann man überhaupt die Rechnung abschliessen, nach dem Vordruck unten auf S. 343 noch die mittleren Coordinatenfehler m_y und m_x ausrechnen und das Schluss-Ergebnis herausheben.

Wenn aber die Probe $[vv] = [ll.2]$ *nicht* hinreichend stimmen sollte, so thut man am besten, die $\delta\varphi = a\,\delta x + b\,\delta y$ auszurechnen und mit den $\varphi - (\varphi)$ zu vergleichen, was wir links unten auf S. 343 auch noch beigefügt haben; man macht das natürlich wieder mit dem Rechenschieber, stellt z. B. 0,06 ein und liest nach dem Anblick der Spalte a die 4 Produkte $-0{,}3$ $-0{,}4$ $+0{,}2$ $+0{,}3$ ab, welche unter $a\,\delta x$ eingesetzt sind und ebenso $b\,\delta y$; dass die $\delta\varphi$ gegen $\varphi - (\varphi)$ bis zu 0,3″ differieren, hat nichts zu sagen.

Wenn nun bei nicht stimmendem $[vv] = [ll.2]$ auch die Proben $\varphi - (\varphi) = \delta\varphi$ teilweise nicht stimmen sollten, so ist der Fehler in der trigonometrischen Ausrechnung der (φ) oder φ zu suchen; wenn aber die $\delta\varphi$ genügen und doch $[ll.2]$ von $[vv]$ stark abweicht, so würde man die a , b u. s. w. nachsehen. Kurz die verschiedenen Proben geben so viele Fingerzeige, wo der Fehler etwa zu suchen ist, dass man auch bei Einschleichen eines Fehlers bald das Ganze klar haben wird. Nach unseren Erfahrungen kann man diejenigen Proben, welche auf S. 343 mit *„nötigenfalls“* eingeführt sind, bei einiger Rechenübung missen, und dann füllen wir den Raum links unten auf S. 343 statt mit $a\,\delta x + b\,\delta y = d\varphi$, mit Wiederholung der Punkt-Namen von oben aus.

Bemerkung zum Rechenschieber.

Unser Schema S. 343 ist so eingerichtet, dass keine Zahl mehr nebenbei zu rechnen oder auch nur zu schreiben ist, als auf S. 343 wirklich steht, vorausgesetzt, dass man den Rechenschieber anwendet, mit dem in der That alles dazu geeignete wirklich abgeschoben ist, ohne Gewähr für Schärfe der letzten Stelle. Indessen ist die Rechenschieber-Anwendung keine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Formulars S. 343 selbst. Z. B. in der Elimination ist zu rechnen: $\frac{62}{103}\,62 = 37$ und $\frac{62}{103}\,13 = 8$, was durch *eine* Einstellung 62 über 103 am Schieber gemacht wird; es hindert aber nichts, auf einem Nebenblatte $62 : 103 = 0{,}60$ auszudividieren, und dann $0{,}60 \times 62 = 37$ und $0{,}60 \times 13 = 8$ auszumultiplizieren. Man kann auch *Crelles* Produktentafeln und ähnliche Hilfsmittel anwenden, wir fanden aber, dass alles andere viel zu umständlich ist im Vergleich mit dem gewöhnlichen Rechenschieber.

Hiezu gehören auch schon zum Teil die Bemerkungen über Proben, welche im nächsten § 93. auf S. 349 unten sich finden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 93. Rückwärtseinschneiden mit Richtungen.

Als Gegensatz zu der *Vor*wärts-Einschneidungs-Ausgleichung des vorigen § 92. nehmen wir nun das *Rück*wärts-Einschneiden mit Richtungen, und zwar mit mehr als *drei* Richtungen. Wenn z. B. in Fig. 1. von S. 185 auf dem Punkte Hochschule die fünf Richtungen nach den 5 festen Punkten Schanze, Steuerndieb, Aegidius, Wasserturm und Burg in einem Satze gemessen sind, so sind 2 Richtungen überschüssig, weil durch 3 Richtungen der Standpunkt bestimmt ist.

Wir denken uns daher 3 Richtungen ausgewählt, und mit den Coordinaten der zugehörigen 3 Punkte die Coordinaten des Standpunktes in bekannter Weise berechnet (nach dem Schema unseres II. Bandes, 3. Aufl. S. 300), oder es mögen aus früheren Messungen solche Coordinaten verfügbar sein; kurz wir nehmen wieder an, man habe Näherungs-Coordinaten (x) , (y) des Standpunktes, und wir wollen dieselben durch Zufügen von δx , δy so verbessern, dass die gemessenen Richtungen möglichst geringe Änderungen v erleiden.

Es könnte auf den ersten Blick scheinen, dass dabei die δx , δy als einzige Unbekannte der Ausgleichung auftreten, ähnlich wie beim Vorwärtseinschneiden auch δx , δy die Unbekannten waren, allein wir werden sehen, dass ausser den Coordinaten-Änderungen δx , δy auch eine Verdrehung z des gemessenen Richtungssatzes zu bestimmen sein wird, so dass die Ausgleichung 3 Unbekannte z , δx , δy haben wird.

Ein gemessener Richtungssatz auf einem *neuen* Punkte hat keine bestimmte Orientierung; man kann z. B. irgend eine Richtung $= 0°\ 0'\ 0''$ setzen; aber sobald man eine Näherungsberechnung für die Coordinaten des neuen rückwärts eingeschnittenen Punktes gemacht hat, oder wenn man von anderwärts nur einen genäherten Richtungswinkel zur Verfügung hat, kann man auch den gemessenen Richtungssatz näherungsweise so drehen, dass alle Richtungen nahezu mit den trigonometrischen Richtungswinkeln (Katasterbezeichnung „Neigungen") der betreffenden Strahlen stimmen. Wir wollen dieses sogleich an dem Richtungssatze von Hochschule zeigen, welcher auf S. 186 unter 7. angegeben ist. Daselbst ist Aegidius $= 0°\ 0'\ 0''$ gesetzt, da wir aber aus der Gegenrichtung $315°\ 2'\ 32{,}6''$ von S. 207 oder auch aus der Ausgleichung des vorigen § 92. S. 343 wissen, dass der Strahl Hochschule-Aegidius ungefähr den Richtungswinkel $135°\ 2'\ 30''$ erhalten wird, können wir nun den ganzen Satz 7. von S. 186 (mit Weglassung des hierher nicht gehörigen Dreifaltigkeit) entsprechend verdrehen:

Standpunkt Hochschule

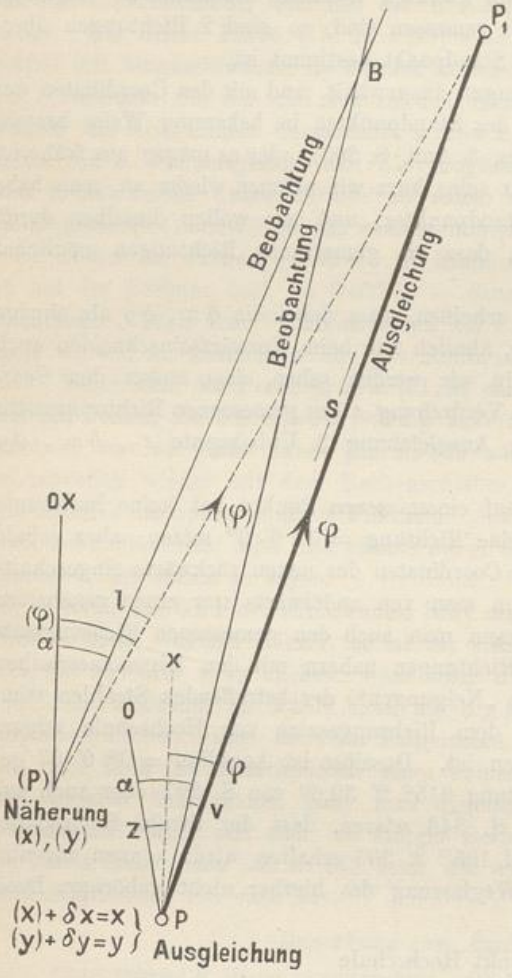
	gemessen (S. 186)	genähert orientiert	
1. Schanze	$249°\ 12'\ 49{,}4''$	$\alpha_1 = 24°\ 15'\ 19{,}4''$	(1)
2. Steuerndieb	$304\ 11\ 45{,}1$	$\alpha_2 = 79\ 14\ 15{,}1$	
3. Aegidius	$0\ 0\ 0{,}0$	$\alpha_3 = 135\ 2\ 30{,}0$	
4. Wasserturm	$65\ 34\ 18{,}8$	$\alpha_4 = 200\ 36\ 48{,}8$	
5. Burg	$194\ 1\ 35{,}2$	$\alpha_5 = 329\ 4\ 5{,}2$	

Diese α haben immer noch den Charakter von *Originalmessungen*, da man jeden Richtungssatz beliebig drehen kann; wir wollen die Bildung solcher α für das Folgende zu Grunde legen, doch ist das nur Bequemlichkeitssache, damit die nun noch nötige Gesamtverdrehung, welche wir mit z bezeichnen, stets *klein* ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir mit Fig. 1. die geometrische Betrachtung zur Bildung der Fehlergleichungen beginnen, wir können dabei aber von allen gemessenen Richtungen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4$ und von allen festen Zielpunkten $P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \ldots$ je nur *einen* in die Figur aufnehmen.

Fig. 1.



Es sei nämlich in Fig. 1. P_1 dieser *eine* feste Zielpunkt; dazu sei (P) der Näherungs-Standpunkt, welcher den Näherungs-Coordinaten (x) , (y) entspricht und P sei der endgültige ausgeglichene Standpunkt mit den Coordinaten $(x) + \delta x = x$ und $(y) + \delta y = y$.

In (P) ziehen wir die x Richtung des Coordinatensystems, von welcher aus die trigonometrischen Richtungswinkel, in unserem Falle genähert (φ), gezählt werden, und da wir näherungsweise orientierte Richtungsmessungen α voraussetzen, nehmen wir die x-Richtung zugleich näherungsweise als Nullrichtung der α, so dass Winkel $X(P)P_1 = (\varphi)$ u. $O(P)B = X(P)B = \alpha$ und, wie gewöhnlich, $(\varphi) - \alpha = l$.

In P ziehen wir auch die x-Richtung, aber davon abweichend die Nullrichtung O der gemessenen Richtungen, welche gegen X nach links die kleine Verdrehung z bilde, und dann haben wir mit den sonst eingeführten Bezeichnungen: $XPP_1 = \varphi$ und $OPB = \alpha$.

Der Beobachtungsstrahl $(P)B$ oder PB wird im Allgemeinen nicht durch den festen Zielpunkt P_1 gehen, sondern links oder rechts davon vorbei, und es ist BPP_1 der scheinbare Fehler v der Beobachtung α.

Sobald man sich alle diese Verhältnisse geometrisch anschaulich klar gemacht hat, wobei stets im Auge zu behalten, dass P_1 nur *ein* Repräsentant der Zielpunkte $P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \ldots$ ist (deren mindestens 4 erforderlich sind, wenn Ausgleichung sein soll) und nachdem die Bedeutung der Bezeichnungen erfasst ist, kann man alsbald die Fehlergleichung aus der Figur entnehmen.

Da von (P) nach P die Coordinatenverschiebungen δx und δy betragen, so at man nach § 89. Fig. 4. S. 328 die Gleichung:

$$\varphi - (\varphi) = d\varphi = + \frac{\sin\varphi}{s}\varrho\,\delta x - \frac{\cos\varphi}{s}\varrho\,\delta y$$

oder wenn man wie früher δx und δy in Decimetern zählt und dabei setzt:

$$+\frac{\sin\varphi}{10\,s}\varrho = a \qquad -\frac{\cos\varphi}{10\,s}\varrho = b$$

so hat man

$$\varphi - (\varphi) = d\varphi = +a\,\delta x + b\,\delta y$$

dabei ist nach geometrischer Anschauung

$$\alpha + v = z + \varphi$$

was mit dem vorhergehenden giebt:

$$v = z + a\,\delta x + b\,\delta y + l \qquad \text{wo } (\varphi) - \alpha = l \tag{2}$$

Will man die Hilfsgrössen ξ und η nach der Hilfstafel S. [10]—[15] des Anhangs benützen, so muss man, weil φ vom veränderlichen diesseitigen Punkte zum festen jenseitigen Punkte gerechnet ist, so rechnen (mit s in Kilometern):

$$a = -\frac{\xi}{s} \qquad b = -\frac{\eta}{s} \tag{3}$$

Nachdem die Form (2) der Fehlergleichung für eine Richtung erkannt ist, wird man leicht vollends die Ausgleichung erlangen. Bei n gemessenen Richtungen ($n > 3$) hat man auch n Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z + a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + l_1 \\ v_2 &= z + a_2\,\delta x + b_2\,\delta y + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= z + a_n\,\delta x + b_n\,\delta y + l_n \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

die dazu gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} n\,z + [a]\,\delta x + [b]\,\delta y + [l] &= 0 \\ \overline{[a]\,z + [aa]\,\delta x + [ab]\,\delta y + [al]} &= 0 \\ [b]\,z + \overline{[ab]\,\delta x} + \underline{[bb]\,\delta y} + [bl] &= 0 \text{ mit } [l\,l] \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wenn man die erste Unbekannte z in gewöhnlicher Weise eliminiert, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned} \left([a\,a] - \frac{[a]}{n}[a]\right)\delta x + \left([a\,b] - \frac{[a]}{n}[b]\right)\delta y + \left([a\,l] - \frac{[a]}{n}[l]\right) &= 0 \\ \left([a\,b] - \frac{[b]}{n}[a]\right)\delta x + \left([b\,b] - \frac{[b]}{n}[b]\right)\delta y + \left([b\,l] - \frac{[b]}{n}[l]\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dafür wollen wir neue Zeichen einführen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} [A\,A]\,\delta x + [A\,B]\,\delta y + [A\,L] &= 0 \\ [A\,B]\,\delta x + [B\,B]\,\delta y + [B\,L] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

damit kann man in gewöhnlicher Weise weiterrechnen und δx , δy bestimmen.

Es giebt aber noch eine andere Form der Elimination von z nach der Methode der reduzierten Fehlergleichungen (§ 26.), welche von Gauss schon im Januar 1822 in den „Astr. Nachr., I. Band S. 82“ für eine solche Ausgleichung angegeben wurde und sich heute allgemeiner Beliebtheit erfreut.

Dieses Verfahren besteht darin, dass man aus den Fehlergleichungen (4) die Summe und das Mittel bildet, oder was dasselbe ist, die erste Normalgleichung von (5) durch n dividiert:

$$0 = z + \frac{[a]}{n}\delta x + \frac{[b]}{n}\delta y + \frac{[l]}{n} \tag{8}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Gleichung zieht man von jeder einzelnen der Gleichungen (4) ab:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \left(a_1 - \frac{[a]}{n}\right)\delta x + \left(b_1 - \frac{[b]}{n}\right)\delta y + \left(l_1 - \frac{[l]}{n}\right) \\ v_2 &= \left(a_2 - \frac{[a]}{n}\right)\delta x + \left(b_2 - \frac{[b]}{n}\right)\delta y + \left(l_2 - \frac{[l]}{n}\right) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Dazu sollen neue Zeichen eingeführt werden, nämlich:

$$a_1 - \frac{[a]}{n} = A_1 \qquad b_1 - \frac{[b]}{n} = B_1 \qquad l_1 - \frac{[l]}{n} = L_1$$
$$a_2 - \frac{[a]}{n} = A_2 \qquad b_2 - \frac{[b]}{n} = B_2 \qquad l_2 - \frac{[l]}{n} = L_2 \text{ u. s. w.}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

damit wird weiter gerechnet:

$$[A\,A] = A_1^2 + A_2^2 + \ldots = a_1^2 - 2\,a_1\frac{[a]}{n} + \frac{[a]^2}{n^2}$$
$$+ a_2^2 - 2\,a_2\frac{[a]}{n} + \frac{[a]^2}{n^2} + \ldots$$

$$[A\,A] = [a\,a] - 2\,[a]\frac{[a]}{n} + \frac{[a]}{n}[a] = [a\,a] - \frac{[a]}{n}[a]$$

Das so berechnete $[A\,A]$ ist also mit dem auf anderem Wege als Zeichen bei (6) und (7) eingeführten $[A\,A]$ identisch; und ebenso ist es mit $[A\,B]$, $[B\,B]$ u. s. w., wie man auf ebenso einfache Art wie soeben bei $[A\,A]$ beweist.

Damit haben wir einen Satz gefunden, welcher im Anschluss an das Vorhergehende so lautet: Bei n Fehlergleichungen von der Form (4) bildet man die Durchschnittswerte der Coefficienten und der Absolutglieder, nämlich mit Einführung der Zeichen $a_0\ b_0\ l_0$:

$$\frac{[a]}{n} = a_0 \qquad \frac{[b]}{n} = b_0 \qquad \frac{[l]}{n} = l_0 \quad (10)$$

dann die Abweichungen von den Mitteln:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_0 &= A_1 & b_1 - b_0 &= B_1 & l_1 - l_0 &= L_1 \\ a_2 - a_0 &= A_2 & b_2 - b_0 &= B_2 & l_2 - l_0 &= L_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Damit rechnet man weiter, wie wenn die Unbekannte z gar nicht da wäre:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_1\,\delta x + B_1\,\delta y + L_1 \\ v_2 &= A_2\,\delta x + B_2\,\delta y + L_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Hieraus die Normalgleichungen (7) mit ihrer Auflösung nach δx und δy und ausserdem mit dem Schlussgliede

$$[L\,L\,.\,2] = [v\,v] \quad (13)$$

Man kann auch noch gewisse Grössen V einführen durch:

$$V = a\,\delta x + b\,\delta y + l \text{ mit } v = V + z \quad (14)$$

dieses ist nach (8) und (9) richtig, und kann auch noch so geschrieben werden:

$$a\,\delta x + b\,\delta y = \delta\varphi \quad , \quad V = \delta\varphi + l \quad , \quad v = V + z \quad (15)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Alles dieses wird am besten klar gemacht durch ein Zahlenbeispiel, das wir auf S. 350—351 in aller Ausführlichkeit durchgerechnet haben.

Als Näherungs-Coordinaten des Punktes Hochschule nehmen wir wieder dieselben wie im vorhergehenden Beispiele von § 92., und mit Zuziehung der Coordinaten der 5 gegebenen Punkte von S. 206 können wir alsbald den ersten Teil von Seite 350 ausfüllen und bis zu (φ_4) herunterrechnen. Dabei haben wir auch die genäherten Entfernungen s mit 4 Stellen des *log.* ausgerechnet für den Fall, dass man kein genügend genaues Netzbild S. 185 habe, um daraus die s auf $0{,}1^{km}$ abzustechen. Wenn man will, kann man auf S. 350 auch die genaue Berechnung der a und b nach dem Muster von § 91. S. 338 anfügen.

Es folgt die Ausfüllung des oberen Teiles von S. 351 mit den gemessenen α nach (1) S. 345 und mit den von S. 350 herübergesetzten (φ), worauf auch l , L und L^2 sich sofort geben.

Auch der zweite Teil von S. 351 bedarf nach Verständnis der Theorie der Gleichungen (10)—(11) kaum weiterer Erklärungen; man kann alles mit dem Rechenschieber, mit der Quadrattafel und fast im Kopfe machen.

Auch die Elimination ist kurzer Hand mit dem Rechenschieber zu machen: $\frac{48}{101}48 = 23$ u. s. w. bis herunter $[L\,L\,.\,2] = 33$ oder 32, und *nötigenfalls* dritte Probe mit 33.

Nachdem $(y) + \delta y = y$ und $(x) + \delta x = x$ zusammengesetzt ist, kommt der untere Teil von 350 und damit der untere Teil von 351 mit α , φ , $\varphi - \alpha$, v bis $[v^2] = 31{,}8$. Wenn dieses mit $[L\,L\,.\,2] = 32$ oder 33 genügend stimmt, so kann man die Rechnung abschliessen, ohne die linksseitig untere Probe mit $a\,\delta x + b\,\delta y$ auf S. 351 noch zu machen; wenn aber $[v\,v]$ schlecht stimmen sollte, so wird man wohl die $a\,\delta x + b\,\delta y$ ausrechnen, natürlich nur mit dem Rechenschieber, indem man 0,20 einstellt und nach dem Anblick der Spalte a sofort $a\,\delta x = +0{,}4''$, $+0{,}8''$ u. s. w. abschiebt u. s. w. Wenn dann $\delta\varphi$ mit $\varphi - (\varphi)$ überall innerhalb $0{,}1'' - 0{,}2''$ stimmt, ist hier alles gut, denn das übrige wird ja in den *Summen* der V u. s. w. schon contolliert. Man kann auch $a_0\,\delta x + b_0\,\delta y + l = -z$ mit dem z als Durchschnitt der V vergleichen u. s. w., kurz alles was in den Gleichungen (12)—(15) enthalten ist, benützen, indessen sind *zu* viele Proben dem erfahrenen Rechner nur Aufenthalt. Wir rechnen gewöhnlich nur mit $[L\,L\,.\,2] = [v^2]$ und benützen den übrigen Probe-Vorrat nur im Notfalle.

Namentlich die 3te Probe $[v\,v] = [L\,L] + [A\,L]\,\delta x + [B\,L]\,\delta y$, welche zwischen der Elimination auf S. 350 nur als vertikal geschriebene Gleichung angedeutet, aber nicht mehr ausgerechnet ist, wird man im Allgemeinen unbenützt lassen.

Was bei der wichtigen Probe $[L\,L\,.\,2] = [v\,v]$ *hinreichendes* Stimmen ist, muss der praktische Rechner nach den Umständen beurteilen; in unserem Falle ist 33, 32 und 31,8 jedenfalls hinreichend stimmend, wenn aber grössere Beträge v vorkommen, so kann diese Probe ziemlich ausschlagen, ohne dass die Rechnung falsch wäre; z. B. $v = 8{,}0$ oder $8{,}2$ geben $v^2 = 64{,}00$ oder $67{,}24$ d. h. bereits um 3,24 verschieden, obgleich 0,2 als Unsicherheit eines v noch wohl erlaubt ist. Erst nach einiger Rechen-Übung wird sich der richtige und rasche Blick einstellen zur Beurteilung, ob die Probe genügend stimmt, oder ob man auch noch die $\delta\varphi$ ausrechnen muss, u. s. w.

Als Probe für die $[A\,A]$, $[A\,B]$ u. s. w. ist auch die zweite Methode hier sogleich zu erwähnen, welche im nächsten § 94. auf S. 352 unten gegeben wird.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnung der Richtungswinkel zu S. 351.

Punkt P Punkt A (S. 206)	y_p	x_p	$log\,\Delta y$ $log\,\Delta x$	Entfernung s mit Spalte rechts
	$y_p - y_a = \Delta y$	$x_p - x_a = \Delta x$	$log\,tang\,(A\,P)$	
I. *Vor der Ausgleichung.*				
Schanze . .	— 23086,933	— 23266,607	3.210283	3.5565
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.556507	9.9599
	+ 1622,867	+ 3601,693	9.653776	3.5966
			$(\varphi_1) = 24°\,15'\,20,0''$	$s_1 = 3950^m$
Steuerndieb .	— 19888,668	— 25951,884	3.683149	3.6831
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	2.962093	9.9923
	+ 4821,132	+ 916 416	0.721056	3.6908
			$(\varphi_2) = 79°\,14'\,14,7''$	$s_2 = 4907^m$
Aegidius . .	— 23271,813	— 28308,395	3.157755	3.1584
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.158391	9.8498
	+ 1437,987	— 1440,095	9.999364	3.3086
			$(\varphi_3) = 135°\,2'\,31,0''$	$s_3 = 2035^m$
Wasserturm .	— 25538,488	— 29071,474	2.918391	3.3430
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.343049	9.9713
	— 828,688	— 2203,174	9.575342	3.3717
			$(\varphi_3) = 200°\,36'\,46,7''$	$s_4 = 2353^m$
Burg . . .	— 25842,799	— 24977,399	3.054230	3.2767
Hochschule .	— 24709,800	— 26868,300	3.276669	9.9334
	— 1132,999	+ 1890,901	9.777561	3.3433
			$(\varphi_4) = 329°\,4'\,14,2''$	$s_5 = 2204^m$
II. *Nach der Ausgleichung.*				
Schanze . .	— 23086,933	— 23266,607	3.210273	
Hochschule .	— 24709,762	— 26868,280	3.556504	
	+ 1622,829	+ 3601,673	9.653769	
			$\varphi_1 = 24°\,15'\,18,8''$	
Steuerndieb .	— 19888,668	— 25951,884	3.683145	
Hochschule .	— 24709,762	— 26868,280	2.962083	
	+ 4821,094	+ 916,396	0.721062	
			$\varphi_2 = 79°\,14'\,15,3''$	
Aegidius . .	— 23271,813	— 28308,395	3.157744	
Hochschule .	— 24709,762	— 26868,280	3.158397	
	+ 1437,949	— 1440,115	9.999347	
			$\varphi_3 = 135°\,2'\,35,0''$	
Wasserturm .	— 25538,488	— 29071,474	2.918411	
Hochschule .	— 24709,762	— 26868,280	3.343055	
	— 828,726	— 2203,194	9.575358	
			$\varphi_4 = 200°\,36'\,49,2''$	
Burg . . .	— 25842,799	— 24977,399	3.054244	
Hochschule .	— 24709,762	— 26868,280	3.276665	
	— 1133,037	+ 1890,881	9.777579	
			$\varphi_5 = 329°\,4'\,10,4''$	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Rückwärtseinschneiden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Eingeschnittener Punkt Hochschule (Fig. 1. S. 185).

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α (S. 345)	Näherungs-Richtungswinkel (φ) S. 350 I	$(\varphi)-\alpha=l$	$l-l_0=L$	L^2
1	Hochschule	Schanze	24° 15′ 19,4″	24° 15′ 20,0″	+0,6	−1,0	1,00
2	„	Steuerndieb	79 14 15,1	79 14 14,7	−0,4	−2,0	4,00
3	„	Aegidius	135 2 30,0	135 2 31,0	+1,0	−0,6	0,36
4	„	Wasserturm	200 36 48,8	200 36 46,7	−2,1	−3,7	13,69
5	„	Burg	329 4 5,2	329 4 14,2	+9,0	+7,4	54,76
		Summe	72 58,5	73 06,6	+ 8,1	+ 0,1	73,81
		Mittel			$l_0=+1,6$		

№	(φ)	Hilfstafel Anhang S. [10]—[15] x	Hilfstafel Anhang S. [10]—[15] y	s km	$-\frac{x}{s}=a$	$-\frac{y}{s}=b$	$a-a_0=A$	$b-b_0=B$	L	A^2	B^2	AB +	AB −	AL +	AL −	BL +	BL −
1	24°20′	− 8,5	+ 18,8	3,95	+2,2	−4,8	+1,1	−5,2	−1,0	1	27		− 6		− 1	+ 5	
2	79 10	− 20,3	+ 3,9	4,91	+4,2	−0,8	+3,1	−1,2	−2,0	10	1		− 4		− 6	+ 2	
3	135 0	− 14,6	− 14,6	2,04	+7,2	+7,2	+6,1	+6,8	−0,6	37	46	+41		− 4			− 4
4	200 40	+ 7,3	− 19,3	2,35	−3,1	+8,2	−4,2	+7,8	−3,7	18	61		−33	+16			−29
5	329 0	+ 10,6	+ 17,7	2,20	−4,8	−8,0	−5,9	−8,4	+7,4	35	71	+50		− 44			−62
			Summen		+ 5,7	+ 1,8	+ 0,2	− 0,2	+ 0,1	+101	+206	+48	−39				−88
			Mittel		+ 1,1	+ 0,4		Probe 0,0									
					$=a_0$	$=b_0$											

	$A]$	$B]$	$L]$		$[B$	$[A$	$[L$	
$[A$	+101	+ 48	− 39		+206	+ 48	− 88	$B]$
$[B$		+206	− 88			+101	− 39	$A]$
		− 23	+ 19			− 11	+ 21	
		$[L$	+ 74				+ 74	$L]$
			− 15				− 38	
$\delta y=$	+ 0,38dm							$\delta x=$ + 0,20dm
$\delta y=$	+ 0,038m	$[BB.1]=$	+ 183	+ 69	$[AA.1]=$	+ 90	− 18	$\delta x=$ + 0,020m
$(y)=$	− 24709,800			+ 59			+ 36	$(x)=$ − 26868,300
$y=$	− 24709,762m			− 26			− 4	$x=$ − 26868,280m
		$[LL.2]=$	+ 33			$[LL.2]=$	+ 32	

Nötigenfalls 3. Probe: $[vv]=[LL]+[AL]\delta x+[BL]\delta y$

Nr.	Nötigenfalls Probe für $\delta\varphi$: $a\,\delta x+b\,\delta y=\delta\varphi$	$\varphi-(\varphi)$	Gemessene Richtung α (s. oben)	Endgültiger Richtungswinkel φ S. 350 II	$\varphi-\alpha=V$	$V+z=v$	v^2
1	+0,4″ −1,8″	−1,4″	−1,2″	24° 15′ 19,4″	24° 15′ 18,3″	− 0,6″	− 2,6″	6,76
2	+0,8 −0,3	+ 0,5	+ 0,6	79 14 15,1	79 14 15,3	+ 0,2	− 1,8	3,24
3	+1,4 +2,7	+ 4,1	+ 4,0	135 2 30,0	135 2 35,0	+ 5,0	+ 3,0	9,00
4	−0,6 +3,1	+ 2,5	+ 2,5	200 36 48,8	200 36 49,2	+ 0,4	− 1,6	2,56
5	−1,0 −3,0	− 4,0	− 3,8	329 4 5,2	329 4 10,4	+ 5,2	+ 3,2	10,24
Summe	+1,0 +0,7			118,5	128,7	+ 10,2	+ 0,2	31,80
Mittel	+0,22 +0,15					+ 2,0	soll 0,0	
	$a_0\,\delta x+b_0\,\delta y+l_0=-z=+2,0$					$=-z$		

$[vv]=[ll.2]=32$ $\quad n-3=2$

$\log[vv]$	1.5051	$\log m^2$	1.2041	$\log m^2$	1.2041
$\log[n-3]$	0.3010	$\log[BB.1]$	2.2625	$\log[AA.1]$	1.9542
$\log m^2$	1.2041	$\log m\,y^2$	8.9416	$\log m\,x^2$	9.2499
$\log m$	0.6020	$\log m\,y$	9.4708	$\log m\,x$	9.6250
$m=\pm 4,0''$		$m\,y\pm 0,30^{dm}$		$m\,x=\pm 0,42^{dm}$	

Schluss-Ergebnis:

Hochschule $y=-24709,762^m \pm 0,030^m$ $\quad x=-26868,280^m \pm 0,042^m$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 94. Elimination von z beim Rückwärtseinschneiden mit Richtungen.

Die Fehlergleichungen für Rückwärtseinschneiden mit überzähligen Richtungen haben nach (4) des vorigen § 93. S. 347 diese Form:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z + a_1\,\delta x + b_1\,\delta y + l_1 \\ v_2 &= z + a_2\,\delta x + b_2\,\delta y + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei ausser den Coordinaten-Verbesserungen δx und δy auch eine Satzverdrehung z als dritte Unbekannte auftritt. Die Normalgleichungen sind für n Richtungen in abgekürzter Schreibweise (nach S. 80):

$$\left.\begin{aligned} \underline{n\,z} + [a]\,\delta x + [b]\,\delta y + [l] &= 0 \\ + \underline{[a\,a]\,\delta x} + [a\,b]\,\delta y + [a\,l] &= 0 \\ + \underline{[b\,b]\,\delta y} + [b\,l] &= 0 \\ + \underline{[l\,l]} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Wenn man hier wieder wie in § 93. die Mittelwerte der a u. s. w. einführt, nämlich:

$$\frac{[a]}{n} = a_0 \qquad \frac{[b]}{n} = b_0 \qquad \frac{[l]}{n} = l_0 \quad (3)$$

so erhält man aus (2) nach Elimination von z ein erstmals reduziertes System:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[A\,A]\,\delta x} + [A\,B]\,\delta y + [A\,L] &= 0 \\ \underline{[B\,B]\,\delta y} + [B\,L] &= 0 \\ \underline{[L\,L]} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wobei die einzelnen Coefficienten folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} [A\,A] &= [a\,a] - a_0\,[a] \\ [A\,B] &= [a\,b] - a_0\,[b] \quad \text{oder} = [a\,b] - [a]\,b_0 \\ [A\,L] &= [a\,l] - a_0\,[l] \quad \text{oder} = [a\,l] - [a]\,l_0 \\ [B\,B] &= [b\,b] - b_0\,[b] \\ [B\,L] &= [b\,l] - b_0\,[l] \quad \text{oder} = [b\,l] - [b]\,l_0 \\ [L\,L] &= [l\,l] - l_0\,[l] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Dieses alles ist sachlich nichts anderes als was schon in (6)—(7) S. 347 des vorigen § 93. enthalten ist; wir wollen nun aber die Formeln (4) geradezu anwenden und dazu die a , b , l des vorigen Beispiels von S. 351 nochmals vornehmen:

Num.	a	b	l	a^2	b^2	l^2	$a\,b$	$a\,l$	$b\,l$
1	+2,2	−4,8	+0,6	5	23	0,4	−11	+1	−3
2	+4,2	−0,8	−0,4	18	1	0,0	−3	−2	+0
3	+7,2	+7,2	+1,0	52	52	1,0	+52	+7	+7
4	−3,1	+8,2	−2,1	10	67	4,4	−25	+7	−17
5	−4,8	−8,0	+9,0	23	64	81,0	+38	−43	−72
Summen	+5,7	+1,8	+8,1	+108	+207	+86,8	+51	−30	−85
Mittel	+1,1	+0,4	+1,6						
	$=a_0$	$=b_0$	$=l_0$						
Abzüge $-a_0\,[a]$ u. s. w.				−6	−1	−13,0	−2	−9	−3
Summen $[A\,A]$, $[B\,B]$ u. s. w.				+102	+206	+73,8	+49	−39	−88
Zur Vergleichung S. 351.				+101	+206	+73,8	+48	−39	−88
				$[A\,A]$	$[B\,B]$	$[L\,L]$	$[A\,B]$	$[A\,L]$	$[B\,L]$

(6)

Man hat also innerhalb der unvermeidlichen Abrundungs-Unsicherheit wieder dieselben Summen $[A\,A] = 101$, $[A\,B] = +48$ u. s. w., wie bei der Rechnung von § 93. S. 351.

Wenn man beide Rechnungsarten vergleicht, so hat die erste von § 93. S. 351 den Vorzug der Anschaulichkeit und der Form einer kaum wieder zu vergessenden glatten Regel, und heutzutage der allgemeinen Einführung, aber an Rechenarbeit wird durch jenes Mittelbildungsverfahren $A = a - a_0$ u. s. w. nichts gespart im Vergleich mit dem zweiten Verfahren; im Gegenteil, die Rechnung nach dem im vorstehenden (5) dargelegten Verfahren ist bequemer und weniger umfangreich, (mit 8 Spalten weniger), und hat auch noch andere Vorteile. Wenn in einem Coefficienten a , b oder l ein Fehler gefunden wird, so wird dadurch die *ganze* Rechnung in A , B oder L beim ersten Verfahren umgeworfen, beim zweiten Verfahren nicht, oder wenn einzelne Richtungen vorwärts *und* rückwärts in Ausgleichungen vorkommen, wie z. B. Steuerndieb, Aegidius, Wasserturm, Burg in S. 343 und S. 351, so kann man die zugehörigen a^2 , b^2 , $a\,b$ aus der einen Ausgleichung in die andere übertragen, wenn nach dem zweiten Verfahren gerechnet wird, nicht aber bei dem ersten Verfahren.

Auch einen kleinen Genauigkeitsvorzug hat das zweite Verfahren, insofern Abrundungsfehler bei der Differenzenbildung $A = a - a_0$ u. s. w. fortfallen. Wenn nämlich die Division $\frac{[a]}{n} = a_0$ nicht aufgeht, sondern in die Nähe von 0,5 der letzten beizubehaltenden Einheit fällt, so wird ein Teil der A um nahe 0,5 (absolut) zu gross, die andern zu klein, und das bringt merkbare Fehler in $[A\,A]$, $[A\,B]$ u. s. w., welche beim zweiten Verfahren nicht auftreten.

Negative Gewichte. Es giebt noch eine dritte Form zur Bildung der Summen $[A\,A]$ u. s. w., welche allerdings in der Zahlenausrechnung sich von der vorigen kaum unterscheidet. Man bekommt die Summen $[A\,A]$ u. s. w. auch dadurch, dass man zu den ursprünglichen Fehlergleichungen, ohne z, die Summe aller Fehlergleichungen als eine fingierte Fehlergleichung mit dem Gewichte $-\frac{1}{n}$, also mit fingiertem negativem Gewichte hinzunimmt; denn man bekommt dann:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots \quad a_n^2 + \left(-\frac{1}{n}\right)[a]^2 = [a\,a] - \frac{[a]}{n}\,[a]$$

Dieses stimmt mit (3) und (5) sachlich überein, und unterscheidet sich nur durch die Ausdrucksweise. Diese Form ist von General Schreiber bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme eingeführt worden (vgl. die Schreiberschen Regeln in dem späteren § 103.).

Statt ein negatives Gewicht einzuführen, kann man auch die Summen $[a]$, $[b]$ u. s. w. mit der Gewichtswurzel $\sqrt{\frac{1}{n}}$ multiplizieren, und dann die Coefficienten einfach quadrieren und multiplizieren, die Beträge aber immer *negativ* in Rechnung bringen.

Oder man kann auch, wenn etwa die Mittelwerte $\frac{[a]}{n} = a_0$ u. s. w. bereits gebildet sind, diese mit $\sqrt{n}$ multiplizieren, und dann wie *ein*gewichtig weiter behandeln, jedoch negativ zu der übrigen Summe hinzunehmen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hiezu hat man:

$n =$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sqrt{n}$	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,646	2,828	3,000	3,162
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	0,707	0,577	0,500	0,447	0,408	0,378	0,354	0,333	0,316

Im vorigen Beispiel hatten wir $[a] = +5{,}7$, $[b] = +1{,}8$, $[l] = +8{,}1$

dazu $n = 5$ also $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}447$ 0,447 0,447

die Produkte: . . . . . $a' = 2{,}55$ $b' = 0{,}80$ 3,62

hieraus die 6 Quadrate und Produkte:

$$a'^2 = 6{,}5 \quad b'^2 = 0{,}6 \quad l'^2 = 13{,}1 \quad a'\,b' = 2{,}0 \quad a'\,l' = 9{,}2 \quad b'\,l' = 2{,}9$$

Das sind dieselben Abzüge wie oben bei (6) S. 352.

Nach allen Vergleichungen halten wir die Rechnungsform (6) für die beste, wir wenden sie bei unseren neueren praktischen Arbeiten an und haben sie nur deswegen nicht an die Spitze in das Schema von S. 351 gestellt, weil die Form $a - a_0 = A$ u. s. w. sich am meisten eingebürgert hat, und am anschaulichsten ist, und weil, mag man auch die $[A\,A]$ u. s. w. anders rechnen, doch die V und v nach S. 351 zu rechnen kaum zu umgehen ist, denn die Fehlerverteilung mit den v will man zur Beurteilung des Gesamterfolges vor Augen haben.

Verschiedene Richtungssätze.

Wenn mehrere volle gleichartige Sätze von Richtungen gemessen vorliegen, so werden dieselben in ein Mittel vereinigt, welches als *ein* voller Satz in der Weise zum Rückwärtseinschneiden benützt wird, wie im Vorstehenden angegeben ist.

Man kann nun weiter den Fall betrachten, dass mehrere *unvollständige* Richtungssätze gemessen sind.

Jeder Richtungssatz giebt ein Fehlergleichungssystem mit einer Orientierungs-Unbekannten z, und die verschiedenen Sätze haben auch verschiedene solche Unbekannte $z_1\ z_2\ z_3 \ldots$

Man kann nun die Gesamtheit aller zu diesen Messungen gehörigen Fehlergleichungen geradezu nach den allgemeinen Regeln für vermittelnde Beobachtungen behandeln, und zwar hat man bei n Richtungssätzen die folgenden $2 + n$ Unbekannten:

$$\delta_x\ ,\ \delta_y \text{ und } z_1\ z_2\ z_3 \ldots z_n$$

Man kann daran denken, in jedem einzelnen Richtungssatze, bzw. in jeder Fehlergleichungsgruppe, welche zu einem Richtungssatze gehört, das betreffende z nach § 93. durch Mittelbildung zu eliminieren; eine solche Ausgleichung hat Herr *Petzold* in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 227 bis 234, behandelt. Indessen ist (nach einer Erörterung von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 454) dieses Verfahren nicht bequem. Man kommt in dem Falle mehrerer unvollständiger Sätze rascher zum Ziel, wenn man mit den ursprünglichen Fehlergleichungen, (deren jede Gruppe ein besonderes z enthält), die Normalgleichungen bildet, weil die in verschiedenen Sätzen auftretenden ursprünglichen Fehlergleichungen für gleiche Zielpunkte gleiche Coefficienten a , b haben, die umgeformten aber nicht.

Dieses alles bezieht sich aber nur auf streng theoretische Ausgleichung.

Für praktische Fälle, in welchen die Annahme, dass die gegebenen Punkte fehlerfrei seien, doch niemals völlig erfüllt ist, wird es immer genügen, zerstreute Satzbeobachtungen zuerst auf der Station für sich auszugleichen, etwa nach der Näherungsmethode unseres früheren § 69., und das Ergebnis dieser Ausgleichung in die weitere Ausgleichung wie *einen* Richtungssatz mit einer Orientierungs-Unbekannten z einzuführen, d. h. dann nach § 93. zu verfahren.

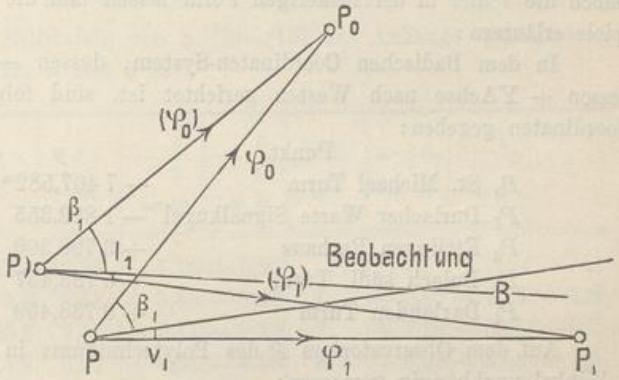
Ähnliche Betrachtungen gehören auch zum Rückwärtseinschneiden mit *Winkel*messungen, von welchen am Schlusse von § 95. die Rede sein wird.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 95. Rückwärtseinschneiden mit Winkeln.

Wenn einzelne Winkel, mit anderen Worten, verschiedene Sätze mit je nur *zwei* Richtungen zum Rückwärtseinschneiden gegen mehr als 3 Punkte gemessen sind, so wird die Ausgleichung theoretisch einfacher; eine Orientierungs-Unbekannte z braucht dann nicht bestimmt zu werden. Trotzdem bringen wir die Ausgleichung für Rückwärtseinschneiden mit Winkeln hier erst *nach* der Richtungsausgleichung, weil die laufende Praxis heutzutage fast nur mit Richtungen zu thun hat, und es deshalb angezeigt war, das Verfahren für die laufende Praxis in § 93. voranzuzustellen.

Fig. 1.



Mit Fig. 1. zur Winkelbehandlung übergehend betrachten wir von allen gegebenen Punkten nur zwei, nämlich P_0 und P_1 und es sei wie bisher (P) der Näherungspunkt und P der ausgeglichene Rückwärtsschnittpunkt, zwischen welch beiden Punkten eine Coordinatenverschiebung δx , δy besteht. Die Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigungen") sind genähert (φ_0) , (φ_1) und ausgeglichen φ_0 , φ_1; der zwischen P_0 und P_1 gemessene Winkel sei $= \beta_1$ und zwar $P_0 (P) B = \beta_1$ und $P_0 P B = \beta_1$, indem angenommen wird, der Winkel β_1 sei zu klein, treffe also mit B links von P_1 vorbei.

Damit kann man aus der Figur ablesen:

in (P): $$(\varphi_1) - (\varphi_0) = \beta_1 + l_1 \qquad (1)$$

in P: $$\varphi_1 - \varphi_0 = \beta_1 + v_1 \qquad (2)$$

Es ist aber nach der Grundformel von § 89. Fig. 4. S. 328:

$$\varphi_0 - (\varphi_0) = -a_0 \delta x - b_0 \delta y \qquad (3)$$

und $$\varphi_1 - (\varphi_1) = -a_1 \delta x - b_1 \delta y \qquad (4)$$

wenn a und b die Richtungs-Coefficienten nach (18) § 89. S. 329 sind.

Aus den vorstehenden Gleichungen zusammen findet man:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -(a_1 - a_0)\delta x - (b_1 - b_0)\delta y + l_1 \\ &\text{wo } l_1 = (\varphi_1) - (\varphi_0) - \beta_1 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

für jeden weiteren Winkel bekommt man eine ähnliche Gleichung, also zusammen bei $n+1$ Zielpunkten in der Anordnung der nachfolgenden Fig. 2.:

$$\begin{aligned} v_1 &= -(a_1 - a_0)\delta x - (b_1 - b_0)\delta y + l_1 \\ v_2 &= -(a_2 - a_0)\delta x - (b_2 - b_0)\delta y + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= -(a_n - a_0)\delta x - (b_n - b_0)\delta y + l_n \end{aligned}$$

Setzt man etwa $-(a_1 - a_0) = A_1$ u. s. w. so hat man:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 \delta x + B_1 \delta y + l_1 \\ v_2 &= A_2 \delta x + B_2 \delta y + l_2 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also die Normalgleichungen:

$$[A\,A]\,\delta x + [A\,B]\,\delta y + [A\,l] = 0$$
$$[A\,B]\,\delta x + [B\,B]\,\delta y + [B\,l] = 0 \text{ mit } [l\,l]$$

Alles übrige ist wie gewöhnlich.

Man kann auch die Absolutglieder l in Form von Differenzen $l_1 - l_0$ u. s. w. darstellen, so dass dann die Ausgleichung genau die *Form* der Richtungsausgleichung von § 93. S. 351 annimmt, nur mit anderen Bedeutungen der a_0 , b_0 , l_0; wir wollen jedoch die l hier in der bisherigen Form lassen und die Sache an einem Zahlenbeispiele erläutern:

In dem Badischen Coordinaten-System, dessen $+X$ Achse nach Süden, und dessen $+Y$ Achse nach Westen gerichtet ist, sind folgende 5 Punkte durch ihre Coordinaten gegeben:

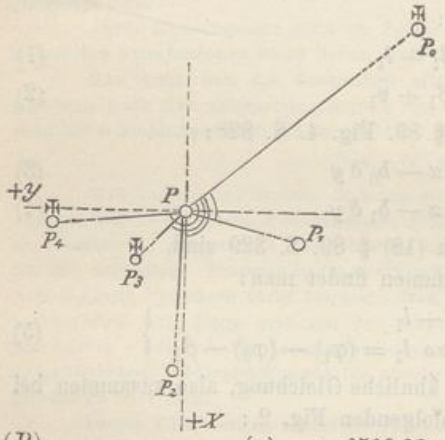
Punkt	y	x
P_0 St. Michael Turm	$-7\,407{,}582^m$	$+44\,332{,}254^m$
P_1 Durlacher Warte Signalkugel	$-1\,892{,}355$	$+54\,452{,}145$
P_2 Ettlingen Rathaus	$+3\,798{,}300$	$+60\,598{,}479$
P_3 Bulach südl. Turm	$+5\,783{,}457$	$+55\,397{,}802$
P_4 Daxlanden Turm	$+9\,738{,}459$	$+53\,469{,}087$

(1)

Auf dem Observatorium P des Polytechnikums in Karlsruhe wurden folgende 4 Winkel unabhängig gemessen:

$$\left.\begin{aligned} P_0\,P\,P_1 = \beta_1 &= 53^\circ\,11'\,21{,}0'' \\ P_0\,P\,P_2 = \beta_2 &= 130\;\;48\;\;5{,}0 \\ P_0\,P\,P_3 = \beta_3 &= 172\;\;39\;\;17{,}5 \\ P_0\,P\,P_4 = \beta_4 &= 214\;\;43\;\;17{,}8 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Fig. 2.
Massstab 1 : 400 000.



Bei allen diesen 4 Winkeln wurde St. Michael, P_0, als linkseitiger Zielpunkt genommen. Die Messungen wurden nach der Repetitionsmethode gemacht; keine Einstellung oder Ablesung eines Winkels wird für einen andern Winkel wieder benützt, d. h. die 4 gemessenen Winkel sind gänzlich von einander unabhängig.

Der Umstand, dass wir hiebei für alle Winkel *einen* gemeinschaftlichen Anfangsstrahl $P\,P_0$ genommen haben, erleichtert die Übersichtlichkeit, ist aber für solche Winkelausgleichung nicht wesentlich.

Die Näherungs-Coordinaten für den Standpunkt sind:

$$(P) \qquad (y) = +3508{,}38^m \qquad (x) = +53046{,}42^m \qquad (3)$$

Mit diesen Näherungswerten wurden alle Richtungswinkel (φ) und gleichzeitig auch die Entfernungen s berechnet:

von (P) nach P_0	$(\varphi_0) = 231^\circ\,23'\,59{,}2''$	$\log s_0 = 4.14512$	$s_0 = 13{,}97$	Kilometer
„ (P) „ P_1	$(\varphi_1) = 284\;\;35\;\;22{,}0$	$\log s_1 = 3.74669$	$s_1 = 5{,}58$	„
„ (P) „ P_2	$(\varphi_2) = 2\;\;11\;\;54{,}5$	$\log s_2 = 3.87838$	$s_2 = 7{,}56$	„
„ (P) „ P_3	$(\varphi_3) = 44\;\;3\;\;18{,}3$	$\log s_3 = 3.51479$	$s_3 = 3{,}27$	„
„ (P) „ P_4	$(\varphi_4) = 86\;\;7\;\;7{,}8$	$\log s_4 = 3.79549$	$s_4 = 6{,}24$	„

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aus diesen Näherungen (φ) mit den gemessenen Winkeln β von (2) berechnet man die Absolutglieder l der Fehlergleichungen:

	(φ)	$(\varphi_n)-(\varphi_0)=\Delta(\varphi)$	β	$\Delta(\varphi)-\beta=l$
0.	231° 23′ 59,2″	. . . . .	. . . . .	. . .
1.	284 35 22,0	53° 11′ 22,8″	53° 11′ 21,0″	+ 1,8″
2.	2 11 54,5	130 47 55,3	130 48 5,0	− 9,7
3.	44 3 18,3	172 39 19,1	172 39 17,5	+ 1,6
4.	86 7 7,8	214 43 8,6	214 43 17,8	− 9,2

Bei Anwendung der Hilfstafeln von S. [8]—[15] des Anhangs gestaltet sich die Rechnung der Coefficienten a und b so:

Punkt	(φ)	Hilfstafel $\mathfrak{x}$	Hilfstafel $\mathfrak{y}$	s km	$-\frac{\mathfrak{x}}{s}=a$	$-\frac{\mathfrak{y}}{s}=b$	Winkel	$a-a_0=A$	$b-b_0=B$	l
P_0	231,4°	+ 16,1	− 12,9	13,97	− 1,15	+ 0,92	. . .	. . .	. . .	. . .
P_1	284,6°	+ 20,0	+ 5,2	5,58	− 3,58	− 0,93	1.	− 2,43	− 1,85	+ 1,8
P_2	2,2°	− 0,8	+ 20,6	7,56	+ 0,11	− 2,73	2.	+ 1,26	− 3,65	− 9,7
P_3	44,1°	− 14,3	+ 14,8	3,27	+ 4,38	− 4,53	3.	+ 5,53	− 5,45	+ 1,6
P_4	86,1°	− 20,6	+ 1,4	6,24	+ 3,30	− 0,22	4.	+ 4,45	− 1,14	− 9,2

Hieraus die Coefficienten der Normalgleichungen:

$$[A\,A] = +57{,}9 \qquad [A\,B] = -35{,}3 \qquad [A\,l] = -48{,}7$$
$$[B\,B] = +47{,}7 \qquad [B\,l] = +33{,}8$$
$$[l\,l] = +184{,}5$$

Alles weitere wie auf S. 351, so dass man erhält:

Näherung (P)	$(y) = +3\,508{,}380^m$	$(x) = +53\,046{,}420^m$
Verbesserungen	$-\ 0{,}016^m \pm 0{,}166^m$	$+\ 0{,}075^m \pm 0{,}150^m$
Ausgleichungs-Ergebnis	$y = +3\,508{,}364^m \pm 0{,}166^m$	$x = +53\,046{,}495^m \pm 0{,}150^m$ (4)

Mittlerer Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{[l\,l.\,2]}{n-2}} = \sqrt{\frac{143{,}0}{4-2}} = \pm 8{,}5''$$

Mit den endgültigen Coordinaten y, x berechnet man alle Richtungswinkel φ von Neuem und findet:

	φ	$\varphi-\varphi_0=\Delta\varphi$	β	$\Delta\varphi-\beta=v$	v^2
0.	231° 23′ 58,2″	. . . . .	. . . . .	. .	. .
1.	284 35 19,5	53° 11′ 21,3″	53° 11′ 21,0″	+ 0,3	0,09
2.	2 11 55,0	130 47 56,8	130 48 5,0	− 8,2	67,24
3.	44 3 22,3	172 39 24,1	172 39 17,5	+ 6,6	43,56
4.	86 7 10,3	214 43 12,1	214 43 17,8	− 5,7	32,49
					$[v^2] = 143{,}38$

Da diese Summe $[v^2] = 143{,}4$ mit dem schon eben erwähnten Werte $[l\,l.\,2]$ der Elimination stimmt, ist die ganze Rechnung genügend kontrolliert.

Die Anordnung der Winkel mit einem gemeinsamen Anfangspunkte P_0, wie

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

in Fig. 2. angenommen ist, hat sich im vorliegenden Falle empfohlen, weil jener Punkt, St. Michael, nach Entfernung und Beleuchtung der beste war.

Der Umstand, dass wir hiebei für alle Winkel *einen* gemeinschaftlichen Anfangsstrahl PP_0 genommen haben, erleichtert die Übersichtlichkeit, ist aber für solche Winkelausgleichung nicht wesentlich.

Man könnte auch bei 5 Strahlen mehr als 4 Winkel messen, und hätte dann dieselben alle einzeln in die Ausgleichung einzuführen, z. B. wenn gemessen wären die 7 Winkel

$$\left.\begin{array}{cccc} P_0P_1 & P_0P_2 & P_0P_3 & \cdot\ \cdot \\ & P_1P_2 & P_1P_3 & P_1P_4 \\ & & \cdot\ \cdot & P_3P_4 \end{array}\right\} \quad (5)$$

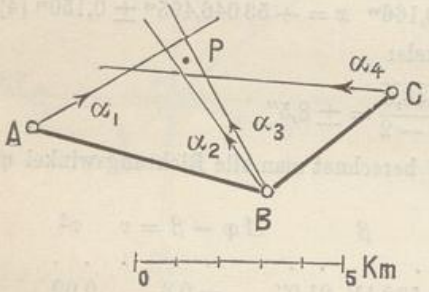
so würde man 7 entsprechende Fehlergleichungen mit $a_1 - a_0$, $a_2 - a_0 \ldots a_4 - a_3$ u. s. w. erhalten.

Indessen in der laufenden Praxis würde man so kaum verfahren. Wenn wirklich 7 einzelne Winkel zwischen 5 Punkten gemessen wären, so würde man vielleicht kurzer Hand die 5 Winkel auf der Station in sich ausgleichen (etwa nach § 69.) und das Ergebnis als einen Richtungssatz nach § 93. weiter behandeln. Das wäre theoretisch nicht streng, aber mit Rücksicht auf Nebenumstände, (vgl. den folgenden § 96.) praktisch genügend. Sollte man aber aus irgend welchen Gründen veranlasst sein, einen Fall wie den vorstehenden bei (5) mit Winkeln streng theoretisch zu behandeln, so wäre das nach dem vorhergehenden leicht zu machen.

§ 96. Richtungsanschluss an feste Strahlen.

Wir müssen nochmals auf den einfachsten Fall des Vorwärtseinschneidens von § 91. mit Fig. 1. S. 335 zurückkommen. Dort wurde durch je *einen* Winkel β ein neuer Strahl an einen alten festen Strahl angelegt, und da der Richtungswinkel des alten Strahles fest gegeben war, so wurde durch das Anlegen auch der Richtungswinkel des neuen Strahles bestimmt, und zwar mit derselben Genauigkeit, welche der Winkelmessung selbst anhaftet.

Fig. 1.
Massstab 1 : 200 000.



Wir wollen dieses mit Fig. 1. weiter verfolgen. Gegeben sind die Coordinaten dreier Punkte:

	y	x	
A	$-44\,904{,}30^m$	$+15\,967{,}50^m$	(1)
B	$-39\,554{,}90$	$+14\,032{,}80$	
C	$-36\,479{,}40$	$+16\,760{,}50$	

Für einen neu zu bestimmenden Punkt werden Näherungs-Coordinaten angenommen:

Näherung (P)	$-41\,316{,}18$	$+17\,493{,}05$	(2)

Zur Bestimmung dieses Punktes sind 4 Winkel gemessen:

Winkel	$BAP = \beta_1 = 317°\ 4'\ 49''$		(3)
„	$ABP = \beta_2 = 43\ 8\ 43$		
„	$CBP = \beta_3 = 284\ 35\ 50$		
„	$BCP = \beta_4 = 50\ 10\ 49$		

Aus den Coordinaten (1) rechnet man die fest gegebenen Richtungswinkel:

$$\left.\begin{array}{l} [A\,B] = 109^\circ\,53'\;\;0'' \text{ oder } [B\,A] = 289^\circ\,53'\;\;0'' \\ [B\,C] = \;\;48\;\;25\;\;47\;\;\text{„}\;\;[C\,B] = 228\;\;25\;\;47 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Dabei rechnet man auch sogleich die Näherungs-Richtungswinkel (φ) und die Entfernungen s:

$$\left.\begin{array}{l} (A\,P) = \;\;66^\circ\,57'\;\;59'' = (\varphi_1) \qquad\qquad \text{mit } s_1 = 3{,}90^{km} \\ (B\,P) = 333\;\;1\;\;25\;\;= (\varphi_2) \text{ und } = (\varphi_3)\;\;\text{„}\;\;s_2 = 3{,}88^{km} \\ (C\,P) = 278\;\;36\;\;44\;\;= (\varphi_4) \qquad\qquad \text{„}\;\;s_3 = 4{,}89^{km} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Wenn man die gemessenen Winkel β nach (3) an die festen Richtungen (4) anlegt, so bekommt man die Messungsrichtungen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{von } A \text{ nach } P : [A\,B] + \beta_1 = \alpha_1 = \;\;66^\circ\,57'\;\;49'' \\ \left\{\begin{array}{l} B\;\;\text{„}\;\;P : [B\,A] + \beta_2 = \alpha_2 = 333\;\;1\;\;43 \\ B\;\;\text{„}\;\;P : [B\,C] + \beta_3 = \alpha_3 = 333\;\;1\;\;37 \end{array}\right. \\ C\;\;\text{„}\;\;P : [C\,B] + \beta_4 = \alpha_4 = 278\;\;36\;\;36 \end{array}\right\} \quad (6)$$

Hierauf kann man eine Ausgleichung nach dem Muster von § 92. S. 343 gründen, und zwar mit folgenden 4 Fehlergleichungen (die Coefficienten auf 1 Stelle abgerundet):

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \;\;-5\,\delta x \;\;+2\,\delta y \;\;+10'' \\ \left\{\begin{array}{l} v_2 = \;\;+2\,\delta x \;\;+5\,\delta y \;\;-18 \\ v_3 = \;\;+2\,\delta x \;\;+5\,\delta y \;\;-12 \end{array}\right. \\ v_4 = \;\;+4\,\delta x \;\;+1\,\delta y \;\;+\;8 \end{array}\right\} \quad (7)$$

Die Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{l} +49\,\delta x + 14\,\delta y - \;\;78 = 0 \\ +\underline{14\,\delta x} + \underline{55\,\delta y} - 122 = 0 \text{ mit } [l\,l] = \underline{\underline{632}} \end{array}\right\} \quad (8)$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{hieraus} & \delta y = +2{,}0^{dm} & \delta x = +1{,}0^{dm} & [l\,l\,.\,2] = 313 \\ (p_y = 51) & \pm 1{,}8^{dm}\;(p_x = 45) & \pm 1{,}9^{dm} & \end{array}\right\} \quad (9)$$

Also die ausgeglichenen Coordinaten selbst, mit Zufügung dieser δy und δx zu den Näherungen (2):

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ausgleichung:} & P\;,\; y = -41\,315{,}98^m & x = +17\,493{,}15^m \\ & \pm\,0{,}18 & +\,0{,}19 \end{array}\right\} \quad (10)$$

Die Ausrechnung der endgültigen φ und der v nach dem Muster von § 92. S. 343 unten giebt:

$$v_1 = +9'' \qquad v_2 = -6'' \qquad v_3 = 0'' \qquad v_4 = +14'' \quad (11)$$

daraus $[v\,v] = 313$ in genügender Übereinstimmung mit $[l\,l\,.\,2] = 313$ aus der Elimination. Der mittlere Fehler einer Messung wird:

$$m = \sqrt{\frac{313}{4-2}} = \pm 13'' \quad (12)$$

Diese ganze Rechnung unterscheidet sich nun durch gar nichts von den Rechnungen des § 91. oder § 92. als durch den zunächst gleichgültigen Umstand, dass die zwei Fehlergleichungen für v_2 und v_3 *gleiche* Coefficienten a und b haben (dabei aber ungleiche Absolutglieder).

Es ist leicht einzusehen, dass man statt dieser zwei Fehlergleichungen v_2 und v_3 auch *eine* Fehlergleichung nehmen könnte, nämlich statt (7):

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \;\;= -5\,\delta x + 2\,\delta y + 10'' \\ v_{23} = +2\,\delta x + 5\,\delta y - 15'' \text{ mit Gewicht} = 2 \\ v_4 \;\;= +4\,\delta x + 1\,\delta y + \;\;8'' \end{array}\right\} \quad (7^*)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es muss hiebei v_{23} mit doppeltem Gewichte eingeführt werden im Vergleich mit den Gewichten von v_1 und v_4.

Rechnet man damit weiter, so bekommt man zwar wieder dieselben Normalgleichungen (8) wie im ersten Falle, aber ein anderes Glied $[l\,l]$, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} &+49\,\delta x + 14\,\delta y - 78 = 0 \\ &+14\,\delta x + 55\,\delta y - 122 = 0 \text{ mit } [l\,l] = 614 \end{aligned}\right\} \quad (8^*)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{hieraus} \quad \delta y = +2{,}0^{dm} \qquad \delta x = +1{,}0^{dm} \qquad [l\,l\,.\,2] = 294 \\ &(p_y = 51) \quad \pm 2{,}4 \quad (p_x = 49) \quad \pm 2{,}6 \end{aligned}\right\} \quad (9^*)$$

die ausgeglichenen Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} y &= -41\,315{,}98^m \qquad x = +17\,493{,}15^m \\ &\pm 0{,}24 \qquad\qquad \pm 0{,}26 \end{aligned}\right\} \quad (10^*)$$

Die endgültigen φ werden auch dieselben, wie im ersten Falle, geben aber teilweise andere v, nämlich:

$$v_1 = +9'' \qquad v_{23} = -3'' \qquad v_4 = +14'' \quad (11^*)$$

also

$$[p\,v\,v] = 81 + 9 + 9 + 196 = 295$$

$$m = \sqrt{\frac{295}{3-2}} = \pm 17'' \quad (12^*)$$

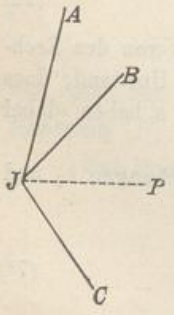
und damit die schon bei (9*) angegebenen Coordinatenfehler.

Die beiden Rechnungsformen, entweder mit 4 gleichgewichtigen Richtungen oder mit 3 Richtungen, von denen die zweite doppeltes Gewicht hat, geben also dieselben Coordinaten und dieselben Gewichte, aber verschiedene mittlere Fehler, und zwar so dass die Bestimmung aus den 4 ursprünglichen Messungen die bessere ist im Vergleich mit der Zusammenfassung der 2ten und 3ten Messung in ein Mittel, wobei nur $n = 3$ Messungen auftreten.

Dieses haben wir bereits früher in § 21. S. 70 behandelt, mit zwei Gleichungen (18), welche die Gewichte p_1 und p_2 haben und für die Ausgleichung selbst in *eine* Gleichung (18') zusammengefasst werden können, welche auch in dem Nenner des Fehlerquadrats nur als *eine* Gleichung zählt und *nicht* als *zwei* Gleichungen, wie auf S. 70 am Schlusse von § 21. aus Versehen geschrieben ist. Die Berechnung des mittleren Fehlers ist durch die vorstehenden Gleichungen (12) mit $4-2$ im Nenner, und (12*) mit $3-2$ im Nenner, charakterisiert.

Durch das einfache Beispiel mit Fig. 1. S. 358 ist wohl die Frage verschiedener Richtungsanschlüsse durch *Winkel*messungen genügend klar gemacht, auch kann der frühere § 78. mit Zwangsanschluss für Winkelmessungen in allen Combinationen hier zugezogen werden. Man wird wohl meist in solchen Fällen für die mehrfach angebundene Richtung einen Mittelwert einführen und denselben als *eine* Messung behandeln, vielleicht sogar mit einfachem Gewicht, was hier in praktischer Hinsicht nicht weiter zu erörtern ist.

Fig. 2.



Theoretisch weniger einfach ist die nun zu behandelnde Anbindung von gemessenen *Richtungs*sätzen an mehr als einen festen Strahl. Wir wollen dieses sofort an einem Beispiele behandeln:

In Fig. 2. ist angenommen, man habe auf dem Punkt J 4 Strahlen in einem Satz gemessen, und zwar 3 Strahlen nach 3 unabänderlich festen (fehlerfreien) Punkten $A\,B\,C$, und einen Strahl nach einem neuen Punkt P. Die hier zu machende Ausgleichung ergiebt sich sofort als eine Mittelbildung aus den Differenzen zwischen den end-

gültigen Richtungswinkeln für $A\,B\,C$, und den vorläufig orientierten Richtungen, wie folgendes Beispiel zeigt:

Strahl	Gemessene Richtungen A	Feste gegebene Richtungswinkel φ	Differenz $\varphi - A$	Orientierte gemessene Richtungen $\alpha = A + Z$	Scheinbare Fehler $\delta = \varphi - \alpha$	δ^2
$J\,A$	21° 18′ 33″	21° 18′ 0″	— 33″	21° 17′ 56″	+ 4	16
$J\,B$	48 29 43	48 29 7	— 36	48 29 6	+ 1	1
$J\,P$	90 37 22	. . . . .	. . .	90 36 45	. .	. .
$J\,C$	148 39 21	148 38 39	— 42	148 38 44	— 5	25
		Summe	— 111		$[\delta] = 0$	42
		Mittel $Z =$	— 37			

(13)

Der mittlere Fehler einer gemessenen Richtung ergiebt sich hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{42}{2}} = \pm 4{,}6''$$

Der Nenner ist dabei $3 - 1 = 2$, weil 3 Messungen A , B , C zur Ausgleichung mitgewirkt haben und eine Unbekannte Z vorhanden ist, deren Gewicht nach der Ausgleichung $= 3$ ist oder allgemeiner bei s festen Strahlen ist das Ausgleichungsgewicht von Z gleich s. Damit erhält man auch das Gewicht oder den mittleren Fehler der neu orientierten Richtung P, denn es setzt sich deren Fehler zusammen aus dem Fehler der Orientierungsgrösse Z und dem Fehler der Richtung P selbst, oder das Fehlerquadrat M^2 für die Richtung P wird:

$$M^2 = \frac{m^2}{s} + m^2 = m^2\,\frac{s+1}{s} \tag{14}$$

oder in Gewichtsform: das Gewicht der durch Orientierung auf s feste Strahlen $A\,B\,C\ldots$ neu bestimmten Richtung ist:

$$P = \frac{s}{s+1} \tag{15}$$

Dieses gilt für die Annahme, dass die fest gegebenen Richtungswinkel φ *fehlerfrei* seien, eine Annahme, die gewöhnlich zu machen ist, obgleich sie natürlich niemals streng erfüllt ist. Nehmen wir dagegen an, die Richtungswinkel φ haben selbst mittlere Fehler $\pm\mu$, so erhält man statt (14):

$$M^2 = \frac{m^2 + \mu^2}{s} + m^2 = m^2\left(\frac{s+1}{s} + \frac{\mu^2}{m^2}\,\frac{1}{s}\right) \tag{16}$$

und das Gewicht:

$$P = \frac{s}{s + 1 + \dfrac{\mu^2}{m^2}} \tag{17}$$

Über das Verhältnis von $\mu^2 : m^2$ kann man nun verschiedene Annahmen machen; setzt man $\mu^2 = 0$, so geht (17) wieder in (15) zurück, setzt man $\mu^2 = m^2$, so wird:

$$P_1 = \frac{s}{s+2} \tag{18}$$

Zwischen den Grenzen (15) und (18) wird sich wohl der richtige Wert gewöhn-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

lich bewegen, und $P = \frac{1}{2}$ entsteht aus (15) mit $s = 1$, dagegen aus (18) mit $s = 2$. Dieses wird für uns später Veranlassung sein, in der laufenden Praxis für Vorwärtseinschneiden kurzer Hand die Gewichte $= \frac{1}{2}$ zu setzen.

Damit haben wir das, was wir für die nächsten Anwendungen hauptsächlich brauchen, erledigt, wir wollen aber noch — mehr aus theoretischem Interesse — noch weiteres hinzufügen, und zuerst nochmals an Fig. 2. mit dem Zahlenbeispiel (13) anbinden. (S. 360—361.)

Die dort berechneten orientierten Richtungen α haben immer noch den Charakter von Originalbeobachtungen und können einer neuen Ausgleichung unterworfen werden, deren Fehlergleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z + 4'' \\ v_2 &= z + 1'' \\ v_3 &= z + \,.\,. \\ v_4 &= z - 5'' \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Die in der Tabelle (13) angegebenen δ, deren Summe $[\delta] = 0$ ist, treten nun als Absolutglieder der Fehlergleichungen (19) auf; die neue gemeinsame Richtungsverbesserung ist z, und die neuen Verbesserungen der Richtungsbeobachtungen sind v. Für v_3 ist in (19) der Ausdruck unbestimmt gelassen, weil der dritte Strahl vorerst noch frei ist.

Wenn nun aber dieser Strahl JP nicht mehr frei endigt, sondern einen Punkt P trifft, um dessen Neubestimmung es sich handelt, so wird auch für diesen Strahl eine Fehlergleichung gelten von der Form:

$$v_3 = z + a\,\delta x + b\,\delta y + l$$

wo a und b die bekannten Richtungs-Coefficienten sind.

Das ganze System der Fehlergleichungen heisst nun in allgemeinen Zeichen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z & &+ l_1 \\ v_2 &= z & &+ l_2 \\ v_3 &= z + a\,\delta x + b\,\delta y &&+ l_3 \\ v_4 &= z & &+ l_4 \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Hiebei ist die Summe $l_1 + l_2 + l_4 = 0 \qquad (21)$

was als allgemeine Beziehung dem besonderen Falle $+4'' + 1'' - 5''$ bei (13) und (19) entspricht.

Die zu (20) gehörigen Normalgleichungen werden allgemein für s feste Strahlen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(s+1)\,z} + a\,\delta x + b\,\delta y + [l] &= 0 \text{ d. h. } [v] = 0 \\ \underline{a^2\,\delta x} + a\,b\,\delta y + a\,l_3 &= 0 \\ \underline{b^2\,\delta y} + b\,l_3 &= 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Nach der Elimination von z bleibt folgendes System reduzierter Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(a^2 - \frac{a}{s+1}\,a)\,\delta x} + (a\,b - \frac{a}{s+1}\,b)\,\delta y + (a\,l_3 - \frac{a}{s+1}\,[l]) &= 0 \\ \underline{(b^2 - \frac{b}{s+1}\,b)\,\delta y} + (b\,l_3 - \frac{b}{s+1}\,[l]) &= 0 \\ \underline{([l\,l] - \frac{[l]}{s+1}\,[l])} \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese reduzierten Normalgleichungen sind nun wieder einer anderen Deutung fähig:

Man denke sich *eine* Fehlergleichung ohne z, mit dem Gewicht $\frac{s}{s+1}$

$$v' = a\,\delta x + b\,\delta y + l_3 \qquad p = \frac{s}{s+1} \tag{24}$$

Diese einzelne Fehlergleichung (24) giebt zu den Normalgleichungs-Coefficienten genau dieselben Beiträge wie die Coefficienten von (23).

Bei den Gliedern ohne l sieht man dieses unmittelbar, dagegen bei den Gliedern, welche l enthalten, ist zum Nachweis des Gesagten zuerst die zwischen den l bestehende Beziehung $l_1 + l_2 + l_4 = 0$ zu beachten, welche schon bei (21) erwähnt ist, denn diese $l_1\ l_2\ l_4$ sind nichts anderes, als die aus der ersten Ausgleichung erhaltenen δ, deren Summe $= 0$ ist; damit wird aber:

$$[l] = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = l_3$$

$$\text{also } p\,a\,l_3 = \frac{s}{s+1}\,a\,l_3 = a\,l_3 - \frac{a}{s+1}\,[l], \text{ ebenso wie bei (23).}$$

Ebenso wird auch die Entwicklung von $p\,b\,l_3$. Jedoch das Quadratsummenglied in (23) ist *nicht* identisch mit dem aus (24) erhaltenen $p\,l_3^2$, denn es ist, zunächst für $s = 3$ aus (23):

$$[l\,l] - \frac{[l]}{4}\,[l] = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - \frac{l_3^2}{4} = l_1^2 + l_2^2 + l_4^2 + \frac{3}{4}\,l_3^2$$

dagegen für $s = 3$ aus (24): $\qquad p\,l_3^2 = \frac{3}{4}\,l_3^2$

Wenn man daher statt der 4 Fehlergleichungen (20) nur die eine Gleichung (24) benützt, so bekommt man zwar dieselben Werte δx und δy, aber eine andere Fehlerquadratsumme, welche um $l_1^2 + l_2^2 + l_4^2$ gegen den strengen Wert zu klein ist, aber auch einen kleineren Nenner erhält.

Wenn wir das System (20) als Teil eines grösseren Systems von n Fehlergleichungen auffassen, so wird das mittlere Gewichtseinheitsfehler-Quadrat:

$$m^2 = \frac{[v\,v] + [V\,V]}{n - u - 3} \tag{25}$$

wo u die Anzahl von Unbekannten sein soll, welche ausser z, δx und δy noch vorhanden sind, und $[V\,V]$ den in (20) nicht enthaltenen Beitrag bedeutet.

Geht man aber von der *einen* Fehlergleichung (24) aus, so wird:

$$m^2 = \frac{[V\,V] + [v\,v] - (l_1^2 + l_2^2 + l_4^2)}{(n-3) - u - 2} \tag{26}$$

Der Nenner ist im Vergleich mit (25) um 2 kleiner geworden, und der Zähler ist um $l_1^2 + l_2^2 + l_4^2$ kleiner geworden; diese beiden Abnahmen entsprechen einander, wenn gesetzt werden kann:

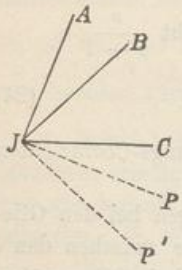
$$m^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 + l_4^2}{2}$$

Dieses ist aber in der That der Fall, denn die $l_1\ l_2\ l_4$ sind dieselben Werte, welche wir in der ersten Ausgleichung (13) mit $\delta_1\ \delta_2\ \delta_4$ bezeichnet haben, dort war aber zu rechnen:

$$m^2 = \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_4^2}{3 - 1} \tag{27}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 3.



Dieses (27) ist richtig, weil die 3 Messungen auf den Strahlen $A\,B\,C$ zur Bestimmung der *einen* Unbekannten Z gedient haben.

Die letzten Betrachtungen (24)—(26) beziehen sich auf den Fall von Fig. 2. S. 360, wo $s = 3$ feste Strahlen und 1 neuer Strahl vorhanden sind. Die Verallgemeinerung für s feste Strahlen giebt keinen anderen Gedankengang.

Wir betrachten weiter mit Fig. 3. den Fall, dass mehr als ein neuer Strahl, etwa 2 neue Strahlen, gegen mehrere feste Strahlen festgelegt werden; man habe etwa zunächst $s = 3$ feste Strahlen, und $s' = 2$ neue Strahlen.

Die Fehlergleichungen sind:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Allgemein Anzahl} = s & \left\{\begin{array}{l} v_1 = z \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad + l_1 \\ v_2 = z \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad + l_2 \\ v_3 = z \quad .. \quad .. \quad .. \quad .. \quad + l_3 \end{array}\right\} \; l_1 + l_2 + l_3 = 0 \\ \text{Anzahl} = s' & \left\{\begin{array}{l} v_4 = z + a\,\delta x + b\,\delta y \quad .. \quad .. \quad + l_4 \\ v_5 = z \quad .. \quad .. \quad + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5 \end{array}\right. \\ \hline s + s' = r & \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Allgemein: Anzahl} = u} \end{array}\right\} \quad (28)$$

Die Normalgleichungen werden:

$$[v] = 0, \qquad \left\{\begin{array}{rrrrrrr} \underline{r\,z} + a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + [l] &= 0 \\ \underline{a^2\,\delta x} + a\,b\,\delta y \quad .. \quad .. + a\,l_4 &= 0 \\ \underline{b^2\,\delta y} \quad .. \quad .. + b\,l_4 &= 0 \\ \underline{a'^2\,\delta x'} + a'\,b'\,\delta y' + a'\,l_5 &= 0 \\ \underline{b'^2\,\delta y'} + b'\,l_5 &= 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{array}\right. \quad (29)$$

Nach Elimination von z bleibt ein System, in welchem berücksichtigt ist, dass wegen $l_1 + l_2 + l_3 = 0$, $[l] = l_4 + l_5$ ist; die erste Gleichung davon ist:

$$(a^2 - \frac{a}{r}a)\,\delta x + (a\,b - \frac{a}{r}b)\,\delta y - \frac{a}{r}a'\,\delta x' - \frac{a}{r}b'\,\delta y' + a\,l_4 - \frac{a}{r}(l_4 + l_5) = 0 \quad (30)$$

und das Schlussglied $$[l\,l\,.\,1] = [l\,l] - \frac{(l_4 + l_5)}{r}(l_4 + l_5) \quad (31)$$

In Bezug auf die Coefficienten und Absolutglieder, mit Ausschluss von $[l\,l\,.\,1]$ kann man die Bildung von (30) durch folgende mechanische Regel deuten:

Man schreibt die letzten 2 Fehlergleichungen von (28) ohne z:

$$\text{Anzahl} = s' \quad \left\{\begin{array}{l} v'_4 = a\,\delta x + b\,\delta y \quad .. \quad .. + l_4 \text{ mit Gewicht} = 1 \quad (32) \\ v'_5 = \quad .. \quad .. \; a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5 \;\; \text{„} \quad \text{„} \quad = 1 \quad (33) \end{array}\right.$$

Hiezu nimmt man noch eine Summengleichung:

$$v' = a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_4 + l_5 \text{ mit Gewicht} = -\frac{1}{r} \quad (34)$$

wobei $r = s + s'$

Diese 3 Fehlergleichungen (32)—(34), mit den angegebenen Gewichten, geben in der That dieselben Coefficienten wie in (30), dagegen wird das Quadratsummenglied von (32)—(34):

$$[l'\,l'] = l_4^2 + l_5^2 - \frac{1}{r}(l_4 + l_5)^2, \qquad (m_2) \quad (35)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

während in (31) das Schlussglied, ausführlich geschrieben, ist:

$$[l\,l\,.\,1] = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 - \frac{1}{r}(l_4 + l_5)^2 = [l\,l\,.\,1] \qquad (m_1)\ (36)$$

Es ist also $[l\,l\,.\,1]$ grösser als $[l'\,l']$, und zwar um den Betrag $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2$, welcher nach Analogie von (27) gleich $(s-1)\,m^2$ zu achten ist. Es wird also nun für die beiden Fälle von (35) und (36):

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l'\,l']}{s' - (u-1)} \qquad (37)$$

weil im ersten Fall die Zahl der Unbekannten δx , δy , $\delta x'$, $\delta y'$ nebst z, $= 5$, allgemein $= u$, und im zweiten Fall die Zahl der Unbekannten δx , δy , $\delta x'$, $\delta y'$, ohne z, $= 4$, allgemein $= u - 1$ ist.

Zur besseren Vergleichung kann man schreiben:

$$m_1^2 = \frac{[l\,l\,.\,1]}{s' + s - u} \qquad m_2^2 = \frac{[l\,l\,.\,1] - (s-1)\,m^2}{s' + s - u - (s-1)} \qquad (38)$$

Die Formeln für m_1^2 und m_2^2 sind hiernach insofern gleichberechtigt, als nicht gesagt werden kann, dass im allgemeinen m_1 grösser oder kleiner als m_2 würde. Es ist aber m_1^2 die schärfere Formel, weil sie *alle* Proben, auch $l_1\ l_2\ l_3$, mit enthält, während m_2 nur l_4 und l_5 enthält.

Wenn man zum Schluss auch noch z selbst bestimmen will, so hat man dazu die erste Normalgleichung (29), d. h. $[v] = 0$, oder:

$$0 = [v] = r\,z + a\,\delta x + b\,\delta y + a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + [l]$$

Hiebei ist nach (28):

$$v_4 - z = a\,\delta x + b\,\delta y + l_4$$
$$v_5 - z = a'\,\delta x' + b'\,\delta y' + l_5$$
$$[l] = l_4 + l_5$$

also $0 = r\,z + (v_4 - z) + (v_5 - z)$.

Nach (28) und (32) kann man hiefür schreiben:

$$0 = r\,z + v'_4 + v'_5$$

$$\text{also}\quad z = -\frac{v'_4 + v'_5}{r}\ \text{allgemein}\ = -\frac{[v']}{r} \qquad (39)$$

Dabei ist $[v']$ die Summe der v' für alle freien Strahlen, und $r = s + s'$ die Anzahl aller Strahlen.

Wir wiederholen, dass diese Betrachtungen von (19)—(39) nicht für die laufende Praxis bestimmt sind, dass sie aber zur klaren Begriffsbestimmung bei Unterscheidung zwischen mehr oder weniger strenger oder genäherter Behandlung von Ausgleichungsaufgaben dienen.

§ 97. Innere und äussere Richtungen.

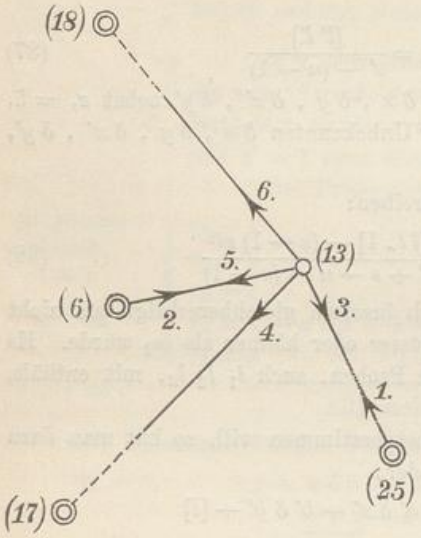
Wenn ein neuer Punkt gegen andere fest gegebene Punkte durch Einschneiden bestimmt werden soll, so hat man, nach dem bisherigen, zwei Arten von Messungen zu unterscheiden, erstens solche, welche auf den gegebenen Punkten als Standpunkten, Sichtstrahlen nach dem neuen Punkte geben, und zweitens solche Messungen, welche auf dem neuen Punkte als Standpunkt gemacht, Sichtstrahlen von dem neuen Punkte

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nach den alten Punkten liefern. Diesen beiden Arten von Messungen entsprechend unterscheidet man „*äussere Richtungen*“ und „*innere Richtungen*“.

Z. B. in Fig. 1. haben wir:

Fig. 1.
1 : 30 000.



(18) , (6) , (17) , (25) alte fest gegebene Punkte, (13) ein neuer durch Einschneiden zu bestimmender Punkt. Folglich sind:

1. und 2. äussere Richtungen,
3. 4. 5. 6. innere Richtungen.

Die äussere Richtung 1. kann z. B. dadurch bestimmt sein, dass mit der Verbindung (25) (17) der Winkel (17) (25) (13) gemessen wurde, ähnlich wie β_1 , β_2 , oder β_3 in Fig. 1. S. 335, oder die Richtung 2. kann erhalten worden sein durch Anschluss an die *zwei* festen Richtungen (6) , (18) und (6) , (17).

In welcher Weise die zwei äusseren Richtungen 1. und 2. erhalten worden sind, ist aus Fig. 1. nicht zu ersehen, es ist absichtlich nur angedeutet, dass 1. und 2. äussere Richtungen sind, über deren Herkunft nichts weiter gesagt wird.

Nach all den Betrachtungen von § 96. wissen wir, dass die äusseren Richtungen im Allgemeinen *verschiedene Gewichte* haben, ganz unabhängig von der Messungs-Genauigkeit selbst, nämlich verschiedene Gewichte nach Massgabe des mehr oder weniger innigen Anschlusses an vorhandene alte feste Strahlen, und im Allgemeinen muss man annehmen, dass eine äussere Richtung ein *kleineres* Gewicht hat als eine völlig freie innere Richtung.

Ohne die mathematische Hilfe (nach § 96.) kann man dieses durch reine Anschauung verständlich machen: In Fig. 1. sei der Winkel (17) (25) (13) gemessen, oder es seien die zwei Richtungen (25) (17) und (25) (13) eingeschnitten, welche beide mit Fehlern etwa $\pm m$ und $\pm m$ behaftet sind; wenn aber (25) (17) als fehlerfreier Anschluss behandelt wird, so werden eben dadurch die beiden Fehler $\pm m$ und $\pm m$ auf die *eine* Richtung (25) (13) geworfen, welche deshalb den Fehler $\pm m \pm m = m\sqrt{2}$ oder das Gewicht $= \frac{1}{2}$ erhält.

Dieses stimmt auch mit der Theorie (15) S. 361 des vorigen § 96. und wenn wir auch noch die dort in (18) S. 361 behandelte Nebenfrage der Anschlussstrahlenfehler selbst hinzunehmen, welche bei 2 gegebenen Strahlen ebenfalls das Gewicht $\frac{1}{2}$ für den neuen Strahl liefert, wollen wir nun als Näherungs-Regel für die laufende Praxis annehmen:

$$\text{Gewicht einer äusseren Richtung, } p = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

wobei das Gewicht einer inneren Richtung $= 1$ gesetzt ist.

Wenn diese Regel (1) auch etwas grob erscheinen sollte, so ist doch kaum etwas anderes möglich, und jedenfalls ist die Regel $p = \frac{1}{2}$ besser als ein anderes vor-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

kommendes rundes Verfahren, wornach die äusseren und inneren Richtungen alle *gleiches* Gewicht = 1 erhalten sollen.

Ein Hauptgrund aber für die Regel $p = \frac{1}{2}$ liegt uns noch in der Anwendung auf den allereinfachsten Fall des Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidens, nämlich in der Bestimmung eines Punktes aus *einem* geschlossenen Dreiecke, etwa $A\,B\,P$, wo $A\,B$ die Basis und P der neue Punkt ist. Wenn hier alle drei Winkel, welche α , β , γ heissen sollen, gemessen sind, so besteht (nach S. 31 oder S. 128) die einfachste Ausgleichung darin, dass man den Widerspruch $\alpha + \beta + \gamma - 180°$ auf die drei Winkel zu *gleichen* Beträgen umlegt und dann mit den so ausgeglichenen Winkeln den Punkt P berechnet.

Wenn man andererseits nach Fehlergleichungen mit Einschneiden ausgleicht und den äusseren Richtungen *halbes* Gewicht giebt, so erhält man denselben Punkt P, wie nach dem vorigen Verfahren, würde man aber den äusseren Richtungen ganzes Gewicht geben, so erhielte man den ersten Punkt *nicht*.

Dieser (in unserer vorigen Auflage S. 179 ausgesprochene) Satz ist zwar nach dem vorhergehenden an sich klar, kann aber (wegen erhobener Bedenken) auch leicht direkt bewiesen werden. — Wir wollen ein Zahlenbeispiel dafür ansetzen:

In unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 251 ist ein Dreieck $A\,B\,P$ berechnet aus den Coordinaten der Basispunkte A und B und den 3 Winkeln α , β , γ, deren Summe = 180° 0′ 12″, also um 12″ zu gross ist. Legt man diese 12″ auf die 3 Winkel zu gleichen Beträgen um, so erhält man Coordinaten von P, welche wir nun als Näherungswerte für eine Einschneideausgleichung annehmen wollen. Es entstehen folgende Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Äussere Richtung} & AP\,, & v_1 = -5\,\delta x + 8\,\delta y + 4 \\ \text{„ \quad „} & BP\,, & v_2 = +9\,\delta x + 11\,\delta y - 4 \\ \text{Innere Richtung} & PB\,, & v_3 = z + 9\,\delta x + 11\,\delta y - 0 \\ \text{„ \quad „} & PA\,, & v_4 = z - 5\,\delta x + 8\,\delta y - 4 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Wenn man in üblicher Weise z durch Mittelbildung eliminiert, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} V_3 = +7\,\delta x + 1{,}5\,\delta y + 2 \\ V_4 = -7\,\delta x - 1{,}5\,\delta y - 2 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Wenn man diese 2 Gleichungen mit den Gleichungen für v_1 und v_2 so zusammen nimmt, dass v_1 und v_2 die Gewichte $= \frac{1}{2}$ und V_3 und V_4 die Gewichte = 1 erhalten, so werden die beiden Absolutglieder:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,l] = -\frac{20}{2} - \frac{36}{2} + 14 + 14 = 0 \\ [b\,l] = +\frac{32}{2} - \frac{44}{2} + 3{,}0 + 3{,}0 = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

und damit werden auch notwendig $\delta x = 0$ und $\delta y = 0$, d. h. die Winkelausgleichung von Band II, 1893, S. 251 giebt solche Coordinaten, welche als Näherungs-Coordinaten einer Einschneide-Ausgleichung mit $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ und $p_3 = p_4 = 1$ keine weiteren Änderungen mehr erleiden. Was hier an einem Zahlenbeispiele gezeigt wurde, kann ohne neuen Gedanken, auch in algebraischen Formeln geschrieben werden.

Bei einem Näherungsverfahren für allgemeine schwierige Fälle ist es immer

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

ein wichtiges Kriterium, ob in einem besonderen leicht lösbaren Falle das allgemeine Verfahren mit der besonderen Lösung sich deckt; dieses findet hier statt; die allgemeine Regel des halben Gewichtes für äussere Strahlen deckt sich mit der üblichen Winkelfehlerverteilung in einem einzelnen Dreiecke, wie es sein muss.

Für die Gewichtsbemessung der äusseren Richtungen mit $p = \frac{1}{2}$ ist auch eine Autorität anzuführen, welche 1876 zuerst solche Ausgleichungen amtlich in grossem Massstabe ausführen liess, nämlich General *Schreiber*, damals Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Die Schreiberschen Regeln, welche erstmals veröffentlicht wurden in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", S. 157—160, und die auch in unserem späteren § 103. berichtet werden werden, enthalten Gewichtsbestimmungen, welche auf den einfachen Fall des Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidens von *einem* Punkte gegen beliebig viele Festpunkte angewendet, gar nichts anderes sagen als in anderer Form: die äusseren Richtungen sollen *halbes* Gewicht erhalten im Vergleich mit den inneren Richtungen.

Nachdem so über äussere Richtungen das Nötige gesagt ist, wollen wir über innere Richtungen auch zusammenfassend das bemerken, was nach § 93.—94. hierher gehört:

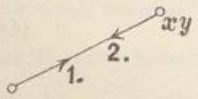
Die inneren Richtungen haben die Eigentümlichkeit, dass ihre Fehlergleichungen immer eine Orientierungs-Unbekannte z enthalten, welche jedoch eliminiert werden kann, ehe die Zusammenwirkung mit äusseren Richtungen stattfindet. Wenn die inneren Richtungen nicht alle in *einem* Satze zusammen gemessen, sondern in mehr als einen Satz zerlegt sind, so müsste man eigentlich streng genommen für jeden Satz ein besonderes z einführen, was zu vielen Weitläufigkeiten führen würde. (Vgl. S. 187 zusammengeschobene Sätze.) In der Praxis der Triangulierung III.—IV. Ordnung wird man mehrere solche Sätze einfach zusammenschieben und wie einen Satz mit einem z weiter behandeln.

Gegenseitige Richtungen.

Hat man zwei Gegen-Richtungen gemessen, wie in Fig. 2. angedeutet ist, so bestehen zwei Fehlergleichungen, deren Coefficienten a, b einander gleich, deren Absolutglieder l aber verschieden sind.

Nach § 89. haben wir für einen Richtungswinkel φ und eine Entfernung s:

Fig. 2.



$$d\varphi = -\left(\frac{\sin\varphi}{s}\varrho\right)\delta x + \left(\frac{\cos\varphi}{s}\varrho\right)\delta y$$

oder mit $\varphi = \varphi_1$:

$$d\varphi_1 = -\left(\frac{\sin\varphi_1}{s}\varrho\right)\delta x + \left(\frac{\cos\varphi_1}{s}\varrho\right)\delta y \qquad (5)$$

dabei sind δx und δy die Verschiebungen an dem Punkte, welcher in Fig. 2. mit $x\,y$ bezeichnet ist, und für φ_1 als Zielpunkt gilt.

Wenn man umgekehrt $x\,y$ als Standpunkt gelten lässt, so giebt Fig. 2.:

$$d\varphi_2 = +\left(\frac{\sin\varphi_2}{s}\varrho\right)\delta x - \left(\frac{\cos\varphi_2}{s}\varrho\right)\delta y \qquad (6)$$

da nun $\varphi_1 = \varphi_2 \pm 180°$, also $\sin\varphi_1 = -\sin\varphi_2$ und auch $\cos\varphi_1 = -\cos\varphi_1$ ist, so

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

sind die Coefficienten der Gleichungen (5) und (6) einander gleich, und die Fehlergleichungen für die beiden Richtungen 1. und 2. in Fig. 2. haben folgende Form:

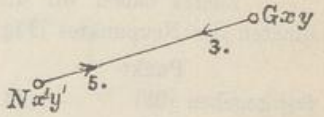
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= z_1 + a\,\delta x + b\,\delta y + l_1 \\ v_2 &= z_2 + a\,\delta x + b\,\delta y + l_2 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Folgendes ist ein Zahlenbeispiel hiezu mit Fig. 3. Die Punkte N und G haben folgende Näherungs-Coordinaten:

N $(y) = +134\,119{,}50^{m}$ $(x) = +137\,285{,}40^{m}$

G $(y') = +141\,871{,}60$ $(x') = +144\,754{,}40$

Fig. 3.



Hieraus die genäherten Richtungswinkel (φ), in *ebener* Rechnung:

$(NG) = (\varphi_5) = 42°\ 6'\ 50{,}78''$ $(GN) = (\varphi_3) = 221°\ 6'\ 50{,}78''$

Gemessen: $\alpha_5 = 42\ \ 6\ 29{,}30$ $\alpha_3 = 222\ \ 6\ 31{,}17$

also: $l_5 = +21{,}48''$ $l_3 = +19{,}61$

Die Entfernung ist $NG = 10{,}069^{km}$ ($log\ NG = 4.0029694$ in Metern).

Die Coefficienten a und b werden für δx und δy in Metern:

$a = -13{,}73$ $b = +15{,}20$

Beide Punkte N und G sollen Verschiebungen erleiden, nämlich $\delta x'$, $\delta y'$ für N und δx, δy für G, und daraus folgen die Fehlergleichungen:

$$v_5 = z_n - 13{,}73\,(\delta x - \delta x') + 15{,}20\,(\delta y - \delta y') + 21{,}48''$$

$$v_3 = z_g + 13{,}73\,(\delta x' - \delta x) - 15{,}20\,(\delta y' - \delta y) + 19{,}61''$$

oder

$$v_3 = z_g - 13{,}73\,(\delta x - \delta x') + 15{,}20\,(\delta y - \delta y') + 19{,}61''$$

Die gleichnamigen Coefficienten in v_5 und v_3 sind gleich.

Wir wollen hieran auch noch eine, für nächste Zwecke nicht erforderliche, Betrachtung anstellen, von ähnlicher Art, wie im zweiten Teile von § 96.

Die Unbekannten z_1 und z_2 in (7) kann man jedenfalls eliminieren, und sei es, dass dabei Gewichtsänderungen auftreten, oder auch, wenn die obigen Gleichungen ursprünglich schon verschiedene Gewichte haben sollten, kommen wir nun zu der Betrachtung zweier Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= a\,x + b\,y + l_1 \quad \text{Gewicht} = p_1 \\ V_2 &= a\,x + b\,y + l_2 \quad \text{“} = p_2 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Diese beiden Gleichungen können je nach ihrem Zusammenhang mit anderen Ausgleichungs-Elementen verschieden weiter behandelt werden.

Die zu (8) gehörigen Normalgleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \underline{(p_1 + p_2)\,a^2\,x} + (p_1 + p_2)\,a\,b\,y + (p_1\,a\,l_1 + p_2\,a\,l_2) &= 0 \\ \underline{(p_1 + p_2)\,b^2\,y} + (p_1\,b\,l_1 + p_2\,b\,l_2) &= 0 \\ + \underline{(p_1\,l_1^2 + p_2\,l_2^2)} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Denkt man sich andererseits *eine* Fehlergleichung:

$$V = a\,x + b\,y + \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2}{p_1 + p_2} \text{ mit dem Gewicht} = p_1 + p_2, \quad (10)$$

so erhält man dieselben Coefficienten wie in (9), das Fehlerquadratglied wird aber nach (10) anders, nämlich:

$$\frac{(p_1\,l_1 + p_2\,l_2)^2}{p_1 + p_2} \quad (11)$$

Die Rechnung mit dem Schlussglied von (9) ist schärfer als die Rechnung mit der Summe (11), weil es immer besser ist, die Fehler einzeln zu benützen, statt sie zusammenzufassen. Die Zusammenfassung der zwei Gleichungen (8) in eine Gleichug (10) bietet auch wenig rechnerische Vorteile, dagegen den Nachteil, dass die Stationsgruppen gestört werden. Wir ziehen daher die Einzelbehandlung zweier Gleichungen von der Form (7) oder (8) im allgemeinen der Zusammenfassung (10) vor.

§ 98. Combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden.

Nachdem wir in § 91. bis § 92. das Vorwärts-Einschneiden und in § 93. das Rückwärts-Einschneiden je für sich kennen gelernt haben, und nachdem im vorigen § 97. auch die dazu erforderlichen Gewichts-Verhältnisse erörtert worden sind, wird

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

es nicht schwer sein, auch eine Ausgleichung mit Vereinigung von Vorwärtseinschneiden *und* Rückwärtseinschneiden durchzuführen. Wir bedürfen dazu nur noch eines gelegentlichen Rückblickes auf den früheren theoretischen § 31. S. 97.

Als erstes Beispiel wollen wir den Fall von Fig. 1. S. 366 im vorigen § 97. nehmen (dieses Beispiel ist aus der Anweisung IX. v. 25. Okt. 1881, S. 187—190 entlehnt, wo jedoch innere und äussere Richtungen als *gleich*gewichtig behandelt und δx , δy in Metern gezählt sind).

Zuerst haben wir die fest gegebenen Coordinaten und die Näherungs-Coordinaten des Neupunktes (Fig. 1. S. 366):

Punkt		Ordinate y		Abscisse x	
fest gegeben	(25)	$\times 44\,276{,}21^m$ oder	$= -55\,723{,}79^m$	$+21\,591{,}03^m$	(1)
„ „	(17)	$\times 43\,114{,}56$ „	$= -56\,885{,}44$	$+21\,345{,}08$	
„ „	(6)	$\times 43\,282{,}03$ „	$= -56\,717{,}97$	$+22\,079{,}51$	
„ „	(18)	$\times 43\,210{,}38$ „	$= -56\,789{,}62$	$+23\,094{,}54$	
Näherung	(13)	$(y) = \times 43\,949{,}96$ „	$= -56\,050{,}04$	$(x) = +22\,239{,}44$	

Äussere Richtungen	Entfernungen s	Innere Richtungen bereits genähert orientiert	
1. $= 333°\,17'\,25''$	726^m	3. $= 153°\,17'\,26''$	(2)
	1224^m	4. $= 223\;\;2\;\;51$	
2. $= 76°\,32'\;\;6''$	687^m	5. $= 256\;\;33\;\;4$	
	1131^m	6. $= 319\;\;9\;\;48$	

Genäherte Richtungswinkel (Katasterbezeichnung „Neigungen"):

für äussere Richtungen:	für innere Richtungen:	
$(\varphi_1) = 333°\,17'\,26''$ mit $l_1 = +1''$	$(\varphi_3) = 153°\,17'\,26''$ mit $l_3 = 0''$	(3)
$(\varphi_2) = 76°\,32'\;\;4''$ „ $l_2 = -2''$	$(\varphi_4) = 222\;\;2\;\;52$ „ $l_4 = +1$	
	$(\varphi_5) = 256\;\;32\;\;4$ „ $l_5 = -60$	
	$(\varphi_6) = 319\;\;8\;\;36$ „ $l_6 = -72$	

Fehlergleichungen (für δx und δy in Decimetern):

$v_1 = +13\,\delta x + 25\,\delta y + 1$	$v_3 = z + 13\,\delta x + 25\,\delta y + 0$	(4)
$v_2 = -29\,\delta x + 7\,\delta y - 2$	$v_4 = z - 12\,\delta x + 12\,\delta y + 1$	
v_1 und v_2 mit Gewicht $= \frac{1}{2}$	$v_5 = z - 29\,\delta x + 7\,\delta y - 60$	
	$v_6 = z - 12\,\delta x - 14\,\delta y - 72$	
	$0 = z - 10\,\delta x + 8\,\delta y - 33$ Mittel	

Die Elimination von z geschieht nach dem Mittelbildungsverfahren von § 93. S. 351, so dass man hat:

$v_1 = +13\,\delta x + 25\,\delta y + 1$	$V_3 = +23\,\delta x + 17\,\delta y + 33$ mit $p = 1$	(5)
$v_2 = -29\,\delta x + 7\,\delta y - 2$	$V_4 = -2\,\delta x + 4\,\delta y + 34$ „ $p = 1$	
mit Gewicht $= \frac{1}{2}$	$V_5 = -19\,\delta x - 1\,\delta y - 27$ „ $p = 1$	
	$V_6 = -2\,\delta x - 22\,\delta y - 39$ „ $p = 1$	

Normalgleichungen, zunächst für alle $p = 1$:

$\underline{1010\,\delta x} + 122\,\delta y + 71 = 0$	$+\underline{898}\,\delta x + 446\,\delta y + 1282 = 0$	(6)
$+\underline{674\,\delta y} + 11 = 0$	$+\underline{790}\,\delta y + 1582 = 0$	
$+\underline{5} = [ll]$	$+\underline{4495} = [LL]$	

Wenn nun äussere und innere Richtungen *gleiche* Gewichte haben sollen (Gewicht $= 1$), so hat man die vorstehenden zwei Normalgleichungs-Systeme einfach

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gliedweise zu addieren, z. B. $(1010 + 898)\,\delta x = 1908\,\delta x$ u. s. w. (was der Gleichung (11) S. 97 entspricht) und damit hat man:

Vereinigte Normalgleichungen für gleiche Gewichte:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{1908\,\delta x} + 568\,\delta y + 1353 &= 0 \\ +\underline{1464\,\delta y} + 1593 &= 0 \\ +\underline{4500} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{aligned} \delta y = -0{,}92^{dm} \qquad \delta x = -0{,}44^{dm} \\ \text{und } [ll.2] = 2448 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

und das Schluss-Ergebnis auf 1^{cm} abgerundet:

$$\text{Punkt (13):} \quad \left.\begin{aligned} y = -56050{,}13^{m} \qquad x = +22239{,}40^{m} \\ \pm 0{,}08 \qquad\qquad \pm 0{,}07 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Wenn dagegen den äusseren Richtungen nur halbes Gewicht gegeben wird, so hat man die beiden Gruppen (6) so zu vereinigen, dass links nur die Hälfte genommen wird, also z. B. $(505 + 898)\,\delta x$ u. s. w. Dieses giebt:

Vereinigte Normalgleichungen für ungleiche Gewichte:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{1403\,\delta x} + 507\,\delta y + 1318 &= 0 \\ +\underline{1127\,\delta y} + 1588 &= 0 \\ +\underline{4497} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Auflösung giebt:

$$\left.\begin{aligned} \delta y = -1{,}17^{dm} \qquad \delta x = -0{,}52^{dm} \\ [ll.2] = 1952 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

das Schluss-Ergebnis für die Coordinaten auf 1^{cm} abgerundet:

$$\text{Punkt (13):} \quad \left.\begin{aligned} y = -56050{,}16^{m} \qquad x = +22239{,}39^{m} \\ \pm 0{,}08 \qquad\qquad \pm 0{,}07 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die Ergebnisse (9) und (12) weichen nicht viel von einander ab, doch ist das Sache des Zufalls und nicht des Princips. In beiden Fällen gehört zum vollständigen Abschlusse der Rechnung auch noch die Berechnung der endgültigen Richtungswinkel φ und der scheinbaren Fehler v nebst $[v^2]$ u. s. w. Dieses wollen wir aber erst an dem nächsten Beispiele ausführlich zeigen.

Ausgleichung des Punktes Hochschule mit Vorwärts-Einschneiden und Rückwärts-Einschneiden.

Nach dem Anblick von Fig. 1. S. 185 und der Messungs-Abscisse S. 186 hat der Punkt Hochschule 4 äussere und 5 innere Richtungen, nämlich:

äussere Richtungen	innere Richtungen
. . . . .	nach Schanze
von Steuerndieb	„ Steuerndieb
„ Aegidius	„ Aegidius
„ Wasserturm	„ Wasserturm
„ Burg	„ Burg
mit Ausgleichung § 92. S. 343	mit Ausgleichung § 93. S. 351

Da nun sowohl die Ausgleichung der äusseren Richtungen für sich als auch die Ausgleichung der inneren Richtungen für sich bereits erledigt ist, so brauchen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wir nur diese beiden Ausgleichungen zusammen zu fassen, um die Gesamtausgleichung zu erzielen.

Wir wollen dabei auch gleich bemerken, dass ein neues besonderes Formular für combiniertes Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden nicht nötig ist, indem man die besonderen Teile der Formulare S. 343 und S. 351 einfach beibehält, und die Zusammenfassung auf einem zugehörigen Blatte, bei wenig Richtungen auch nur durch etwas abgeänderte Benützung der vorgedruckten Spalten von S. 343 bewirkt. (In solcher Weise haben wir zahlreiche Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidungen ausgeglichen.)

Wir entnehmen nun die Coefficienten $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. von den beiden getrennten Ausgleichungen:

	$[a\,a]$	$[b\,b]$	$[a\,b]$	$[a\,l]$	$[b\,l]$	$[l\,l]$
S. 343 Vorwärts	+ 103	+ 184	+ 62	— 13	— 54	+ 17,2
also $^1/_2$ Vorwärts	+ 51	+ 92	+ 31	— 6	— 27	+ 8,6
S. 351 Rückwärts	+ 101	+ 206	+ 48	— 39	— 88	+ 73,8
zusammen	+ 152	+ 298	+ 79	— 45	— 115	+ 82,4

Hiebei wird der Blick sich zuerst darauf richten, ob die $[a\,l]$ und $[b\,l]$ vorwärts und rückwärts gleiche Vorzeichen haben, d. h. sich nicht geradezu widersprechen. Die Gleichheit der Vorzeichen findet hier statt. Nach der Vereinigung macht man die Elimination wie früher auf S. 343 oder S. 351 (mit dem Rechenschieber).

		$a]$	$b]$	$l]$		$[b$	$[a$	$[l$	
	$[a$	+ 152	+ 79	— 45		+ 298	+ 79	— 115	
	$[b$		+ 298	— 115			+ 152	— 45	
			— 41	+ 23			— 21	+ 30	
	$[l$			+ 82				+ 82	
				— 13				— 44	
$\delta y =$	+ 0,36 dm	$[b\,b.1] =$	+ 257	— 92	$[a\,a.1] =$	+ 131	— 15	$\delta x =$	+ 0,11 dm
$\delta y =$	+ 0,036 m			+ 69			+ 38	$\delta x =$	+ 0,011 m
$(y) =$	— 24709,800 m			— 33			— 2	$(x) =$	— 26868,300 m
$y =$	— 24709,764 m	$[l\,l.2] =$		+ 36	$[l\,l.2] =$		+ 36	$x =$	— 26868,289 m

Mit diesen ausgeglichenen Coordinaten y und x macht man wieder die Berechnung der endgültigen Richtungswinkel φ (wie auf dem unteren Teile von S. 342 und S. 350) und dann die Ausrechnung der v, wie auf dem unteren Teile von S. 343 und S. 351. Dieses geben wir im folgenden, jedoch mit Weglassung der Proben für $\delta\varphi$ (welche stimmen):

Äussere Richtungen (vgl. S. 342):

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Endgültiger Richtungswinkel φ	$\varphi - \alpha = v$	v^2
1	Steuerndieb	Hochschule	259° 14′ 15,1″	259° 14′ 14,9″	— 0,2″	0,04
2	Aegidius	„	315 2 32,6	315 2 34,5	+ 1,9	3,61
3	Wasserturm	„	20 36 50,0	20 36 49,4	— 0,6	0,36
4	Burg	„	149 4 12,3	149 4 11,0	— 1,3	1,69
			110,0	109,8	— 1,2	5,70

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Innere Richtungen (vgl. S. 351):

Nr.	Standpunkt	Zielpunkt	Gemessene Richtung α	Endgültiger Richtungswinkel φ	$\varphi - \alpha = V$	$V + z = v$	v^2
1	Hochschule	Schanze	24° 15′ 19,4″	24° 15′ 18,4″	−1,0″	−2,9″	8,41
2	„	Steuerndieb	79 14 15,1	79 14 14,9	−0,2	−2,1	4,41
3	„	Aegidius	135 2 30,0	135 2 34,5	+4,5	+2,6	6,76
4	„	Wasserturm	200 36 48,8	200 36 49,4	+0,6	−1,3	1,69
5	„	Burg	329 4 5,2	329 4 11,0	+5,8	+3,9	15,21
			118,5	128,2	+9,7	+ 0,2	36,48
				$-z = +1,9$			

Nun haben wir:

von den 4 äusseren Richtungen $[v^2] = 5,7$ also $\frac{1}{2}[v^2] = 2,8$

von den 5 inneren Richtungen $[v^2] = 36,5$

Gesamtsumme $[v^2] = 39,3$

Als Nenner zur Berechnung des mittleren Fehlers haben wir $(4+5)-(2+1)=6$, weil $4+5$ gemessene Richtungen vorhanden sind, und δx , δy nebst z zusammen 3 Unbekannte. Man hat also den mittleren Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{39,3}{6}} = \pm 2,6''$$

Damit und mit den Gewichten $[b\,b\,.\,1] = 257$ und $[a\,a\,.\,1] = 131$ aus der vorhergehenden Elimination berechnet man auch die mittleren Coordinatenfehler selbst, in demselben Schema wie unten auf S. 343 oder S. 351:

$[v\,v] = 39,3$	$log\,[v\,v]$ 1.5944	$log\,m^2$ 0.8162	$log\,m^2$ 0.8162
$n - u = 9 - 3 = 6$	$log\,(n-2)$ 0.7782	$log\,[b\,b\,.\,1]$ 2.4099	$log\,[a\,a\,.\,1]$ 2.1173
	$log\,m^2$ 0.8162	$log\,my^2$ 8.4063	$log\,mx^2$ 8.6989
	$log\,m$ 0.4081	$log\,my$ 9.2032	$log\,mx$ 9.3494
	$m = \pm 2,6''$	$my = \pm 0,16^m$	$mx = \pm 0,22$

Schluss-Ergebnis:

Hochschule $y = -24709,764^m \pm 0,016^m$ $x = -26868,289^m \pm 0,022^m$ $(m = \pm 2,6'')$ (13)

Dieses gilt für Vorwärtseinschneiden *und* Rückwärtseinschneiden. Zur Vergleichung wollen wir nochmals von § 92. und § 93. die Einzelbestimmungen hersetzen:

Vorwärtseinschneiden (S. 343) $-24709,768^m \pm 0,006^m$ $(m = \pm 0,8'')$ $-26868,306^m \pm 0,009^m$ (14)

Rückwärtseinschneiden (S. 351) $-24709,762^m \pm 0,030^m$ $(m = \pm 4,0'')$ $-26868,280^m \pm 0,042^m$ (15)

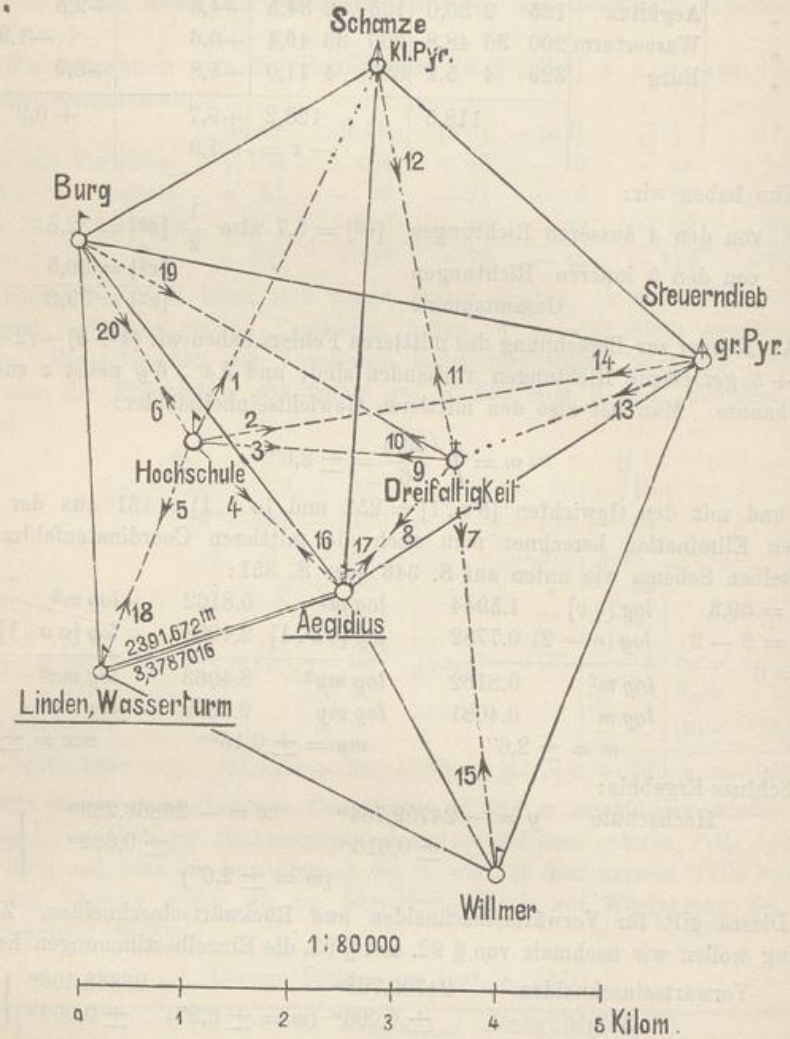
Die berechneten mittleren Fehler sind bei so wenigen Beobachtungen mehr oder weniger Zufallswerte, sie beweisen aber doch, dass die Punktbestimmung auf wenige Centimeter genau ist. Auch sei bemerkt, dass Vorstehendes nicht ein zugerichtetes Schulbeispiel ist, sondern genau den im Jahr 1891 amtlich für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme gemachten Messungen entspricht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 99. Doppel-Punkt-Einschaltung.

In ähnlicher Weise, wie *ein* Punkt durch Vorwärtseinschneiden und Rückwärtseinscheiden gegen ein System fest gegebener Punkte bestimmt werden kann, können auch zwei Punkte zusammen eingeschaltet werden (und nicht bloss zwei, sondern beliebig viele Punkte, wovon später am Schlusse dieses Kapitels die Rede sein wird).

Fig. 1.



In Fig. 1. haben wir das frühere Netz von S. 185 nochmals vorgenommen, jedoch nur als Grundlage für die Einschaltung des Punktpaares Hochschule-Dreifaltigkeit.

Zur gemeinsamen Bestimmung dieser zwei Punkte ist die grosse Zahl von 20 gemessenen Richtungen vorhanden, welche wieder als äussere und innere Richtungen unterschieden werden können, nämlich erstens 9 äussere Richtungen, zweitens 6 innere Richtungen auf Hochschule und 5 innere Richtungen auf Dreifaltigkeit.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Für die Coordinaten haben wir die Wahl zwischen zwei Systemen, nämlich erstens System der Landesaufnahme § 63. und zweitens Katastersystem Celle § 64.

Wir wollen die Rechnung in dem ersteren Systeme (Landesaufnahme) führen, weil sie mit den dabei auftretenden Reduktionen $t - T$ für Richtungswinkel, geodätisch allgemeiner und interessanter ist. Allerdings kommt in der laufenden Kataster-Praxis eine solche Ausgleichung mit Richtungsreduktionen selten vor, allein man hat mit unserer Rechnung auch eine Anleitung für Ausgleichung in ebenem System, indem man nur anzunehmen braucht, jene $t - T$ seien alle = Null.

Die Coordinaten unserer fest gegebenen Punkte sind schon früher auf S. 205 mitgeteilt; wir wollen dieselben, um alles beisammen zu haben, nochmals hierhersetzen und auch Näherungs-Coordinaten der beiden Neupunkte gleich hinzufügen:

fest gegeben	Aegidius	$y = -244\,656{,}090^m$	$x = -30\,624{,}971^m$	(1)
„ „	Wasserturm	$-246\,956{,}479$	$-31\,285{,}875$	
„ „	Willmer	$-243\,280{,}909$	$-33\,328{,}385$	
„ „	Steuerndieb	$-241\,167{,}896$	$-28\,421{,}362$	
„ „	Burg	$-247\,076{,}504$	$-27\,179{,}218$	
„ „	Schanze	$-244\,244{,}387$	$-25\,592{,}941$	
Näherungen	Hochschule	$(y_1) = -246\,028{,}90^m$	$(x_1) = -29\,120{,}56^m$	(2)
„	Dreifaltigkeit	$(y_2) = -24\,620{,}76$	$(x_2) = -29\,282{,}46$	

Mit diesen Coordinaten (1) und (2) sind nach den Formeln (5) S. 201 die Reduktionen $t - T$ berechnet worden, welche teils schon auf S. 204 mitgeteilt, teils nachher noch anzugeben sind.

Als beobachtete Richtungen nehmen wir nicht die eigentlichen aus den Beobachtungen hervorgegangenen T von S. 204, sondern die auf das ebene rechtwinklige System *reduzierten* t, welche in der letzten Spalte von S. 204 unter der Überschrift „Ausgeglichen t“ stehen, wobei sich aber das „Ausgeglichen“ nur auf die Orientierung bezieht; d. h. es gelten die in der letzten Spalte von S. 204 in Klammern gestellten Werte t nun als beobachtete äussere Richtungen.

Auch die inneren Richtungen, deren wirkliche Beobachtungen auf S. 186 unter 7. und 8. mitgeteilt sind, müssen wir durch $t - T$ auf das ebene System reduzieren, und gleichzeitig auch genähert orientieren. Diese $t - T$ werden nach (5) oder (6) S. 201 berechnet, und dadurch wird folgendes erhalten:

Richtungen	beobachtet (S. 186)	beobachtet und genähert orientiert		
		sphärisch T	$t - T$	eben t
1. Hochschule.				
Schanze	249° 12′ 49,37″	26° 49′ 59,05″	+ 2,19″	26° 50′ 1,24″
Steuerndieb	304 11 45,10	81 48 54,78	+ 0,43	81 48 55,21
Dreifaltigkeit	316 13 35,82	93 50 45,50	− 0,10	93 50 45,40
Aegidius	0 0 0,00	137 37 9,68	− 0,93	137 37 8,75
Linden, Wasserturm	65 34 18,81	203 11 28,49	− 1,35	203 11 27,14
Burg	194 1 35,18	331 38 44,86	+ 1,21	331 38 46,07
2. Dreifaltigkeit.				
Willmer	317° 33′ 31,20″	175° 11′ 55,77″	− 2,49″	175° 11′ 53,28″
Aegidius	0 0 0,00	217 38 24,57	− 0,83	217 38 23,74
Hochschule	56 12 25,93	273 50 50,50	+ 0,10	273 50 50,60
Burg	83 41 5,14	301 19 29,71	+ 1,30	301 19 31,01
Schanze	132 45 54,74	350 24 19,31	+ 2,28	350 24 21,59

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die so erhaltenen t, nebst den eingeklammerten t der letzten Spalte von S. 204 gehen als beobachtet α in die nächste Tabelle ein. Dabei werden auch die nach § 89. (bzw. nach der Hilfstafel S. [8]—[15] des Anhangs) zu berechnenden Richtungs-Coefficienten a , b , c , d und in der letzten Spalte die Gewichte p eingesetzt.

Richtung (vgl. Fig. 1. S. 374)		Beobachtet α	Näherung (t)	$(t)-\alpha = l$	a	b	c	d	p
Hochschule—Schanze	1.	26° 50′ 1,2″	26° 50′ 0,4″	−0,8	+ 2,4	− 4,7			1
(δx_1 , δy_1) Steuerndieb	2.	81 48 55,2	81 48 53,4	−1,8	+ 4,2	− 0,6			1
„ Dreifaltigkeit	3.	93 50 45,4	93 50 46,4	+1,0	+ 8,5	+ 0,6	− 8,5	− 0,6	1
„ Aegidius	4.	137 37 8,8	137 37 7,7	−1,1	+ 6,8	+ 7,5			1
„ Wasserturm	5.	203 11 27,1	203 11 21,7	−5,4	− 3,4	+ 8,0			1
„ Burg	6.	331 38 46,1	331 38 50,7	+4,6	− 4,4	− 8,2			1
	Summe	3,8	0,3	−3,5	+ 14,1	+ 2,6	− 8,5	− 0,6	$-\frac{1}{6}$
Dreifaltigkeit—Willmer	7.	175 11 53,3	175 11 54,7	+1,4			+ 0,4	+ 5,1	1
(δx_2 , δy_2) Aegidius	8.	217 38 23,7	217 38 20,5	−3,2			− 7,4	+ 9,6	1
„ Hochschule	9.	273 50 50,6	273 50 46,4	−4,2	+ 8,5	+ 0,6	− 8,5	− 0,6	1
„ Burg	10.	301 19 31,0	301 19 32,2	+1,2			− 4,4	− 2,7	1
„ Schanze	11.	350 24 21,6	350 24 22,2	+0,6			− 1,0	− 5,7	1
	Summe	60,2	56,0	−4,2	+ 8,5	+ 0,6	− 20,9	+ 5,7	$-\frac{1}{5}$
Schanze —Dreifaltigkeit	12.	170 24 22,4	170 24 22,2	−0,2			− 1,0	− 5,7	0,5
Steuerndieb—Dreifaltigkeit	13.	250 39 20,7	250 39 21,4	+0,7			+ 7,5	− 2,6	0,5
„ Hochschule	14.	261 48 52,3	261 48 53,4	+1,1	+ 4,2	− 0,6			0,5
Willmer —Dreifaltigkeit	15.	355 11 56,2	355 11 54,7	−1,5			+ 0,4	+ 5,1	0,5
Aegidius —Hochschule	16.	317 37 8,8	317 37 7,7	−1,1	+ 6,8	+ 7,5			0,5
„ Dreifaltigkeit	17.	37 38 23,7	37 38 20,5	−3,2			− 7,4	+ 9,6	0,5
Wasserturm—Hochschule	18.	23 11 25,8	23 11 21,7	−4,1	− 3,4	+ 8,0			0,5
Burg —Dreifaltigkeit	19.	121 19 30,0	121 19 32,2	+2,2			− 4,4	− 2,7	0,5
„ Hochschule	20.	151 38 50,2	151 38 50,7	+0,5	− 4,4	− 8,2			0,5

Die inneren Richtungen haben alle das Gewicht = 1 und den äusseren Richtungen geben wir (nach § 97.) allen das Gewicht $= \frac{1}{2}$, die Coordinaten-Korrektionen sollen sein für Hochschule: δx_1 , δy_1 und für Dreifaltigkeit δx_2 , δy_2, damit heissen die ersten drei Fehlergleichungen für Hochschule:

$$v_1 = z + 2{,}4\,\delta x_1 - 4{,}7\,\delta y_1 \quad . \; . \quad . \; . \quad -0{,}8$$
$$v_2 = z + 4{,}2\,\delta x_1 - 0{,}6\,\delta y_1 \quad . \; . \quad . \; . \quad -1{,}8$$
$$v_3 = z + 1{,}0\,\delta x_1 + 8{,}5\,\delta y_1 - 8{,}5\,\delta x_2 - 0{,}6\,\delta y_2 + 1{,}0 \text{ u. s. w.}$$

Und für Dreifaltigkeit erhält man ähnliche Fehlergleichungen, aber mit einem *anderen* z':

$$v_7 = z' \quad . \; . \quad . \; . \quad + 0{,}4\,\delta x_2 + 5{,}1\,\delta y_2 + 5{,}1$$

Um die z und z' zu eliminieren, kann man eines der verschiedenen in § 94. angegebenen Verfahren wählen; wir wollen diesesmal die *Schreiber*sche Regel mit negativem Gewichte ($-1 : n$ für n Richtungen) anwenden, und haben dazu die Summen bei Hochschule und Dreifaltigkeit zugefügt, oder es sind nun die $6 + 1$ Fehlergleichungen für Hochschule, ausführlich herausgeschrieben, die folgenden:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$
\begin{aligned}
v_1 &= +\ 2{,}4\,\delta x_1 - 4{,}7\,\delta y_1 \quad \ldots \quad \ldots - 0{,}8 \quad \text{Gew.} = 1\\
v_2 &= +\ 4{,}2\,\delta x_1 - 0{,}6\,\delta y_1 \quad \ldots \quad \ldots - 1{,}8 \quad \text{„} \quad 1\\
v_3 &= +\ 8{,}5\,\delta x_1 + 0{,}6\,\delta y_1 - 8{,}5\,\delta x_2 - 0{,}6\,\delta y_2 + 1{,}0 \quad \text{„} \quad 1\\
v_4 &= +\ 6{,}8\,\delta x_1 + 7{,}5\,\delta y_1 \quad \ldots \quad \ldots - 1{,}1 \quad \text{„} \quad 1\\
v_5 &= -\ 3{,}4\,\delta x_1 + 8{,}0\,\delta y_1 \quad \ldots \quad \ldots - 5{,}4 \quad \text{„} \quad 1\\
v_6 &= -\ 4{,}4\,\delta x_1 - 8{,}2\,\delta y_1 \quad \ldots \quad \ldots + 4{,}6 \quad \text{„} \quad 1\\
v' &= +\ 14{,}1\,\delta x_1 + 2{,}6\,\delta y_1 - 8{,}5\,\delta x_2 - 0{,}6\,\delta y_2 - 3{,}5 \quad \text{„} \quad -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Wenn man diese 7 Gleichungen wie gewöhnliche Fehlergleichungen mit ihren Gewichten weiter behandelt, so erhält man z. B.:

$$[a\,a] = 2{,}4^2 + 4{,}2^2 + \ldots + 4{,}4^2 - \frac{1}{6}\,14{,}1^2 = 172{,}81 - 33{,}14 = +\,139{,}67$$

und das ganze hiezu gehörige Normalgleichungssystem wird:

(Hochschule)

$$
\left.
\begin{aligned}
+\underline{139{,}67\,\delta x_1} + 45{,}07\,\delta y_1 - 52{,}28\,\delta x_2 - 3{,}69\,\delta y_2 - 2{,}12 &= 0\\
\ldots + \underline{209{,}17\,\delta y_1} - 1{,}42\,\delta x_2 - 0{,}10\,\delta y_2 - 82{,}21 &= 0\\
\ldots + \underline{60{,}21\,\delta x_2} + 4{,}25\,\delta y_2 - 13{,}46 &= 0\\
\ldots + \underline{0{,}30\,\delta y_2} - 0{,}95 &= 0\\
+\underline{54{,}37} &
\end{aligned}
\right\} \quad (H)
$$

In gleicher Weise behandelt geben die inneren Richtungen von Dreifaltigkeit:

(Dreifaltigkeit)

$$
\left.
\begin{aligned}
+\underline{57{,}80\,\delta x_1} + 4{,}08\,\delta y_1 - 36{,}72\,\delta x_2 - 14{,}79\,\delta y_2 - 28{,}56 &= 0\\
\ldots + \underline{0{,}29\,\delta y_1} - 2{,}59\,\delta y_2 - 1{,}04\,\delta y_2 - 2{,}02 &= 0\\
\ldots + \underline{60{,}17\,\delta x_2} - 22{,}49\,\delta y_2 + 36{,}50 &= 0\\
\ldots + \underline{151{,}81\,\delta y_2} - 22{,}93 &= 0\\
\ldots + \underline{28{,}11} &
\end{aligned}
\right\} \quad (D)
$$

Endlich die 9 äusseren Richtungen 12.—20. ebenfalls als Gruppe für sich, mit ihren Gewichten 0,5 geben:

(Äussere Richtungen)

$$
\left.
\begin{aligned}
+\underline{47{,}40\,\delta x_1} + 28{,}68\,\delta y_1 \quad \ldots \quad \ldots + 4{,}44 &= 0\\
\ldots + \underline{93{,}92\,\delta y_1} \quad \ldots \quad \ldots - 8{,}14 &= 0\\
\ldots + \underline{65{,}76\,\delta x_2} - 35{,}46\,\delta y_2 + 9{,}42 &= 0\\
\ldots + \underline{82{,}34\,\delta y_2} - 22{,}49 &= 0\\
\ldots + \underline{18{,}64} &
\end{aligned}
\right\} \quad (A)
$$

Die 3 Gruppen (H) , (D) und (A) werden dadurch in *eine* Ausgleichung gebracht, dass man die Coefficienten der 3 Gruppen gliedweise addiert. Man hätte überhaupt nicht nötig gehabt, die 3 Gruppen einzeln zu bilden, doch haben wir das gethan, weil es anschaulicher ist, indem z. B. die Gruppe (H) bei Weglassung von δx_2 und δy_2 nichts anderes vorstellt als die Normalgleichungen zum Rückwärtseinschneiden von Hochschule über den 6 Festpunkten Schanze bis Burg (also auch Dreifaltigkeit hier als Festpunkt betrachtet). Davon abgesehen haben wir also aus (H), (D) , (A) durch Addition zu bilden:

Z. B.: $\quad 139{,}67 + 57{,}80 + 47{,}40 = +\,244{,}87.$

Zugleich abrundend erhält man auf diese Weise:

$$
\left.
\begin{aligned}
+\underline{245\,\delta x_1} + 78\,\delta y_1 - 89\,\delta x_2 - 18\,\delta y_2 - 26 &= 0\\
\ldots + \underline{303\,\delta y_1} - 4\,\delta x_2 - 1\,\delta y_2 - 107 &= 0\\
\ldots + \underline{186\,\delta x_2} - 54\,\delta y_2 + 32 &= 0\\
\ldots + \underline{234\,\delta y_2} - 46 &= 0\\
\ldots + \underline{101} &= 0
\end{aligned}
\right\} \quad (S)
$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Gleichungen werden in üblicher Weise aufgelöst und geben:

$$\delta y_1 = +0{,}37^{dm} \quad , \quad \delta x_1 = -0{,}05^{dm} \quad , \quad \delta y_2 = +0{,}16^{dm} \quad , \quad \delta x_2 = -0{,}14^{dm} \tag{3}$$

und das Fehlerquadratsummenglied $[l\,l\,.\,5] = 51.$ (4)

(Einige Einzelheiten der Elimination von (S) werden wir in folgendem § 100. bringen S. 380, unten.)

Diese δx und δy zu den Näherungs-Coordinaten in (2) hinzugefügt, geben folgende Zusammensetzung:

	Hochschule		Dreifaltigkeit	
Näherungen	$(y_1) = -246\,028{,}900$	$(x_1) = -29\,120{,}560$	$(y_2) = -243\,620{,}760$	$(x_2) = -29\,282{,}460$
Verbesserungen	$+0{,}037$	$-0{,}005$	$+0{,}016$	$-0{,}014$
Ergebnisse	$y_1 = -246\,028{,}863$	$x_1 = -29\,120{,}565$	$y_2 = -243\,620{,}744$	$x_2 = -29\,282{,}474$

(5)

Mit diesen endgültigen Coordinaten und mit den früher unter (1) schon gegebenen Coordinaten der festen Punkte berechnet man nun alle Richtungswinkel t von neuem und bekommt damit folgende zweite Tabelle, entsprechend der früheren Tabelle von S. 376, jedoch in Betreff der inneren Richtungen mehr nach dem Muster des unteren Teiles von § 93. S. 351, wozu auch noch bemerkt sei, dass die hier in diesem § 99 mit t bzw. (t) bezeichneten Richtungswinkel denselben Sinn haben wie die φ oder (φ) in § 92. und § 93.

Richtung		Beobachtet α	Ausgleichung t	$t - \alpha = V$	$V + z = v$	v^2
Hochschule—Schanze	1.	26° 50′ 1,2″	26° 49′ 58,5″	−2,7	−2,3	5,29
„ —Steuerndieb	2.	81 48 55,2	81 48 52,9	−2,3	−1,9	3,61
„ —Dreifaltigkeit	3.	93 50 45,4	93 50 47,3	+1,9	+2,3	5,29
„ —Aegidius	4.	137 37 8,8	137 37 10,2	+1,4	+1,8	3,24
„ —Wasserturm	5.	203 11 27,1	203 11 24,8	−2,3	−1,9	3,61
„ —Burg	6.	331 38 46,1	331 38 47,9	+1,8	+2,2	4,84
Summe		3,8	1,6	−2,2	+0,2	25,88
Mittel			$-z =$	−0,4	soll 0,0	
Dreifaltigkeit—Willmer	7.	175 11 53,3	175 11 55,4	+2,1	+2,2	4,84
„ —Aegidius	8.	217 38 23,7	217 38 23,1	−0,6	−0,5	0,25
„ —Hochschule	9.	273 50 50,6	273 50 47,3	−3,3	−3,2	10,24
„ —Burg	10.	301 19 31,0	301 19 32,4	+1,4	+1,5	2,25
„ —Schanze	11.	350 24 21,6	350 24 21,5	−0,1	0,0	0,00
Summe		60,2	59,7	−0,5	0,0	17,58
Mittel			$-z =$	−0,1		
Schanze —Dreifaltigkeit	12.	170 24 22,4	170 24 21,5		−0,9	0,81
Steuerndieb— „	13.	250 39 20,7	250 39 20,0		−0,7	0,49
„ —Hochschule	14.	261 48 52,3	261 48 52,9		+0,6	0,36
Willmer —Dreifaltigkeit	15.	355 11 56,2	355 11 55,4		−0,8	0,64
Aegidius —Hochschule	16.	317 37 8,8	317 37 10,2		+1,4	1,96
„ —Dreifaltigkeit	17.	37 38 23,7	37 38 23,1		−0,6	0,36
Wasserturm—Hochschule	18.	23 11 25,8	23 11 24,8		−1,0	1,00
Burg —Dreifaltigkeit	19.	121 19 30,0	121 19 32,4		+2,4	5,76
Burg —Hochschule	20.	151 38 50,2	151 38 47,9		−2,3	5,29
						16,67
						$\frac{16{,}67}{2} = 8{,}34$

Die Gesamtsumme $[p\,v^2]$ bekommt man nun, da die äusseren Strahlen nur halbes Gewicht haben, so:

von Hochschule	25,88
„ Dreifaltigkeit . . .	17,58
„ den äusseren Strahlen	8,34
	51,80

Diese Summe muss stimmen mit dem Restglied $[l\,l\,.\,5]$ der Elimination, welches wir bereits bei (4) mit $[l\,l\,.\,5] = 51$ angegeben haben. Da die Übereinstimmung genügend ist, können wir weiter gehen und den mittleren Fehler einer Richtung finden:

$$m = \sqrt{\frac{51{,}8}{14}} = \pm 1{,}9'' \qquad (6)$$

Der Nenner 14 entsteht hier aus $20 - 6$, weil 20 gemessene Richtungen da sind, und 6 Unbekannte, nämlich δx_1 , δy_1 , δx_2 , δy_2 und dazu die beiden z und z' für Hochschule und Dreifaltigkeit.

Weitere Rechenproben. Wenn die Summe $[v\,v]$ bzw. $[p\,v\,v]$ unmittelbar aus den einzelnen v berechnet mit dem Eliminationsschlussgliede so stimmt wie in unserem Falle, nämlich 52 gegen 51, so kann man die ganze Rechnung als richtig annehmen, allein auch dem etwaigen Bedürfnis nach weiteren Rechenproben kann man entsprechen, vor allem durch Ausrechnen der einzelnen v auch aus den Fehlergleichungen. Ohne näher hier darauf einzugehen, wollen wir kurz angeben, dass auch diese Proben vollständig stimmen, z. B. $V_1 = -0{,}12 - 1{,}74 - 0{,}80 = -2{,}66 = v_1 - z$, mit $z = +0{,}36$ giebt $v_1 = -2{,}30$ und die Gesamtsumme $[p\,v^2] = 51{,}3$. Auch die am Schlusse von § 91. S. 340 erwähnte Probe, nämlich $[v\,v] = [l\,l] + [a\,l]\,\delta x_1 + [b\,l]\,\delta y_1 + [c\,l]\,\delta x_2 + [d\,l]\,\delta y_2$ giebt genügende Stimmung, nämlich: $[v\,v] = 101 + 1{,}3 - 39{,}5 - 4{,}5 - 7{,}3 = 51{,}0$.

Die Berechnung des mittleren Fehlers in (6) kann man mit demselben Ergebnis, aber mit anderer Auffassung und Darstellung, auch so machen: die äusseren Richtungen haben das Gewicht $p = \frac{1}{2}$ erhalten, weil dabei angenommen ist, es sei jede äussere Richtung orientiert durch je *eine* zweite Richtung, welche an einen festen Strahl angelegt wurde, oder man kann auch sagen: jede äussere Richtung wird bestimmt durch einen gemessenen *Winkel*, dessen einer Schenkel an einen festen Strahl angelegt wird und dessen zweiter Schenkel den neuen Strahl zur Neupunktbestimmung giebt. Da nun ein Winkel nur halbes Gewicht im Vergleich mit einer Richtung hat, so ist die Gewichtsberechnung mit $p = \frac{1}{2}$ gerechtfertigt. Betrachtet man aber die beiden Schenkelrichtungen einzeln, so muss man statt der bisher angenommenen *einen* Verschiebung v mit $p = \frac{1}{2}$ nun *zwei* Verschiebungen $\frac{v}{2}$ mit je $p = 1$ annehmen; man hat also im ersten Falle $\frac{v^2}{2}$ und im zweiten Falle $\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{v^2}{2}$ d. h. in beiden Fällen gleich. Allerdings besteht noch eine Ungleichheit beider Fälle in Betreff der Anzahl der Beobachtungen und der Zahl der Unbekannten. Im ersten Falle hat man 1 Beobachtung $\left(\text{mit } p = \frac{1}{2}\right)$ und im zweiten Fall hat man 2 Beobachtungen (mit $p = 1$), aber auch eine Unbekannte mehr, nämlich den Verschiebungsbetrag am festen Strahl; da aber im Nenner des Ausdrucks für den mittleren Fehler nur die Zahl der *überzähligen* Beobachtungen auftritt, so bleiben beide Fälle doch wieder gleich.

Man hat nämlich:

1. Fall: $$m^2 = \frac{25{,}9 + 17{,}6 + \frac{0{,}9^2}{2} + \frac{0{,}7^2}{2} + \ldots + \frac{2{,}3^2}{2}}{(6-3) + (5-3) + \qquad + 9} = \frac{51{,}8}{14}$$

2. Fall: $$m^2 = \frac{25{,}9 + 17{,}6 + 2\left(\frac{0{,}9}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{0{,}7}{2}\right)^2 + \ldots 2\left(\frac{2{,}3}{2}\right)^2}{(6-3) + (5-3) \quad + \quad (18-9)} = \frac{51{,}8}{14}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Berechnung der Entfernungen nach der Ausgleichung.

Ebenso wie die Richtungswinkel t kann man auch die Entfernungen s aus den ausgeglichenen ebenen rechtwinkligen Coordinaten berechnen, und dann auch noch die $\log s$ in $\log S$ umwandeln (nach (3) oder (4) S. 201). Die Ergebnisse sind in unserem Falle folgende:

		$\log s$	$\log s - \log S$	$\log S$
Hochschule—Schanze	1.	3.596 9583	3203	3.596 6380
„ —Steuerndieb	2.	3.691 1696	3163	3.690 8533
„ —Dreifaltigkeit	3.	3.382 6573	3195	3.382 3378
„ —Aegidius	4.	3.308 9058	3208	3.308 5850
„ —Wasserturm	5.	3.372 1089	3238	3.372 7851
„ —Burg	6.	3.343 6031	3240	3.343 2791
Dreifaltigkeit—Willmer	7.	3.608 5429	3159	3.608 2270
„ —Aegidius	8.	3.229 2614	3177	3.228 9437
„ —Hochschule	9.	3.382 6573	3195	3.382 3378
„ —Burg	10.	3.606 9708	3208	3.606 6500
„ —Schanze	11.	3.573 0886	3171	3.572 7715
Steuerndieb—Dreifaltigkeit	13.	3.414 9084	3132	3.414 5952

Die weiteren 12. 14. ... 20. sind als Gegen-Richtungen in den vorstehenden mit enthalten. Alle anderen Seiten sind schon früher auf S. 203 angegeben.

§ 100. Mittlere Coordinaten-Fehler und Entfernungs-Fehler nach der Ausgleichung.

Für die gewöhnlichen praktischen Zwecke kann die Rechnung unserer Doppelpunkteinschaltung mit dem vorigen § 99. abgeschlossen werden; was die Genauigkeit betrifft, so giebt der mittlere Fehler $m = \pm 1{,}9''$ nach (6) S. 379 genügende Beruhigung.

Indessen wollen wir doch die Gelegenheit benützen, auch noch einige mehr theoretische weitere Genauigkeitsberechnungen hier anzuschliessen, und zwar werden zuerst die mittleren Coordinaten-Fehler bzw. Gewichte in Betracht kommen.

Will man nicht bloss die δx und δy selbst, sondern auch deren Gewichte haben, so wird man schon bei der Auflösung der Normalgleichungen (S) auf S. 377 darauf Bedacht nehmen, indem man nach (22) S. 91 verfahrend, die Eliminationsordnung mindestens einmal ganz umkehrt, also, jedoch mit Weglassung der Summen-Kontrollglieder und der Glieder mit $[l\,l]$ so:

δx_1	δy_1	δx_2	δy_2	l
+245	+ 78	− 89	− 18	− 26
	+303	− 4	− 1	−107
		+186	− 54	+ 32
			+234	− 46
	+278	+ 24	+ 5	− 99
		+154	− 61	+ 23
			+233	− 48
		+152	− 61	+ 31
			+233	− 46
			+209	− 34

$p\,y_2 = 209$

$\delta y_2 = \frac{+34}{209} = +0{,}162^{dm}$

δy_2	δx_2	δy_1	δx_1	l
+234	− 54	− 1	− 18	− 46
	+186	− 4	− 89	+ 32
		+303	+ 78	−107
			+245	− 26
	+174	− 4	− 93	+ 21
		+303	+ 78	−107
			+244	− 30
		+303	+ 76	−107
			+194	− 19
			+175	+ 8

$p\,x_1 = 175$

$\delta x_1 = -\frac{8}{175} = -0{,}046^{dm}$

Die Umkehrung in der vorletzten Gruppe bei 152 und 303 giebt auch:

$p\,x_2 = 136 \qquad \delta\,x_2 = -0{,}14^{dm} \qquad p\,y_1 = 273$ und $\delta\,y_1 + 0{,}366^{dm}$

Diese $\delta\,x$ und $\delta\,y$ sind dieselben, welche wir schon im vorigen § 99. bei (3) S. 378 angegeben hatten, und nun haben wir auch die $p\,x$, $p\,y$. (All dieses wird glatt mit dem Rechenschieber abgeschoben.) Mit diesen Gewichten und dem Gewichtseinheitsfehler $m = 1{,}9''$ werden auch die mittleren Coordinatenfehler berechnet, nach dem Verfahren, welches unten auf S. 343 oder S. 351 angegeben wurde. Man findet:

für	y_1	x_1	y_2	x_2
mittlere Fehler	$\pm 0{,}12^{dm}$	$\pm 0{,}14^{dm}$	$\pm 0{,}13^{dm}$	$\pm 0{,}16^{dm}$

Also nun die Coordinaten mit ihren mittleren Fehlern:

Hochschule		Dreifaltigkeit	
$y_1 = -246028{,}863^m$	$x_1 = -29120{,}565^m$	$y_2 = -243620{,}744^m$	$x_2 = -29282{,}474^m$
$\pm 0{,}012$	$\pm 0{,}014$	$\pm 0{,}013$	$\pm 0{,}016$

Mittlerer Entfernungsfehler.

Aus den Coordinaten beider Punkte berechnet man auch die Entfernung und zwar: $s = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

$log\,s = 3.382\,6573 \qquad s = 2413{,}556^m$ (Projection).

Dazu kommt noch $log\,s - log\,S = 0.000\,3195$, wie schon am Schluss des vorigen § 100. S. 380 angegeben ist, also nun:

$log\,S = 3.382\,3378 \qquad S = 2411{,}780^m$ (Wirklichkeit).

Um auch das Gewicht von s oder S zu bestimmen, muss man s differentiieren:

$$d\,s = -\frac{y_2 - y_1}{s}\,d\,y_1 + \frac{y_2 - y_1}{s}\,d\,y_2 - \frac{x_2 - x_1}{s}\,d\,x_1 + \frac{x_2 - x_1}{s}\,d\,x_2$$

oder $d\,s = -sin\,t\,d\,y_1 + sin\,t\,d\,y_2 - cos\,t\,d\,x_1 + cos\,t\,d\,x_2$

Wenn man $d\,s$ in Millimetern, dagegen die $d\,x$, $d\,y$ in Decimetern zählt, so erhält man: $d\,s = +7\,d\,x_1 - 100\,d\,y_1 - 7\,d\,x_2 + 100\,d\,y_2$

d. h. die Coefficienten von (1) S. 92 sind:

$f_1 = +7 \qquad f_2 = -100 \qquad f_3 = -7 \qquad f_4 = +100$

Damit bekommt man nach Anleitung von (10a) S. 93 im Anschluss an die vorhergehenden Normalgleichungen folgendes (rasch mit dem Rechenschieber zu machen):

a	b	c	d	f
$+245$	$+78$	-89	-18	$+7$
	$+303$	-4	-1	-100
		$+186$	-54	-7
			$+234$	$+100$
				0
	$+278$	$+24$	$+5$	-102
		$+154$	-61	-4
			$+223$	$+101$
				0
		$+152$	-61	$+5$
			$+233$	$+103$
				-37
			$+209$	$+105$
				-37
				$-90 = -\frac{1}{P}$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Das Schlussglied 90 ist die Reciproke des gesuchten Gewichtes, also nun der mittlere Entfernungsfehler (für $\pm 1{,}91''$ mittl. Richtungsfehler):

$$d\,s = \pm 1{,}91\sqrt{90} = +18^{mm}$$

Im ganzen haben wir also:

Hochschule—Dreifaltigkeit $S = 2411{,}780^{m}$
$\pm 0{,}018^{m}$

Die $2{,}4^{km}$ lange Linie hat also einen mittleren Fehler von 18^{mm} oder $7{,}5^{mm}$ auf 1^{km}. Alle diese Genauigkeitsnachweise sind sehr befriedigend.

§ 101. Übertragung in das Kataster-System Celle.

Alles was in § 99. und 100. im conformen System der Landesaufnahme berechnet und ausgeglichen worden ist, wollen wir auch noch in das andere System von § 64., nämlich das Kataster-System mit dem Nullpunkt Celle, übertragen. Dieses kann sehr einfach dadurch geschehen, dass die ausgeglichenen Richtungen und Entfernungen von § 99. in den Abriss des § 64. S. 207 eingefügt werden, wodurch die dort noch bestehenden Lücken sich füllen müssen. Wir wollen dieses auch noch ausführlich geben mit der Bemerkung, dass die in dem Hauptnetze und in dem Abriss S. 207 noch mitgeführten Glieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ bei der Einschaltung von Hochschule—Dreifaltigkeit nicht mehr berücksichtigt sind.

Ergänzung des Abrisses S. 207 (System Celle).

	Beobachtet A	v	Ausgeglichen $\varphi = A + v$	$log\ S$
1. Aegidius.				
Hochschule . . .	315° 2′ 32,64″	+1,4″	315° 2′ 34,0″	3.308 585
Dreifaltigkeit . . .	35 3 47,73	−0,6	35 3 47,1	3.228 944
2. Wasserturm.				
Hochschule . . .	20° 36′ 49,99″	−1,0″	20° 36′ 49,0″	3.710 785
3. Willmer.				
Dreifaltigkeit . . .	352° 37′ 21,62″	−0,8″	352° 37′ 20,8″	3.608 227
4. Steuerndieb.				
Dreifaltigkeit . . .	248° 4′ 43,63″	−0,7″	248° 4′ 42,9″	3.414 595
Hochschule . . .	259 14 15,09	+0,6″	259 14 15,7	3.690 853
5. Schanze.				
Dreifaltigkeit . . .	167° 49′ 43,84″	−0,9″	167° 49′ 42,9″	3.572 772
6. Burg.				
Dreifaltigkeit . . .	118° 44′ 52,26″	+2,4″	118° 44′ 54,7″	3.606 650
Hochschule . . .	149 4 12,32	−2,3	149 4 10,0	3.343 279
7. Hochschule.				
Schanze	24° 15′ 21,8″	−2,3″	24° 15′ 19,5″	3.596 638
Steuerndieb . . .	79 14 17,5	−1,9	79 14 15,6	3.690 853
Dreifaltigkeit . . .	91 16 8,2	+2,3	91 16 10,5	3.382 338
Aegidius	135 2 32,4	+1,8	135 2 34,2	3.308 585
Wasserturm . . .	200 36 51,2	−1,9	200 36 49,3	3.372 785
Burg	329 4 7,6	+2,2	329 4 9,8	3.343 279
8. Dreifaltigkeit.				
Willmer	172° 37′ 19,0″	+2,2″	172° 37′ 21,2″	3.608 227
Aegidius	215 3 47,8	−0,5	215 3 47,3	3.228 944
Hochschule . . .	271 16 13,7	−3,2	271 16 10,5	3.382 338
Burg	298 44 52,9	+1,5	298 44 54,4	3.606 650
Schanze	347 49 42,5	0,0	347 49 42,5	3.572 772

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man mit diesen ausgeglichenen φ und *log S* die Coordinaten von Hochschule und Dreifaltigkeit berechnet, so findet man mit hinreichender Übereinstimmung die nachfolgenden Werte, denen wir auch die mittleren Coordinatenfehler, von § 100. herübergetragen, beigeben:

Coordinaten im System Celle.

Hochschule	$y = -24709{,}769^m \pm 0{,}012$	$x = -26868{,}278^m \pm 0{,}014$	(1)
Dreifaltigkeit	$-22298{,}580^m \pm 0{,}013$	$-26921{,}716^m \pm 0{,}016$	(1a)

Dieses sind die Ergebnisse der *Doppel*punkt-Einschaltung. Zur Vergleichung wollen wir auch noch von § 92., § 93. und § 99. hersetzen:

Hochschule, Vorwärts-Einschneiden (S. 343)	$y = -24709{,}768^m \pm 0{,}006$	$x = -26868{,}306^m \pm 0{,}009$	(2)
Hochschule, Rückwärts-Einschneiden (S. 351)	$-24709{,}762^m \pm 0{,}030$	$-26868{,}280^m \pm 0{,}042$	(3)
Hochschule, Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden (13) (S. 373)	$-24709{,}764^m \pm 0{,}016$	$-26868{,}289^m \pm 0{,}025$	(4)

Sachlich verglichen geben alle diese Zahlen zu erkennen, dass es ziemlich gleichgültig wäre, welche von allen diesen Bestimmungen genommen würde, nur das reine Vorwärts-Einschneiden (2) giebt in x eine Abweichung von 2^{cm}.

Wenn auch alle diese Berechnungen bis jetzt nur den Zweck hatten, als Beispiele zu dienen für die verschiedenen Ausgleichungsformen, deren die Praxis bedarf, so mag doch auch jetzt noch die praktische Bemerkung am Platze sein, dass in dem ganzen Zahlenmaterial nichts für Zwecke von Schulbeispielen zurechtgerückt, sondern alles den reinen Messungen von 1891 entspricht, wie dieselben an die trigonometrische Abteilung im Original abgeliefert worden sind. Andererseits aber sei auch nicht verschwiegen, dass bei Bedürfnis rascher Rechnungs-Abwicklung, die Doppelpunkts-Ausgleichung von § 99.—100. von uns überhaupt nicht gemacht worden wäre.

Während die Einschneide-Ausgleichungen für je *einen* Punkt, nach den Formularen von S. 343 und S. 351, ungemein rasch (Elimination u. s. w. mit dem Rechenschieber), sozusagen fabrikmässig, gemacht werden können, ist das bei Ausdehnung auf zwei und mehr Punkte, welche zusammen behandelt werden sollen, nicht mehr der Fall; und ob man dennoch die gemeinsame Ausgleichung wählen wird, muss von mancherlei Erwägungen abhängen (vgl. den Schluss dieses Kapitels).

Nach diesem wird es kaum nötig sein, noch beizufügen, dass die Fortsetzung solcher Ausgleichungsformen in nachfolgenden § 102. u. ff. nicht für die laufende Praxis bestimmt ist, sondern Überlegungen betrifft, welche erst auf indirektem in direktem Wege nützlich werden, in dem sich denselben nicht entziehen kann, wer ein klares Urteil über alle zugehörigen Fragen erlangen will.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 102. Doppelpunkt-Ausgleichung mit vollen Richtungssätzen.

Schon auf S. 187 haben wir mitgeteilt, dass die Annahme von lauter vollen Richtungssätzen als Messungen zu dem Netze von S. 185 in Wirklichkeit *nicht* erfüllt war, dass wir aber trotzdem, um glatte Rechnung zu haben die Ausgleichung von § 61. mit jener Annahme gemacht haben.

Andererseits haben wir die Doppelpunkt-Einschaltung von § 100. gemacht unter der Annahme, dass alle äusseren Richtungen das Gewicht $= \frac{1}{2}$ haben im Vergleich mit den inneren Richtungen. Diese Gewichtsbemessung ist selbst weder mit der wirklichen Satzverteilung, noch mit der Annahme lauter voller Sätze im Einklang, sondern ist nach § 97. gewählt als passende Vermittlung zwischen allen in Betracht kommenden Umständen, zur Erlangung eines glatten Rechen-Verfahrens.

Nach all diesem mag es wenigstens von theoretischem Interesse sein, die Doppelpunkt-Ausgleichung nun auch noch zu machen mit der Annahme, dass lauter volle Richtungssätze, nicht bloss für die inneren Richtungen, sondern auch für die äusseren Richtungen mit Anschluss an *alle* festen Strahlen, vorhanden seien.

Wir haben dieses konsequent durchgeführt, betrachten aber die Rechnung als ein doctrinäres Schulbeispiel, welches, indem nicht die ganze Rechenmenge vorgeführt wird, immerhin auch ein gewisses praktisches Interesse erwecken und z. B. zur Klärung der Begriffe in Hinsicht auf die Orientierungsgrössen z und die davon abhängigen Fehlerberechnungen dienen kann.

Die fest gegebenen Coordinaten und auch die Näherungs-Coordinaten sollen dieselben sein wie früher in § 99. S. 375.

Die Fehlergleichungen und die Normalgleichungsbeiträge für Hochschule und Dreifaltigkeit bleiben dieselben wie früher in § 99. Tabelle S. 376 und (H) und (D) S. 377, denn die inneren Richtungen werden durch die festen Anschlüsse nicht betroffen.

Auch für die äusseren Richtungen bleiben in den Fehlergleichungen die Coefficienten a , b und die Absolutglieder l dieselben wie früher S. 376; es tritt aber überall eine Orientierungs-Unbekannte z hinzu, und die Gewichte werden andere, nämlich für s feste Strahlen und einen neuen Strahl wird nach (15) § 96. S. 361 das Gewicht $= \frac{s}{s+1}$, also z. B. für Schanze, wo nach Fig. 1. S. 374 3 feste Strahlen und 1 neuer Strahl (Dreifaltigkeit 12) vorhanden ist, wird das Gewicht dieses neuen Strahles $= \frac{3}{4}$. Diejenigen Stationen, auf welchen *zwei* neue Strahlen vorkommen, wie z. B. Steuerndieb mit 13 und 14, müssen nach dem zweiten Teile von § 96. (28) u. ff. S. 364 behandelt werden.

Nach diesen Grundsätzen haben wir aus der früheren Tabelle von § 99. S. 376 folgende neue Tabelle erhalten:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fehlergleichungen für die äusseren Richtungen.

	a	b	c	d	l	p
Schanze-Dreifaltigkeit	$v_{12}=z_3$	. .	. .	$-1{,}0\,\delta x_2-5{,}7\,\delta y_2$	$-0{,}2$	$\frac{3}{4}$
Steuerndieb-Dreifaltigkeit	$v_{13}=z_4$	. .	. .	$+7{,}5\,\delta x_2-2{,}6\,\delta y_2$	$+0{,}7$	1
„ -Hochschule	$v_{14}=z_4+4{,}2\,\delta x_1-0{,}6\,\delta y_1$		. .	. .	$+1{,}1$	1
„ (Summe)	$+4{,}2\,\delta x_1-0{,}6\,\delta y_1$		$+7{,}5\,\delta x_2$	$-2{,}6\,\delta y_2$	$+1{,}8$	$-\frac{1}{6}$
Willmer-Dreifaltigkeit	$v_{15}=z_5$	. .	. .	$+0{,}4\,\delta x_2+5{,}1\,\delta y_2$	$-1{,}5$	$\frac{3}{4}$
Aegidius-Hochschule	$v_{16}=z_6+6{,}8\,\delta x_1+7{,}5\,\delta y_1$		. .	. .	$-1{,}1$	1
„ -Dreifaltigkeit	$v_{17}=z_6$	. .	. .	$-7{,}4\,\delta x_2+9{,}6\,\delta y_2$	$-3{,}2$	1
„ (Summe)	$+6{,}8\,\delta x_1+7{,}5\,\delta y_1$		$-7{,}4\,\delta x_2$	$+9{,}6\,\delta y_2$	$-4{,}3$	$-\frac{1}{7}$
Wasserturm-Hochschule	$v_{18}=z_7-3{,}4\,\delta x_1+8{,}0\,\delta y_1$		. .	. .	$-4{,}1$	$\frac{3}{4}$
Burg-Dreifaltigkeit	$v_{19}=z_8$	. .	. .	$-4{,}4\,\delta x_2-2{,}7\,\delta y_2$	$+2{,}2$	1
„ -Hochschule	$v_{20}=z_8-4{,}4\,\delta x_1-8{,}2\,\delta y_1$		. .	. .	$+0{,}5$	1
„ (Summe)	$-4{,}4\,\delta x_1-8{,}2\,\delta y_1$		$-4{,}4\,\delta x_2$	$-2{,}7\,\delta y_2$	$+2{,}7$	$-\frac{1}{6}$

Auf Schanze mit v_{12} berechnet man den Beitrag zu den Normalgleichungen, indem man nur z_3 weglässt, und im übrigen das Gewicht $p=\frac{3}{4}$ benützt, also z. B. $\frac{3}{4}(-1{,}0)^2=0{,}75$ u. s. w., wodurch man erhält:

3) Schanze
$$\begin{aligned} \underline{0{,}75\,\delta x_2}+4{,}28\,\delta y_2+0{,}15&=0\\ +\underline{24{,}37\,\delta y_2}+0{,}86&=0\\ +\underline{0{,}03}&\end{aligned}$$

Auf Steuerndieb mit v_{13} und v_{14} wird ebenfalls z_4 eliminiert, indem v_{13} und v_{14} ohne z_4 mit $p=1$ gerechnet und die Summe mit $p=-\frac{1}{6}$ dazu genommen wird, also z. B. $1\,(0{,}0)^2+1\,(4{,}2)^2-\frac{1}{6}(4{,}2)^2=+14{,}70$.

4) Steuerndieb
$$\begin{aligned} +\underline{14{,}70\,\delta x_1}-2{,}10\,\delta y_1-5{,}25\,\delta x_2+1{,}82\,\delta y_2+3{,}36&=0\\ +\underline{0{,}30\,\delta y_1}-0{,}75\,\delta x_2-0{,}2\,x\,\delta y_2-0{,}48&=0\\ +\underline{46{,}87\,\delta x_2}-16{,}25\,\delta y_2+3{,}00&=0\\ +\underline{5{,}63\,\delta y_2}-1{,}04&=0\\ +\underline{1{,}16}&\end{aligned}$$

So werden auch noch für die 4 anderen Stationen mit festen Richtungen die Normalgleichungsbeiträge gebildet, die wir aber zur Raumersparung nur noch andeuten wollen:

5) Willmer	. . . . .	$+1{,}69$
6) Aegidius	$+39{,}63\,\delta x_1+43{,}71\,\delta y_1$ . .	$+8{,}81$
7) Wasserturm	$+8{,}67\,\delta x_1-20{,}40\,\delta y_1$ . .	$+12{,}61$
8) Burg	$+16{,}13\,\delta x_1+30{,}07\,\delta y_1$ . .	$+3{,}87$

Alle diese Beiträge 3) bis 8) nimmt man mit den schon von früher vorhandenen Beiträgen (H) und (D) von § 99. S. 377 zusammen, indem man sie Glied für Glied addiert, und dadurch folgende Gesamtnormalgleichungen erhält, in welchen wir nun aber überall um 2 Stellen abrunden:

$$\begin{aligned} +\underline{277\,\delta x_1}+100\,\delta y_1-90\,\delta x_2-28\,\delta y_2-20&=0\\ +\underline{362\,\delta y_1}-1\,\delta x_2-15\,\delta y_2-113&=0\\ +\underline{231\,\delta x_2}-80\,\delta y_2+37&=0\\ +\underline{287\,\delta y_2}-59&=0\\ +\underline{111}&\end{aligned}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Gleichungen in üblicher Weise aufgelöst geben:

$\delta y_1 = +0{,}34^{dm}$ $\delta x_1 = -0{,}07^{dm}$ $\delta y_2 = +0{,}18^{dm}$ $\delta x_2 = -0{,}12^{dm}$
$p y_1 = 320$ $p x_1 = 202$ $p y_2 = 244$ $p x_2 = 171$

dazu in laufender Elimination:

$$[l\,l\,.\,5] = 111 - 1 - 35 - 8 - 8 = 59 \qquad (1)$$

Indem man die δx , δy zu den Näherungs-Coordinaten addiert, erhält man:

Hochschule, Näherung	$(y_1) = -246\,028{,}900^m$	$(x_1) = -29\,120{,}560^m$	
	$\delta y_1 = +0{,}034$	$\delta x_1 = -0{,}007$	
Hochschule, Ausgleichung	$y_1 = -246\,028{,}866^m$	$x_1 = -29\,120{,}567^m$	(2)
Dreifaltigkeit, Näherung	$(y_2) = -243\,620{,}760^m$	$(x_2) = -29\,282{,}460^m$	
	$\delta y_2 = +0{,}018$	$\delta x_2 = -0{,}012$	
Dreifaltigkeit, Ausgleichung	$y_2 = -243\,620{,}742^m$	$x_2 = -29\,282{,}472^m$	(3)

Nach diesem gehen wir über zu der Berechnung der Fehlerverteilung, d. h. Ausrechnung aller einzelnen v und z und dann Berechnung des mittleren Fehlers. Die Messungen auf Hochschule und Dreifaltigkeit werden genau ebenso behandelt, wie früher bei S. 351 und geben die einzelnen v:

Hochschule $v = -2{,}2''$, $-1{,}8''$, $+2{,}0''$, $+1{,}5''$, $-2{,}1''$ $+2{,}5''$
Dreifaltigkeit $v = +2{,}5''$, $-0{,}4''$, $-3{,}4''$, $+1{,}5$, $-0{,}1''$

hieraus Hochschule: $[v^2] = 24{,}99$
Dreifaltigkeit: $[v^2] = 20{,}23$

Schanze giebt Dreifaltigkeit $170°\,24'\,22{,}4''$ beobachtet
$170\;\;24\;\;21{,}3$ ausgeglichen

$v_{12} = -1{,}1 \qquad v^2 = 1{,}21$

also mit $p = \frac{3}{4}$, $p\,v^2 = 0{,}9125$

Steuerndieb giebt Dreifaltigkeit $250°\,39'\,20{,}7''$ Hochschule $261°\,48'\,52{,}3''$ beobachtet
$250\;\;39\;\;20{,}1$ $261\;\;48\;\;53{,}0$ ausgeglichen

$v_{13} = -0{,}6$	$v_{14} = +0{,}7$
$v_{13}^2 = 0{,}36$	$v_{14}^2 = 0{,}49$

hiezu aber noch für die Summe $v_{13} + v_{14} = +0{,}1$ und mit $p = -\frac{1}{6}$ den Betrag $-\frac{1}{6}(-0{,}1)^2 = -0{,}0017$ also im ganzen für Steuerndieb $[v^2] = 0{,}36 + 0{,}49 - 0{,}0017 = 0{,}8483$.

In gleicher Weise bekommt man für alle Stationen zusammen:

Hochschule			24,9900	mit 6	Richtungen
Dreifaltigkeit			20,2300	„ 5	„
Schanze	$0{,}75 \cdot 1{,}21$	$=$	0,9125	„ 1	„
Steuerndieb	$0{,}36 + 0{,}49 - 0{,}0017$	$=$	0,8483	„ 2	„
Willmer	$0{,}75 \cdot 0{,}36$	$=$	0,2700	„ 1	„
Aegidius	$1{,}21 + 0{,}36 - 0{,}0357$	$=$	1,5343	„ 2	„
Wasserturm	$0{,}75 \cdot 1{,}44$	$=$	1,0800	„ 1	„
Burg	$5{,}29 + 4{,}00 - 0{,}0150$	$=$	9,2750	„ 2	„
		$[v^2] =$	59,1401	mit 20	Richtungen

Dieses stimmt hinreichend mit $[l\,l\,.\,4] = 59$ von (1) (s. oben.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Was nun den mittleren Fehler betrifft, so ist derselbe zu rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{59{,}14}{20-4-2}} = \pm 2{,}1'' \qquad (4)$$

Der Nenner $20 - 4 - 2 = 14$ entsteht nämlich dadurch, dass 20 Richtungen als gemessen eingehen und ausser den 4 Hauptunbekannten δx_1 δy_1 δx_2 δy_2 noch die beiden z_1 und z_2 für die ganz freien Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit als Unbekannte auftreten. Allerdings sind auch auf den festen Punkten Schanze, Steuerndieb u. s. w. ursprünglich Nullpunkts-Unbekannte z_3 , z_4 u. s. w. vorhanden gewesen, allein diese sind nicht nur eliminiert, sondern auch durch die Gewichte 0,75 und die Abzüge — 0,0017 u. s. w. in anderer Weise berücksichtigt.

Die Berechnung des mittleren Fehlers nach (4) entspricht der theoretischen Formel (35) § 96. S. 364; wir wollen aber auch noch die schärfere Rechnung nach (36) S. 365 durchführen.

Wenn man nämlich auch auf den festen äusseren Punkten *alle* gemessenen Richtungen eines vollen Satzes und das zugehörige z berücksichtigen will, so bekommt man eine ganz andere, nämlich z. B. für den Punkt Schanze folgende Berechnung, welche wir auf 0,01″ scharf führen, um den Zusammenhang deutlicher zu zeigen.

Schanze	fest gegeben	beobachtet t	V	ausgeglichen	$v' = v - z$
1. Steuerndieb . .	132° 35′ 39,69″	132° 35′ 39,82″	— 0,13″		
2. Dreifaltigkeit . .		170 24 22,36		170° 24′ 21,30″	— 1,06
3. Aegidius . . .	184 40 38,35	184 40 38,45	— 0,10		
4. Burg	240 44 48,10	240 44 47,87	+ 0,23		
			0,00		— 1,06

Nun rechnet man die Gesamtverschiebung:

$$-z = \frac{[V] - 1{,}06}{4} = -0{,}26'' \text{ also } z = +0{,}26$$

Nun kann man entweder dieses z zu allen V und v' hinzunehmen und dadurch die 4 wirklichen v, nämlich + 0,13 , — 0,80 , + 0,16 , + 0,49 und deren Quadratsumme 0,9226 berechnen, oder man kann noch mehr anschaulich die Sache dadurch machen, dass man die beobachteten t nochmals sämtlich um $-z$ verschiebt und mit den oben als fest gegeben und ausgeglichen bekannten Richtungswinkeln gemeinsam vergleicht.

Schanze	fest gegeben bzw. ausgeglichen	beobachtet $t - 0{,}26''$	v	v^2
Steuerndieb . . .	132° 35′ 39,69″	132° 35′ 39,56″	+ 0,13″	0,0169
Dreifaltigkeit . . .	170 24 21,30	170 24 22,10	— 0,80	0,6400
Aegidius	184 40 38,35	184 40 38,19	+ 0,16	0,0256
Burg	240 44 48,10	240 44 47,61	+ 0,49	0,2401
			— 0,02	0,9226

Man kann dieses auch noch so rechnen:

$$[V^2] + v'^2 - \frac{[v']^2}{s+s'} = 0{,}13^2 + 0{,}10^2 + 0{,}23^2 + 1{,}06^2 - \frac{1}{4}(-1{,}06)^2$$
$$= 0{,}0798 + 1{,}1236 - 0{,}2809 = 0{,}9226$$

Dieses ist nun der Fehlerquadratbeitrag der Station Schanze mit 4 gemessenen Richtungen und einer Nullpunkts-Unbekannten z.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Alle unsere 8 Stationen zusammen geben so im Ganzen:

1. Hochschule	24,99	5. Willmer	$2{,}77 + 0{,}31 = 3{,}08$
2. Dreifaltigkeit	20,23	6. Aegidius	$1{,}39 + 1{,}69 = 3{,}08$
3. Schanze	$0{,}08 + 0{,}84 = 0{,}92$	7. Wasserturm	$0{,}46 + 1{,}07 = 3{,}08$
4. Steuerndieb	$1{,}81 + 0{,}90 = 2{,}71$	8. Burg	$2{,}03 + 9{,}11 = 11{,}14$

Gesamtsumme $[v^2] = 8{,}54 + 59{,}14 = 67{,}68$

Die Anzahl der beobachteten Richtungen ist $= 42$ und die Unbekannten sind erstens δx_1 δy_1 δx_2 δy_2 zusammen 4 und für jede Station ein z, also deren 8 und im Ganzen giebt das $4 + 8 = 12$ Unbekannte, folglich der mittlere Fehler einer beobachteten Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{67{,}68}{42 - 12}} = + 1{,}5'' \tag{5}$$

Lässt man die festen Strahlen weg, so hat man:

$$m = \sqrt{\frac{59{,}14}{20 - 6}} = \pm 2{,}1'' \tag{6}$$

wie schon oben (4) angegeben war.

Ehe wir diese Fehlerberechnungen (6) und (5) vergleichen, wollen wir nochmals daran erinnern, dass unser Zahlenbeispiel in Bezug auf die Anordnung der Sätze lediglich *fingiert* ist. Sehen wir aber davon ab, und nehmen wir an, es seien wirklich unsere 8 vollen Richtungssätze mit zusammen 42 Richtungen auf ein von früher vorhandenes wesentlich genauer gemessenes und ausgeglichenes Fünfeck aufgepasst und eingeschaltet worden, so ist die Berechnung (5) ohne Zweifel die theoretische Folgerung des ganzen Verfahrens, indem *alle* 42 Richtungen, auch die auf bereits feste Strahlen aufzulegenden, ihre v erhalten müssen. Um übrigens die festen, alten Strahlen von den neuen zu trennen, wollen wir noch (5) so schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{8{,}54 + 59.14}{16 + 14}} \tag{7}$$

Hier stehen rechts die Bestandteile von (4) oder (6) und man sieht, dass die Berechnung (4) zwar ebenfalls in richtigem Verhältnis hergestellt ist (abgesehen von dem, was in unserem Beispiel fingiert ist), dass aber die Berechnung (4) immer nur einen *Teil* der Fehlerelemente berücksichtigt und insofern der Berechnung (5) oder (7) nachsteht.

In der Praxis wird man wohl niemals die Berechnung (5) durchführen, sondern sich mit (4) begnügen, wahrscheinlich auch gar nicht nach Richtungen in diesem Sinne ausgleichen, sondern nur nach § 99. mit *unabhängigen* äussern Richtungen wie mit einzelnen Winkeln verfahren; bei alledem schien es uns nicht uninteressant, die vorstehende Richtungsausgleichung bis zu der Berechnung des mittleren Fehlers nach (5) durchzuführen, weil dadurch viel besser als durch die abstrakten Formeln von § 96. die Erkenntnis geweckt wird, welche Zahl von Beobachtungen und Unbekannten im Nenner des mittleren Fehlerquadrats einzuführen ist, ob alle z oder welche z hiebei mitzählen u. s. w. oder allgemeiner, weil dadurch ersichtlich wird, was die strenge Theorie fordert und was davon in gegebenen Fällen der Praxis nachgelassen werden kann.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 103. Die Schreiberschen Regeln.

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf Triangulierung niederer Ordnung (II. und III. Ordnung) ist im Grossen, d. h. auf die hunderte und tausende von Fällen der laufenden staatlichen Trigonometer-Praxis zuerst angewendet worden von General *Schreiber*, als Chef der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme 1876. Dabei wurde auch die Frage der Messungs-Anschlüsse an feste Richtungen, mit Orientierungsunbekannten z mathematisch behandelt. Eine autographierte für den inneren Dienst der trigonometrischen Abteilung bestimmte Abhandlung vom 8. Sept. 1877: „*Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme, Ausgleichung und Berechnung der Triangulation zweiter Ordnung*“ wurde von dem Verfasser Schreiber uns übergeben zur Veröffentlichung in dem Werke „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882“, I. S. 151—164. Daselbst ist auf S. 157—159 in kurzen Sätzen und Regeln die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit reduzierten Fehlergleichungen behandelt, wie wir im Nachstehenden als Citat mitteilen:

Die reduzierten Fehlergleichungen sind keineswegs wirkliche Fehlergleichungen mit einfacher geometrischer Bedeutung, sondern sie sind lediglich als fingierte Rechnungsausdrücke aufzufassen, deren Bedeutung sich auf die angegebene Eigenschaft beschränkt, und die weiter keinen Zweck haben, als den einer Rechnungsabkürzung. Aus diesem Grunde hat es auch keine Bedenken, *negative* (fingierte) Gewichte für dieselben einzuführen.

Die Bildung der reduzierten Fehlergleichungen beruht auf folgenden Sätzen:

Satz 1. Wenn die Unbekannte z in jeder der ν Fehlergleichungen:

$$(1) = -z + a_1 x + b_1 y + \ldots + n_1 \quad \text{Gew.} = 1$$
$$(2) = -z + a_2 x + b_2 y + \ldots + n_2 \quad \text{Gew.} = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

aber in keiner der übrigen vorkommt, so kann man anstatt jener ν Fehlergleichungen, welche z enthalten, die folgenden reduzierten Fehlergleichungen setzen:

$$0 = a_1 x + b_1 y + \ldots + n_1 \quad \text{Gew.} = 1$$
$$0 = a_2 x + b_2 y + \ldots + n_2 \quad \text{Gew.} = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

$$0 = (a) x + (b) y + \ldots + (n) \quad \text{Gew.} = -\frac{1}{\nu},$$

wo die letzte Gleichung die Summe der übrigen bedeutet.

Aus den gegebenen ν Fehlergleichungen ergiebt sich die fertige Normalgleichung für z, nämlich: $0 = \nu z - (a) x - (b) y - \ldots - (n)$.

Da die rechte Seite dieser Gleichung der Summe der ν Verbesserungen (1), (2), ... mit entgegengesetzten Zeichen gleich ist, so ergiebt sich daraus der Satz:

Auf jeder Station ist die Summe der Verbesserungen $(1) + (2) + \ldots$ gleich Null, wovon wir nachher Anwendungen machen werden. Man beweist diesen Satz, ebenso wie die folgenden, einfach durch die Probe; die zweite Gruppe von Gleichungen muss nämlich dieselben Normalgleichungen geben, wie die erste nach Elimination von z.

Satz 2. Die Fehlergleichungen

$$(1) = a x + b y + \ldots + n_1 \quad \text{Gew.} = p_1$$
$$(2) = a x + b y + \ldots + n_2 \quad \text{Gew.} = p_2 \quad \text{u. s. w.}$$

die sich nur in den konstanten Gliedern und den Gewichten unterscheiden, kann man durch die eine ersetzen:

$$0 = a x + b y + \ldots + \frac{p_1 n_1 + p_2 n_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots} \quad \text{Gew.} = p_1 + p_2 + \cdots$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Satz 3. Anstatt der Fehlergleichung

$$(1) = a\,x + b\,y + \ldots + n \quad \text{Gew.} = p$$

kann man die folgende setzen:

$$0 = q\,a\,x + q\,b\,y + \ldots + q\,n \quad \text{Gew.} = \frac{p}{q^2}$$

Aus diesen allgemeinen Sätzen ergeben sich die folgenden speziellen, und zwar: Satz 4. aus 1. und 2., Satz 5. und 6. aus 2. und 3.

Satz 4. Wenn die Unbekannte z nur in den beiden Fehlergleichungen

$$(1) = -z \quad \text{Gew.} = 1$$
$$(2) = -z + a\,x + b\,y + \ldots + n \quad \text{Gew.} = 1$$

vorkommt, so kann man dafür die eine reduzierte:

$$0 = a\,x + b\,y + \ldots + n \quad \text{Gew.} = 1$$

setzen.

Satz 5. Die beiden Fehlergleichungen:

$$(1) = a\,x + b\,y + \ldots + n_1 \quad \text{Gew.} = 1$$
$$(2) = a\,x + b\,y + \ldots + n_2 \quad \text{Gew.} = 1,$$

die sich nur in dem konstanten Gliede unterscheiden, kann man durch die eine ersetzen:

$$0 = 2\,a\,x + 2\,b\,y + \ldots + n_1 + n_2 \quad \text{Gew.} = \frac{1}{2}$$

Satz 6. Die beiden Fehlergleichungen:

$$(1) = a\,x + b\,y + \ldots + n_1 \quad \text{Gew.} = 1$$
$$(2) = a\,x + b\,y + \ldots + n_2 \quad \text{Gew.} = \frac{1}{2},$$

die sich von den vorigen nur in dem Gewicht der zweiten Gleichung unterscheiden, kann man durch die eine ersetzen:

$$0 = 3\,a\,x + 3\,b\,y + \ldots + 2\,n_1 + n_2 \quad \text{Gew.} = \frac{1}{6}.$$

Statt diese 6 Sätze successive anzuwenden, kann man aber auch das, was dieselben nach und nach verlangen, auf einmal ausführen, d. h. die Sätze liefern auch folgende

Mechanische Regeln zur Bildung der reduzierten Fehlergleichungen.

Regel 1. Je zwei einander entgegengesetzte Richtungen 1. und 2. geben:

$$0 = (1) + (2) \ldots \quad \text{Gew.} = \frac{1}{2},$$

ausgenommen, wenn 1. oder 2. die einzige unbestimmte Richtung einer definitiven Station ist, in welchem Falle man hat (2. als einzige unbestimmte Richtung ihrer Station angesehen):

Regel 1 a: $$0 = 2\,(1) + (2) \ldots \quad \text{Gew.} = \frac{1}{6}$$

Regel 2. Jede einseitige Richtung 1. giebt:

$$0 = (1) \ldots \quad \text{Gew.} = 1$$

ausgenommen, wenn sie die einzige unbestimmte Richtung der Station ist, in welchem Falle man hat:

Regel 2 a: $$0 = (1) \ldots \quad \text{Gew.} = \frac{1}{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Regel 3. Ausserdem giebt jede Station von r Richtungen 1, 2, 3 ...

$$0 = (1) + (2) + (3) + \ldots \quad \text{Gew.} = -\frac{1}{r}.$$

Auf den definitiven Stationen ist die Anzahl r einschliesslich der Anschlussrichtung zu verstehen. Ist hier ausser der letzteren nur noch *eine* Richtung vorhanden, so fällt die obige Gleichung fort.

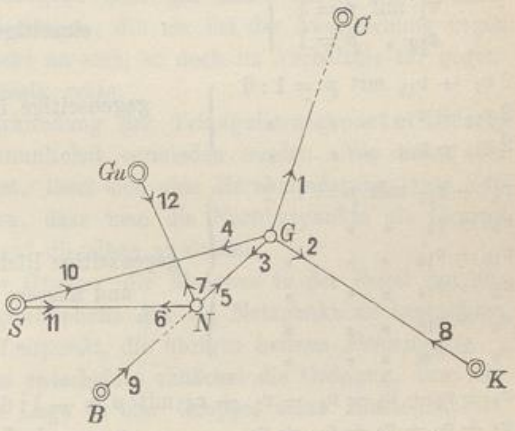
Was die Beweise dieser Sätze und Regeln betrifft, so wird man dieselben in unseren verschiedenen §§ 96. und 97., nebst den früheren §§ 26. und 31. leicht entnehmen können, es ist jedoch zu bemerken, dass die mancherlei Fragen über Berechnung der mittleren Fehler in den Schreiber'schen Sätzen nicht berührt werden.

Ein Zahlenbeispiel zur Anwendung und Einübung dieser Regeln wurde im Anschluss an Fig. 1. gegeben, wo G und N ein neu zu bestimmendes Punktpaar und die übrigen Zeichen fest gegebene Punkte bedeuten, man hat also:

Innere Richtungen	Äussere Richtungen
(G) 1. 2. 3. 4.	8. 10.
(N) 5. 6. 7.	9. 11. 12.

zusammen 11 gemessene Richtungen.

Fig. 1.
Massstab 1 : 800 000.



Die Ausgleichung wird im Wesentlichen denselben Gang nehmen müssen, wie unsere Doppelpunkt-Einschaltung Hochschule-Dreifaltigkeit in § 99. oder § 102. Die Regel 3. haben wir in § 99. auf den Stationen Hochschule und Dreifaltigkeit angewendet, dagegen die Regel 1. für gegenseitige Messungen, welche in Fig. 1. 5mal Anwendung finden kann, haben wir in § 99. und § 102. nicht benützt, weil dadurch der Zusammenhang der Stationsmessungen zerrissen wird. Überhaupt sind diese Schreiber'schen Sätze und Regeln nicht Vorschriften, welche angewendet werden *müssen*, sondern es sind *Formen* von mathematischen Gedanken, welche auch in anderer Weise ausgedrückt und angewendet werden können. Namentlich ist zu beachten, dass das Gewicht $\frac{1}{2}$ bei Regel 2a voraussetzt, es sei der neue Strahl nur an *einen* alten festen Strahl angebunden. Die Strahlen 10. und 11. haben *ein* gemeinsames z mit einer Anschlussrichtung in S, wodurch die beiden Fehlergleichungen für 10. und 11. von einander *abhängig* werden (während wir in § 99. solche 2 Strahlen unabhängig annahmen).

Das Schreiber'sche Beispiel von Fig. 1. ist in der ursprünglichen Abhandlung und im Abdruck (Jordan-Steppes 1882, S. 153—163) genau nach den Schreiber'schen Regeln behandelt, dagegen in der vorigen Auflage dieses Buches (Handb. d. V., 3. Aufl. I., 1888, S. 167—171) haben wir dasselbe Beispiel teilweise anders durchgerechnet, nämlich um die Stationsgruppen nicht zerreissen zu müssen, die Regel 1. unbenützt gelassen, was aber am Schluss-Ergebnis natürlich nichts geändert hat.

Auch unser Beispiel § 99. bzw. § 102. ist mehrfach nach den Schreiber'schen Regeln durchgerechnet worden; es ist aber sogleich zu bemerken, dass diese Regeln auf teilweise *anderen Annahmen* beruhen als unsere beiden Formen § 99. und § 102.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Denn in § 99. haben wir auf Steuerndieb, Aegidius und Burg, die neuen Richtungen nach Hochschule und Dreifaltigkeit als *unabhängig* eingeführt (mit dem Gewicht $\frac{1}{2}$ wie bei Schreiber), was eine vereinfachende Vernachlässigung der Regel 3. ist. Andererseits ist unsere Ausgleichung § 102. formell ebenso streng als Schreiber's Regeln, macht aber die Annahme, dass lauter volle Sätze mit Einschluss *aller* festen Anschlussstrahlen gemessen sind, während die Schreiber'schen Regeln nur je *einen* festen Anschlusstrahl voraussetzen.

Die rechnerische Durchführung unseres Beispiels von § 99. nach den Schreiber'schen Regeln würde sich so gestalten:

Man setzt alle Fehlergleichungen für die 20 gemessenen Richtungen an, ohne alle Rücksicht auf die z. Dann bildet man:

v_1 mit $p = 1$ v_{13} „ $p = 1$	einseitige Richtungen (Regel 2.)
$2v_7 + v_{15}$ mit $p = 1:6$ $2v_{11} + v_{12}$ „ „ „ $2v_5 + v_{18}$ „ „ „	gegenseitige innere und äussere *einzige* Richtung (Regel 1 a.)
$v_8 + v_{17}$ mit $p = 1:2$ $v_9 + v_3$ „ „ „ $v_{10} + v_{19}$ „ „ „ $v_2 + v_{14}$ „ „ „ $v_4 + v_{16}$ „ „ „ $v_6 + v_{20}$ „ „ „	gegenseitige Richtungen, innere und innere, oder innere und äussere nicht einzige Richtung (Regel 1.)
$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$ mit $p = -1:6$ $v_7 + v_8 + v_9 + v_{10} + v_{11}$ „ $p = -1:5$	innere Richtungssätze (Regel 3.)
$v_{13} + v_{14}$ mit $p = -1:3$ $v_{19} + v_{20}$ „ „ „ $v_{16} + v_{17}$ „ „ „	äussere Richtungssätze mit mehr als *einem* neuen Strahl (Regel 3. mit Annahme je *eines* festen Anlagestrahles.)

Diese 16 Gleichungen werden angesetzt, (ohne die z), wie wenn sie unabhängige Fehlergleichungen mit den einzigen Unbekannten δx_1 , δy_1 , δx_2 , δy_2 und mit den angegebenen (teilweise negativen) Gewichten wären. Die zugehörigen Normalgleichungen $[p\,a\,a]\,\delta x_1 \ldots$ werden gebildet und aufgelöst, wodurch die Coordinaten bestimmt sind.

Die rechnerische Ausführung müssen wir uns aus Rücksicht auf den verfügbaren Raum versagen, es sei nur bemerkt, dass die Schluss-Coordinaten nur um wenige Millimeter abweichen von den Coordinaten des § 99. und § 102. Es ist sicherlich auch nicht die Frage nach dem schärfsten Rechnungsgange an sich, welche uns hier beschäftigt, sondern die Frage, ob bei der einen oder anderen Anordnung die unvermeidlichen Vernachlässigungen aus dem inneren Verständnis aller Umstände, oder nur aus praktischer Not hervorgegangen sind. Ersteres ist bei den Schreiber'schen Regeln von 1877 und auch bei unseren Ausgleichungen von § 99. und § 102. der Fall.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 104. Folge-Punkte.

Jeder praktische Trigonometer wird schon sich mit dem Gedanken beschäftigt haben, dass *nahe* gelegene Punkte in ihrer *relativen* Lage genauer bestimmt werden müssen, als von der Bestimmung weit auseinander liegender Punkte im Allgemeinen verlangt wird. Namentlich der spätere Anschluss von Kleinvermessungen, mit Polygonzügen u. s. w. legt diese Überlegung nahe.

Dieses ist von General *Schreiber* als Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in ein gewisses System gebracht worden, mit den Bezeichnungen „*Leitpunkt*" und „*Folgepunkt*", durch eine Anweisung, welche zur Veröffentlichung in der „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 1—3 mitgeteilt worden ist, wie folgender Auszug von dort zeigt:

Wenn benachbarte Punkte ungenügend oder gar nicht direkt mit einander verbunden sind, so werden die Verschiebungen, die sie bei der Ausgleichung gegen einander erleiden, leicht, wenn auch nicht an sich, so doch im Verhältnis zur gegenseitigen Entfernung der Punkte, unzulässig gross.

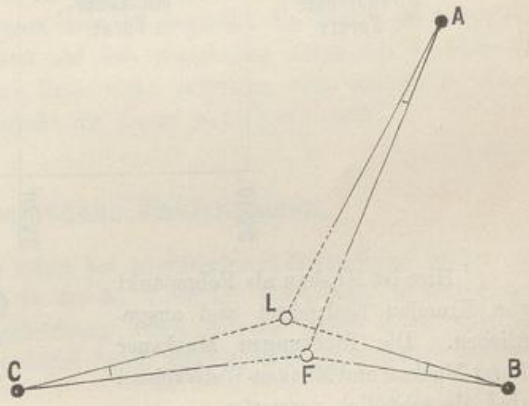
Es ist daher schon bei der Erkundung der Triangulierungspunkte Bedacht darauf zu nehmen, dass solche Fälle thunlichst vermieden werden. Wo dieses aber nicht möglich oder zu umständlich ist, lässt sich eine Herabminderung jener Verschiebungen zuweilen dadurch erreichen, dass man die Nachbarpunkte als *Gruppe* behandelt, d. h. die folgenden Regeln auf dieselben anwendet:

1. Einer von den Punkten einer Gruppe (die übrigens in der Regel nur aus zwei Punkten bestehen wird) ist auf gewöhnliche Art als Netzpunkt zu beobachten und auszugleichen. Dieser heisst der *Leitpunkt*, die übrigen heissen *Folgepunkte*.

2. Bei der Wahl des Leitpunktes entscheidet zunächst die Ordnung, bzw. der Rang des Punktes, und darnach seine Lage in der Gruppe, seine Einstellbarkeit, Sichtbarkeit, Festigkeit, Dauer, u. s. w.

3. Sämtliche Folgepunkte sind von denselben Standpunkten anzuschneiden, während der Leitpunkt über irgend welchen anderen Punkten bestimmt sein kann. Es ist keineswegs ausgeschlossen, dass die Folgepunkte auch vom Leitpunkt angeschnitten werden; jedoch finden auf die von diesem ausgehenden Schnitte diese besonderen Bestimmungen keine Anwendung.

Fig. 1.
L = Leitpunkt, F = Folgepunkt.



4. Das Anschneiden eines Folgepunktes geschieht lediglich durch unmittelbare Messung der *Parallaxe*, d. i. des meist kleinen Winkels zwischen dem Leit- und Folgepunkt.

5. Die in die Ausgleichung eines Folgepunktes als Data einzuführenden Richtungswinkel des letzteren sind nicht, wie sonst, aus den beobachteten, sondern aus den endgültigen Richtungswinkeln des Leitpunktes mittelst der beobachteten Parallaxen zu bilden.

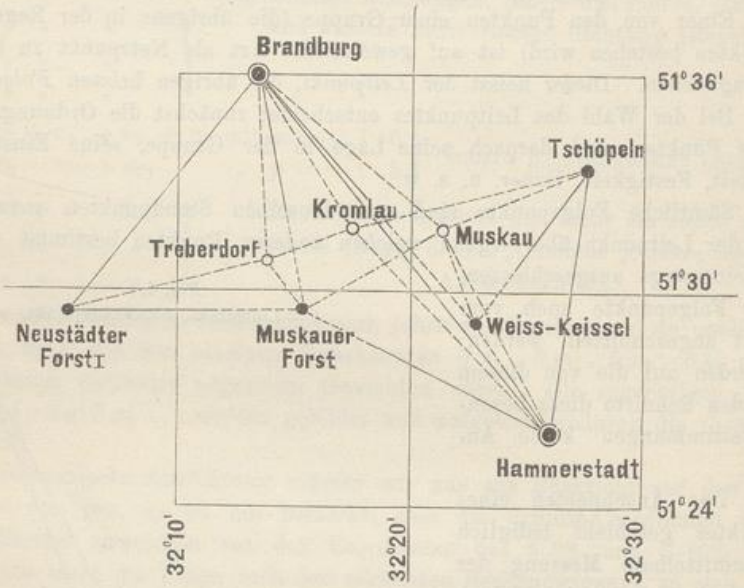
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

(In die Spalte „Beobachtet" der Abrisse sind jedoch wie immer die aus den *beobachteten* Richtungswinkeln des Leitpunktes gebildeten Werte mit besonderer Bemerkung einzutragen).

Die Vorschrift 4. hat den Zweck, die Parallaxen möglichst genau zu erhalten, während durch die Vorschriften 3. und 5. bewirkt werden soll, dass die Parallaxen durch die Ausgleichung möglichst wenig abgeändert, und somit die Punkte der Gruppe möglichst wenig gegen einander verschoben werden. Inwieweit in dem einzelnen Falle diese Wirkung zu erwarten ist, wird sich mittelst der folgenden Bemerkung ungefähr beurteilen lassen.

Je näher der Folgepunkt dem Leitpunkt im Vergleich zu seiner Entfernung von einem Standpunkte ist, desto weniger kommt es auf die richtige Lage des Folgepunktes zum Leitpunkt (wie sie durch den endgültigen Richtungswinkel von einem zum anderen und durch die Coordinaten beider in die Ausgleichung eingeführt wird), und desto mehr auf die Genauigkeit der Parallaxe an. Wenn daher sämtliche Standpunkte, von denen der Folgepunkt angeschnitten ist, mehrere Kilometer von letzterem entfernt sind, dieser aber nur einige hundert Meter vom Leitpunkt abliegt, so hängt die mehr oder minder genaue Lage des Folgepunktes zum Leitpunkt fast nur von den Parallaxen ab. Ist dagegen der Folgepunkt vom Leitpunkt etwa ebenso weit entfernt, wie von den Standpunkten, so hängt von der Genauigkeit der endgültigen Daten etwa ebensoviel ab, wie von derjenigen der Parallelaxen. Ein Beispiel hierfür ist in Fig. 2. gegeben:

Fig. 2.



Hier ist Muskau als Folgepunkt von Kromlau beobachtet und ausgeglichen. Die Richtungen Muskauer Forst-Muskau und Muskau-Weisskeissel sind als schädlich verworfen.

Während in der Regel alle nötig werdenden Sätze einer Station an einen

Erläuterungen zu Fig. 2.

- Punkte erster Ordnung.
- Alte Punkte zweiter Ordnung.
- Neue „ „ „
- Alte Richtungen.
- Neue Richtungen.
- Schädliche Richtungen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gemeinsamen Anfangsstrahl angeschlossen werden, werden Leitpunkt und Folgepunkte nur unter sich verbunden.

Vorstehendes sind die Bestimmungen der trigonometrischen Abteilung von 1888.

Bei Stadt-Triangulierungen kommt der erwähnte Fall häufig vor mit zwei oder mehr Hochpunkten auf einem Bauwerke, z. B. zwei symmetrischen Kirchtürmen u. s. w., und dann ist darauf zu achten, dass keinenfalls solche zusammengehörige Punkte in getrennten Sätzen gemessen werden.

In den Messungen schon hierauf noch mehr Rücksicht zu nehmen als durch die soeben bemerkte Anordnung der Sätze, ist bei Stadt-Triangulierung im Allgemeinen nicht möglich, denn erst nach Auftragen des Netzbildes kann ein bestimmter Berechnungsplan entworfen werden (vgl. unseren 2. Band, 4. Aufl. 1893, S. 329—333). Wie sich dann die Rechnung gestalten kann, mag ein Beispiel zweier, 24 Meter von einander abstehender Punkte zeigen: Oppenheim Fahnenstange und Oppenheim Schornstein (Blitzableiter). Der erste Punkt war von 7 Bodenpunkten aus angeschnitten, der zweite von 9 Bodenpunkten, worunter die 7 vorigen und noch 2 andere. Nach der reinen Folgepunktstheorie müsste man die zwei anderen Schnitte streichen, was man aber sehr ungern thut, da die Schnitte sonst gut sind. Unter diesen Umständen haben wir beide Möglichkeiten ausgerechnet, es gab sich:

Fahnenstange	$y = -24898{,}427^m$	$x = -25227{,}035^m$	(1)
aus 7 Schnitten ($m = \pm 2{,}1''$)	$\pm 0{,}009$	$\pm 0{,}007$	
Schornstein	$y = -24877{,}051^m$	$x = -25237{,}503^m$	(2)
aus 7 Schnitten ($m = \pm 1{,}4''$)	$\pm 0{,}006$	$\pm 0{,}005$	
Schornstein	$y = -24877{,}034^m$	$x = -25237{,}514^m$	(3)
aus 9 Schnitten ($m = \pm 2{,}8''$)	$\pm 0{,}010$	$\pm 0{,}008$	

Nach der Folgepunkt-Theorie wäre (2) zu nehmen und (3) zu verwerfen, wir haben aber mit Rücksicht auf alle Nebenumstände uns nicht entschliessen können, die beiden guten Schnitte 8. und 9. (mit $1{,}4^{km}$ und $0{,}9^{km}$ Länge) zu opfern, und haben das Ergebnis (3) endgültig angenommen. (Vgl. Nr. 74. und 73. in der grossen Tabelle des folgenden § 105.)

In anderen Fällen haben wir den Forderungen der Folgepunkt-Theorie entsprochen, und den einen oder anderen Schnitt geopfert. Es kommt natürlich hier alles auf das innere Verständnis und auf den praktischen Blick des Rechners an, der sein eigenes Urteil im einzelnen Falle nicht aufgeben, aber den guten Grundgedanken von Leitpunkt und Folgepunkt nie ausser Acht lassen soll.

§ 105. Verschiedene Zahlenfragen.

Die numerische Ausrechnung spielt bei Ausgleichungs-Rechnungen immer eine wichtige Rolle, und, wie überhaupt in der M. d. kl. Q., kann man bei den Punkteinschaltungen mit Coordinaten-Ausgleichung durch manche kleine Kunstgriffe die Rechnung sehr erleichtern oder umgekehrt durch ungeschickte Anordnung die Rechnung erschweren.

Die Hauptsache ist immer, die Fehlergleichungen so zu richten, dass man es mit nur *kleinen* und ausserdem möglichst *gleichen* Zahlenwerten zu thun hat; dann kann man bei nur *zwei* Unbekannten δx , δy die ganze Ausgleichung, einschliesslich

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Elimination u. s. w. immer kurzweg mit dem *Rechenschieber* machen, was eine ganz ausserordentliche Erleichterung ist im Vergleich gegen die logarithmische Rechnung, gegen die Rechnung mit Crelles Produktentafel u. dgl.

Wir haben dieses schon früher in § 89. S. 329 bemerkt, und wir haben inzwischen auch bei allen praktischen Beispielen, namentlich S. 343 und S. 351 stets so gerechnet.

Man betrachte auch die Gleichungen (2) S. 367 mit den einfachen Coefficienten -5 und $+8$, deren Quadrate und Produkte sich geradezu anschreiben lassen, nämlich 25 , 64 , -40. Oder man betrachte die Fehlergleichungen (4) S. 370, deren erste die Coefficienten $+13$ und $+25$ hat, während eine entsprechende andere Rechnung (Citat S. 370, oben) die Coefficienten $+128$ und $+254$ hat.

Man wird auf den ersten Blick nun glauben, die Abrundung 128 auf 13 und 254 auf 25 gehe auf Kosten der nötigen Genauigkeit, allein das ist aus zwei Gründen nicht der Fall. Erstens lehrt uns die Erfahrung an hunderten von Fällen (vgl. den späteren § 106), dass man in III.—IV. Ordnung im Allgemeinen ausreicht mit 1- bis 2stelligen Coefficienten, und zweitens besteht eine theoretische Berechtigung, bei solchen Ausgleichungen die Fehlergleichungen und Normalgleichungen sogar *weniger* scharf zu behandeln, als man nachher die Coordinaten, Richtungswinkel und Entfernungen weiter führen will. Die Quadratsumme $[v\,v]$ ändert sich nämlich in der Nähe ihres Minimums, wie jede Funktion in solchem Falle, am langsamsten, oder wenn man im Sinne der Wahrscheinlichkeit die Sache betrachten will, die Wahrscheinlichkeit, das beste Ergebnis zu haben, ändert sich sehr wenig, wenn man auch um 0,1 bis 0,2 des mittleren Fehlers von den eigentlich günstigsten d. h. dem scharfen Minimum von $[v^2]$ entsprechenden Coordinaten abweicht.

Wenn man dann aus *formellen* Gründen doch schärfer rechnen will, z. B. auf 1^{mm} bei feinen Stadtmessungen, oder auf 1^{cm} scharf im Felde, so ist das eine vom vorigen bis zu einem gewissen Grade unabhängige Frage.

Dadurch unterscheiden sich diese Einschneide-Ausgleichungen nach vermittelnden Beobachtungen ganz wesentlich von den Netz-Ausgleichungen nach bedingten Beobachtungen (z. B. § 61.), denn bei jenen Netzen muss man die Ausgleichung selbst *mindestens* ebenso scharf führen (wegen der Abrundungsfehler meist noch schärfer) als man nachher aus formellen Gründen die Ergebnisse zusammenstimmend haben will, während bei den Einschneide-Ausgleichungen das nicht nötig ist.

Kurz wir halten bei Ausgleichungsrechnungen der hier betrachteten Art (namentlich auch in § 106. und § 107.) das Ansetzen der Coefficienten a , b mit nur 1—2 Wertstellen, wie sie sich bei der Rechnung von δx , δy in Decimetern ohne Decimalen rechts vom Komma von selbst einstellen, für vollauf ausreichend und deswegen empfehlenswert.

Eine vor Kurzem in der „Z. f. V. 1894“, S. 182 und S. 240 über diesen Punkt geführte kurze Erörterung giebt uns Veranlassung, noch einiges weiteres zuzusetzen, und zwar mit Benützung eines damit in Beziehung stehenden Zahlenbeispieles, das wir hier in zweierlei Form vorführen, erstens mit Näherungs-Coordinaten auf 1^m abgerundet und Coordinaten-Correktionen δx , δy in Metern, und zweitens mit Näherungs-Coordinaten auf $0{,}1^m$ angesetzt und auch δx , δy in Decimetern.

Es ist eine gewöhnliche Rückwärts-Einschneide-Aufgabe (entsprechend unserem § 93. S. 351) mit 4 gemessenen Richtungen, deren Näherungs-Richtungswinkel (φ)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nur 5stellig berechnet sind und daher um 1″—2″ unsicher werden. Die Näherungs-Coordinaten des eingeschnittenen Punktes sind auf ganze Meter abgerundet, nämlich:

$$\text{Näherungen} \quad (y) = \times 6681^{m} \qquad (x) = 4745^{m} \tag{1}$$

und damit werden die Normalgleichungen für δx und δy in Metern:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{30196}\,\delta x - 1720\,\delta y - 4507 = 0 \\ +\underline{20100}\,\delta y - 5223 = 0 \\ \underline{2239} \end{array}\right\} \tag{2}$$

Die Auflösung giebt $\delta y = +\,0{,}274^{m}$ und $\delta x = +\,0{,}165^{m}$ (3)

also: Ausgleichung $y = 6681{,}274^{m}$ $x = 4745{,}165^{m}$ (4)

Wenn man dagegen Näherungen ungefähr auf $0{,}1^{m}$ ansetzt, was stets leicht zu erlangen ist, etwa:

$$\text{Näherungen} \quad (y) = \times 6681{,}3^{m} \qquad (x) = 4745{,}2^{m} \tag{5}$$

und wenn man die Verbesserungen δx , δy in Decimetern rechnet, so werden die Normalgleichungen viel einfacher im Vergleich mit (2), nämlich:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{304}\,\delta x - 17\,\delta y + 101 = 0 \\ +\underline{200}\,\delta y + 57 = 0 \\ \underline{135} \end{array}\right\} \tag{6}$$

Auflösung:

$$\left.\begin{array}{llll} \delta y = -\,0{,}32^{dm} = -\,0{,}032^{m} & & \delta x = -\,0{,}35^{m} = -\,0{,}035^{m} \\ p_y = 199 & [l\,l\,.\,2] = 82 & p_x = 303 \end{array}\right\} \tag{7}$$

$$y = \times 6681{,}268^{m} \qquad x = 4745{,}165^{m} \tag{8}$$

Die Normalgleichungen (6) sind nicht nur viel kürzer und glatter als die Gleichungen (2), sondern die (6) sind auch genauer als (2), was von der bei (2) einwirkenden unscharfen 5stelligen Logarithmenrechnung der Richtungswinkel herrührt. Auch die Proberechnungen nach der Ausgleichung sind bei (6)—(8) glatter und genauer als bei (2)—(4), was ohne näheres Vorführen der Zahlen bemerkt sei.

Unsere Gleichungen (6) lassen sich ganz bequem in Zeit weniger Minuten mit dem gewöhnlichen Rechenschieber auflösen, die Gleichungen (2) aber nicht, weil sie zu viele Stellen haben.

Wenn die Näherungen dieselben sind, so unterscheiden sich die Normalgleichungen für Meter-Correktionen δx , δy dadurch, dass die $[a\,a]$, $[a\,b]\ldots$ 2 Stellen mehr, die $[a\,l]$, $[b\,l]\ldots$ 1 Stelle mehr haben als die entsprechenden Glieder für Decimeter; und man könnte etwa sagen, man braucht nur im ersten Falle die überzähligen Stellen mit Nullen auszufüllen, um beide Fälle identisch zu machen, man würde also statt (6) schreiben:

$$\left.\begin{array}{r} +\underline{30400}\,\delta x - 1700\,\delta y + 1010 = 0 \\ +\underline{20000}\,\delta y + 570 = 0 \\ \underline{135} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Dieses aufgelöst giebt geradezu:

$$\left.\begin{array}{lll} \delta y = -\,0{,}032^{m} & & \delta x = -\,0{,}035^{m} \\ p\,y = 19905 \;,\; [l\,l\,.\,2] = 82 \;,\; & & p\,x = 30256 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Es sind also die δy und δx in (10) unmittelbar dieselben wie in (7) auf dem Umwege über $-\,0{,}32^{dm}$ und $-\,0{,}35^{dm}$, und wenn man weiter rechnet, so kommt auch im Übrigen bei (10) dasselbe heraus wie bei (8), und so könnte man allerdings

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

fragen, warum den Umweg über Decimeter nehmen? Wer die richtige Antwort darauf haben will, muss selbst eine Anzahl von Beispielen durchrechnen, und er wird ebenso wie bei der Vergleichung von (2) und (6) allgemein finden, dass dadurch die ganze Rechnung erheblich übersichtlicher, bequemer und kürzer wird.

Auch eine andere Formfrage möchten wir hier noch kurz berühren, nämlich die auf die Summe $[v\,v]$ bezüglichen Proben, welche unter der Benennung „Sigma-Proben" in neuerer Zeit auch in der amtlichen Preussischen Vermessungs-Anweisung aufgenommen sind.

Es ist lediglich eine *Form*-Frage, welche die Übersichtlichkeit der Rechnung betrifft. Wenn man die Quadratsumme $[v\,v]$ der übrig bleibenden Fehler v auf verschiedenen Wegen berechnet, nämlich etwa aus den einzelnen trigonometrisch als Differenzen erhaltenen v selbst, und aus der Elimination nach den Formeln (22) oder (24) von S. 340, so kann man die Differenz zwischen $[v\,v]$ und dem Quadratsummenglied $[l\,l]$ der Normalgleichungen betrachten:

$$[l\,l] - [v\,v] = \Sigma \tag{11}$$

oder

$$[v\,v] = [l\,l] - \Sigma \tag{12}$$

Hier ist nun (11) und (12) algebraisch betrachtet genau dasselbe, aber in der Rechenpraxis ist es *nicht* dasselbe, ob man die Form (11) oder (12) wählt. Wenn man nämlich die „Sigma-Probe" in der Form (11) behandelt, d. h. wenn man zwei auf verschiedenen Wegen erhaltene Σ unter sich vergleicht, z. B.:

$$\Sigma_1 = [a\,l]\,\delta x + [b\,l]\,\delta y$$

und

$$\Sigma_2 = [l\,l] - [v\,v]$$

dann kann man an der Differenz $\Sigma_1 - \Sigma_2$ nicht unmittelbar sehen, ob die Probe *gut* oder *schlecht* stimmt, denn es kommt wesentlich auf die Grösse von $[v\,v]$ selbst an.

Wenn man z. B. gute Messungen aber schlechte Näherungswerte hat, so wird $[v\,v]$ klein, aber Σ sehr gross, und man darf aus dem relativen Stimmen von Σ_1 und Σ_2 nicht auf das genügende Stimmen in $[v\,v]$ schliessen; man habe z. B. $2239 - 2174 = 65$ wo $65 = [v\,v]$ und $2174 = \Sigma_1$ und zwei verschiedene Σ sollen z. B. sein 2174 und 2109, was ein Stimmen auf 65 oder 3 % von Σ wäre, und der Rechner könnte glauben, eine Probe auf 3 % ist gut —, aber es handelt sich hier nicht um den Vergleich der Sigma-Probe mit Σ selbst, sondern mit dem kleinen $[v\,v]$, gegen welches ein Fehler von $[v\,v] = 65$ selbst oder 100 % stattfindet. Es soll nun gar nicht behauptet werden, dass die „Sigma-Probe" ein solches falsch-Auffassen der Sache notwendig hervorrufen müsse, man hätte eben stets von dem Σ auch nach der Summe $[v\,v]$ selbst hinüberzusehen, aber wenn durch besondere Benennung mit Σ die Probe in dieser Form herausgehoben, und im Druckformular in dieser Form an den Abschluss der Rechnung gestellt wird, so ist es nicht rationell, dass gerade an *dieser Form* gar nicht zu sehen ist, ob die Probe gut oder schlecht stimmt. Die Probe muss vielmehr auf $[v\,v]$ *selbst* konzentriert werden.

Endlich ist auch noch eine Kleinigkeit betreffs $[v] = 0$ beim Rückwärts-Einschneiden in der „Z. f. V. 1894", S. 378 als eine Bemerkung von *Seyfert* zu erwähnen, welche nach unserer Ansicht zutreffend ist.

Am Schlusse aller dieser Erörterungen über kleine Formfragen müssen wir ausdrücklich betonen, dass nur, wer mit solchen Sachen selbst längere Zeit praktisch gerechnet hat, solchen Kleinigkeiten eine Bedeutung beimessen wird, dass aber umgekehrt bei dem Aufstellen von Rechenformularen, welche viel hundert- und tausendfach angewendet werden sollen, solche Kleinigkeiten allerdings eine Rolle spielen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 106. Triangulierung der Stadt Hannover.

Nachdem mit dem Dreiecksnetz von S. 189 und der Doppelpunkt-Einschaltung von S. 374 die Grundlage für die Stadttriangulierung geschaffen ist, kommt es nur noch darauf an, eine grosse Zahl weiterer Punkte durch Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden zu bestimmen.

Dieses wollen wir an dem Netzbilde von S. 408—409 weiter zeigen, indem wir zuerst das frühere Netz von S. 189 und S. 374 in grösserem Massstabe wieder vorführen. Dieses mag als III. Ordnung gelten, während die weiteren einzuschaltenden Punkte, welche auf S. 408—409 nur als Punkte, ohne Sicht-Verbindungen gezeichnet sind, weiter als IV. Ordnung gelten sollen.

Indessen müssen wir hiezu noch manches hinzufügen, was in dem bisher besprochenen System noch nicht inbegriffen ist.

Erstens haben wir auf S. 408—409 als Centralsystem um Linden Wasserturm, ein kleines besonderes Netz, welches schon 1887 für die Stadtvermessung von Linden (links der Leine) angelegt und bereits in unserem II. Bande „Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1893", S. 288 und S. 294 u. ff. beschrieben ist.

Zweitens hat das Netz von S. 374 zwar für die eigentliche Stadt Hannover aber nicht für die nordwestlichen Vororte Leinhausen u. s. w. ausgereicht und es mussten dort noch weitere Punkte der Landesaufnahme zugezogen werden, nämlich Velber, Vinnhorst, Stelingen und Bothfeld I, von denen jedoch nur Velber und Bothfeld I auf S. 408—409 selbst dargestellt ist. Indessen ist leicht einzusehen, dass damit die Verbindung Kunst, Leinhausen, Tannenkamp, hergestellt und alles weitere gesichert war.

Im System Celle der Katasterverwaltung haben wir also nun die 6 Hauptpunkte mit ihren Coordinaten auf S. 207 unten, dann die zusammen eingeschalteten Punkte Hochschule und Dreifaltigkeit in (1) und (1 a) S. 383, und von der Landesaufnahme entlehnt die 4 Punkte:

Velber Pyr. II. Ordnung	$L = 27°\,18'\,45{,}5791''$	$B = 52°\,22'\,47{,}0583''$
Vinnhorst Fahnenstange	$27\;\;22\;\;38{,}3058$	$52\;\;25\;\;30{,}5902$
Stelingen Pyr. II. Ordnung	$27\;\;18\;\;32{,}3673$	$52\;\;26\;\;53{,}6458$
Bothfeld I	$27\;\;25\;\;55{,}0686$	$52\;\;24\;\;14{,}8752$

(1

(Vgl. hiezu das Netzbild in dem folgenden § 106).

Der Punkt Bothfeld I (im N.O.) wäre nicht nötig gewesen, da er aber in unser Gebiet fällt und von der Landesaufnahme bereits bestimmt ist, wurde er auch als fester Anschluss genommen. Die vorstehenden geographischen Coordinaten wurden nun in das Katastersystem (S. 188) mit dem Nullpunkt Celle, umgerechnet und dabei bei Vinnhorst noch ein Nebenpunkt zugezogen:

Velber Pyr. II. Ordnung	$y = -29679{,}509^m$	$x = -27281{,}934^m$
Vinnhorst Fahnenstange	$-25252{,}053$	$-22252{,}373$
„ Schornstein Blitzabl.	$-25221{,}908$	$-22208{,}093$
Stelingen Pyr. II. Ordnung	$-29883{,}047$	$-19659{,}388$
Bothfeld I	$-21544{,}773$	$-24610{,}116$

(2)

Bei den Pyramiden gelten diese Coordinaten für die Steinmitte unten; die Pyramidenspitze wurde von uns jeweils durch Auflothen besonders bestimmt, was hier nicht anzugeben ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eingeschnittener Punkt	Anzahl der äuss. Richtungen 1	Anzahl der inn. Richtungen 2	$N = n - u$ 1	$N = n - u$ 2	$[v^2]$ 1	$[v^2]$ 2	$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{N}}$ 1	$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{N}}$ 2	m_y	m_x	mittlere Entfernung
1. Hoftheater	7	7		11		53		±2,2″	± 6mm	± 12mm	2,6
2. Markt-Turm	8		6		14		±1,5″		4	3	2,3
3. Kreuz- „	7		5		80		4,0		27	10	2,6
4. Neustädter-Turm	8		6		32		2,3		12	6	2,5
5. Waterloo-Säule	6		4		135		5,8		31	9	1,8
6. Christus-Turm	8		6		16		1,8		11	5	3,6
7. Schlachthaus	6		4		61		3,9		29	26	3,1
8. Garten-Turm	8		6		35		2,4		10	7	2,4
9. Paulus- „	7		5		16		1,8		9	17	2,8
10. Apostel- „	7		5		68		3,7		15	13	2,2
11. Marien- „	8		6		50		2,9		15	11	2,7
12. Langelaube	5		3		39		3,6		19	14	1,3
13. Synagoge	5		3		39		3,6		20	10	1,4
14. Lyceum II.	3		1		13		3,6		20	16	1,3
15. Welfenkaserne	7		5		39		2,8		13	12	2,2
16. Kaserne VIII	6		4		117		5,4		30	20	2,4
17. Leibniz-Real-Gymn.	7		5		45		3,0		10	9	2,1
19. Brandkasse		9		6		156		5,1	11	5	1,0
20. Aegid. Thorplatz	1	4		2		50		5,0	5	5	0,3
21. Hildesh. Rampe		5		2		11		2,3	13	14	1,9
22. Schneller Graben		7		4		19		2,2	9	12	1,7
23. Wiesenweg		9		6		162		5,2	11	23	1,4
24. Masch		9		6		188		5,6	19	30	0,9
25. Engesohde		10		7		86		3,5	18	13	1,0
26. Schleuse		9		6		82		3,7	29	25	1,6
27. Landwehrwiesen		7		4		16		2,0	6	6	1,9
28. Langensalzastr.	9		7		86		3,5		4	8	1,2
29. Emmerberg	6		4		67		4,1		6	2	1,0
30. Haarstrasse	4		2		233		10,8		18	10	0,6
31. Hildesheimerstr.	5		3		300		10,0		5	4	0,8
32. BischofsholerDamm		6		3		20		2,6	23	5	1,6
33. Grosse Bult	1	6		4		100		5,0	10	17	1,2
34. Eilenriede		5		2		24		3,5	16	32	2,0
35. Kasseler Eisenbahn	1	6		4		25		2,5	16	29	1,7
36. Steinweg	2	8		7		96		3,7	7	11	1,5
37. Haspelfeld		7		4		58		3,8	10	22	1,7
38. Henriettenstift I	9		7		40		2,4		10	6	1,4
39. „ II	13		11		99		3,0		10	7	1,6
40. Blank Schornstein	11		9		234		5,1		13	7	1,3
41. Dieterich Turm	9		7		235		5,8		14	11	1,3
42. „ Schornstein	7		5		106		4,6		12	9	1,2
43. Bürgerl. Bräuhaus	8		6		182		5,5		5	17	1,2
44. Städt. Brauerei I	13		11		286		5,1		4	8	1,2
45. „ „ II	6		4		52		3,6		3	12	1,1
46. Ziegeleischornstein	14		12		539		6,7		10	8	1,4
47. Geibelstrasse	9		7		161		4,8		10	13	1,4
48. Friedhof		5		2		39		4,4	11	16	1,0
49. Döhrener Mühlweg		7		4		121		5,5	7	8	0,9
50. Geibelstrasse Stein		6		3		9		1,7	1	3	0,5
51. Grosse Barlinge	1	6		4		276		9,6	13	24	0,6
52. Questenhorst		9		6		434		8,5	25	30	0,8
53. Lehmweg		8		5		65		3,6	8	13	1,3
54. Kinderheilanstalt	5		3		35		3,4		12	16	1,0
55. Wasserstation N.W.	7		5		54		3,3		10	17	1,5
56. „ S.O.	7		5		22		2,1		6	10	1,5
58. Heidornstrasse		10		7		530		8,7	6	5	0,8
59. Bethlehem Cap.	4		2		1		0,7		10	5	1,1
60. Kleine Düvelstrasse		7		4		100		5,0	6	3	0,4
61. Kunst	5	8		10		78		2,8	17	16	2,9
62. Palmenhaus (18)	5	9		11		44		2,0	5	14	3,0
63. Centralheizung	6	12		15		163		3,3	14	13	2,9
64. Leinhausen Pfeiler		11		8		72		3,0	40	24	3,7
65. Tannenkamp Pyr.	4	11		12		183		3,9	15	26	2,8
66. Hainholz Turm	9		7		296		6,5		23	24	2,7
67. Fuchsberg		9		6		106		4,2	22	19	2,5
68. Heide		7		4		190		6,9	26	28	1,9
69. Stüh		7		4		27		2,6	8	6	1,5
70. Lokomotivschuppen	6		4		27		2,6		14	6	1,5
71. Melanchtonstrasse		9		6		144		4,9	15	16	2,8
72. Rübekamp	1	9		7		123		4,2	8	5	1,4

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eingeschnittener Punkt	Anzahl der äuss. Richtungen 1	Anzahl der inn. Richtungen 2	$N = n - u$ 1	$N = n - u$ 2	$[v^2]$ 1	$[v^2]$ 2	$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{N}}$ 1	$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{N}}$ 2	m_y	m_x	mittlere Entfernung
73. Oppenheim Fahne	7		5		22		± 2,1″		± 9mm	± 7mm	1,9
74. „ Schornst	9		7		55		2,8		10	8	1,7
75. Hainhölzer Rampe		7		4		18		± 2,1″	4	3	1,2
76. Neues Land . . .	1	9		7		235		5,8	20	19	1,6
77. Sandgrube . . .	1	10		8		251		5,6	21	11	1,7
78. Tasch, Schornstein	10		8		162		4,5		10	8	1,4
79. Vorderschönworth	2	7		6		294		7,0	21	39	0,9
80. Fuchsgarten . .		8		5		146		5,4	43	16	2,0
81. Colonnenbrücke .	3	10		10		116		3,4	9	11	1,5
82. Fuhrenkamp . .	1	7		5		130		5,1	5	12	1,9
83. Colonnenweg . .	1	8		6		50		2,9	12	6	1,9
84. Mühlenfeld . . .		8		5		174		5,9	25	22	1,8
85. Biesterstrasse . .	1	6		4		41		3,2	7	40	1,4
86. Lister Kirchweg .	1	6		4		433		10,4	20	78	1,3
87. Feldhagen . . .	2	8		7		175		5,0	13	9	1,5
88. Langfeld II . . .		8		5		68		3,7	13	14	1,8
89. „ I . . .	1	10		8		242		5,5	8	11	1,1
90. VahrenwalderTurm	8		6		294		7,0		11	7	0,6
91. Lichterfeld . . .	1	5		3		39		3,6	8	19	1,3
92. Herrman, Giebel .	6		4		184		6,8		6	20	0,8
93. Schiedsmann . .	5		3		294		9,9		6	16	0,5
94. Grosse Roh . . .	1	6		4		14		1,9	4	9	1,8
95. Rangier-Rampe .		8		5		274		7,4	35	23	1,3
96. Wasserbehälter .		6		3		23		2,8	10	6	1,8
97. Eisenb. Vinnhorst		7		4		46		3,4	9	9	1,5
98. Burgbrücke . . .	1	12		10		302		5,5	11	10	1,5
100. Strangriede . . .	1	8		6		156		5,1	18	11	1,5
101. Simon Turm . .	6		4		64		4,0		9	13	1,3
102. Herrenh. Allee . .		5		2		125		7,9	16	12	1,6
103. Entenfang . . .	1	11		9		795		9,4	20	17	1,2
104. Kirchhof Herrenh.		5		2		58		5,4	37	60	2,5
105. Asphaltschornstein	5		3		63		4,6		52	20	2,4
106. Spargelpflanzung .		9		6		127		4,6	14	37	2,3
107. Brauerei Schornst.	11		9		604		8,2		19	14	1,4
108. Westerfeld . . .	1	9		7		426		7,8	12	12	2,0
109. Leinestein 25 km	2	9		8		328		6,4	14	19	1,6
110. Friedhofkuppel .	10		8		269		5,8		16	11	1,9
111. Stöckener Friedhof		7		4		180		6,7	44	13	2,2
112. Ziegelei Schornst.	11		9		590		8,1		7	15	1,4
113. Blutegelanstalt .		8		5		361		8,5	28	48	2,3
114. Dunstmoor . . .	1	6		4		21		2,3	5	4	1,4
115. Bahnhof Herrenh.	10		8		722		9,5		11	11	0,9
116. Cement-Schornst.	8		6		195		5,7		21	32	2,8
117. Aufsatz Schornst. Stöcken	7		5		266		7,5		30	11	1,3
Summen von 1 bis 117	437	497	280	362	7638	9498	232,2	293,4	1653	1711	1871
18, 57, 99 fehlen, es sind also im Ganzen 114 Punkte. $n = 114$.	934		642		17136		525,6		3364		

Nun wollen wir auf den vorstehenden Tabellen S. 400—401 die Genauigkeitsnachweise für alle diejenigen Punkte geben, welche in den Jahren 1892 und 1893 durch Einschneiden bestimmt worden sind. Es sind das $117 - 3 = 114$ Punkte, welche auch auf dem Netzbilde S. 408—409 gezeichnet sind, und zwar die Hochpunkte (im wesentlichen nur vorwärts eingeschnitten) mit Namen und Nummern, die Bodenpunkte (im wesentlichen nur rückwärts eingeschnitten) nur mit Nummern. Die Sichtlinien selbst für alle diese Punkte in dem kleinen Massstabe 1 : 40 000 unseres Netzbildes einzuzeichnen, wäre völlig unmöglich (es sind 934 Sichtlinien), weil dadurch nur ein verworrenes spinnwebartiges Gebilde erzeugt würde.

Die Nummern geben die Aufeinanderfolge der Einschneideberechnungen, so dass z. B. der Punkt 15. Welfenkaserne nur über Punkten gerechnet sein kann, deren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nummern kleiner als 15 sind. Dabei sind übrigens die 8 Punkte III. Ordnung vorweg in eckiger Klammer numeriert, z. B. [1] Aegidius, [2] Wasserturm u. s. w. und der Punkt 1. Hoftheater ist also seinerseits nur über solchen eckig numerierten Punkten ausgeglichen, nämlich über allen 7 Punkten III. Ordnung, mit Ausnahme von Burg, also mit 7 äusseren und 7 inneren Richtungen.

Alle diese 114 Punkteinschneidungen sind nach den Formularen von S. 343 und S. 351 berechnet (alles mit dem Rechenschieber), die Ausgleichungen für Vorwärtseinschneiden *und* Rückwärtseinschneiden (äussere *und* innere Richtungen) sind nach dem Muster von § 98. gemacht, wobei die äusseren Richtungen mit halbem Gewichte eingeführt sind. Ein besonderes Schema ist zu solchen kombinierten Einschneidungen nicht nötig, wir nehmen dazu einfach ein Blatt des Schemas S. 343 *und* ein Blatt S. 351, welch letzteres mit kleiner Aenderung des Vordrucks zugleich zur Zusammenfassung dient.

Nach diesem wird die Tabelle S. 400—401 wohl verständlich sein, und wir wollen nun deren Endsummen zu Mittelwerten zusammenfassen.

Im Ganzen haben wir 114 Punkte, indem von der Numerierung 1—117 die Nummern 18, 57, 99 aus hier nicht zu erörternden Gründen für diese Tabelle ausgefallen sind. Dazu gehören 934 Richtungen, es kommen also auf 1 Punkt im Mittel rund 8 Richtungen.

Nach Vorwärts- und Rückwärts-Richtungen verteilt haben wir:

Nur vorwärts eingeschnitten	50	Punkte	mit	388	Richtungen	(3)
Nur rückwärts „	35	„	„	256	„	
vorwärts und rückwärts eingeschnitten	29	„	„	290	„	
Summe	114	Punkte	mit	934	Richtungen	

Die Zahl der Richtungen, welche auf einen Punkt kommen, ist also für diese 3 Arten bzw. 7,8 , 7,3 und 10,0 oder ziemlich gleich; die vorwärts- *und* rückwärtseingeschnittenen Punkte haben begreiflich am meisten Richtungen. Die grösste Strahlenzahl hat der Punkt 63. Centralheizung mit $6 + 12 = 18$ Richtungen (S. 400).

Die Quadratsummen $[v^2]$, welche bei den einzelnen Ausgleichungen übrig geblieben sind, sind nicht gleichwertig, weil allen äusseren Richtungen halbes Gewicht gegeben ist, weshalb in der Spalte der $[v^2]$ die von den äusseren Richtungen herrührenden Beträge unter 1, die von den inneren Richtungen herrührenden unter 2 auseinandergehalten sind; bei Vor- *und* Rückwärtseinschneiden ist das halbe Gewicht bereits nach dem Beispiel von S. 373 berücksichtigt, also das Ergebnis $[v^2]$ unter 2 zu setzen. Ähnlich verhält es sich mit den einzelnen Nennern $n - u = N$, welche in jedem einzelnen Falle zur Bestimmung des mittleren Richtungsfehlers m führen, der dann aber in der 5. Spalte auch wieder verschiedene Bedeutung hat, während die mittleren Coordinatenfehler m_y und m_x gleichartig sind.

Um einen mittleren Fehler m aus allen 934 gemessenen äusseren und inneren Richtungen zu bestimmen, hat man nun so zu verfahren (vgl. S. 401):

Äussere Richtungen	$[v^2] = 7638$	mit $[N] = 280$	(4)
Innere Richtungen	$[v^2] = 9498$	„ $[N] = 362$	(5)
Äussere Richtungen mit halbem Gewicht	3819	„ 280	(6)
Summe aus (5) und (6)	13317	642	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also mittlerer Fehler einer Richtung vom Gewichte 1 d. h. hier einer inneren Richtung:

$$m = \sqrt{\frac{13317}{642}} = \pm 4{,}56'' \qquad (7)$$

Nun können wir aber auch den mittleren Fehler für die 3 Arten von Einschneidungen getrennt berechnen, und zwar haben wir dazu aus der Tabelle S. 400—401 noch folgende besondere Einteilung gemacht:

Äussere Richtungen			Äussere u. innere Richtungen			Innere Richtungen		
n	N	$[v^2]$	n	N	$[v^2]$	n	N	$[v^2]$
50	280	7638	29	203	5239	35	159	4259
$m_1 = \sqrt{\frac{7638}{280}}$			$m_{12} = \sqrt{\frac{5239}{203}}$			$m_2 = \sqrt{\frac{4259}{159}}$		
$m_1 = \pm 5{,}22''$			$m_{12} = \pm 5{,}08''$			$m_2 = \pm 5{,}18''$		(8)

Die so erhaltenen Werte m_1 und m_2 sind nahezu gleich, während nach unserer Annahme m_1 zu halbem Gewicht gehört und daher m_1 den $\sqrt{2} = 1{,}4$fachen Betrag von m_2 haben sollte. — Oder kurz unsere Annahme von (1) S. 366, dass die äusseren Richtungen *halbes* Gewicht haben sollen im Vergleich mit den inneren Richtungen, findet sich nach der praktischen Durchführung in 114 Fällen *nicht* bestätigt.

Betrachten wir hiezu das Beispiel von S. 343, S. 351 und S. 373, so hätte man vielleicht schon dort sagen können, dass die äusseren Richtungen S. 343 den kleinen Wert $m = 0{,}8''$ und die inneren Richtungen nach S. 351 den viel grösseren Wert $m = 4{,}0''$ gegeben hatten, dass es also schon auf S. 373 auffällig war, den äusseren Richtungen halbes Gewicht zu geben; allein jenes Beispiel Hochschule (welches in den amtlichen 114 Einschneidungen der grossen Tabelle von S. 400—401 nicht vorkommt) hat auf Hochschule so massenhafte Centrierungen, dass schon aus diesem Grunde die inneren Richtungen ausnahmsweise schlechter werden mussten, und die Zusammenfassung auf S. 373 nur als formelles Rechenbeispiel dienen kann. In den wirklichen Ausgleichungen dieser Art, welche z. B. unter Nr. 61. 62. 63. 65. S. 400 aufgeführt sind, waren die inneren Richtungen glatte Sätze (je 4mal wiederholt), denen in der That ein Vorrang vor den zerstückelt erhaltenen äusseren Richtungen zuzuschreiben war. Indessen sind bei jenen Fällen Nr. 61. 62. 63. 65. u. s. w. auch die äusseren Richtungen bei weitem an *mehr* als je *eine* alte feste Richtung angebunden, und wenn im Mittel $s = 7$ gesetzt wird, so hat man nach (15) S. 361, $P = \frac{7}{8} = 0{,}88$, was allerdings näher bei 1 als bei 0,5 ist.

Dagegen bei den vielen Fällen mit zahlreichen inneren und nur 1 — 2 äusseren Richtungen, welche z. B. unter Nr. 82.—87. S. 401 sich häufen (es sind im ganzen etwa 24 solcher Fälle), war die äussere Richtung, gewöhnlich nur etwa $0{,}5^{km}$ zur Verbindung mit einem Nachbarpunkte, ganz entschieden minderwertig, weil sie häufig gar nicht in einen Hauptsatz eingebunden, sondern nur nachträglich angeflickt war, und auch noch aus einigen anderen Gründen.

Die *grosse* Zahl von Anbindestrahlen, welche in der Gleichung (15) S. 361 bei unserer Hannoverschen *Stadt*-Triangulierung das Gewicht P nahe an 1 bringt, wird bei Triangulierung im freien Felde *nicht* da sein, (vgl. z. B. das Netz im folgenden § 107.) und es wäre also dort das äussere Gewicht 0,5 doch wohl noch aufrecht zu erhalten. — Indessen mag man die Sache nun ansehen wie man will; der aus unseren mühsamen 2jährigen Ausgleichungen von 114 Punkten mit 934 Strahlen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

zu Tage geförderte Widerspruch zwischen der Praxis und der Theorie von § 97. ist ein wertvolles Ergebnis, welches nicht zu teuer erkauft ist; erst der Besitz solcher mühsam errungener Erfahrungen, — die nicht beliebig auf andere Fälle übertragen werden dürfen, — in Verbindung mit den theoretischen Erwägungen von § 96.—97. verschafft die Möglichkeit eines sicheren Urteils in solchem Falle. —

Indem wir also den mittleren Fehler einer Richtung nach (7) und (8) schlechthin $m = \pm 5''$ haben, müssen wir auch überlegen, wie viel hievon auf nackte Messungsfehler und wie viel auf Centrierungen und auf die fortgesetzte Fehleranhäufung bei der massenhaften Einschaltung und Einschachtelung von 8 Punkten bis schliesslich 114 Punkte zu rechnen ist? Die Messungen für die 114 Punkte sind sämtlich gemacht mit dem kleinen Wanschaff'schen 13^{cm}-Mikroskop-Theodolit, welcher in unserem II. Bande „Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1893", S. 184 abgebildet und beschrieben ist. Die Leistungsfähigkeit kann ungefähr entsprechend der Berechnung (1) S. 225 für ein ähnliches Bamberg'sches Instrument genommen werden, wornach der mittlere Fehler einer Richtung in 1 Satze gleich 2'' zu nehmen wäre; also für 4 Sätze nur gleich 1''. Allein erstens wird in IV. Ordnung, für Stadtpunkte schon, sozusagen moralisch, nicht so pünktlich gemessen, wie bei III. Ordnung zu einem grundlegenden Netze wie S. 189, dann bringen die Blitzableiter, Fahnenstangen etc. auf kurze Entfernungen schon solch merkliche Störungen hervor, dass der Messungsfehler der einzelnen Stationen nicht unter 2''—3'' zu schätzen sein wird. Wenn dann durch die Hunderte von Anschlüssen an alte feste Punkte, welche in den Einschneide-Ausgleichungen als *fehlerfrei* zählen, während sie doch mit der lawinenartig gehäuften Fehlersumme aller vorhergehenden Einschaltungen behaftet sind — wenn all das den mittleren übrigbleibenden Fehler a posteriori nicht höher als 5'' hinaufgebracht hat, so dürfen wir wohl die Arbeit unserer 114 Stadtpunkte als gut bezeichnen.

Man kann auch einen mittleren Winkelfehler in gröberer Weise berechnen, es ist nämlich nach der Tabellensummierung auf S. 400—401 der rohe Durchschnittswert aller Werte m gleich $525{,}6 : 114 = 4{,}6''$ und wenn man das mit dem Coefficienten 1,25 (für das Gauss'sche Fehlergesetz) multipliziert, so hat man 5,8'', also wieder nahe dasselbe wie vorher.

Auch die mittleren Coordinatenfehler m_y und m_x wollen wir nur in dieser groben Durchschnitts-Rechnung zusammenfassen, nämlich nach der Tabellensummierung von S. 400—401:

$$\frac{1653}{934} = 17{,}7^{mm} \quad \text{und} \quad \frac{1711}{934} = 18{,}3^{mm}$$

im Mittel 18^{mm} für y und für x, also haben wir den mittleren Coordinatenfehler:

$$m_y = m_x = 1{,}25 \cdot 18 = 22{,}5^{mm} \tag{9}$$

und den mittleren Punktfehler:

$$M = 22{,}5\sqrt{2} = 32^{mm} \tag{10}$$

Nimmt man ferner den Grenzfehler gleich dem 3fachen mittleren Fehler, so kann man den Grenzfehler rund $= 100^{mm}$ oder $= 1^{dm}$ annehmen und *innerhalb* dieses Betrages werden die Polygonzüge, abgesehen von ihren eigenen Fehlern, schlimmstenfalls anschliessen müssen.

Endlich giebt unsere grosse Tabelle S. 400—401 auch noch die mittleren Entfernungen der einzelnen Ausgleichungen, deren Gesamtmittel wird $1871 : 114 = 1{,}65^{km}$, während die Punkte untereinander nach dem Anblick des Netzbildes S. 408—409

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

viel geringere Entfernungen, nämlich jedenfalls unter 1^{km} haben. Wenn trotzdem die Zielweite im Mittel wesentlich grösser ist, so kommt das von der eigentümlichen Form eines *Stadt*-Triangulierungsnetzes, wo oft ganz nahe benachbarte Punkte unter sich nicht zusammen gesehen werden können, sondern aus langen Sichten nach entfernten Türmen jeder für sich rückwärts eingeschnitten werden müssen (vgl. über die Anlage im Allgemeinen unseren II. Band „Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1893", S. 329 bis 333, wo auch von einem Teil unserer Punkte von 1892 die Coordinaten angegeben sind.)

Die Zahl der Punkte ist namentlich auf dem südöstlichen Teile des Bildes von S. 408—409 sehr gross, z. B. die Punkte 51. 52. 53. haben Abstände von nur etwa 300^{m}. Auf besondere Begründung der teilweise engen Punkthäufung kann hier nicht eingegangen werden.

Wir wollen noch einige Kleinigkeiten beifügen:

Die Auswahl der Punkte im Felde, Bodenpunkte und Hochpunkte, haben wir schon in unserem II. Bande „Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1893", S. 329—333 genügend beschrieben. Als Instrument diente uns 1892—1894 der kleine Wanschaff'sche 13^{cm}-Mikroskop-Theodolit, welcher in jenem Bande S. 184 abgebildet und beschrieben ist. In der Regel wurden 4 Sätze gemessen mit Limbusverdrehung von 45° von Satz zu Satz. Ausser dem Verfasser war ein zweiter Beobachter stets mit thätig, so dass abwechselnd der eine mass und der andere schrieb (Feldbuch Band II. S. 262 bis 263), was sehr angenehm ist.

Die Sätze werden im Feldbuche ausgerechnet mit Hilfstafel von Band II. S. [7] und mit Probesummen (Band II. S. 263). Die Messungen pflegen wir schon im Felde beiläufig so zu orientieren, dass Null der Ablesungen etwa nach Norden kommt (Band II. S. 266), weil das nachher beim Rechnen angenehm ist.

Die Mittelbildung aus den 4 Sätzen jeder Station erfordert das Herausschreiben dieser Sätze aus dem Feldbuche auf ein besonderes Blatt (ev. Form 2. der preussischen Anw. IX.), dabei werden alle 4 Sätze auf *einen* Wert des Anfangsstrahls gebracht, damit man aus den Abweichungen an den übrigen Richtungen sehen kann, ob alles genügend stimmt. Die Mittelbildung aus den 4 Sätzen geschieht wieder mit Probesummen.

Dann folgt die Durchrechnung der ganzen in Arbeit genommenen Gruppe nach Näherungs-Coordinaten beim Rückwärts-Einschneiden nach dem Formular von Band II. S. 300, welches die Richtungswinkel $(A\,P)$, $(M\,P)$, $(B\,P)$, bzw. deren Umkehrungen $(P\,A)$, $(P\,M)$, $(P\,B)$ unmittelbar enthält. Noch 1—2 Richtungswinkel nach anderen Punkten werden zur Versicherung dazu gerechnet und damit das betreffende Satzmittel sofort näherungsweise gedreht und orientiert, damit später in der Ausgleichung (S. 351) die gemessenen Richtungen α genähert orientiert verfügbar sind, und die weitere Orientierungs-Verdrehung z nur noch klein wird.

Nachdem so alle Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidungen durchgerechnet sind, erfolgt das Auftragen des Netzbildes in 1 : 10000 und *dann* erst kann an das Aufstellen eines guten Ausgleichungsplanes gegangen werden, wobei in der Aufeinanderfolge der Vorwärts- und Rückwärts-Einschneidungen ein weiter Spielraum und Gelegenheit zu zweckmässiger Wahl gegeben ist (Band II. 1893 S. 332).

Das Netzbild in 1 : 10000 giebt auch die Entfernungen s genügend, welche man auf S. 343 und 351 braucht; wenn der Plan nicht zur Hand ist, rechnen wir die s gelegentlich der Ausrechnung der Richtungswinkel (φ) auf S. 342 und S. 350 nebenher. Diese Richtungswinkel (φ) vor der Ausgleichung müssen unabhängig *zweifach* berechnet werden; es ist das der mühsamste Teil der ganzen Arbeit. Hat man einen Hilfsrechner, so ist es das natürlichste, dass zwei Rechner auf unabhängigen Bogen vom Herausschreiben der Coordinaten bis zu den Winkelwerten sich kontrollieren, *ein* Rechner muss stets die (φ) für einige Tage im Voraus rechnen und dann auf neuem Blatte nachholen bis alles stimmt. Wenn nun aber die (φ) zweifach unabhängig berechnet vorliegen, die s etwa einmal mit 4stelligen Logarithmen und ein zweitesmal aus dem Netzbild erhalten sind, dann ist die weitere Rechnung nach den Formularen S. 343 und S. 351 eine leichte Sache; man kann mit wenig Stellen ausreichen, alles mit dem Rechenschieber machen. Beim Rückwärts-Einschneiden ist die Anordnung auf S. 352 unten der üblichen Mittelbildung von S. 351 vorzuziehen, Die Richtungswinkel φ *nach* der Ausgleichung auf S. 342 und S. 350 unten, braucht man nicht wie

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

die (φ) vor der Ausgleichung notwendig zweifach zu berechnen, denn wenn auf den ersten Wurf die Probe $[v^2]$ stimmt, kann man ja wohl annehmen, dass die φ richtig sind; und die Frage, ob auch die $\delta\,\varphi$ besonders berechnet werden sollen, ist schon auf S. 344 und S. 349 erörtert worden. Eine Kleinigkeit kann aber noch über die φ (*nach* der Ausgleichung) gesagt werden. Da, wie schon gesagt, die (φ) *vor* der Ausgleichung ohnehin auf zwei getrennten Blättern berechnet werden müssen, kann man das eine davon in Blei schreiben und nachher durch Abänderung der letzten Stellen mit Tinte für die endgültigen φ benützen. Bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme wird sogar so verfahren, dass die φ gar nicht mehr auf besonderem Blatte gerechnet, sondern nur durch rote Korrekturen der Endziffern in dem früheren Blatte der (φ) hergestellt werden.

Beim kombinierten Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden werden *zwei* Formulare S. 343 und S. 351 zusammen genommen.

Nach der Ausgleichung wird für jeden Bodenpunkt, der noch freie Strahlen abgeben kann, ein Abriss gebildet, welcher den unteren Teil von S. 351 nochmals enthält und dadurch die noch freien Strahlen zum weiteren Vorwärts-Einschneiden mit orientiert, welche dann in einem neuen Schema S. 343 wieder als gemessene Richtung α auftreten.

Mit etwa 4—5 Formularien (mit rotem Vordruck auf weissem Papier, wie neuerdings bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme) reicht man für diese trigonometrischen Rechnungen aus, welche dann für jeden Punkt ein kleines Heft bildend nach der Aufeinanderfolge der Punktberechnungen geordnet und eingebunden werden.

§ 107. Beispiel einer Triangulierung III. Ordnung der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme.

Über die Gesamtanlage der Triangulierungen unserer Landesaufnahme haben wir schon manches vorgeführt in unserem III. Bande „Handb. d. Verm.“, 3. Aufl. 1890 S. 133 u. ff., II. Band, 4. Aufl. 1893 S. 337 u. ff.; auch ist hier zu bemerken, dass über den Fortschritt dieser Triangulierung seit 1891 jährliche Berichte mit Übersichtskarten in der „Zeitschr. f. Verm.“ von zuständiger Seite mitgeteilt werden. Aus einem dieser Berichte ist die Übersicht von S. 410 entnommen, welche 63 Messtischblätter mit je 2 Diagonalen darstellt oder da ein Messtischblatt in jener Gegend rund 126 Quadratkilometer enthält, sind im Jahre 1891 zusammen 7938 Quadratkilometer in Triangulierung III. Ordnung aufgenommen worden.

Gehen wir nun näher ein auf die Messungen von Trigonometer Hauptmann Messner 1891, welche auf S. 411 dargestellt sind, so sind das die Flächen von 6 Messtischblättern zwischen 52° 12′ und 52° 30′ Breite und 27° 20′ und 27° 40′ Länge. Nach der Tabelle in unserem III. Bande „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890“ S. [29] haben diese Blätter folgende Flächen, zwischen den Meridianen und Parallelkreisen gemessen:

$\varphi = 52°\,30'$		
52 24	126,06	126,06
52 18	126,34	126,34
52 12	126,62	126,62
	379,02 +	379,02 = 758,04 Quadratkilometer.

Innerhalb dieses mathematischen Rahmens sind 140 Punkte III.—IV. Ordnung, also rund 1 Punkt auf 5—6 Quadratkilometer. Die Sichtlinien sind auf S. 411 nicht alle gezogen, sondern im wesentlichen nur die Sichten III. Ordnung und im Stadtgebiet von Hannover sind nur die Punkte des Partialnetzes, welches wir bereits auf S. 185 und S. 374 gezeichnet und behandelt haben, während die vielen Punkte von

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

408—409 natürlich auf S. 411 fehlen. Davon wird nachher bei dem „Ausgleichungsplan“ weiter die Rede sein.

Die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme rechnet bekanntlich mit einem rechtwinkligen conformen Coordinatensystem über ganz Preussen, das wir schon in § 63. besprochen haben, mit Formelentwicklungen in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 167—171; inzwischen ist auch eine authentische Darstellung des Landesaufnahme-Systems von dem Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Oberstlieutenant von Schmidt gegeben worden in der „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 385 bis 401 und S. 409—418, auf welche hiezu verwiesen wird.

Die von der Landesaufnahme veröffentlichten Netzbilder enthalten gewöhnlich nur das Netz der *geographischen* Coordinaten (Meridiane und Parallelkreise) und das war auch bei dem Netze in 1 : 100 000 der Fall, nach welchem unsere $2^1/_2$ fach verkleinerte Karte S. 411 gemacht worden ist. Um aber auch die rechtwinkligen Coordinaten in der Zeichnung berücksichtigen zu können, haben wir für die 4 Eckpunkte des geographischen Trapezes auch die rechtwinkligen Coordinaten berechnet, und zwar sowohl im System der Landesaufnahme als auch in dem Katastersystem mit dem Nullpunkte Celle.

Die Berechnung im System der Landesaufnahme geschah nach unserem III. Bande, 3. Aufl. 1890, § 92. und gab folgendes:

System der Landesaufnahme

N.W.	*N.O.*
$L = 27° 20'$ $\quad B = 52° 30'$	$L = 27° 40'$ $\quad B = 52° 30'$
$y = -248929{,}79^m$, $x = -16008{,}52^m$	$y = -226306{,}72^m$, $x = -17106{,}25^m$
S.W.	*S.O.*
$L = 27° 20'$ $\quad B = 52° 12'$	$L = 27° 40'$ $\quad B = 52° 12'$
$y = -250622{,}46^m$, $x = -49369{,}51^m$	$y = -227845{,}22^m$, $x = -50470{,}28^m$

Andererseits haben wir nach den Formeln von Band III., 3. Aufl. 1890, § 54., oder auch nach den neuen Formeln in „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 33—42 und S. 147—153 die rechtwinkligen Coordinaten der 4 Eckpunkte im Katastersystem Celle berechnet:

Katastersystem mit dem Nullpunkt Celle

N.W.	*N.O.*
$L = 27° 20'$ $\quad B = 52° 30'$	$L = 27° 40'$ $\quad B = 52° 30'$
$y = -28195{,}13^m$, $x = -13909{,}65^m$	$y = -5561{,}31^m$, $x = -13987{,}55^m$
S.W.	*S.O.*
$L = 27° 20'$ $\quad B = 52° 12'$	$L = 27° 40'$ $\quad B = 52° 12'$
$y = -28386{,}66^m$, $x = -47287{,}79$	$y = -5599{,}09^m$, $x = -47365{,}11^m$

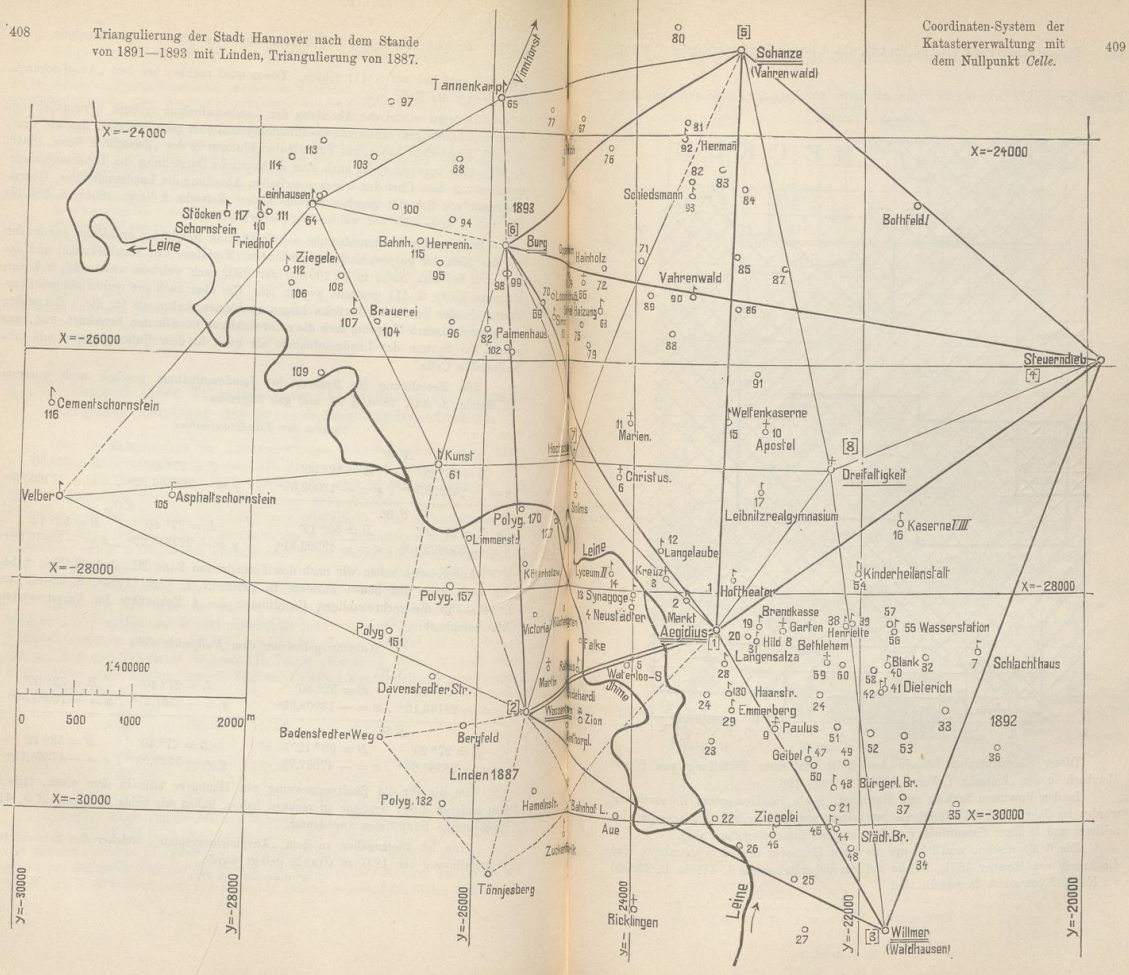
Da wir für die Stadtvermessung von Hannover teils in dem einen, teils in dem anderen dieser Systeme zu rechnen haben, haben wir beide Systeme auf S. 411 durch einige Hauptlinien angedeutet.

Nun ist überzugehen zu dem „Ausgleichungsplan“, welcher der betrachteten Triangulierung von 1891 zu Grunde gelegt wurde.

(Fortsetzung s. S. 412.)

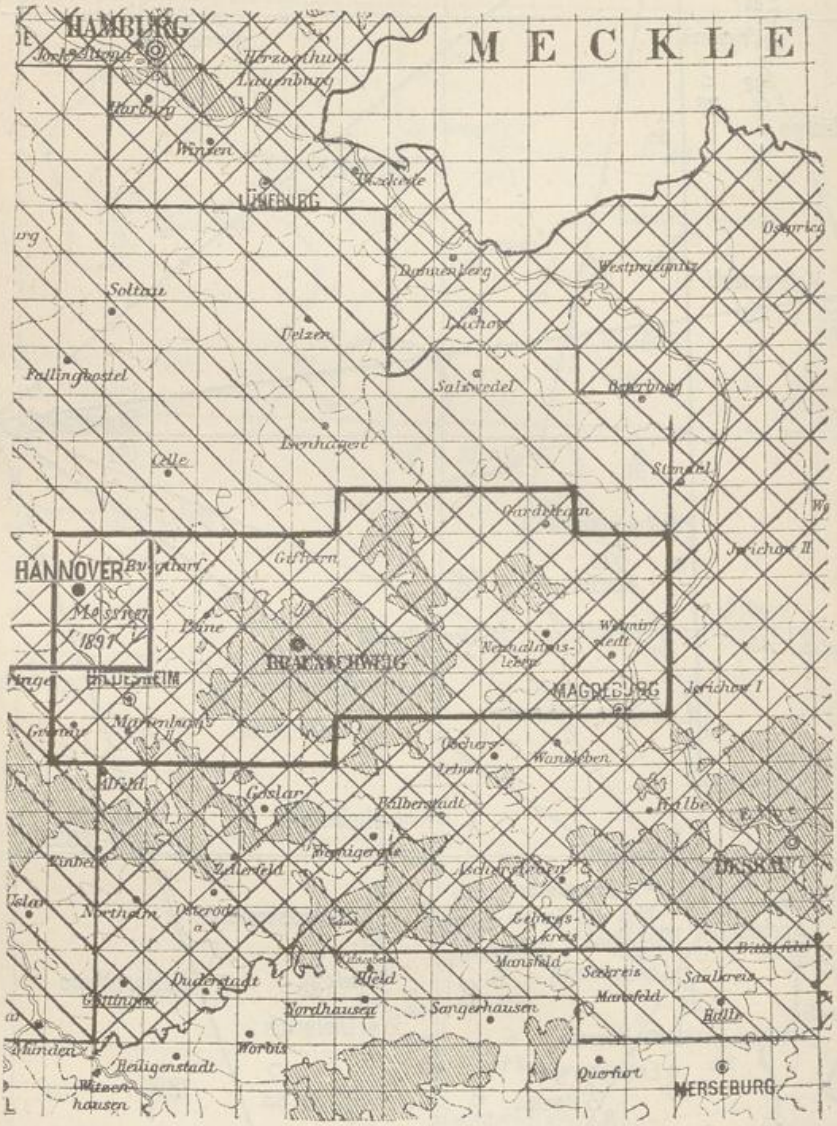
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Triangulierung der Stadt Hannover nach dem Stande von 1891—1893 mit Linden, Triangulierung von 1887.



Triangulierung III. Ordnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme 1891.

Massstab 1 : 2 000 000.



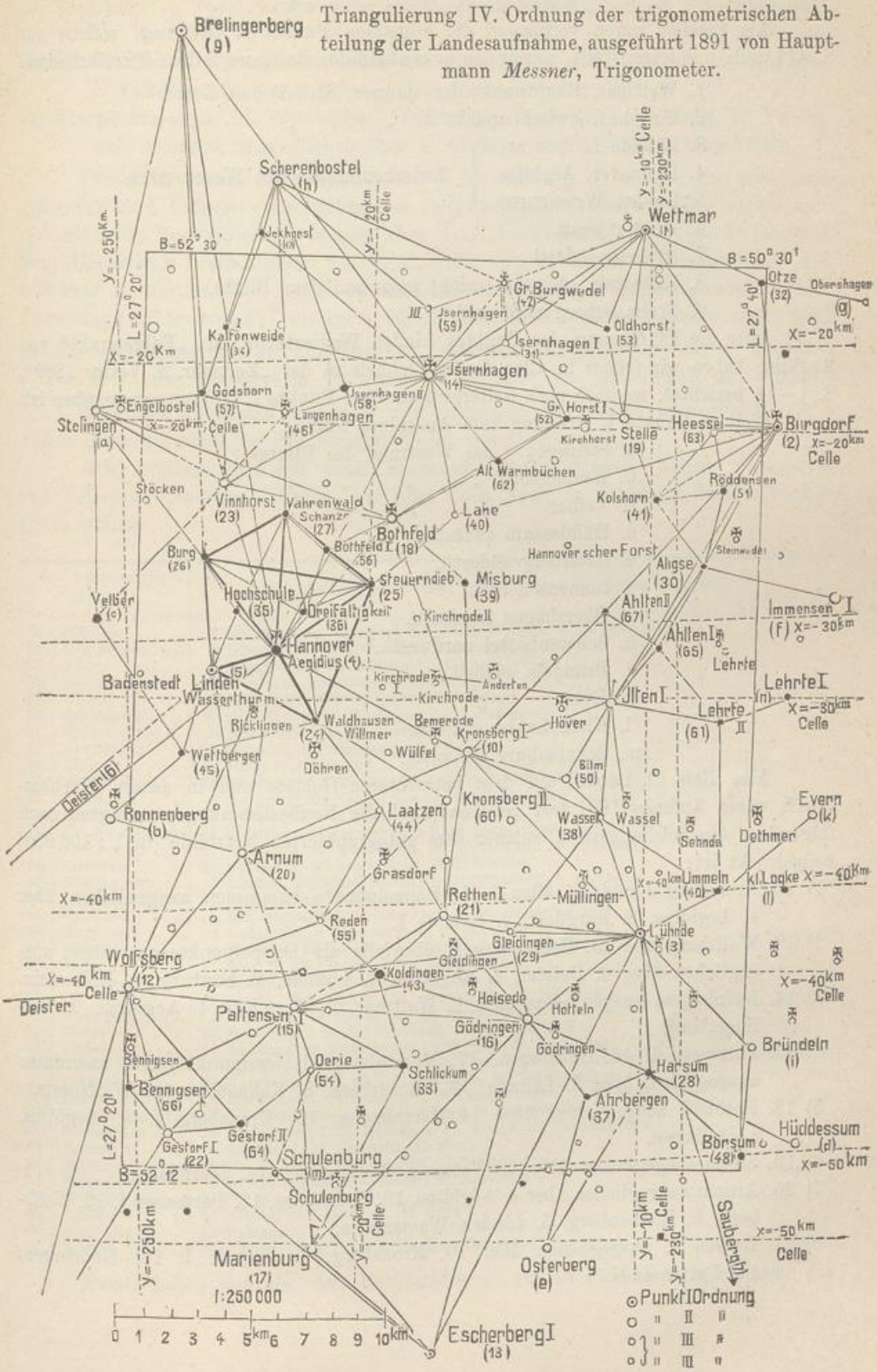
Dieser Übersichtsplan ist ein Ausschnitt aus einer Mitteilung von Oberst Morsbach in der „Zeitschr. f. Verm. 1892“, S. 193—196.

In den Provinzen Sachsen und Hannover, sowie im Herzogtum Braunschweig wurden im Jahre 1891 63 Messtische bearbeitet, welche hier mit 2 Diagonalen bezeichnet und in ihrer Gesamtheit von einer starken Linie eingefasst sind.

Die 6 Messtische. westlich, um die Stadt Hannover besonders umrahmt, sind die Arbeit von Messner 1891, welche auf der nebenstehenden S. 411 in 1 : 250 000 als Netzbild besonders dargestellt sind.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Triangulierung IV. Ordnung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, ausgeführt 1891 von Hauptmann *Messner*, Trigonometer.



(vgl. hiezu S. 185 und S. 413—414.)

(Fortsetzung des Textes von S. 407.)

Als *gegeben* waren vorhanden die folgenden Punkte I. Ordnung, welche auf S. 411 teils numeriert, teils, soweit sie ausserhalb des Rahmens fallen, litteriert sind:

1. Wettmar, Hauptpunkt der Hannov.-Sächsischen Kette,
2. Burgdorf, Zwischenpunkt d. „ „ „
3. Lühnde I.
4. Hannover, Aegidius } Zwischenpunkte des Wesernetzes,
5. Linden Wasserturm }
6. Deister westl.,
7. Sauberg südöstl.,
8. Kahnstein südwestl., nicht mehr auf dem Blatte,
9. Brelingerberg nordwestl.

Über die Einführung des Punktes Linden Wasserturm, als „Folgepunkt" von Aegidius haben wir früher in aller Ausführlichkeit in der „Zeitschr. f. Verm. 1889", S. 1—14 berichtet, wo auch noch weiteres über diese Punkte I. Ordnung angegeben ist.

Weitere Punkte I. Ordnung zum Anschluss waren:

a. Stelingen am Westrand des Blattes,
b. Ronnenberg „ „ „ „
c. Velber „ „ „ „
d. Hüddessum südöstl.,
e. Osterberg südöstl.,
f. Immensen östl.,
g. Obershagen nordöstl.,
h. Scherenbostel nordwestl.,
i. Bründeln südöstl.,
k. Evern „
l. Klein Lopke südöstl.,
m. Schulenburg südwestl.

Alle diese 21 Punkte auf dem betrachteten Gebiete und in dessen Nachbarschaft waren Anfangs 1891 fest gegeben, und die Neubestimmungen erfolgten nach folgendem Ausgleichungsplan, welcher dem autographierten Netzbilde (in 1 : 100 000) beigedruckt ist:

1) 10. Kronsberg I und 11. Ilten I als Doppelpunkte zusammen ausgeglichen über 4. Aegidius, 2. Burgdorf, 3. Lühnde I.
2) 12. Wolfsberg und 13. Escherberg I, ebenfalls als Doppelpunkte zusammen ausgeglichen über 6. Deister, 4. Aegidius, 3. Lühnde, 7. Sauberg, 8. Kahnstein.
3) 14. Isernhagen, ausgeglichen über 1. Wettmar, 2. Burgdorf, 4. Aegidius, 9. Brelingerberg.
4) 15. Pattensen I, 16. Gödringen, 17. Marienburg als Dreipunktsystem zusammen ausgeglichen über 3. Lühnde, 13. Escherberg, 8. Kahnstein, 12. Wolfsberg.
5) 18. Bothfeld ausgeglichen über 14. Isernhagen, 10. Kronsberg I, 4. Aegidius, a Stelingen.
6) 19. Stelle ausgeglichen über 1. Wettmar, 2. Burgdorf, 14. Isernhagen.
7) 20. Arnum ausgeglichen über 4. Aegidius, 10. Kronsberg, 15. Pattensen I, 12. Wolfsberg, b. Ronnenberg, 5. Linden Wasserturm.
8) 21. Rethen I, ausgeglichen über 10. Kronsberg, 3. Lühnde I, 16. Gödringen, 15. Pattensen I.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

9) 22. Gestorf I, ausgeglichen über 15. Pattensee, 13. Escherberg I, c. Osterwald, 12. Wolfsberg.

10) 23. Vinnhorst, ausgeglichen über 14. Isernhagen, 18. Bothfeld, 4. Aegidius, c. Velber, a. Stelingen.

11) Vierpunktsystem, 24. Waldhausen, Willmer, 25. Steuerndieb, 26. Burg, 27. Vahrenwald Schanze, ausgeglichen über 4. Aegidius und 5. Linden Wasserturm.

Dieses ist unsere Ausgleichung von § 61. mit Fig. 1. S. 189, und zwar Ausgleichung nach *bedingten* Beobachtungen (mit Correlaten), während alles andere nach vermittelnden Beobachtungen ausgeglichen ist. Auch unsere Doppelpunkt-Einschaltung Hochschule-Dreifaltigkeit von § 99. tritt nun in diesem Zusammenhange auf, und zwar ist die amtliche Rechnung nach den Schreiberschen Regeln gemacht, deren Anwendung auf unseren Fall wir auf S. 392 nur noch kurz andeuten konnten; dieses giebt

12) 35. Hochschule und 36. Dreifaltigkeit, zusammen ausgeglichen über 4. Aegidius, 5. Linden Wasserturm, 26. Burg, 27. Schanze, 25. Steuerndieb, 24. Willmer.

In diesen 12 Stufen sind also nun zusammen 20 Punkte ausgeglichen, in 5 Fällen mehr als einer, in den übrigen Fällen nur je einer.

Alles weitere sind nur noch *Ein*punkt-Einschneidungen, welche nicht mehr viel Interesse erwecken, welche wir aber doch noch in folgender Tabelle wiedergeben wollen:

Neu bestimmter Punkt.		Ausgeglichen über den früher bestimmten Punkten.
28.	Harsum . . .	d Hüddessum, e Osterberg, 16 Gödringen, 3 Lühnde I
29.	Gleidingen . .	3 Lühnde I, 16 Gödringen, 21 Rethen I
30.	Aligse . . .	2 Burgdorf, f Immensen I, 11 Ilten I
31.	Isernhagen I .	1 Wettmar, 19 Stelle, 14 Isernhagen
32.	Otze I . . .	g Obershagen, 2 Burgdorf, 1 Wettmar
33.	Schlickum . .	16 Gödringen, 17 Marienburg, 15 Pattensen I
34.	Kaltenweide I	h Scherenbostel, 14 Isernhagen, 23 Vinnhorst
37.	Ahrbergen . .	28 Harsum, e Osterberg, 16 Gödringen
38.	Wassel . . .	11 Ilten I, 3 Lühnde I, 29 Gleidingen, 10 Kronsberg I
39.	Misburg . . .	10 Kronsberg I, 25 Steuerndieb, 18 Bothfeld
40.	Lahe	2 Burgdorf, 25 Steuerndieb, 14 Isernhagen
41.	Kolshorn . .	2 Burgdorf, 30 Aligse, 19 Stelle
42.	Gr. Burgwedel	1 Wettmar, 31 Isernhagen I, 14 Isernhagen, h Scherenbostel
43.	Koldingen . .	21 Rethen I, 16 Gödringen, 33 Schlickum, 15 Pattensen I
44.	Laatzen . . .	21 Rethen I, 20 Arnum, 24 Waldhausen
45.	Wettbergen .	5 Linden, 24 Waldhausen, b Ronnenberg, c Velber
46.	Langenhagen .	14 Isernhagen, 27 Vahrenwald, 23 Vinnhorst, h Scherenbostel
47.	Ickhorst . .	h Scherenbostel, 14 Isernhagen, 34 Kaltenweide I
48.	Borsum I . .	i Bründeln, d Hüddessum, 28 Harsum
49.	Ummeln . . .	k Evern, 1 Kl. Lopke, 3 Lühnde I, 38 Wassel
50.	Bilm	11 Ilten I, 38 Wassel, 10 Kronsberg I
51.	Röddensen . .	2 Burgdorf, 30 Aligse, 40 Kolshorn
52.	Gr. Horst I .	19 Stelle, 18 Bothfeld, 14 Isernhagen, 42 Burgwedel
53.	Oldhorst . .	1 Wettmar, 19 Stelle, 42 Gr. Burgwedel
54.	Oerie	33 Schlickum, m Schulenburg, 15 Pattensen I
55.	Reden . . .	44 Laatzen, 43 Koldingen, 12 Wolfsberg, 20 Arnum
56.	Bothfeld I . .	18 Bothfeld, 25 Steuerndieb, 36 Hannover Dreifaltigkeitskirche, 27 Vahrenwald
57.	Godshorn . .	34 Kaltenweide I, 46 Langenhagen, 23 Vinnhorst, a Stelingen
58.	Isernhagen II	14 Isernhagen, 18 Bothfeld, 46 Langenhagen, h Scherenbostel
59.	Isernhagen III	42 Gr. Burgwedel, 14 Isernhagen, h Scherenbostel
60.	Kronsberg II .	10 Kronsberg I, 21 Rethen I, 55 Reden, 24 Waldhausen
61.	Lehrte II . .	n Lehrte I, 49 Ummeln, 11 Ilten I
62.	Altwarmbüchen	52 Gr. Horst I, 18 Bothfeld, 14 Isernhagen
63.	Heessel . . .	2 Burgdorf, 51 Röddensen, 40 Kolshorn
64.	Gestorf II . .	54 Oerie, m Schulenburg, 22 Gestorf I
65.	Ahlten I . .	30 Aligse, 61 Lehrte II, 11 Ilten I
66.	Bennigsen . .	15 Pattensen I, 64 Gestorf II, 12 Wolfsberg
67.	Ahlten II . .	65 Ahlten I, 11 Ilten I, 10 Kronsberg I

Damit haben wir also den Rechnungsgang für 58 Punkte nachgewiesen, die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

übrigen ungefähr 80 Punkte sind auf S. 411 nur noch ohne Richtungsverbindungen eingezeichnet.

All dieses (d. h. mit Ausscheidung des Stadt-Hannoverschen Teiles 11) und 12)) ist von Herrn Messner in *einem* Sommer 1891 gemessen und im darauffolgenden Winter berechnet worden. Die Messung geschah mit dem Bambergschen 14^{cm}-Theodolit, welcher in unserem II. Bande, 4. Aufl. 1893, S. 183 abgebildet und beschrieben ist. Dasselbe hat auch einen Höhenkreis von 12^{cm} Durchmesser, welcher nach dem Beispiele von Band II, § 138. und § 140. benützt wurde, indem in der angegebenen Zeit auch alle trigonometrischen Höhen mit gemessen und berechnet wurden.

Die Horizontalwinkelmessungen erfolgten in nur *drei* Sätzen; folgendes ist ein von Herrn Messner auf dem Lindener Wasserturm am 21. August 1891 gemessenes Beispiel:

Zielpunkt	Satz 1.	Satz 2.	Satz 3.	Mittel
Aegidius . . .	0° 0′ 0,0″	0,0″	0,0″	0° 0′ 0,0″
Ricklingen . .	66 15 14,5	12,0	14,0	66 15 13,5
Hemmingen .	77 41 29,5	26,0	28,5	77 41 28,0
Wettbergen .	125 43 4,5	4,5	5,5	125 43 4,8
Badenstedt . .	194 17 36,5	42,5	37,5	194 17 38,8

Man berechnet daraus nach dem Verfahren von S. 225 einen mittleren Fehler einer Richtung von $\pm 1{,}8''$.

Die Ausgleichungen der hier beschriebenen Messungen erfolgen seit 1876 nach vermittelnden Beobachtungen (vgl. S. 389) unter Reduktion aller Richtungen und Entfernungen von der wirklichen Erdoberfläche auf das ebene System rechtwinkliger konformer Coordinaten (vgl. § 63.). Es sind deswegen zu allen in Frage kommenden Richtungen stets die Reduktionen $t - T$ nach den Formeln (5) oder (6) S. 201 erforderlich, wie z. B. auf S. 375 unten eingesetzt ist. Diese $t - T$ werden mit 4 stelligen Logarithmen in vorgedrucktem Schema berechnet, ebenso wie auch die Coefficienten a und b der Fehlergleichungen nach den Formeln (14)—(16) S. 329.

Bei einem Satze innerer Richtungen wird die Orientierungs-Unbekannte z nach der Schreiberschen Regel 3. S. 391 durch eine Summengleichung mit negativem Gewichte eliminiert. Beim Zusammenwirken von äusseren und inneren Richtungen wird nach den Schreiberschen Regeln (S. 390) den äusseren Richtungen halbes Gewicht gegeben. Mittlere Fehler werden nicht berechnet, was mit den auf S. 6—7 citierten Worten zusammenzuhängen scheint.

Ausser diesen, aus der allgemein verfügbaren Litteratur und aus den dankenswerten Mitteilungen bei unserer Teilnahme von 1891 erlangten Darstellung ist hier auch noch ein neueres Citat beizufügen aus Anweisung IX. vom 25. Okt. 1881, zweite Ausgabe 1894, S. 152—154: Allgemeine Erläuterungen zu den Veröffentlichungen der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.

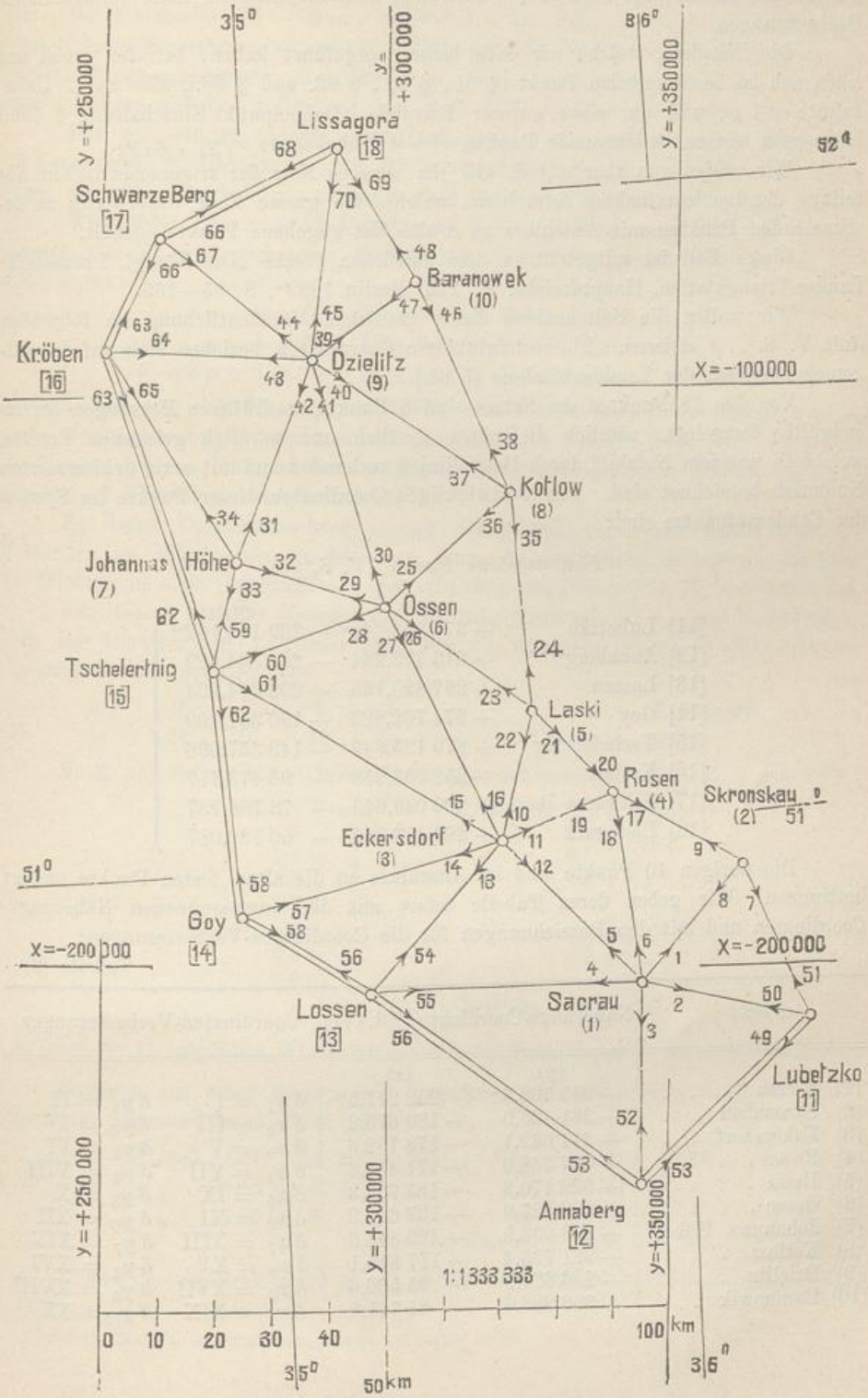
§ 108. Netz-Einschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung.

Unter Coordinaten-Ausgleichung verstehen wir hier, wie in dem ganzen vorstehenden Kapitel III von S. 325 an, die Ausgleichungs-Aufgabe, bei welcher gemessene

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 1.

*Das Schlesisch-Posen*sche *Dreiecksnetz.*



Winkel oder Richtungen als Beobachtungen und die Coordinaten trigonometrischer Punkte als unabhängige Unbekannte auftreten, mit Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen.

Die Beispiele, welche wir dazu bisher vorgeführt haben, betrafen meist nur *einen* neu zu bestimmenden Punkt (§ 91., § 92., § 93. und § 98.), also nur 2 Unbekannte x , y, und nur *eines* unserer Beispiele (Doppelpunkt-Einschaltung § 100.) hatte zwei neu zu bestimmende Punkte, also 4 Unbekannte $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$.

Wir wollen nun aber mit S. 415 ein neueres Netz der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme betrachten, welches die grosse Zahl von 10 neu zu bestimmenden Punkten mit Anschluss an 8 alte fest gegebene Punkte enthält.

Dieser Fall ist mitgeteilt in dem amtlichen Werke „Die Königl. Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreieke, V. Teil, Berlin 1893[4], S. 95—165.

Wir wollen die Seitenzahlen dieser amtlichen Veröffentlichung im folgenden (mit V. S. ...) citieren. Die rechtwinkligen Coordinaten beziehen sich auf das allgemeine System der Landesaufnahme (§ 63.).

Von den 18 Punkten des Netzes sind 8 Punkte aus früheren Messungen bereits endgültig festgelegt, nämlich diejenigen westlich und nördlich gelegenen Punkte, welche in unserem Netzbild durch Doppellinien verbunden und mit eckig geklammerten Nummern bezeichnet sind. Die rechtwinkligen Coordinaten dieser Punkte im System der Landesaufnahme sind:

Fest gegebene Punkte (*V.* S. 96)

	y	x	
[11] Lubetzko	+ 375 385,440^m	— 209 143,102^m	
[12] Annaberg	+ 343 473,234	— 238 364,429	
[13] Lossen	+ 297 880,169	— 203 614,224	
[14] Goy	+ 274 702,823	— 190 391,109	
[15] Tschelertnig	+ 270 135,349	— 149 357,096	(1)
[16] Kröben	+ 252 033,953	— 96 473,717	
[17] Schwarze Berg	+ 260 049,649	— 73 766,737	
[18] Lissagora	+ 290 483,939	— 60 132,087	

Die übrigen 10 Punkte sind im Anschluss an die alten festen Punkte neu zu bestimmen. Wir geben deren Tabelle sofort mit den angenommenen Näherungs-Coordinaten und mit den Bezeichnungen für die Coordinaten-Verbesserungen:

Tabelle (2)

Punkt	Näherungs-Coordinat. (*V.* S. 141)		Coordinaten-Verbesserungen	
	(y)	(x)		
(1) Sacrau . . .	+ 345 508,3^m	— 202 211,5^m	δx_1 = I	δy_1 = II
(2) Skronskau . .	+ 361 465,0	— 180 675,2	δx_2 = III	δy_2 = IV
(3) Eckersdorf . .	+ 311 632,1	— 178 192,6	δx_3 = V	δy_3 = VI
(4) Rosen	+ 337 588,0	— 171 408,6	δx_4 = VII	δy_4 = VIII
(5) Laski	+ 326 170,3	— 155 739,3	δx_5 = IX	δy_5 = X
(6) Ossen	+ 298 827,9	— 137 625,2	δx_6 = XI	δy_6 = XII
(7) Johannas Höhe	+ 273 033,9	— 129 893,6	δx_7 = XIII	δy_7 = XIV
(8) Kotlow . . .	+ 321 735,4	— 117 815,1	δx_8 = XV	δy_8 = XVI
(9) Dzielitz . . .	+ 286 627,9	— 95 566,6	δx_9 = XVII	δy_9 = XVIII
(10) Baranowik . .	+ 303 288,6	— 81 761,8	δx_{10} = XIX	δy_{10} = XX

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese 10 Punkte werden bestimmt durch 76 Richtungen, welche in dem Netzbild S. 415 mit 1, 2, 3, ... 70 numeriert sind, während 76 Sichten wirklich gemessen sind. Der Unterschied $76 - 70 = 6$ rührt davon her, dass auf den Festpunkten mit je 2 alten Anschlussrichtungen (auf [12]—[17]) für jeden der 2 Anschlüsse doch nur je *eine* Richtungsverbesserung eingeführt wird, was zusammenhängt mit den Stationsausgleichungen auf diesen Punkten (vgl. § 78. und Anschluss *Peer* S. 292 und S. 294).

Ehe wir nun zu unserer Coordinaten-Ausgleichung selbst gehen, welche bei 10 Neupunkten 20 Unbekannte und 20 Normalgleichungen bietet, wollen wir überlegen, wie viele Gleichungen man nach dem Correlaten-Verfahren bekommen *würde?*

Wir zählen dazu $p = 18$ Punkte und $l = 38$ Linien, beide hin und her gemessen, also $R = 76$ gemessene Richtungen. Nach den Regeln von (17) S. 176 giebt dieses:

$$l - 2p + 3 = 38 - 36 + 3 = 5 \text{ Seitengleichungen,}$$
$$l - p + 1 = 38 - 18 + 1 = 21 \text{ Dreiecksgleichungen,}$$
$$R - 3p + 4 = 76 - 54 + 4 = 26 \text{ Gleichungen im Ganzen.}$$

Dieses gilt aber für das *freie* Netz, und für die Zwangs-Anschlüsse würden noch 6 Seitengleichungen hinzukommen, so dass man im Ganzen $26 + 6 = 32$ Normalgleichungen bekäme, während die Coordinaten-Ausgleichung nur 20 Gleichungen hat, also mit 12 Gleichungen im Vorteil ist.

Zu dieser Coordinaten-Ausgleichung übergehend haben wir zuerst über die Messungen im Allgemeinen zu berichten, dass dieselben nach Schreibers Methode mit Winkeln in allen Combinationen gemacht sind, wie früher in § 79. angegeben ist.

Um nahezu gleiches Gewicht für alle ausgeglichenen Richtungen zu erlangen, stellt das Schreibersche Verfahren fest, dass die Winkelmessungen in sich selbst zu wiederholen sind (nach S. 269):

bei	2	3	4	5	6	7	8	Richtungen
je	24	16	12	10	8	8	6	mal

Z. B. auf Sacrau mit 6 freien Richtungen ist gemessen (nach *V.* S. 99—100):

Winkel	1,2	8	mal	Winkel	2,3 8 mal
„	1,3	„	„	„	2,4 „ „
„	1,4	„	„	„	2,5 „ „
„	1,5	„	„	„	2,6 „ „
„	1,6	„	„		
Winkel	3,4	8	mal	Winkel	4,5 8 mal
„	3,5	„	„	„	4,6 „ „
„	3,6	„	„		
				Winkel	5,6 8 mal

d. h. jeder der 15 möglichen Winkel zwischen den 6 freien Strahlen ist 8 mal gemessen.

Dagegen auf einer Station mit 2 festen Anschlussstrahlen, z. B. auf [13] Lossen, ist gemessen (nach *V.* S. 129):

Winkel	54,55	16	mal	Winkel	55,56 *A* 8 mal
„	54,56 *A*	8	„	„	55,56 *G* 8 „
„	54,56 *G*	8	„		
				Winkel	56 *A*, 56 *G* 0 mal

d. h. die zwei festen Strahlen 56 *A* und 56 *G* zählen wie *ein* freier Strahl (vgl. § 78. S. 267).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ausgleichung wird auf einer Station mit lauter freien Strahlen in gewöhnlicher Weise gemacht (§ 77.) und auf einer Station mit 2 festen Anschlussstrahlen so, dass der Winkel zwischen diesen beiden den durch die Coordinaten bereits festgelegten Wert erhält (§ 78.). Die Festhaltung dieses Winkels bei der nachfolgenden Netzausgleichung wird einfach dadurch erzielt, dass den beiden festen Strahlen *dieselbe* Richtungsverbesserung zugeteilt wird, im Falle des vorigen Beispiels $56\,A = 56\,G$.

Die Aufstellung der Fehlergleichungen erfolgt nun im Wesentlichen gar nicht anders, als bei unserer schon in § 99. behandelten Doppelpunkt-Einschaltung, welche ja auch in dem allgemeinen Landesaufnahme-Coordinatensystem gemacht ist.

Die Coefficienten der Fehlergleichungen sind für δx und δy in Metermass, bekanntlich nach (14) S. 329, indem der Richtungswinkel statt früher φ, hier t heisst:

$$a = -\frac{\varrho}{s}\sin t \qquad b = +\frac{\varrho}{s}\cos t \tag{3}$$

und die Richtungswinkel sind nach den Formeln für $t - T$, (5) S. 201, auf die Ebene zu reduzieren. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Richtung Sacrau-Skronskau zeigen, unter Benützung der schon oben unter (2) angegebenen Näherungs-Coordinaten dieser zwei Punkte:

	(y)	(x)
(2) Skronskau	+ 361 465,0	− 180 675,2
(1) Sacrau	+ 345 508,3	− 202 211,5
	+ 15 956,7	+ 21 536,3

log 15956,7	4.202 9430·8		4.33317
log 21536,3	4.333 1710·9	*log cos* t_1	9.90498
log tang (t_1)	9.869 7719·9	*log* s	4.42819

$(t_1) = 36°\,32'\,7{,}904''$ $\qquad s = 26803^m$ (4)

log ϱ	5.31443		0.88624$_n$		0.88624
log s	4.42819	*sin* t . .	9.77474	*cos* t . .	9.90498
log $(\varrho : s)$	0.88624	a . .	0.66098$_n$	b . .	0.79122

$a = -4{,}581$ $\qquad b = +6{,}183$ (5)

y_2	= + 361465	nach (5) S. 201			
y_2	= + 361465	$x_2 - x_1$	4.33317	$x_1 - x_2$	4.33317$_n$
y_1	= + 345508	$2\,y_1 + y_2$	6.02222	$2\,y_2 + y_1$	6.02875
y_1	= + 345508	$\varrho : 6\,r^2$	0.92622	$\varrho : 6\,r^2$	0.92622
$2\,y_1 + y_2$	= 1052481		1.28161		1.28814$_n$
$2\,y_2 + y_1$	= 1068438	$T_1 - t_1$	= + 19,125″	$T_2 - t_2$	= − 19,415″ (6)

Diese so berechneten Reduktionen $T - t$ sind etwa auf 0,01″ genau, was meist ausreicht; will man aber 0,01″ noch scharf haben, so kommt noch ein Glied 3ter Ordnung hinzu, nämlich nach einer Mitteilung von Oberst-Lieutenant von Schmidt in der „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 400 ist die genauere Reduktion, welche dort $U_1 - t_1$ genannt ist:

$$U_1 - t_1 = \frac{\varrho}{4\,A^2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - \frac{\varrho}{12\,A^2}(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$$
$$- \frac{\varrho}{48\,A^4}(y_1 + y_2)^3 (x_2 - x_1)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die zwei ersten Glieder dieser Formel sind mit unserer Formel für $T_1 - t_1$ in (5) S. 201 algebraisch identisch, und das dritte Glied giebt den Coefficienten:

$$log \frac{\varrho}{48\,A^4} = 6.41307$$

und damit berechnet man in dem Falle unseres Beispieles Sacrau-Skronskau den Betrag $-0{,}0197''$ also zusammen auf 4 Stellen:

$$T_1 - t_1 = +19{,}1248'' \qquad T_2 - t_2 = -19{,}4149''$$
$$\underline{\quad -\ 0{,}0197 \quad} \qquad \underline{\quad +\ 0{,}0197 \quad}$$
$$T_1 - t_1 = +19{,}1051'' \qquad T_2 - t_2 = -19{,}3952''$$

Dieses $T_1 - t_1$ werden wir nachher abgerundet $= 19{,}11''$ wieder finden.

Indem man in gleicher Weise auch alle anderen $T - t$ für die Station Sacrau berechnet, bekommt man folgenden Abriss der gemessenen genähert orientierten, und dann auf die Ebene reduzierten Richtungen, nach *V.* S. 101:

Station 1. Sacrau. Tabelle (7)

Zielpunkt	Beobachtet und genähert orientiert T'	Reduktion $t - T = t' - T'$	Beobachtet und auf die Ebene reduziert t'
1. Skronskau . .	36° 32′ 28,78″	−19,11″	36° 32′ 9,67″
2. Lubetzko . . .	103 3 44,68	+ 6,23	103 3 50,91
3. Annaberg . . .	183 12 49,69	+31,54	183 13 21,23
4. Lossen	268 18 41,99	+ 1,18	268 18 43,17
5. Eckersdorf . .	305 20 30,57	−20,30	305 20 10,27
6. Rosen	345 34 17,13	+33,29	345 34 50,42
	Summen 212,84	+32,83	185,67

Diese t spielen nun die Rolle von Beobachtungen ganz von derselben Art wie z. B. die gemessenen Richtungen α in der Rückwärts-Einschneide-Ausgleichung S. 351, und indem der aus genäherten Coordinaten berechnete Richtungswinkel aus dem vorhergehenden (4) mit $(t_1) = 36° 32' 7{,}90''$ hinzugenommen wird, in der Bedeutung des ersten (φ) auf S. 351, haben wir auch das Absolutglied der ersten Fehlergleichung, nämlich $(t_1) - t_1 = 36° 32' 7{,}90'' - 36° 32' 9{,}67'' = -1{,}77''$. Die Coefficienten $a = -4{,}581$ und $b = +6{,}183$ dieser Fehlergleichung hat man aus dem vorhergehenden (5), man wird also nach dem Anblick des Netzbildes S. 415 diese erste Fehlergleichung alsbald so anschreiben:

$$v_1 = z - 4{,}581\,(\delta x_2 - \delta x_1) + 6{,}183\,(\delta y_2 - \delta y_1) + 1{,}77''$$

Die Orientierungs-Unbekannte z kann man natürlich auch in negativer Form, d. h. $-z$, schreiben und damit finden wir die vorstehende Fehlergleichung wieder als erste der folgenden Gruppe (nach *V.* S. 101):

Fehlergleichungen der Station Sacrau. Tabelle (8)

		I	III	IV	VII	II	IV	VI	VIII	
	z	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	l
(1)	−1	+4,580	−4,580	.	. .	−6,183	+6,183	. .	. .	−1,76
(2)	−1	+6,551	. .	. .	. .	+1,520	. .	. .	. .	−8,63
(3)	−1	−0,320	. .	. .	. .	+5,686	. .	. .	. .	−2,72
(4)	−1	−4,327	. .	. .	. .	+0,127	. .	. .	. .	+3,76
(5)	−1	−4,051	. .	+4,051	. .	−2,873	. .	+2,873	. .	+4,36
(6)	−1	−1,615	. .	. .	+1,615	−6,281	. .	. .	+6,281	−2,40
Summe	−6	+0,818	−4,580	+4,051	+1,615	−8,004	+6,183	+2,873	+6,281	−7,39

Hier hat man $4{,}580^2 + 6{,}551^2 + 0{,}320^2 + \ldots = +101{,}7361$
$+4{,}580\,(-4{,}580) = \ldots \qquad -20{,}9764$
. . . . . .
$6{,}183^2 + 1{,}520^2 + 5{,}686^2 + \ldots = +120{,}5917$
. . . . . u. s. w.

Die zugehörigen Normalgleichungen sind (in abgekürzter Schreibweise nach (3) S. 80):

Tabelle (9)

z	δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	l
+ 6,000	− 0,818	+ 4,580	− 4,051	− 1,615	+ 8,004	− 6,183	− 2,873	− 6,281	+ 7,390
	+ 101,736	− 20,976	− 16,411	− 2,608	+ 1,053	+ 28,318	− 11,638	− 10,144	− 93,781
		+ 20,976	..	..	+ 28,318	− 28,318	..	..	+ 8,061
			+ 16,411	..	− 11,638	..	+ 11,638	..	+ 17,662
				+ 2,608	− 10,144	..	..	+ 10,144	− 3,876
					+ 120,592	− 38,230	− 8,254	− 39,451	− 14,676
						+ 38,230	..	..	− 10,882
							+ 8,254	..	+ 12,526
								+ 39,451	− 15,074
									+ 123,880

Zur Elimination von z wird einmal reduziert, wodurch man erhält (vgl. *V.* S. 101—102):

Tabelle (10)

I	III	V	VII	II	IV	VI	VIII	
δx_1	δx_2	δx_3	δx_4	δy_1	δy_2	δy_3	δy_4	l
+ 101,63	− 20,36	− 16,96	− 2,83	+ 2,14	+ 27,48	− 12,03	− 11,00	− 92,77
	+ 17,47	+ 3,09	+ 1,23	+ 22,21	− 23,60	+ 2,19	+ 4,80	+ 2,42
		+ 13,67	− 1,09	− 6,24	− 4,17	+ 9,70	− 4,24	+ 22,65
			+ 2,17	− 7,99	− 1,66	− 0,77	+ 8,45	− 1,89
				+ 109,91	− 29,98	− 4,42	− 31,07	− 24,54
					+ 31,86	− 2,96	− 6,47	− 3,26
						+ 6,87	− 3,01	+ 16,06
							+ 32,87	− 7,33
								+ 114,78

Ein solches System von Stations-Normalgleichungen bzw. reduzierten Normalgleichungen, indem jeweils z eliminiert ist, bringt jede Station, und es müssen schliesslich alle diese „Beiträge zu den Normalgleichungen des Systems" gliedweise addiert werden.

Wenn wir dieses beispielshalber für die 4 ersten Unbekannten $\delta x_1 = \text{I}$, $\delta x_2 = \text{III}$, $\delta y_1 = \text{II}$, $\delta y_2 = \text{IV}$ durchführen wollen, so zeigt uns das Netzbild S. 415, dass wir dazu die Beiträge folgender Stationen brauchen: (1) = Sacrau, (2) = Skronskau, (3) = Eckerndorf, (4) = Rosen, (11) = Lubetzko, (12) = Annaberg, (13) = Lossen, d. h. wir haben:

	$\delta x_1 = \text{I}$	$\delta x_2 = \text{III}$	$\delta y_1 = \text{II}$	$\delta y_2 = \text{IV}$	
1. Sacrau (*V.* S. 101—102) . .	+ 101,63	− 20,36	+ 2,14	+ 27,48	I
		+ 17,47	+ 22,21	− 23,60	III
			+ 109,91	− 29,98	II
				+ 31,86	IV
2. Skronskau (*V.* S. 103) . .	+ 13,99	− 6,89	− 18,88	+ 14,40	I
		+ 57,14	+ 9,30	+ 38,32	III
			+ 25,49	− 19,44	II
				+ 53,21	IV
3. Eckerndorf (*V.* S. 106—107)	+ 12,31		+ 8,73		I
			+ 6,19		II
4. Rosen (*V.* S. 109)	+ 1,96	− 3,04	+ 7,60	− 1,18	I
		+ 42,28	− 11,79	+ 16,40	III
			+ 29.59	− 4 57	II
				+ 6,37	IV
11. Lubetzko (*V.* S. 127) . . .	+ 28,61	− 6,24	+ 6,64	− 12,77	I
		+ 5,45	− 1,45	+ 11,15	III
			+ 1,54	− 2,96	II
				+ 22,80	IV
12. Annaberg (*V.* S. 129) . . .	+ 0,05		− 0,91		I
			+ 16,17		II
13. Lossen (*V.* S. 131)	+ 12,48		− 0,37		I
			+ 0,01		II
Summe . . . . . (*V.* S. 141—142)	+ 171,03	− 36,53	+ 4,95	+ 27,93	I
		+ 122,34	+ 18,27	+ 42,27	III
			+ 188,90	− 56,95	II
				+ 114,24	IV

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Normalgleichungen müssen daher in abgekürzter Schreibweise (nach (3) S. 80) so beginnen:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
+\underline{171{,}03}\ \mathrm{I} & - & 36{,}53\ \mathrm{III} & + & 4{,}95\ \mathrm{II} & + & 27{,}93\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & + & \underline{122{,}34}\ \mathrm{III} & + & 18{,}27\ \mathrm{II} & + & 42{,}27\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & & & + & \underline{188{,}90}\ \mathrm{II} & - & 56{,}95\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & & & & & + & \underline{114{,}24}\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & & & & & & & \ldots\ldots &
\end{array}$$

Diese Ordnung I , III , II , IV entspricht der Bedeutung $\mathrm{I} = \delta x_1$, $\mathrm{III} = \delta x_2$, $\mathrm{II} = \delta y_1$, $\mathrm{IV} = \delta y_2$ ...; wenn man dagegen die Aufeinanderfolge I , II , III , IV ... herstellen will, so hat man die vorstehenden Normalgleichungen so zu schreiben:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
+\underline{171{,}03}\ \mathrm{I} & + & 4{,}95\ \mathrm{II} & - & 36{,}53\ \mathrm{III} & + & 27{,}93\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & + & \underline{188{,}90}\ \mathrm{II} & + & 18{,}27\ \mathrm{III} & - & 56{,}95\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & & & + & \underline{122{,}34}\ \mathrm{III} & + & 42{,}27\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & & & & & + & \underline{114{,}24}\ \mathrm{IV} & + \ldots & = 0 \\
 & & & & & & & \ldots\ldots &
\end{array}$$

Dieses ist der Anfang der Normalgleichungen auf *V.* S. 141—142, deren Auflösung die 20 Unbekannten giebt (*V.* S. 143):

$$\left.\begin{array}{llll}
\mathrm{I} & = \delta x_1 = +1{,}145^{\mathrm{m}} & \mathrm{II} & = \delta y_1 = +0{,}710^{\mathrm{m}} \\
\mathrm{III} & = \delta x_2 = +1{,}997 & \mathrm{IV} & = \delta y_2 = +1{,}665 \\
\mathrm{V} & = \delta x_3 = +0{,}609 & \mathrm{VI} & = \delta y_3 = +0{,}306 \\
\mathrm{VII} & = \delta x_4 = +2{,}863 & \mathrm{VIII} & = \delta y_4 = +0{,}759 \\
\mathrm{IX} & = \delta x_5 = +0{,}828 & \mathrm{X} & = \delta y_5 = +0{,}065 \\
\mathrm{XI} & = \delta x_6 = +0{,}232 & \mathrm{XII} & = \delta y_6 = -0{,}485 \\
\mathrm{XIII} & = \delta x_7 = -0{,}291 & \mathrm{XIV} & = \delta y_7 = -0{,}247 \\
\mathrm{XV} & = \delta x_8 = +0{,}520 & \mathrm{XVI} & = \delta y_8 = +0{,}421 \\
\mathrm{XVII} & = \delta x_9 = -0{,}542 & \mathrm{XVIII} & = \delta y_9 = +0{,}648 \\
\mathrm{XIX} & = \delta x_{10} = +0{,}097 & \mathrm{XX} & = \delta y_{10} = +0{,}852
\end{array}\right\} \quad (11)$$

Durch Zufügung dieser Verbesserungen zu den früher in der Tabelle (2) gegebenen Näherungswerten bekommt man folgende Tabelle der endgültigen Coordinaten:

$$\left.\begin{array}{lrr}
 & y & x \\
1.\ \text{Sacrau} & +345\,509{,}010^{\mathrm{m}} & -202\,210{,}355^{\mathrm{m}} \\
2.\ \text{Skronskau} & +361\,466{,}665 & -180\,673{,}203 \\
3.\ \text{Eckersdorf} & +311\,632{,}406 & -178\,191{,}991 \\
4.\ \text{Rosen} & +337\,588{,}759 & -171\,405{,}737 \\
5.\ \text{Laski} & +326\,170{,}365 & -155\,738{,}472 \\
6.\ \text{Ossen} & +298\,827{,}415 & -137\,624{,}968 \\
7.\ \text{Johannas Höhe} & +273\,033{,}653 & -129\,893{,}891 \\
8.\ \text{Kotlow} & +321\,735{,}821 & -117\,814{,}580 \\
9.\ \text{Dzielitz} & +286\,628{,}548 & -\ 95\,567{,}142 \\
10.\ \text{Baranowek} & +303\,289{,}452 & -\ 81\,761{,}703
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Damit ist die Ausgleichung in der Hauptsache vollendet; man kann aber auch noch die ausgeglichenen Abrisse herstellen, ähnlich wie bei den einfachen Vorwärts- und Rückwärts-Einschneide-Ausgleichungen, unten auf S. 343 und 351. Wir wollen beispielshalber den ausgeglichenen Richtungswinkel (1,2) = Sacrau-Skronskau ausrechnen mit den vorstehenden endgültigen Coordinaten:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Skronskau	+ 361 466,665	— 180 673,203
Sacrau	+ 345 509,010	— 202 210,355
	+ 15 957,655	+ 21 537,152

log 15957,655	4.202 9690·7
log 21537,152	4.333 1882·7
log tang t	9.869 7808·0

$t_1 = 36° 32' 9{,}906''$ (13)

Dieses entspricht dem früheren beobachteten $t' = 36° 32' 9{,}67''$ in (7) S. 419.

Wenn man alle diese ausgeglichenen t ausrechnet, so bekommt man für jede Station eine Vergleichung wie beispielshalber im Nachfolgenden für die erste Station Sacrau:

Station Sacrau:

Zielpunkt	Beobachtet nach (7) S. 419 t'	Ausgeglichen t	$t - t' = V$	$V - z = v$
1. Skronskau .	36° 32' 9,67''	36° 32' 9,91''	+ 0,24''	— 0,05''
2. Lubetzko . .	103 3 50,91	103 3 50,86	— 0,05	— 0,34
3. Annaberg .	183 13 21,23	183 13 22,18	+ 0,95	+ 0,66
4. Lossen. . .	268 18 43,17	268 17 42,06	— 1,11	— 1,40
5. Eckersdorf .	305 20 10,27	305 20 11,32	+ 1,05	+ 0,76
6. Rosen . . .	345 34 50,42	345 34 51,10	+ 0,68	+ 0,39
	Summen 185,67	187,43	+ 1,76	+ 0,02
	Mittel		$z = + 0{,}29$	

dieses entspricht der ersten Gruppe von *V.* S. 144.

Wenn man auch die $T - t$ von S. 419 wieder zufügt, so bekommt man den endgültigen Abriss:

Station Sacrau:

Zielpunkt	Beobachtet $t' + (T - t) + z = T'$	Ausgeglichen $t + (T - t) = T$	$T - T' = v$
1. Skronskau .	36° 32' 29,07''	36° 32' 29,02''	— 0,05''
2. Lubetzko . .	103 3 44,97	103 3 44,63	— 0,34
3. Annaberg . .	183 12 49,98	183 12 50,64	+ 0,66
4. Lossen. . .	268 18 42,28	268 18 40,88	— 1,40
5. Eckersdorf .	305 20 30,86	305 20 31,62	+ 0,76
6. Rosen . . .	345 34 17,42	345 34 17,81	+ 0,39
	214,58	214,60	+ 0,02

Dieses entspricht dem Abrisse der Station Sacrau in *V.* S. 147, wo auch noch die Meridianconvergenz — 3° 48' 1.30'' und *log S* hinzugefügt sind.

(Bei Rosen haben wir 345° 34', während in *V.* S. 147, wie es scheint, infolge Druckfehlers, 345° 35' steht.)

In gleicher Weise, wie für die Station Sacrau giebt das amtliche Werk „Königl.

Preuss. Landestriangulation, V. Teil, Berlin 1893", aus welchem wir in S. 95—165 das Vorstehende entlehnt haben, auch für alle anderen Stationen die Abrisse auf S. 147 u. ff. Dieses Schlesisch-Posen sche Dreiecksnetz ist eines der elegantesten Beispiele für Netzeinschaltung mit Coordinaten-Ausgleichung, welche von General Schreiber etwa seit 1876 bei der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme eingeführt worden ist.

Wenn man solche mehrpunktige Coordinaten-Ausgleichung auch in einem Soldner schen Coordinatensystem, etwa in einem der 40 preussischen Kataster-Systeme ausführen will, so bleibt im Wesentlichen die Anordnung bestehen, nur sind die Reduktionen $t - T$ im Soldner schen System umständlicher zu bestimmen als im conformen System (vgl. S. 206); beschränkt man sich aber auf geringe Ausdehnung, III. Ordnung (etwa wie in § 99. S. 374), so würden in mässigem Abstand von der Haupt-Achse des Systems die $t - T$ verschwindend klein und damit die Coordinaten-Ausgleichung sehr bequem, nämlich mit der im vorstehenden § 108. vorgetragenen übereinstimmend, wenn man nur alle $t - T$ gleich Null setzt.

Kapitel IV.

Theorie der Fehlerwahrscheinlichkeit.

§ 109. Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich mit zufälligen Ereignissen, d. h. mit Ereignissen, deren Ursachen im einzelnen Falle unbekannt sind. Solche Ereignisse sind z. B. das Ziehen aus einer Urne, das Fallen eines Würfels, bei Versicherungsanstalten das Eintreten eines Brandfalles oder eines Todesfalles, in der Methode der kleinsten Quadrate das Vorkommen eines Beobachtungsfehlers.

Wenn die Ursachen solcher Ereignisse auch nicht gänzlich unbekannt sind, so wird diesen Ursachen doch im einzelnen Falle nicht weiter nachgeforscht, wenn es sich um Wahrscheinlichkeitsrechnung handelt.

Mathematische Wahrscheinlichkeit.

Die *Wahrscheinlichkeit* w eines Ereignisses ist das Verhältnis der Anzahl der dem Ereignis günstigen Fälle zu der Anzahl der überhaupt möglichen Fälle.

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel die Zahl 6 zu werfen, ist $= 1 : 6$, weil 1 Fall günstig und 6 Fälle möglich sind.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist immer ein echter Bruch, mit den Grenzen *Null* für Unmöglichkeit, und *Eins* für Gewissheit.

Wenn man im Stande ist, die möglichen und die günstigen Fälle abzuzählen, so kann man hiernach immer die mathematische Wahrscheinlichkeit angeben. Wir fragen z. B. nach der Wahrscheinlichkeit, mit 2 gewöhnlichen Würfeln die Augensumme $= 7$ zu werfen; dazu überlegen wir, dass 36 Fälle überhaupt möglich sind, weil zu jedem Fall des einen Würfels 6 Fälle des anderen Würfels hinzukommen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

können; weiter zählen wir ab, dass der Wurf 7 im Ganzen 6mal vorkommen kann, nämlich:

$$1+6 \quad , \quad 2+5 \quad , \quad 3+4 \quad , \quad 4+3 \quad , \quad 5+2 \quad , \quad 6+1$$

daraus folgt, dass der Wurf 7 bei zwei Würfeln die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ hat.

In gleicher Weise kann man auch geradezu abzählen, dass der Wurf 2 die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ hat u. s. w.

Indessen statt des unmittelbaren Abzählens kann man zu solchen Fällen auch die Sätze über Summen und Produkte von Wahrscheinlichkeiten anwenden, zu welchen wir nun übergehen.

Summe von Wahrscheinlichkeiten.

Sind w und w' die Wahrscheinlichkeiten zweier sich ausschliessender Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit w, dass eines *oder* das andere eintritt, gleich der Summe der beiden Einzelnwahrscheinlichkeiten, d. h.:

$$W = w + w' \tag{1}$$

Denken wir uns in einer Urne a schwarze, b weisse und c sonstige Kugeln, dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine schwarze Kugel zu erhalten:

$$w = \frac{a}{a+b+c}$$

desgleichen für eine weisse Kugel:

$$w' = \frac{b}{a+b+c}$$

und für eine schwarze *oder* eine weisse Kugel, da nun a und b günstig sind:

$$W = \frac{a+b}{a+b+c} \text{ oder } = \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} = w + w'$$

Damit ist die oben geschriebene Gleichung (1) nachgewiesen, für alle Fälle, welche in Hinsicht auf Wahrscheinlichkeit dem gewählten Urnenbeispiel entsprechen.

Dieser Satz von der Summe der Wahrscheinlichkeiten lässt sich auch auf mehr als zwei Ereignisse anwenden und giebt dann: Wenn w , w' , w'' ... die Wahrscheinlichkeiten beliebig vieler Ereignisse sind, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des ersten *oder* des zweiten *oder* des dritten u. s. w. gleich der Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten.

Wir werden diesen Satz später auf Beobachtungsfehler anwenden, etwa in dieser Form: Bei irgend welchen Messungen sei die Wahrscheinlichkeit einem Fehler ε zu begehen $= w$, die Wahrscheinlichkeit einem Fehler ε' zu begehen $= w'$, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler ε'' zu begehen $= w''$ u. s. w., dann ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler ε oder ε' oder ε'' u. s. w. zu begehen, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$W = w + w' + w'' + \ldots \tag{2}$$

Produkt von Wahrscheinlichkeiten.

Sind w' und w'' die Wahrscheinlichkeiten zweier von einander unabhängiger Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit W, dass beide zusammen eintreten, gleich dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten, d. h.:

$$W = w \,.\, w' \tag{3}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Man denke sich hiezu zwei Urnen mit a und a' schwarzen, nebst b und b' anderen Kugeln; bei diesen Urnen sind die Wahrscheinlichkeiten für Schwarz:

$$w = \frac{a}{a+b} \text{ bezw. } w' = \frac{a'}{a'+b'}$$

Nun fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass bei zwei Zügen aus beiden Urnen, beidemal schwarz erscheint. Hier sind $a\,a'$ Fälle günstig, weil zu jeder Kugel a eine Kugel a' kommen kann, und möglich sind $(a+b)(a'+b')$ Fälle, es ist also: Die Wahrscheinlichkeit für Schwarz und Schwarz:

$$W = \frac{a\,a'}{(a+b)(a'+b')} \text{ oder } = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a'}{a'+b'} = w \,.\, w'$$

Damit ist die oben geschriebene Gleichung (2) nachgewiesen für die dem Urnenbeispiel entsprechenden Wahrscheinlichkeiten; und ebenso wie für 2 Ereignisse gilt das Produkt auch für die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von mehr als 2 Ereignissen, z. B. in der Fehlertheorie werden wir nachher eine Anwendung von folgender Form haben: Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε sei w, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε' sei w', ferner ε'' mit w'' u. s. w. Dann ist die Wahrscheinlichkeit bei 3 Beobachtungen gerade die Fehler ε , ε' , ε'' und keine anderen zu erhalten, oder allgemeiner, die Wahrscheinlichkeit bei einer Beobachtungsreihe die Fehler ε , ε' , ε'' u. s. w. zu erhalten, ausgedrückt durch das Produkt:

$$W = w \,.\, w' \,.\, w'' \ldots \qquad (4)$$

Das Gesetz der grossen Zahlen. Wenn man eine Wahrscheinlichkeit aus den Ursachen a priori nicht berechnen kann, so giebt es einen Schluss aus der Häufigkeit des Vorkommens rückwärts auf die Wahrscheinlichkeit.

Wenn z. B. von 1000 geborenen Knaben nur 250 das 50ste Lebensjahr erreichen, so schliesst man daraus, dass für irgend ein heute geborenes männliches Kind die Wahrscheinlichkeit $= \frac{250}{1000}$ oder $= \frac{1}{4}$ besteht, das 50ste Lebensjahr zu erreichen.

Oder wenn bei einem Doppelnivellement unter 491 Vergleichungen 209 Vergleichung die Differenz 1^{mm} gegeben haben, und wenn andere Differenzen als 0^{mm}, 1^{mm}, 2^{mm} überhaupt nicht vorkommen können, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Differenz 1^{mm}, der Bruch $\frac{209}{491} = 0{,}43$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung als Hilfswissenschaft der Methode der kleinsten Quadrate giebt *Hagen* „Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung." 2. Aufl. Berlin 1867.

§ 110. Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler.

Um die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungsfehler anzuwenden, muss man voraussetzen, dass die Beobachtungsfehler zufällige Ereignisse in dem Sinne sind, wie am Anfang des vorigen § 109. auseinandergesetzt wurde. (Grobe Fehler sollen ausgeschlossen sein, vgl. S. 11.)

Wir wollen weiter annehmen, man habe sich eine längere Reihe von Beobachtungsfehlern verschafft. Es ist allerdings oft schwer, wahre Beobachtungsfehler kennen zu lernen, indessen giebt es doch manche Wahrnehmungen, welche zwar nicht reine Fehler sind, aber doch völlig deren Charakter haben, z. B. die Dreieckswidersprüche von Triangulierungen (vgl. S. 12) oder die Differenzen von Doppelmessungen u. s. w.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

oder man begnügt sich, statt wahrer Fehler mit scheinbaren Fehlern, z. B. den Differenzen einer grossen Zahl gleichartiger Messungen einer Grösse und deren arithmetischem Mittel (vgl. S. 23).

Wir wollen dabei annehmen, die Beobachtungen seien von einseitigen Fehlerwirkungen frei, und deswegen sei die Verteilung der Fehler nach der positiven und negativen Seite nahezu gleich.

Wenn man nun solche Fehler nach ihrer *Grösse* ordnet, so macht man die Erfahrung, dass die Verteilung derselben einem gewissen Gesetz folgt, dessen Erforschung nun unsere Aufgabe ist. Man findet, dass kleine Fehler häufiger sind als grosse, und dass namentlich um den Wert Null sich die Fehler häufen, während grössere Fehler, welche das zwei- bis dreifache des mittleren Fehlers übersteigen, sehr selten vorkommen.

Schon die geringe Zahl von 18 Beobachtungen, welche wir früher in § 7. S. 23 behandelt haben, zeigt dieses; man hat nämlich 10 positive und 8 negative Fehler; und wenn man ohne Rücksicht auf das Vorzeichen nach der Grösse ordnet, so erhält man folgende Reihe:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrrrr} 0{,}10'' & 0{,}12'' & 0{,}12'' & 0{,}13'' & 0{,}30'' & 0{,}38'' & 0{,}62'' & 0{,}83'' & 1{,}12'' \\ 1{,}13 & 1{,}17 & 1{,}27 & 1{,}38 & 1{,}63 & 1{,}71 & 2{,}09 & 2{,}63 & 4{,}62 \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Verteilung nach der Grösse giebt

zwischen	0″	und 1″	...	8 Fehler
„	1″	„ 2″	...	7 „
„	2″	„ 3″	...	2 „
„	3″	„ 4″	...	0 „
„	4″	„ 5″	...	1 „
			Summe	18 Fehler.

Es ist ganz augenscheinlich, dass kleine Fehler häufiger sind als grosse, denn z. B. zwischen 0″ und 1″ haben wir 8 Fälle, dagegen zwischen 4″ und 5″ nur 1 Fall.

Da ähnliche Erfahrungen bei allen längeren Beobachtungsreihen gemacht wurden, hat man allgemein geschlossen, dass die Häufigkeit des Vorkommens oder die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Grösse des Fehlers abhängig sei.

In der vorstehenden kleinen Reihe haben wir z. B. 8 Fehler zwischen 0″ und 1″, und da im Ganzen 18 Fehler vorliegen, können wir sagen, die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zwischen 0″ und 1″ sei $= 8 : 18$, oder indem wir alle Fehler zwischen 0″ und 1″ mit ihrem Mittelwerte 0,5″ in Rechnung nehmen, können wir näherungsweise auch sagen:

$$W\ (0{,}5'') = \frac{8}{18} = 0{,}444\ldots$$

d. h. in diesem Falle ist die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler von ungefähr 0,5″ zu begehen $= 0{,}44\ldots$

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber offenbar nicht bloss abhängig von der Grösse des Fehlers, (in diesem Falle 0,5″), sondern auch von dem *Intervall* innerhalb dessen der Mittelwert 0,5″ gelten soll; dieses Intervall war im vorigen Falle 1″, und würde man dieses Intervall enger genommen haben, etwa halb so gross, so dass 0,5″ nur zwischen 0,25 und 0,75 gerechnet würde, so würde man nur noch 3 Fälle gefunden haben und die Wahrscheinlichkeit würde $W\ (0{,}5'') = 3 : 18$. Bei einer grossen Zahl

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

von Fehlern und engen Intervallen wird man wohl annehmen dürfen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers *proportional* der Grösse des Intervalls ist, innerhalb dessen er gerechnet wird.

Indem wir nun das Ergebnis dieser Betrachtungen in die Formen der Analysis bringen wollen, bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durch $W(\varepsilon)$ und da diese Wahrscheinlichkeit abhängig sein soll von der Grösse von ε, was analytisch durch eine Funktion von ε etwa $\varphi(\varepsilon)$ ausgedrückt sei, und da ferner die Wahrscheinlichkeit proportional dem Intervall sein muss, das mit $d\varepsilon$ bezeichnet sein soll, müssen wir setzen:

$$\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion:} \quad \varphi(\varepsilon) \tag{2}$$

$$\text{Wahrscheinlichkeit:} \quad W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{3}$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε mit dem Intervall $d\varepsilon$, also z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler ε liege zwischen den Grenzen

$$\varepsilon - \frac{d\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \varepsilon + \frac{d\varepsilon}{2}$$

oder auch $\varepsilon - d\varepsilon$ und ε

„ „ ε und $\varepsilon + d\varepsilon$.

Je enger man die Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ zusammenzieht, um so kleiner wird $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und nimmt man $d\varepsilon$ unendlich klein, so wird auch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ d. h. die Wahrscheinlichkeit einen bestimmten Fehler ε zu begehen, unendlich klein. Wir machen die Annahme, es sei $d\varepsilon$ unendlich klein, im Sinne der Differentialrechnung und damit können wir die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen irgend welchen Grenzen nach dem Satz von der Summe der Wahrscheinlichkeiten § 109. S. 424 bestimmen.

Ist nämlich die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε gegeben durch $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ und für einen Fehler ε' durch $\varphi(\varepsilon')\, d\varepsilon$, ebenso für ε'' durch $(\varphi\, \varepsilon'')\, d\varepsilon$ und denkt man sich die Fehler ε , ε' , $\varepsilon'' \ldots$ je mit dem Intervall $d\varepsilon$ an einander gereiht, so ist die Wahrscheinlichkeit irgend *einen* Fehler aus dieser Reihe zu treffen, gleich der Wahrscheinlichkeit, entweder den Fehler ε *oder* den Fehler ε' *oder* den Fehler ε'' u. s. f. zu treffen, d. h. nach dem Satze (2) S. 424 ist es die Summe aller dieser Einzelwahrscheinlichkeiten und endlich wenn $d\varepsilon$ unendlich klein ist, tritt an die Stelle der Summe das bestimmte Integral, und wir können daher nun sagen, die Wahrscheinlichkeit einen Fehler zwischen gegebenen Grenzen a und b zu begehen, ist:

$$W\left(\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right) = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{5}$$

§ 111. Fehler-Wahrscheinlichkeits-Funktion.

Um zur Bestimmung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zu gelangen, betrachten wir zuerst die Grenzwerte von ε.

Wie schon bei der Beobachtungsreihe (1) § 110. S. 426 angegeben wurde, hat die Erfahrung gezeigt, dass kleine Fehler wahrscheinlicher sind als grössere, woraus wir schliessen, dass die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihr Maximum haben muss, d. h.:

$$\varphi(0) = \text{Maximum} \tag{1}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ausser der unteren Grenze $\varepsilon = 0$ betrachten wir die obere Grenze. Ohne Zweifel giebt es für jede Beobachtungsart eine gewisse Grenze, welche von den Fehlern nicht überschritten werden kann; da aber diese Grenze sich nicht allgemein angeben lässt, wird in der allgemeinen Fehlertheorie die denkbar äusserste Grenze, nämlich Unendlich, angenommen, und zwar nach beiden Seiten, $-\infty$ und $+\infty$.

Für diese Grenzen muss die Fehlerwahrscheinlichkeit gleich Null werden, also:

$$\varphi(\pm\infty) = 0 \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liege, ist die Gewissheit $= 1$; wenn man also in der Gleichung (5) am Schlusse des vorigen § 110. S. 427 $a = -\infty$ und $b = +\infty$ setzt, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \tag{3}$$

Als zweite Bedingung, welcher die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ genügen soll, nehmen wir an, es soll dieselbe so beschaffen sein, dass, ihr zu Folge, das arithmetische Mittel mehrerer gleich genauer Beobachtungen der wahrscheinlichste Wert der beobachteten Grösse ist. Wenn also mehrere Beobachtungen einer Unbekannten die Werte $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gegeben haben, und man nimmt an, es sei x der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten, so muss man damit auch annehmen, dass folgende Fehler als wahrscheinlichste begangen wurden:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x - l_1 \\ \varepsilon_2 &= x - l_2 \\ \varepsilon_3 &= x - l_3 \\ &\ldots\ldots \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Nun soll die Wahrscheinlichkeit von x und damit die Wahrscheinlichkeit des Fehlersystems $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ ein Maximum werden. Diese letztere Wahrscheinlichkeit haben wir bereits in dem Satze von dem Produkt von Wahrscheinlichkeiten bei (4) § 109. S. 425 behandelt; wir wissen von dort, dass diese Wahrscheinlichkeit gleich dem Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten $\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ ist, d. h.:

$$W(x) = \varphi(\varepsilon_1)\, d\varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon_2)\, d\varepsilon \,.\, \varphi(\varepsilon_3)\, d\varepsilon \ldots = \text{Maximum.}$$

Da man das Maximum eines Produktes bequemer in logarithmischer Form behandelt, bilden wir hieraus:

$$log\, \varphi(\varepsilon_1) + log\, \varphi(\varepsilon_2) + log\, \varphi(\varepsilon_3) + \ldots = \text{Maximum.}$$

Das Maximum soll in Beziehung auf die unabhängige Veränderliche x erzielt werden, man müsste also die vorstehende Logarithmen-Summe nach x differentiieren, da aber wegen (4) auch $dx = d\varepsilon_1 = d\varepsilon_2 \ldots$ ist, schreiben wir nun:

$$\frac{d\, log\, \varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} + \frac{d\, log\, \varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} + \frac{d\, log\, \varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} + \ldots = 0 \tag{5}$$

Da die ε nach (4) einem arithmetischen Mittel x angehören, muss ihre Summe $=$ Null sein, d. h.:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots = 0 \tag{6}$$

Diese Gleichung (6) und die vorhergehende (5) können für beliebig viele ε (mehr als zwei) nur dann allgemein zusammen bestehen, wenn folgende Gleichungen gelten:

$$\frac{d\, log\, \varphi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = k\varepsilon_1 \quad , \quad \frac{d\, log\, \varphi(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2} = k\varepsilon_2 \quad , \quad \frac{d\, log\, \varphi(\varepsilon_3)}{d\varepsilon_3} = k\varepsilon_3 \ldots$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

oder es muss allgemein gültig sein:

$$\frac{d \log \varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = k\varepsilon$$

oder integriert:

$$\log \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C$$

wobei C Integrations-Konstante ist. Wenn *log* natürliche Logarithmen mit der Basis e bedeutet, so folgt hieraus:

$$\varphi(\varepsilon) = e^{\left(\frac{1}{2} k \varepsilon^2 + C\right)} = e^{C} e^{\frac{1}{2} k \varepsilon^2}$$

Die Konstante k muss notwendig negativ sein, weil nach (1) die Funktion $\varphi(\varepsilon)$ mit $\varepsilon = 0$ ihren grössten Wert hat, und von da an immer abnimmt, wir schreiben daher:

$$\frac{1}{2} k = -h^2$$

Zugleich können wir die Integrations-Konstante e^C kürzer $= A$ bezeichnen und haben daher:

$$\varphi(\varepsilon) = A e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{7}$$

Es handelt sich noch um die Bestimmung der Integrations-Konstanten A; wozu die noch unbenützte Bedingung (3) für das bestimmte Integral zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ dient, nämlich:

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon = 1$$

mit $h\varepsilon = t$, also $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, was die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ unverändert lässt, wird dieses:

$$\frac{A}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 \tag{8}$$

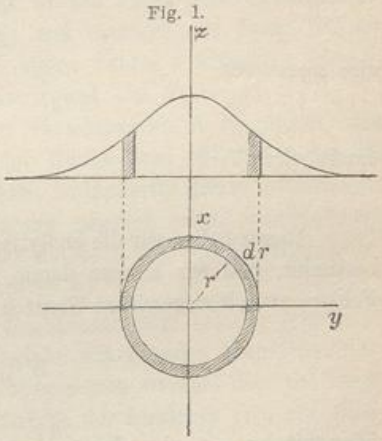
Um dieses bestimmte Integral auszuwerten, nehmen wir eine geometrische Betrachtung zu Hilfe:

Durch Fig. 1. sei eine Umdrehungsfläche dargestellt, deren Gleichung ist:

$$z = e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{oder} \quad z = e^{-r^2} \tag{6}$$

Um das Volumen zu bestimmen, welches zwischen der krummen Fläche und der xy Ebene sich befindet, schlagen wir zwei verschiedene Wege ein:

Fig. 1.



Erstens giebt die Zerlegung nach dx und dy das Flächendifferential:

$$dV = dx\, dy\, z$$

also

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx\, dy$$

wobei die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ sich auf beide Integrationen beziehen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Indem man zuerst nach x und dann nach y integriert, hat man:

$$V = \int e^{-x^2} \left(\int e^{-y^2} dy \right) dx \quad \text{oder} \quad V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$$

Da in einem bestimmten Integral die Bezeichnung der ursprünglichen Veränderlichen mit x , y oder t unwesentlich ist, können wir dafür auch schreiben:

$$V = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 \tag{9}$$

Zweitens kann man auch eine Zerlegung nach Cylinder-Elementen vornehmen und hiezu ist nach Fig. 1. S. 429 die Kreisringfläche in der xy Ebene $= 2r\pi dr$, also das Volumen eines Hohlcylinders vom Halbmesser r, der Dicke dr und der Höhe z:

$$dV' = 2r\pi dr z = 2r\pi dr e^{-r^2}$$

daraus das Gesamt-Volumen:

$$V = \int dV' = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \tag{9a}$$

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int r e^{-r^2} dr = -\frac{1}{2} e^{-r^2}$$

es lässt sich also auch das bestimmte Integral angeben, nämlich mit der oberen Grenze $r = \infty$ und der unteren Grenze $r = 0$:

$$\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \left(-0 - (-\frac{1}{2}) \right) = +\frac{1}{2} \tag{10}$$

folglich wegen (9 a):

$$V = \pi \tag{10a}$$

Die Vergleichung von (9) und (10a) giebt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \tag{11}$$

also wegen (8):

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \tag{12}$$

damit wird (7):

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{13}$$

Damit haben wir die analytische Form der gesuchten Wahrscheinlichkeitsfunktion bestimmt, und wir können damit auch die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen gewissen Grenzen a und b angeben, nämlich nach (5) § 110. S. 427:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} d\varepsilon$$

oder mit $h\varepsilon = t$, also $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, wodurch die Grenzen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ in $t = ah$ und $t = bh$ übergehen:

$$W\binom{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ah}^{bh} e^{-t^2} dt \tag{14}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

In unseren Schlussformeln (13) und (14) ist noch eine Konstante h geblieben, welche nicht wie die Integrations-Konstante A durch irgend welche Nebenbedingung allgemein bestimmt werden kann, sondern in den allgemeinen Formeln als eine Art Parameter bleiben muss. Diese Konstante h hängt nämlich von der Art der jeweiligen Beobachtung, d. h. von der *Genauigkeit* ab, und es ist auch an sich ganz begreiflich, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε durchaus nicht bloss von der Grösse ε (und dem Intervall $d\varepsilon$) allein abhängen kann, sondern auch auf die Genauigkeit der Messungsart Rücksicht nehmen muss. Die Konstante h, welche in der angedeuteten Weise von der Genauigkeit abhängt, nennt man die Genauigkeitszahl.

Bestimmung der Konstanten h.

Bei einer Beobachtungsart, welche die Genauigkeit h hat, sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Fehler ε_1 ε_2 $\varepsilon_3 \ldots$ entstehen, bzw. die folgenden:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_1^2} d\varepsilon \quad , \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_2^2} d\varepsilon \quad , \quad \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon_3^2} d\varepsilon \quad \text{u. s. w.}$$

Die Wahrscheinlichkeit, diese sämtlichen Fehler ε_1 , ε_2 , $\varepsilon_3 \ldots$ bei einer Beobachtungsreihe zusammen zu erhalten, ist nach (4) § 109. S. 425 das Produkt aller Einzelwahrscheinlichkeiten. Diese Wahrscheinlichkeit ist also bei n Beobachtungen proportional dem Ausdruck:

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \varepsilon_1^2 - h^2 \varepsilon_2^2 - h^2 \varepsilon_3^2 - \ldots}$$

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon^2]} \tag{15}$$

wobei, wie sonst, mit $[\varepsilon^2]$ die Summe $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots$ bezeichnet ist.

Um hieraus h zu bestimmen, ist eine Schlussfolge der allgemeinen Wahrscheinlichkeitsrechnung anzuwenden in dieser Weise:

Das Fehlersystem ε_1 , ε_2 , $\varepsilon_3 \ldots$ ist erzeugt worden durch eine Beobachtungsart mit der Genauigkeitszahl h, welche als Ursache und massgebende Norm bei der Erzeugung der Fehler ε zu betrachten ist, so dass kleine Fehler ε auf einen grossen Wert h hindeuten und umgekehrt. Indessen kann irgend ein System ε_1 ε_2 $\varepsilon_3 \ldots$, da hier der Zufall mitspielt, möglicherweise von verschiedenen h herrühren, und namentlich wenn nur wenige ε vorliegen, wird der Rückschluss von den ε auf das wirksam gewesene h ein unsicherer sein. Der leitende Gedanke für diesen Rückschluss besteht darin, dass stets einem solchen h der Vorzug gegeben wird, welches mehr befähigt ist, oder an sich mehr Wahrscheinlichkeit darbietet für die Erzeugung des vorliegenden Fehlersystems ε_1 ε_2 $\varepsilon_3 \ldots$ als ein anderes h.

Man hat also anzunehmen, dass eine solche Beobachtungsart bei der Erzeugung eines Fehlersystems ε_1 ε_2 $\varepsilon_3 \ldots$ vorgelegen hat, welche mit grösster Wahrscheinlichkeit dieses Fehlersystem erzeugt; oder es muss angenommen werden, dass die Beobachtungen eine solche Genauigkeit h hatten, für welche der Ausdruck (15) ein Maximum wird, und man bestimmt h aus der Gleichung:

$$\frac{d\,W}{d\,h} = 0 \quad \text{d. h.} \quad \frac{d\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 [\varepsilon^2]}}{d\,h} = 0$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Ausführung dieser Differentiierung giebt, mit Weglassung des konstanten Nenners $\sqrt{\pi^n}$:

$$0 = \frac{d\left(h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}\right)}{dh} = n\,h^{n-1} e^{-h^2[\varepsilon^2]} + h^n e^{-h^2[\varepsilon^2]}(-2h[\varepsilon^2])$$

$$0 = h^{n-1} e^{h^2[\varepsilon^2]}\left(n - 2h^2[\varepsilon^2]\right)$$

Dieses Produkt kann nur = Null werden, wenn der Faktor in der Klammer = Null wird, also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{1}{2h^2} \tag{16}$$

Der hier zum Vorschein kommende Mittelwert $\frac{[\varepsilon^2]}{n}$ ist nichts anderes, als das Quadrat des uns schon längst bekannten mittleren Fehlers m, es ist also:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2h^2}$$

$$\text{also } m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \text{ oder } h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \tag{17}$$

Setzt man dieses in (13) ein, so erhält man

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2m^2}} \tag{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2m^2}} d\varepsilon \tag{19}$$

Nun wollen wir noch einführen:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \quad \text{und} \quad \frac{d\varepsilon}{m} = dx \tag{20}$$

d. h. wir zählen die Fehler als Verhältniszahlen $\varepsilon : m$ oder in Einheiten des mittleren Fehlers m; damit wird:

$$W(\varepsilon) = W(mx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{21}$$

$$\text{oder } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{22}$$

Es ist für die Übersicht und auch sachlich am besten, alle weiteren Entwicklungen und Berechnungen in dieser letzten Form mit $\frac{\varepsilon}{m} = x$ zu führen, wobei also x eine reine Zahl und auch $\varphi(x)$ eine reine Zahl ist; indessen haben wir in Folgendem diese Form nur teilweise angewendet und sonst ε selbst nebst h eingeführt, um den Anschluss unserer Berechnungen an die seit *Gauss* üblichen Formen nicht zu verlieren (und zum Teil wegen der typographischen Schwierigkeiten der Formen (18)—(21)).

§ 112. Reihen-Entwicklungen und Fehlerkurven.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist nach (13) § 111. S. 430:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{1}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Diese Funktion kann man für irgend welche Werte von h und von ε geradezu ausrechnen, und zwar logarithmisch, da $log\, e = log\, 2{,}71828\ldots = 0.4342945\ldots = \mu$ und $log\, \sqrt{\pi} = 0.2485749$ ist:

$$log\, \varphi(\varepsilon) = 9.7514251 + log\, h - \mu\, h^2\, \varepsilon^2 \qquad (2)$$

Hiernach sind folgende Zahlenwerte berechnet:

ε	$\varphi(\varepsilon)$ für $h=1$	$\varphi(\varepsilon)$ für $h=2$	ε	$\varphi(\varepsilon)$ für $h=1$	$\varphi(\varepsilon)$ für $h=2$
0,0	0,56419	1,12838	1,0	0,20755	0,02067
0,1	0,55858	0,08413	1,1	0,16824	0,00892
0,2	0,54207	0,96514	1,2	0,13367	0,00356
0,3	0,51563	0,78724	1,3	0,10410	0,00131
0,4	0,48077	0,59499	1,4	0,07947	0,00044
0,5	0,43939	0,41511	1,5	0,04946	0,00014
0,6	0,39362	0,26734	1,6	0,04361	0,00004
0,7	0,34564	0,15894	1,7	0,03136	0,00001
0,8	0,29749	0,08723	1,8	0,02210	0,000003
0,9	0,25098	0,04419	1,9	0,01526	0,0000006
1,0	0,20755	0,02067	2,0	0,01033	0,0000001
			3,0	0,00007	0,0...
			∞	0	0

Man kann eine solche Funktion auch graphisch darstellen, indem man die Werte $\varphi(\varepsilon)$ als Ordinaten zu den Werten ε als Abscissen aufträgt. Die so erhaltene Curve für $h = 1$ ist in der nachfolgenden Fig. 1. am Schlusse dieses § S. 436 gegeben.

Wir wollen auch die Integralfunktion in Zahlenwerten und graphisch darstellen, nämlich nach (14) § 111. S. 430 die Funktion

$$W\left(\begin{smallmatrix} b \\ a \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\,h}^{b\,h} e^{-t^2}\, dt \qquad (3)$$

Dieses ist die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen a und b, und man erhält daraus auch die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen $-a$ und $+a$:

$$W\left(\begin{smallmatrix} +a \\ -a \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a\,h}^{+a\,h} e^{-t^2}\, dt$$

Weil aber gleich grosse positive oder negative Fehler gleich wahrscheinlich sind, also die Wahrscheinlichkeiten zwischen $-a$ und Null einerseits, und Null und $+a$ andererseits, einander gleich sind, kann man hiefür setzen, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von a:

$$W\left(\begin{smallmatrix} a \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{a\,h} e^{-t^2}\, dt \qquad (4)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Um dieses Integral auszurechnen, müssen wir eine Reihenentwicklung anwenden. Hiezu dient die Exponentialreihe:

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Diese giebt mit $x = -t^2$:

$$e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \cdots$$

$$\int e^{-t^2} dt = t - \frac{t^3}{3.1!} + \frac{t^5}{5.2!} - \frac{t^7}{7.3!} + \frac{t^9}{9.4!} - \cdots$$

$$\int_0^T e^{-t^2} dt = T - \frac{T^3}{3.1!} + \frac{T^5}{5.2!} - \frac{T^7}{7.3!} + \frac{T^9}{9.4!} \qquad (5)$$

Diese Reihe (5) konvergiert für endliche Werte von T jedenfalls, denn es ist der Quotient q zweier auf einander folgender Glieder, wenn man bis $n!$ im Nenner fortgeht,:

$$q = \frac{(2n-1)\,T^2}{(2n+1)\,n}$$

Da die Reihe abwechselnd positive und negative Glieder hat, so genügt es für die Konvergenz, wenn von irgend welcher Stelle an immer $q < 1$ wird, dieses ist aber für jeden endlichen Wert von T der Fall, wenn man nur die Reihe lang genug fortsetzt.

Allerdings muss man für grössere Werte T sehr viele Glieder nehmen, um nur überhaupt an den Anfang der Konvergenz zu gelangen, doch genügt uns hier die theoretische Möglichkeit der Rechnung nach der Reihe (5).

(Im übrigen verweisen wir hiezu auf Brünnow, „Lehrbuch der sphärischen Astronomie," 3. Ausgabe S. 34 und Theorie der Beobachtungsfehler von Emanuel Czuber, Leipzig 1891, S. 115—120).

Aus (4) und (5) haben wir nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$ liegt:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(ah - \frac{(ah)^3}{3.1!} + \frac{(ah)^5}{5.2!} - \frac{(ah)^7}{7.3!} + \frac{(ah)^9}{9.4!} - \cdots\right) \qquad (6)$$

Z. B. mit $ah = 0{,}1$ erhält man damit:

$$\left(W_0^a\right) = 1{,}12838\,(0{,}100000 - 0{,}000333 + 0{,}000001) = 0{,}112\,463$$

Folgendes sind einige Zahlenwerte für die Funktion $W\binom{a}{0}$ nach der Gleichung (6):

ah	$W\binom{a}{0}$	ah	$W\binom{a}{0}$	ah	$W\binom{a}{0}$	ah	$W\binom{a}{0}$
0,0	0,00000	1,0	0,84270	2,0	0,99532	3,0	0,99997 79
0,1	0,11246	1,1	0,88020	2,1	0,99702	3,1	0,99998 84
0,2	0,22270	1,2	0,91031	2,2	0,99814	3,2	0,99999 40
0,3	0,32863	1,3	0,93401	2,3	0,99886	3,3	0,99999 69
0,4	0,42839	1,4	0,95229	2,4	0,99931	3,4	0,99999 85
0,47694	0,5						
0,5	0,52050	1,5	0,96611	2,5	0,99959	3,5	0,99999 26
0,6	0,60386	1,6	0,97635	2,6	0,99976	3,6	0,99999 96
0,7	0,67780	1,7	0,98379	2,7	0,99987	3,7	0,99999 98
0,8	0,74210	1,8	0,98909	2,8	0,99992	3,8	0,99999 99
0,9	0,79691	1,9	0,99279	2,9	0,99996	∞	1,0

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eine ausführlichere Tafel dieser Art gab *Encke* im „Berliner astron. Jahrbuch für 1834", S. 305—308 und *Czuber*, „Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891", S. 121 und S. 411—413 und *Ferrero*, espositione del metodo dei minimi quadrati, Firenze 1876", S. 223—225.

In der vorstehenden kleinen Tafel haben wir einen Wert $a\,h = 0{,}47694$ besonders hervorgehoben, es ist derjenige, welcher zu $W\binom{a}{0} = \frac{1}{2}$ gehört. Mit diesem Werte 0,47694 oder genauer 0,4769363... werden wir uns im nächsten § 113. ausführlicher beschäftigen; inzwischen ist von demselben nur so viel zu sagen, dass er in die Reihe (6) eingesetzt, wie jeder andere das zugehörige $W\binom{a}{0}$ zu berechnen gestattet, und zwar wird die Ausrechnung hiefür $W\binom{a}{0} = 0{,}50000$ geben.

Führt man im Vorstehenden statt der Genauigkeitszahl h den mittleren Fehler m ein, nämlich nach (17) § 111. S. 432.

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} \quad \text{also} \quad a\,h = \frac{a}{m\sqrt{2}}$$

so bekommt man:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^3 \frac{1}{3.1!} + \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^5 \frac{1}{5.2!} - \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^7 \frac{1}{7.3!} + \ldots\right) \quad (7)$$

Dieses ist nur eine andere Form für (6); wenn man jedoch den Nenner $\sqrt{2}$ absondert und damit das Verhältnis $\frac{a}{m}$ als Veränderliche herstellt, so erhält man noch eine etwas andere Form:

$$W\binom{a}{0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\left(\frac{a}{m}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{m}\right)^3 + \frac{1}{40}\left(\frac{a}{m}\right)^5 - \frac{1}{336}\left(\frac{a}{m}\right)^7 + \frac{1}{3456}\left(\frac{a}{m}\right)^9 - \ldots\right) \quad (8)$$

Oder indem man das Verhältnis $\frac{a}{m} = n$ setzt, kann man dasselbe auch noch so schreiben:

$$W\binom{n\,m}{0} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(n - \frac{n^3}{6} + \frac{n^5}{40} - \frac{n^7}{336} + \frac{n^9}{3456} - \ldots\right) \quad (9)$$

Oder es ist dieses die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n fachen mittleren Fehler, als Funktion von n.

Hiernach ist unsere Tafel im Anhange S. [21] berechnet.

Graphische Darstellungen.

Die nachstehende Fig. 1. giebt Kurven für die Funktionen (1), (2) und (6), (8) nebst einer Kurve für $W\binom{n\,r}{0}$, von welcher erst in § 113. beim wahrscheinlichen Fehler die Rede sein wird, in (6) S. 439.

Die mit $\varphi(\varepsilon)$ bezeichnete Kurve entspricht der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ und der zugehörigen Tabelle auf S. 433 mit $h = 1$.

Die Kurve W entspricht der Funktion (6) oder (8) mit der Tabelle auf S. 434, wobei wieder $h = 1$ angenommen ist.

Die graphische Darstellung führt weiter zu folgenden geometrischen Betrachtungen:

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε, oder genauer, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ liegt, ist:

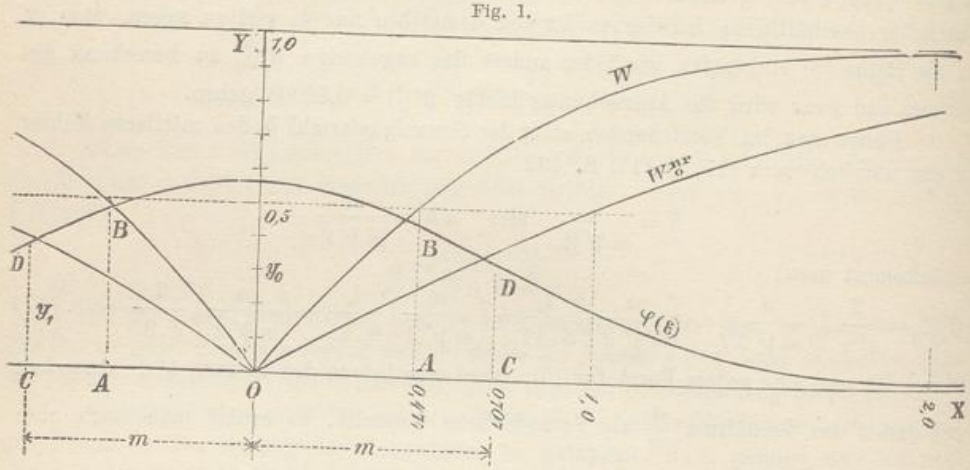
$$W = \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und die geometrische Darstellung hievon ist ein schmales, unendlich kleines Rechteck, dessen Höhe gleich der Ordinate $= \varphi(\varepsilon)$ der ersten Kurve, und dessen Breite $= d\varepsilon$ in der Richtung OX gemessen ist. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt:

$$W\binom{b}{a} = \int_a^b \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{10}$$

Fig. 1.



Dieses ist geometrisch dargestellt durch eine Fläche, welche begrenzt ist durch die Abscissenaxe, durch die Kurve $\varphi(\varepsilon)$ selbst und durch die zwei Ordinaten, welche zu den Abscissen $\varepsilon = a$ und $\varepsilon = b$ gehören. Z. B. ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen $\varepsilon = 0{,}477$ und $\varepsilon = 0{,}707$ liegt, in Fig. 1. dargestellt durch die Fläche $A\,C\,D\,B$.

Die Gesamtfläche zwischen der Abscissenaxe (Asymptote) und der Kurve $\varphi(\varepsilon)$ ist $= 1$, was der Gleichung (3) § 111. S. 428 entspricht, nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon \quad \text{oder} \quad 2\int_0^{\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \tag{11}$$

Wendepunkt der Kurve $\varphi(\varepsilon)$.

Noch eine merkwürdige Beziehung besteht zwischen dem Wendepunkt der Kurve $\varphi(\varepsilon)$ und dem mittleren Fehler m, es ist nämlich die Abscisse dieses Wendepunktes gleich dem mittleren Fehler.

Im Wendepunkt einer Kurve ist bekanntlich der zweite Differentialquotient $=$ Null. Man hat also:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{12}$$

$$\frac{d\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\left(-2h^2\varepsilon\right) = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}$$

$$\frac{d^2\varphi(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}\left\{e^{-h^2\varepsilon^2} - \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2}\,.\,2h^2\varepsilon\right\}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dieses kann nur dadurch Null werden, dass die Klammer = Null gesetzt wird, woraus folgt:

$$1 - 2h^2\varepsilon^2 = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{h\sqrt{2}} \tag{13}$$

Nach (17) § 111. S. 432 ist dieses $= m$; es ist also derjenige besondere Wert von ε, welcher die zweite Ableitung der Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zum Verschwinden bringt, gleich dem mittleren Fehler m. Oder in Fig. 1. ist $OC = m$ für den Wendepunkt D, und insbesondere mit $h = 1$ wird $OC = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ldots$, wie in Fig. 1. eingeschrieben ist.

Fehlerfunktion für $m = 1$.

In der Tabelle S. 433 und in der zugehörigen Kurve Fig. 1. S. 436 ist die zuerst sich darbietende einfache Annahme gemacht $h = 1$ oder $h = 2$, indessen ist das zwar mathematisch einfach, aber im Sinne der Fehler-Anschaulichkeit nicht nützlich; in letzterem Sinne ist es besser, alles auf den mittleren Fehler $m = 1$ zu reduzieren, wie wir schon am Schlusse von § 111. S. 432 angedeutet haben mit der Bezeichnung:

$$\frac{\varepsilon}{m} = x \tag{14}$$

$$y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{15}$$

$x = 0$ giebt $$\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}39894 \tag{16}$$

$x = 1$, oder $\varepsilon = m$ giebt $$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2e\pi}} = 0{,}24197 \tag{17}$$

und die übrige Ausrechnung giebt:

$$\log y = 9.6009106 - 0.21714724\, x^2$$

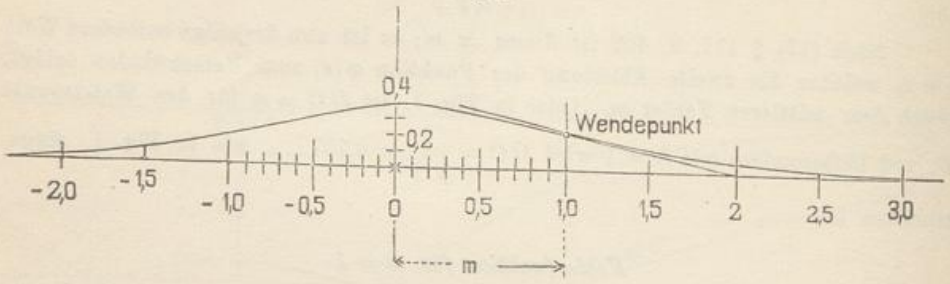
wonach folgende Tabelle berechnet wurde:

$\frac{\varepsilon}{m} = x$	$\varphi(x)$	$\frac{\varepsilon}{m} = x$	$\varphi(x)$
0,0	0,39894	0,7	0,31225
0,1	0,39695	0,8	0,28969
0,2	0,39104	0,9	0,26609
0,3	0,38139	1,0	0,24197
0,4	0,36827	1,5	0,12951
0,5	0,35206	2,0	0,05399
0,6	0,33322	3,0	0,00443
0,7	0,31225	∞	0,00000

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hiernach ist die folgende Fig. 2. aufgetragen, welche im Vergleich mit der früheren verzerrten Fig. 1. S. 436 nun die Fehlerfunktion sozusagen in natürlichen Verhältnissen darstellt. (Die Wendepunkts-Tangente ist leider im Holzschnitt schlecht ausgefallen.)

Fig. 2.



§ 113. Der wahrscheinliche Fehler.

Der besondere Wert $W\binom{a}{0} = 0{,}5$, welcher im vorigen § 112. bei der Tabelle von S. 434 betrachtet wurde, führt zur Einführung eines neuen Begriffs, nämlich des wahrscheinlichen Fehlers.

Wenn nämlich die Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen 0 und a den Wert 0,5 hat, so muss die Wahrscheinlichkeit für das Fallen zwischen die Grenzen a und ∞ ebenfalls $= 0{,}5$ sein, weil für das Fallen zwischen die äussersten Grenzen 0 und ∞ die Gesamtwahrscheinlichkeit $= 1$ ist. Bezeichnen wir also den besonderen Wert von a, für welchen dieses stattfindet, mit r, so haben wir:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = W\binom{\infty}{r}$$

Der dadurch bestimmte Wert r heisst der „*wahrscheinliche Fehler*". Derselbe stellt die Grenze vor, unter welcher ebenso viele kleinere Fehler zu erwarten sind, als grössere über ihr.

Der wahrscheinliche Fehler r wird mit Hilfe der Reihe (6) § 112. S. 434 dadurch bestimmt, dass jene Reihe den Wert $= \frac{1}{2}$ geben muss, wenn $a = r$ wird, d. h.:

$$W\binom{r}{0} = \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(r\,h - \frac{(r\,h)^3}{3\,.\,1!} + \frac{(r\,h)^5}{5\,.\,2!} - \frac{(r\,h)^7}{7\,.\,3!} + \frac{(r\,h)^9}{9\,.\,4!} - \cdots\right) \qquad (1)$$

da r hier immer zusammen mit h vorkommt, wird das Produkt $r\,h$ besonders bezeichnet, nämlich:

$$r\,h = \varrho \qquad (2)$$

und damit giebt vorstehende Gleichung folgende Bestimmung für ϱ:

$$\varrho - \frac{\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^5}{10} - \frac{\varrho^7}{42} + \frac{\varrho^9}{216} - \cdots = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots$$

Um diese Gleichung nach ϱ aufzulösen, hat man in erster Näherung:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}443113\ldots = p$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wobei lediglich zur Abkürzung vorübergehend das Zeichen p eingeführt ist. Indem dann auch in erster Näherung $\varrho^3 = p^3$ gesetzt wird, hat man in zweiter Näherung:

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3}$$

weiter $\varrho^3 = p^3 + 3\,p^2\,\frac{p^3}{3} + \ldots = p^3 + p^5$ und $\varrho^5 = p^5 + \ldots$

also $$\varrho - \left(\frac{p^3}{3} + \frac{p^5}{3}\right) + \frac{p^5}{10} = p$$

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3} + \frac{7}{30}p^5 + \ldots$$

So fortfahrend erhält man in nächster Näherungsstufe:

$$\varrho = p + \frac{p^3}{3} + \frac{7}{30}p^5 + \frac{127}{630}p^7 + \ldots$$

$$\varrho = 0{,}4431 + 0{,}0290 + 0{,}0040 + 0{,}0007$$
$$\varrho = 0{,}4768$$

Durch solche und ähnliche Näherungen, wozu namentlich auch die Benützung einer ausführlichen Tafel von der Art von § 112. S. 434 gehört, kann man den Wert ϱ mit beliebig weit getriebener Näherung berechnen. Nach Angabe von Gauss ist der Wert:

$$r\,h = \varrho = 0{,}476\,9363 \qquad log\,\varrho = 9.678\,4064 \tag{3}$$

(nach Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen, Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger, Tübingen 1816 S. 194).

Nachdem somit der Zahlenwert von ϱ genau bestimmt ist, verfolgen wir die Bedeutung desselben weiter und nehmen nochmals die Gleichung (2) vor, nämlich:

$$r\,h = \varrho \quad \text{oder} \quad h = \frac{\varrho}{r} \tag{4}$$

Man sieht hieraus, dass h umgekehrt proportional dem wahrscheinlichen Fehler r ist; man nennt deswegen h die *Genauigkeitszahl.* Setzt man $h = 1$, so wird $r = \varrho$, d. h. es ist ϱ der wahrscheinliche Fehler für die Genauigkeitszahl 1.

Durch Einführung von $\frac{\varrho}{r}$ an Stelle von h in die Reihe (6) § 112. S. 434 kann man dieselbe auf eine mehr anschauliche Form bringen. Es wird damit:

$$W\binom{a}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{a}{r}\varrho - \frac{1}{3.1!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^3 + \frac{1}{5.2!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^5 - \frac{1}{7.3!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^7 + \frac{1}{9.4!}\left(\frac{a}{r}\varrho\right)^9 - \ldots\right) \tag{5}$$

Das Verhältnis $\frac{a}{r}$ irgend eines Fehlers a zum wahrscheinlichen Fehler r bezeichnen wir mit n, und entsprechend nennen wir nun $W\binom{n\,r}{0}$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler zwischen den Grenzen 0 und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt, damit nimmt (5) folgende Form an:

$$W\binom{n\,r}{0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(n\varrho - \frac{(n\varrho)^3}{3.1!} + \frac{(n\varrho)^5}{5.2!} - \frac{(n\varrho)^7}{7.3!} + \frac{(n\varrho)^9}{9.4!} - \frac{(n\varrho)^{11}}{11.5!} + \ldots\right) \tag{6}$$

oder mit Ausrechnung der Coefficienten:

$$W\binom{n\,r}{0} = 0{,}538\,1650\,n - 0{,}040\,8051\,n^3 + 0{,}002\,7846\,n^5 - 0{,}000\,1508\,n^7 + 0{,}000\,0067\,n^9 - 0{,}000\,0002\,n^{11} + \ldots \tag{7}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Eine Kontrolle dieser Gleichung besteht für den besonderen Fall $n = 1$, denn mit $n = 1$ muss sie den Wert 0,5 geben, was bis auf 7 Decimalstellen hinreichend der Fall ist.

Folgendes sind die genaueren Coefficienten-Logarithmen für die Formel (7):

$$[9.730\,9154]\,n - [8.610\,7149]\,n^3 + [7.444\,7570]\,n^5 - [6.178\,428]\,n^7 + [4.824\,14]\,n^9 - [3.3949]\,n^{11} + \ldots \quad (8)$$

Im Anhang S. [20] haben wir eine Tafel der Funktionswerte (6) , (7) zusammengestellt, d. h. der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen Null und dem $n$fachen wahrscheinlichen Fehler liegt. Diese Tafel ist aus der Tafel II von Encke im Berl. astr. Jahrb. 1834, S. 309—312 mit Weglassung der 5ten Decimale gebildet. Ein Teil der Tafelwerte wurde direkt nach den Formeln (6) und (7) nachgerechnet, und einzelne Werte nach der Besselschen Originaltafel in dem Werk fundamenta astronomiae S. 36 und 37 bestimmt.

Die Enckesche Tafel ist auch abgedruckt und erläutert von Czuber, Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891, S. 414—416 und S. 189.

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus dem mittleren Fehler.

Wenn man die vorstehende Gleichung (4) mit der früheren Gleichung (17) § 111. S. 432 verbindet, so hat man

$$r\,h = \varrho \quad \text{und} \quad \frac{1}{h} = m\sqrt{2}$$

also

$$r = \varrho\sqrt{2}\,m \quad (9)$$

Dabei ist $\varrho\sqrt{2}$ ein konstanter Faktor, dessen Ausrechnung giebt:

$$\varrho\sqrt{2} = 0{,}674\,4898 \qquad log\,\varrho\sqrt{2} = 9.828\,9754 \quad (10)$$

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählen.

Hat man sich eine grössere Zahl gleichartiger wahrer Beobachtungsfehler auf irgend welche Art verschafft, und ordnet dieselben nach ihrer absoluten Grösse, so kann man denjenigen Grenzwert als wahrscheinlichen Fehler nehmen, welcher die Fehlerreihe so teilt, dass die Werte der einen Hälfte kleiner und die der anderen Hälfte grösser als er sind. Bei einer ungeraden Zahl von Fehlern nimmt man den in die Mitte fallenden Fehler und bei einer geraden Anzahl das Mittel der beiden in die Mitte fallenden Fehler als wahrscheinlichen Fehler. Wenn man z. B. die schon mehrfach benützten 18 Werte v von § 7. S. 23 nach ihrer Grösse ordnet, wie auf S. 426 geschehen ist, so hat man:

	Erste Hälfte		Mitte	Zweite Hälfte		
. . .	0,83	1,12		1,13	1,17	. . .

Die zwei in der Mitte liegenden Fehler sind 1,12 und 1,13, man nimmt also nach der gegebenen Regel 1,125 als wahrscheinlichen Fehler.

Offenbar ist diese Bestimmung eine sehr unsichere, denn es kommt dabei die absolute Grösse aller andern als gerade der in der Mitte liegenden Fehler nicht in Betracht. Die beste Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers ist immer diejenige nach (9), auf dem Wege über den mittleren Fehler m.

Der wahrscheinliche Fehler ist ohne das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit nicht zu bestimmen, während der mittlere Fehler ganz unabhängig von der Fehler-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wahrscheinlichkeit besteht, wie aus der Einführung desselben in § 4. S. 13—15 hervorgeht. Man hat früher als charakteristisches Genauigkeitsmaass häufig (z. B. in der Astronomie) den wahrscheinlichen Fehler angegeben, in der Geodäsie meist den mittleren Fehler, nach Anweisung von Gauss selbst, welcher in dem „Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher" I. S. 435 sagt: „Die sogenannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich, als von Hypothese abhängig, ganz proscribiert; man mag sie aber berechnen, indem man die mittleren Fehler mit 0,674 4897 multipliziert."

§ 114. Der durchschnittliche Fehler.

Auch dem schon in § 3. eingeführten, aber dann zurückgestellten durchschnittlichen Fehler können wir nun näher treten.

Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers ε ist nach § 111 aus (3) S. 427 u. (13) S. 430:

$$W(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

Unter n Fällen wird daher der Fehler ε vorkommen in der Anzahl $n\, W(\varepsilon)$ und die Summe aller Fehler von dem Betrag ε ist daher:

$$n\, W(\varepsilon)\, \varepsilon = n\, \varepsilon \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

das ist nun erst die Summe derjenigen Fehler, welche die besondere Grösse ε haben, und die Summe *aller* Fehler, welche *überhaupt* auftreten, ist daher:

$$[\varepsilon] = \int n\, \varepsilon \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

Hiezu ist aber noch eine Überlegung zu machen, wegen der Vorzeichen der ε und wegen der Integrations-Grenzen. Wenn $[\varepsilon]$ nur für positive ε gelten soll, so müssen die Grenzen 0 und ∞ für die Integration genommen werden und für negative ε wären die Grenzen 0 und $-\infty$. Will man die positiven ε *und* die negativen ε ohne Rücksicht auf das Vorzeichen summieren, so darf man nicht etwa die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nehmen, weil sonst das Integral = Null würde, man bekommt aber den richtigen Wert für alle $\pm\varepsilon$, wenn man das Integral zwischen 0 und ∞ nimmt und dann verdoppelt, also:

$$[\pm\varepsilon] = 2n \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon$$

oder

$$\frac{[\pm\varepsilon]}{n} = t = 2\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \varepsilon\, e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon \qquad (1)$$

Dabei ist mit t der durchschnittliche Fehler bezeichnet. Um dieses Integral auszurechnen, setzen wir $h\varepsilon = t$, also $\varepsilon = \frac{t}{h}$, $d\varepsilon = \frac{dt}{h}$, was die Grenzen unverändert lässt, also:

$$t = \frac{2h}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t\, e^{-t^2} dt \qquad (2)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hier ist das allgemeine Integral:

$$\int t\, e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \tag{3}$$

und mit Einführung der Grenzen 0 und ∞ wird das bestimmte Integral, (ebenso wie früher bei (10) § 111. S. 430):

$$\int_0^\infty t\, e^{-t^2} dt = +\frac{1}{2} \tag{4}$$

dieses giebt nach (2):

$$t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}$$

Es ist aber nach (17) § 111. S. 432:

$$\frac{1}{h} = m\sqrt{2}$$

also:

$$t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m = 0{,}79788\, m \tag{5}$$

und

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t = 1{,}2533\, t \tag{6}$$

Damit haben wir gefunden, dass der durchschnittliche Fehler t und der mittlere Fehler m in einem konstanten Verhältnis stehen, dass man also stets den einen aus dem andern berechnen kann.

Man kann davon insofern praktischen Gebrauch machen, als der durchschnittliche Fehler t bei gegebenen Elementen ε bequemer zu berechnen ist, als der mittlere Fehler m, indem man bei t das Quadrieren der ε erspart, hat man also den Durchschnittswert t berechnet, so braucht man ihn nur mit 1,2533 zu multiplizieren um auch m zu haben.

Diese Berechnung von m auf dem Umweg über t ist jedoch weniger zuverlässig, als die unmittelbare Berechnung von m aus den ε^2, und da die Quadrierung der ε bzw. der v einer Ausgleichung keine grosse Mühe ist, so hat die besprochene Berechnung von t und $m = 1{,}2533\ t$ fast nur bei flüchtigen und Überschlags-Genauigkeitsrechnungen praktische Bedeutung. Weiteres hierüber wird in § 124. verhandelt werden.

§ 115. Beziehungen zwischen dem mittleren, wahrscheinlichen und durchschnittlichen Fehler.

Nachdem im Bisherigen der wahrscheinliche und der mittlere Fehler, und dann der wahrscheinliche und der durchschnittliche Fehler zu einander in Beziehung gesetzt sind, können wir die gegenseitigen Beziehungen aller dieser 3 Fehler unter sich bilden.

Es gelten die Bezeichnungen:

Mittlerer Fehler $= m$
Wahrscheinlicher Fehler $= r$
Durchschnittlicher Fehler $= t$.

Wenn man n wahre Fehler ε hat, so ist:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \qquad t = \frac{[\pm\varepsilon]}{n} \tag{1}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zur gegenseitigen Verwandlung von m , r und t hat man die Zahlenwerte:

$$\left.\begin{array}{ll} \varrho = 0{,}476\,9363 & log = 9.678\,4603.8 \\ r = \varrho\sqrt{2}\; m = 0{,}684\,4898\, m & log = 9.828\,9753{\cdot}8 \\ r = \varrho\sqrt{\pi}\; t = 0{,}845\,3476\, t & log = 9.927\,0353{\cdot}1 \\ m = \dfrac{1}{\varrho\sqrt{2}}\, r = 1{,}482\,6021\, r & log = 0.171\,0246{\cdot}2 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} m = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, t = 1{,}253\,3141\, t & log = 0.098\,0599{\cdot}4 \\ t = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, m = 0{,}797\,8846\, m & log = 9.901\,9400{\cdot}6 \\ t = \dfrac{1}{\varrho\sqrt{\pi}}\, r = 1{,}182\,9372\, r & log = 0.072\,9616{\cdot}9 \end{array}\right\}$$

Dabei ist $\varrho = 0{,}476\,9363$ zu Grunde gelegt nach Gauss' „Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen" Art. 1 (s. o. § 113. S. 439).

Hat man statt der wahren Fehler ε nur scheinbare Fehler v zur Verfügung, so rechnet man bei *einer* Unbekannten nach § 7. S. 21 oder § 11. S. 39:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-1} \qquad (3)$$

und deswegen:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \qquad (4)$$

Um auch in der Berechnung von t die scheinbaren Fehler einzuführen, dient folgende Betrachtung:

Indem man nun annimmt, dass die v demselben Fehlergesetz folgen wie die ε, kann man schliessen, dass die einzelnen ε^2 durchschnittlich im Verhältnis $n:(n-1)$ grösser sind als die entsprechenden v^2, oder dass die einzelnen ε durchschnittlich grösser sind als die entsprechenden v im Verhältnis $\sqrt{n}:\sqrt{n-1}$, folglich kann man weiter schliessen:

$$[\pm\varepsilon] : [\pm v] = \sqrt{n} : \sqrt{n-1} \qquad (5)$$

Also der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm\varepsilon]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad (6)$$

und der mittlere Fehler nach (2):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t = 1{,}2533\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n(n-1)}} \qquad (7)$$

Dieses ist die Formel von *Peters*.

Bei mehr als *einer* Unbekannten, wir nehmen an bei u Unbekannten, und n Fehlergleichungen, wird nach (19) § 28. S. 87:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}} \qquad (8)$$

und um eine entsprechende Formel auch für t zu erlangen, machen wir (ähnlich wie bei (5)) die Annahme zu (8):

$$\varepsilon : v = \sqrt{n} : \sqrt{n-u}$$

$$[\pm\varepsilon] : [\pm v] = \sqrt{n} : \sqrt{n-u}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

also

$$t = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}} \tag{9}$$

und der mittlere Fehler:

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, t = 1{,}2533\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}} \tag{10}$$

Diese Formel ist von *Lüroth*.

Bei bedingten Beobachtungen mit r Bedingungsgleichungen ist $n - u = r$ zu setzen, also nach (8) § 38. S. 116:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \tag{11}$$

und entsprechend für (10):

$$m = 1{,}25331\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,r}} \tag{12}$$

Die Formeln (7) , (9) und (12) sind die gebräuchlichsten zur Berechnung mit den ersten Potenzen v scheinbarer Fehler statt der Quadrate v^2.

Die Peters sche Formel (7) hat aber den Übelstand, dass sie für den einfachen Fall zweier Beobachtungen, also $n = 2$ mit der strengen Formel (4) nicht übereinstimmt, denn wenn man 2 Beobachtungen mit der Differenz d annimmt, dann ist nach (4) mit $n = 2$:

$$m_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}70711\, d \tag{13}$$

dagegen nach (7):

$$m_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}}{\sqrt{2\,.\,1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}88623\, d \tag{14}$$

Man kann nun auf den Gedanken kommen, die Formeln (7) und (4) dadurch auf den Fall $n = 2$ zum Stimmen zu bringen, dass man in dem Nenner von (7) statt $n - 1$ einen vorerst unbestimmt gelassenen Wert $n - x$ setzt, und nachher x so bestimmt, dass für $n = 2$ beide Formeln (7) und (4) zusammen fallen. Man nimmt also zunächst nach (7):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-x)}} \tag{15}$$

und speziell für $n = 2$:

$$m_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\frac{d}{2} + \frac{d}{2}}{\sqrt{2\,(2-x)}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{d}{\sqrt{2\,(2-x)}}$$

und dieses der strengen Formel (13) gleichgesetzt giebt:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2\,(2-x)}} = 1$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst giebt:

$$x = \frac{4-\pi}{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Setzt man dann noch näherungsweise $\pi = 3$, so wird $x = \frac{1}{2}$ und damit wird (15):

$$m = \sqrt{\pi}\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} = 1{,}77245\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(2\,n-1)}} \qquad (16)$$

Fechner sche Formel.

Was im Vorstehenden von (5) bis (16) mitgeteilt ist, enthält meist keine strengen Entwicklungen, sondern nur Plausibelmachung der betreffenden Formeln. Folgendes sind die näheren Quellenangaben dazu:

Die Formel (7) oder (6), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-1)}}$ wurde zuerst von Peters im 44. Band der „Astr. Nachrichten" S. 29 (1856) aufgestellt.

Die erweiterte Formel (9), $t = \frac{[\pm v]}{\sqrt{n\,(n-u)}}$ wurde von Lüroth im 73. Bd. (1869) S. 187 der „Astr. Nachrichten" gegeben.

Helmert hat diese Sache genauer behandelt in „Astr. Nachr." 85. Band (1875) S. 353—366 und 88. Band (1876) S. 113—132, und hat dabei gefunden, dass nur die Peters sche Formel (7) für *eine* Unbekannte streng richtig ist, während die Formel (10) für u Unbekannte, mit dem Nenner $\sqrt{n\,(n-u)}$ nur etwa als eine Näherungsformel zu betrachten ist.

Hier sind noch zwei Abhandlungen von Helmert zu zitieren in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph." 1875 S. 300—303: „Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler" und 1876 S. 192 bis 218: „Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen."

Was endlish die Fechner sche Formel (16) betrifft, so ist dieselbe von Fechner entwickelt in Poggendorff's „Annalen der Physik", Jubelband, 1874, S. 66 bis 81, und eine kritische Untersuchung dieser Formel ist von Helmert im 88. Band der Astr. Nachrichten (1876) S. 120—127, gegeben worden. Hiernach ist die Fechner sche Formel die beste derjenigen Formeln, welche den wahrscheinlichen oder mittleren Fehler statt aus der Quadratsumme $[v^2]$, aus der absoluten Summe $[\pm v]$ der übrigbleibenden Fehler v berechnen.

Alle Formeln mit $[\pm v]$ sind von der Annahme über das Fehlerwahrscheinlichkeitsgesetz abhängig und auch abgesehen davon weniger genau als die Formeln mit den Quadraten, nämlich Formel (3) und (8), letzteres wird allerdings erst später in § 117 bewiesen werden, mag aber jetzt schon (zusammen mit der Frage der Abhängigkeit vom Fehlergesetz) zu der Bemerkung führen, dass alle die Formeln mit $[\pm v]$ nur insofern Interesse verdienen, als man damit das Ausrechnen der Quadrate v^2, d. h. eine verhältnismässig geringe Arbeit, sparen kann. —

§ 116. Verschiedene Fehler-Potenzsummen.

Dieselbe Überlegung, welche am Anfang von § 114. zu der Formel (1) S. 441 mit der Summe $[\pm \varepsilon]$ der ersten Potenzen wahrer Fehler ε geführt hat, kann auch angewendet werden auf andere Potenzen und giebt weiter auf 2te, 4te u. s. w. Potenzen angewendet:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^2\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon \qquad (1)$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^4\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon \qquad (2)$$

allgemein

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varepsilon^p\, e^{-h^2\varepsilon^2}\, d\varepsilon \qquad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir wollen hievon zunächst das quadratische Mittel nach (1) behandeln, obgleich wir hiebei nichts neues finden können (denn es muss $m^2 = m^2$ herauskommen). Zunächst wird mit $h\varepsilon = t$ aus (1):

$$m^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt \tag{4}$$

Teilweise Integration giebt:

$$\int t\, t e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} t e^{-t^2} + \frac{1}{2} \int e^{-t^2} dt \tag{5}$$

Von (11) § 111. S. 430 wissen wir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \quad \text{oder} \quad \int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{6}$$

Wenn man daher die Grenzen 0 und ∞ in (5) einsetzt, so wird der erste Teil von (5), nämlich $\frac{t}{2} e^{-t^2} = \frac{t}{2\, e^{t^2}}$ beidemale $= 0$, was man für $t = \infty$ nötigenfalls durch Anwendung der Reihe für e^{t^2} zeigen kann; im Ganzen hat man also aus (5) und (6):

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = 0 + \frac{1}{4}\sqrt{\pi} \tag{7}$$

also nach (4):

$$m^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \frac{1}{4}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2h^2} \tag{8}$$

Nach (17) § 111. S. 432 ist dieses aber:

$$m^2 = \frac{1}{2h^2} = m^2 \tag{9}$$

d. h. wir haben hier nichts neues, sondern nur eine Probe unserer Entwicklung gefunden.

Um zu den 4ten Potenzen überzugehen, nehmen wir von (2) mit $\varepsilon h = t$:

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2}{h^4\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt \tag{10}$$

durch teilweises Integrieren hat man:

$$\int t^3 t e^{-t^2} dt = -\frac{t^3}{2} e^{-t^2} + \frac{3}{2} \int t^2 e^{-t^2} dt \tag{11}$$

Setzt man hier die Grenzen 0 und ∞ ein, so wird der erste Teil $t^3 e^{-t^2}$ beidemal $= 0$ (was ebenso wie oben bei (5) und (7) einzusehen ist) und der zweite Teil von (11) giebt mit den Grenzen 0 und ∞ das schon oben bei (6) gefundene Integral; man hat also im Ganzen aus (10) und (11):

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = \frac{2}{h^4\sqrt{\pi}} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4h^4} \tag{12}$$

Mit Rücksicht auf $h^2 = 1 : 2m^2$ in (9) haben wir also nun die Mittelwerte der ersten, zweiten und vierten Potenzen als Zusammenfassung:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\frac{[\pm\varepsilon]}{n} = t = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \text{ oder } = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m \tag{13}$$

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2 = \frac{1}{2h} \quad , \quad = m^2 \tag{14}$$

$$\frac{[\varepsilon^4]}{n} = r^4 = \frac{3}{4h^4} \quad , \quad = 3m^4 \tag{15}$$

In gleicher Weise kann man alle Potenzsummen auswerten, denn eine allmähliche Rekursion wie bei (11) führt bei geraden Potenzen auf das Integral (6) und bei ungeraden Potenzen auf das leicht anzugebende Integral (4) § 114. S. 442; man kann also alle beliebigen Potenzsummen allmählich auf $[\varepsilon^2]$ oder $[\pm\varepsilon]$ zurückführen.

Die allgemeine Rekursionsformel ist:

$$\frac{[\varepsilon^{p+2}]}{n} = \frac{p+1}{2h^2}\frac{[\varepsilon^p]}{n} \text{ oder } = (p+1)\,m^2\frac{[\varepsilon^p]}{n}$$

Der allgemeine Ausdruck für die p^{ten} Potenzen wird:

wenn p ungerade:

$$\frac{[\pm\varepsilon^p]}{n} = \frac{1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}}{h^p}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{[\pm\varepsilon^p]}{n} = \frac{(m\sqrt{2})^p}{\sqrt{\pi}}\,1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}$$

wenn p gerade:

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = \frac{1.3.5\ldots(p-1)}{(h\sqrt{2})^p} \tag{16}$$

$$\frac{[\varepsilon^p]}{n} = m^p\,1.3.5\ldots(p-1) \tag{17}$$

Die allgemeinen Formeln (16), (17) enthalten die besonderen Fälle (13)—(15) in sich, und geben noch weiter angewendet das Folgende:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{[\pm\varepsilon]}{n} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m & \frac{[\varepsilon^2]}{n} &= m^2\\
\frac{[\pm\varepsilon^3]}{n} &= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m^3 & \frac{[\varepsilon^4]}{n} &= 3m^4\\
\frac{[\pm\varepsilon^5]}{n} &= 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m^5 & \frac{[\varepsilon^6]}{n} &= 15m^6\\
\frac{[\pm\varepsilon^7]}{n} &= 48\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,m^7 & \frac{[\varepsilon^8]}{n} &= 105m^8
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

. . . .

Umgekehrt können diese Formeln dazu dienen, um auf dem Umwege aus irgend welchen Potenzsummen den mittleren Fehler zu berechnen, was z. B. für die 4^{ten} Potenzen geben würde:

$$m = \sqrt[4]{\frac{[\varepsilon^4]}{3n}} \tag{19}$$

Indessen zur praktischen Anwendung für irgend welche Fehlerberechnungen sind nur die ersten und die zweiten Potenzen (ε und ε^2) geeignet.

§ 117. Mittlerer Fehler des mittleren Fehlers.

Das mittlere Fehlerquadrat m^2 ist nach der im Anfang § 4. S. 13 gegebenen Definition ein Mittelwert aus einer Anzahl von wahren Einzelfehlerquadraten ε^2, und es ist für die Zuverlässigkeit einer solchen Ausrechnung von ε^2 durchaus nicht gleich-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gültig, ob mehr oder weniger einzelne ε^2 zur Verfügung stehen, sondern ein m^2 aus nur zwei oder drei einzelnen ε^2 wird zweifellos viel unsicherer sein als eine Mittelbildung aus hunderten von ε^2, gerade so wie ja auch das arithmetische Mittel x aus mehreren Messungen l weniger oder mehr zuverlässig ist, je nachdem wenige oder viele Messungen l vorhanden sind (vgl. § 7. Gleichung (6) S. 21 und die Kurve S. 23).

Dazu kommt noch eine zweite Frage, betreffend die Art und Weise der Bestimmung des mittleren Fehlers. Wir haben nämlich in § 114. gesehen, dass man den mittleren Fehler m auch auf dem bequemen Wege über den durchschnittlichen Fehler t berechnen kann, nach der Formel (6) S. 442 $m = \varrho \sqrt{\pi}\, t = 1{,}2533\, t$, ja wir haben am Schlusse von § 116. S. 447 sogar gesehen, dass man den mittleren Fehler m auch auf dem Umweg über die 3ten, 4ten u. s. w. Potenzen wahrer Fehler ε berechnen könnte, und es entsteht daher die Frage nach der Zuverlässigkeit dieser verschiedenen Arten der Bestimmung von m.

Indem wir dieser Frage näher treten, bleiben wir zunächst bei der Annahme stehen, man sei im Besitze einer gewissen Anzahl n von *wahren* Fehlern ε, indem der Übergang zu scheinbaren Fehlern v erst später in § 118. vorgenommen werden soll.

Zur Bezeichnung mittlerer Fehler wollen wir das Zeichen m wie ein Funktionszeichen anwenden, d. h. es soll z. B. der mittlere Fehler irgend eine Grösse x mit $m(x)$ bezeichnet werden, ähnlich wie $f(x)$ eine Funktion von x bedeutet also

$$m(x) = \text{mittlerer Fehler von } x \tag{1}$$

Nach diesen Vorbemerkungen beginnen wir mit der Rechnungsart der ersten Potenzen ε.

Der durchschnittliche Fehler wird berechnet aus der Gleichung:

$$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots \varepsilon_n}{n} = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} \tag{2}$$

Wenn wir nach dem mittleren Fehler dieses t fragen, so handelt es sich um die Abweichung des t von demjenigen theoretischen Werte t_0, den man erhalten würde, wenn nicht bloss n Zufallswerte $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$, sondern unendlich viele Werte ε vorhanden wären. Einen solchen Wert t_0 wollen wir den wahren Wert nennen, also $t_0 - \varepsilon_1$, $t_0 - \varepsilon_2$ u. s. w. die wahren Fehler der zufällig beobachteten $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots$ und dann ist das mittlere Fehlerquadrat eines einzelnen ε:

$$(m(\varepsilon))^2 = \frac{(t_0 - \varepsilon_1)^2 + (t_0 - \varepsilon_2)^2 + \ldots (t_0 - \varepsilon_n)^2}{n} \tag{3}$$

also das mittlere Fehlerquadrat von t, insofern t ein arithmetisches Mittel aus n einzelnen ε ist, nach (6) § 7. S. 21:

$$(m(t))^2 = \frac{(m(\varepsilon))^2}{n} = \frac{(t_0 - \varepsilon_1)^2 + (t_0 - \varepsilon_2)^2 + \ldots (t_0 - \varepsilon_n)^2}{n^2} \tag{4}$$

Die Ausrechnung der Quadrate im Zähler, wobei alle ε nur absolut (z. B. alle ε positiv) gezählt werden, giebt:

$$(m(t))^2 = \frac{n t_0^2 - 2 t_0 [\pm \varepsilon] + [\varepsilon^2]}{n^2} = \frac{t_0^2}{n}\left(1 - 2\frac{[\pm \varepsilon]}{n}\frac{1}{t_0} + \frac{[\varepsilon^2]}{n}\frac{1}{t_0^2}\right)$$

Hier ist $\frac{[\pm \varepsilon]}{n} = t$ und $\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2$ also:

$$(m(t))^2 = \frac{t_0^2}{n}\left(1 - 2\frac{t}{t_0} + \frac{m^2}{t_0^2}\right) \tag{5}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Da aber nicht bekannt ist, ob t_0 grösser oder kleiner als t ist, darf man hier $t = t_0$ nehmen und da ferner nach (6) § 114. S. 442, $\frac{m^2}{t_0^2} = \frac{m^2}{t^2} = \frac{\pi}{2}$, hat man aus (5):

$$(m\,(t))^2 = \frac{t^2}{n}\left(1 - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{t^2}{n}\left(\frac{\pi - 2}{2}\right)$$

daraus die Wurzel gezogen:

$$m\,(t) = \pm\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1} \tag{6}$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Bestimmung von t aus dem Mittel aller $\pm\varepsilon$, wir können also schreiben:

$$t = \frac{[\pm\varepsilon]}{n} \pm \frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$$

oder

$$t = \frac{[\pm\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \tag{7}$$

Wenn man von dem durchschnittlichen Fehler zum mittleren Fehler übergeht, nach (6) § 114. S. 442 mit $m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,t$, so erhält man aus (7):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{[\pm\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \tag{8}$$

oder

$$m = 1{,}2533\,\frac{[\pm\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{0{,}7555}{\sqrt{n}}\right) \tag{9}$$

In gleicher Weise, wie wir hier den mittleren Fehler des durchschnittlichen Fehlers bestimmt haben, kann man auch den mittleren Fehler des mittleren Fehlers selbst bestimmen, wozu wir haben:

$$m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots \varepsilon_n^2}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$$

Der wahre Wert von m^2 d. h. derjenige, welchen man bei unendlich vielen ε $(n = \infty)$ erhalten würde, sei m_0^2, dann wird der mittlere Fehler $m\,(\varepsilon^2)$ eines einzelnen ε^2 bestimmt durch:

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = \frac{(m_0^2 - \varepsilon_1^2)^2 + (m_0^2 - \varepsilon_2^2)^2 + \ldots (m_0^2 - \varepsilon_n^2)^2}{n}$$

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = \frac{n\,m_0^4 - 2\,m_0^2\,[\varepsilon^2] + [\varepsilon^4]}{n} = m_0^4\left(1 - \frac{2\,[\varepsilon^2]}{n\,m_0^2} + \frac{[\varepsilon^4]}{n\,m_0^4}\right) \tag{10}$$

Man setzt nun wieder (ähnlich wie bei (5)):

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m_0^2 \text{ und nach (15) § 116. S. 447 } \frac{[\varepsilon^4]}{n} = 3\,m^4$$

also, indem die Unterscheidung zwischen m_0 und m nicht mehr nötig ist, aus (10):

$$(m\,(\varepsilon^2))^2 = m^4\,(1 - 2 + 3) = 2\,m^4 \tag{11}$$

oder

$$m\,(\varepsilon^2) = m^2\sqrt{2}$$

Dieses ist der mittere Fehler eines einzelnen ε^2, und da m^2 als arithmetisches Mittel

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

aus n solcher ε^2 erhalten wird, muss man nach der Regel (6) § 7. S. 21 des arithmetischen Mittels den mittleren Fehler von m^2 so berechnen:

$$m(m^2) = \frac{m(\varepsilon^2)}{\sqrt{n}} = m^2\sqrt{\frac{2}{n}} \tag{12}$$

Dieses ist der mittlere Fehler der Bestimmung von m^2 aus der Quadratsumme aller ε^2, also:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} \pm m^2\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{[\varepsilon^2]}{n}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

Um zu m selbst überzugehen, betrachten wir den mittleren Fehler stets als verhältnismässig klein, und nehmen daher:

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{2}{n}}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2n}}\right) \tag{13}$$

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{,}70710}{\sqrt{n}}\right) \tag{14}$$

Vergleicht man dieses mit (8) oder (9), so findet man, dass die Berechnung von m aus den Quadraten ε^2 günstiger ist als die Berechnung aus den ε selbst und zwar im Verhältnis 0,7555 : 0,7071.

Die Fortsetzung dieser Untersuchungen auf höhere Potenzen, welche keine praktische Bedeutung mehr haben, giebt folgende Reihe, in welche wir des Zusammenhangs wegen auch die beiden Werte (9) und (14) für erste und zweite Potenzen nochmals aufnehmen:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad m = 1{,}2533\,\frac{[\pm\varepsilon]}{n}\left(1 \pm \frac{0{,}7555}{\sqrt{n}}\right)\\
&2)\quad m = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n}}\right)\\
&3)\quad m = 0{,}8557\sqrt{\frac{[\pm\varepsilon^3]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{,}7371}{\sqrt{n}}\right)\\
&4)\quad m = 0{,}7598\sqrt{\frac{[\varepsilon^4]}{n}}\left(1 \pm \frac{0{,}8165}{\sqrt{n}}\right)\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&9)\quad m = 0{,}5293\sqrt{\frac{[\pm\varepsilon^9]}{n}}\left(1 \pm \frac{2{,}1408}{\sqrt{n}}\right)\\
&10)\quad m = 0{,}5040\sqrt{\frac{[\varepsilon^{10}]}{n}}\left(1 \pm \frac{2{,}7058}{\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Die günstigste Bestimmung von m ist die Bestimmung aus den Quadraten ε^2, denn diese Bestimmung 2) hat den kleinsten mittleren Fehler, nämlich 0,7071 m. Die Bestimmung aus den 10ten Potenzen der ε hat nach 10) den nahezu 4mal grösseren Fehler 2,7058 m.

Hiezu gehört das Citat der Quellenschrift von Gauss, Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen (s. unsere Einleitung S. 3 unten), auch Encke, „Berl. Astr. Jahrb. für 1834", S. 289 bis 293, wobei aber ja nicht zu übersehen ist, dass Gauss und Encke durchaus mit *wahrscheinlichen* Fehlern rechnen, sowohl bei den Potenzmitteln, als auch bei deren Unsicherheiten, sie geben also stets den wahrscheinlichen Fehler mit seinem wahrscheinlichen Fehler, während unsere Rechnung im Vorstehenden sich stets auf *mittlere* Fehler und mittlere Fehler der mittleren Fehler beziehen; es sind daher alle unsere Coefficienten im Verhältnis $1 : \varrho\sqrt{2}$ oder 1 : 0,6745 grösser als die Coefficienten nach Gauss-Encke.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 118. Scheinbare Fehler v statt wahrer Fehler ε.

Eine weitergehende Frage ist nun, in welchem Maasse die Zuverlässigkeit einer Bestimmung des mittleren Fehlers sich vermindert, wenn man nicht wie bisher angenommen, wahre Fehler ε, sondern nur die scheinbaren Fehler v, (welche bei einer Ausgleichung übrig bleiben), zur Verfügung hat.

Wenn die Ausgleichung n Beobachtungen und u Unbekannte hatte, so berechnet man aus der Quadratsumme $[v^2]$ der scheinbaren Fehler bekanntlich das mittlere Fehlerquadrat nach der Formel:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-u} \tag{1}$$

Wir haben diese wichtige Formel in (19) § 28. S. 87 entwickelt, auch in § 86. bei (19) S. 322 noch eine zweite Begründung für den Nenner $n-u$ kurz angedeutet. Aus (1) hat man mit $u=1$:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n-1} \tag{1a}$$

Nach (12) § 27. S. 86 ist die Beziehung zwischen $[v^2]$ und $[\varepsilon^2]$:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon]^2}{[b\,b.1]} - \frac{[c\,\varepsilon]^2}{[c\,c.2]} - \ldots \tag{2}$$

Bleiben wir zunächst bei *einer* Unbekannten stehen, so wird mit $u=1$ aus (2) erhalten:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} = \frac{[\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n}}{n-1} \text{ für } u=1 \tag{3}$$

Wenn nun $m_0{}^2$ der wahre Wert von m^2, d. h. derjenige Wert ist, der bei unendlich vielen ε (also $n=\infty$) erhalten würde, so stellt $m^2 - m_0{}^2$ den Fehler von m^2 in einem einzelnen Falle vor, und wenn wir den Mittelwert von $(m^2-m_0{}^2)^2$ wüssten, so hätten wir damit das Quadrat des mittleren Fehlers von m^2, d. h. in unserer Bezeichnungsart nach (1) S. 418:

$$(m\,(m^2))^2 = \text{Mittelwert von } (m^2 - m_0{}^2)^2 \tag{4}$$

$$= \quad " \quad " \left(\frac{[\varepsilon^2] - \dfrac{[\varepsilon]^2}{n}}{n-1} - m_0{}^2\right)^2 \tag{4a}$$

$$= \text{Mittelwert von } \left(\frac{1}{n\,(n-1)}\right)^2 \left(n\,[\varepsilon^2] - [\varepsilon^2] - n\,(n-1)\,m_0{}^2\right)^2$$

$$= \quad " \quad " \left(\frac{1}{n\,(n-1)}\right)^2 \left(\begin{array}{r} n^2\,[\varepsilon^2]^2 - 2\,n\,[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2 - 2\,n^2\,(n-1)\,[\varepsilon^2]\,m_0{}^2 \\ + [\varepsilon]^4 + 2\,n\,(n-1)\,[\varepsilon]^2\,m_0{}^2 \\ + n^2\,(n-1)^2\,m_0{}^4 \end{array}\right) \tag{5}$$

Von diesen 6 Gliedern muss man nun einzeln die Mittelwerte bestimmen, wozu wir bereits manche Vorbereitungen haben. Jedenfalls ist algebraisch:

$$[\varepsilon^2]^2 = (\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2 + \ldots)^2 = (\varepsilon_1{}^4 + \varepsilon_2{}^4 + \ldots) + 2\,(\varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + \varepsilon_1{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + \ldots) \tag{6}$$

Die Summe der 4ten Potenzen der Fehler hat man in (15) § 116. S. 447 gefunden:

$$[\varepsilon^4] = 3\,n\,m_0{}^4 \tag{7}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und die Summe aller $\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \ldots$ d. h. mit Ausscheidung aller $\varepsilon_1^2 \varepsilon_1^2 \ldots$, welche in (7) enthalten sind, lässt sich leicht abzählen und giebt im Mittel:

$$\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_3^2 + \ldots = n(n-1)\, m_0^2 m_0^2 = n(n-1)\, m_0^4 \tag{8}$$

Es wird also aus (6) mit (7) und (8):

$$[\varepsilon^2]^2 = (3n + n(n-1))\, m_0^4 = n(n+2)\, m_0^4 \tag{9}$$

damit hat man das erste Glied der Klammer von (5).

Ähnlich entwickelt man auch das zweite Glied von (5), nämlich:

$$[\varepsilon^2][\varepsilon]^2 = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots)^2$$
$$= (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots)(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 \ldots)$$

Da aber der Mittelwert einer Gruppe ungerader Potenzen, wegen des wechselnden Vorzeichens der ε, verschwindet, so wird auch wie bei (9):

$$[\varepsilon^2][\varepsilon]^2 = [\varepsilon^2][\varepsilon^2] = [\varepsilon^2]^2 = (n^2 + 2n)\, m_0^4 \tag{10}$$

Von den übrigen Gliedern in (5) wollen wir nur noch $[\varepsilon]^4$ ausführlich darlegen, nämlich:

$$[\varepsilon]^4 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots)^4 = (\varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 + \ldots) + (6\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 + \ldots) + (4\varepsilon_1 \varepsilon_2^3 + \ldots)$$

da aber die ungeraden Potenzen verschwinden, bleibt nur:

$$[\varepsilon^4] = 3n\, m_0^4 + 3n(n-1)\, m_0^4 = 3n^2 m_0^4 \tag{11}$$

Wenn man in dieser Weise alle Glieder von (5) behandelt, so bekommt man:

$$(m(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^2 \left\{\begin{array}{r} n^2(n^2+2n)\, m_0^4 - 2n(n^2+2n)\, m_0^4 - 2n^3(n-1)\, m_0^4 \\ + 3n^2 m_0^4 + 2n^2(n-1)\, m_0^4 \\ + n^2(n-1)^2 m_0^4 \end{array}\right\} \tag{12}$$

$$(m(m^2))^2 = \left(\frac{1}{n(n-1)}\right)^2 \left(2n^3 m_0^4 - 2n^2 m_0^4\right) = \frac{2\, m_0^4}{n-1}$$

$$m(m^2) = m_0^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} \tag{13}$$

Dieses ist der mittlere Fehler von m^2, insofern m^2 nach (1a) berechnet ist, also aus (1a) und (13) zusammen:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \pm m^2 \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \frac{[v^2]}{n-1}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) \tag{14}$$

Wenn $m(m^2)$ verhältnismässig klein ist gegen m^2 selbst, kann man auch schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2(n-1)}}\right) = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n-1}}\right) \tag{15}$$

Dieses unterscheidet sich von dem früheren (14) § 117. S. 450 nur dadurch, dass nun überall v an Stelle von ε und $n-1$ an Stelle von n steht.

Übergang zu zwei und mehr Unbekannten.

Die bisherige Betrachtung von (3) bis (13) bezog sich auf *eine* Unbekannte, wie sie im arithmetischen Mittel vorkommt, wobei auch der Fall ungleich genauer Einzelbeobachtungen (§ 8.) und der Fall von Coefficienten a wie bei (10) § 12. S. 43 mit inbegriffen ist, insofern man dafür Reduktion auf gleiche Gewichte, also $\varepsilon\sqrt{p}$ u. s. w. annimmt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auch bei *zwei* Unbekannten lässt sich die vorhergehende Behandlungsweise noch im Wesentlichen beibehalten. Nach (12) § 27. S. 86 ist für 2 Unbekannte:

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \text{ und } m^2 = \frac{[v^2]}{n-2} \tag{16}$$

Wenn also m_0^2 das wahre mittlere Fehlerquadrat ist, und mit $m\,(m^2)$ der mittlere Fehler von m^2 bezeichnet wird, so hat man:

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \text{Mittelwert von } \left(\frac{[\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}}{n-2} - m_0^2\right)^2$$

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \text{Mittelwert von } \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \left([\varepsilon^2] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - (n-2)\,m_0^2\right)^2 \tag{17}$$

$$\Big(m(m^2)\Big)^2 = \text{Mittelwert von} \left(\frac{1}{n-2}\right)^2 \left\{\begin{array}{l} [\varepsilon^2]^2 - 2\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}[\varepsilon^2] - 2\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[b\,b.1]}[\varepsilon^2] - 2\,(n-2)\,[\varepsilon^2]\,m_0^2 \\ \quad + \frac{[a\,\varepsilon]^4}{[aa]^2} + 2\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}\frac{[b\varepsilon.1]^2}{[bb.1]} + 2\,(n-2)\frac{[a\varepsilon]^2}{[aa]}m_0^2 \\ \quad + \frac{[b\,\varepsilon.1]^4}{[bb.1]^2} + 2\,(n-2)\frac{[b\,\varepsilon.1]^2}{[b\,b.1]}m_0^2 \\ \quad + (n-2)^2\,m_0^4 \end{array}\right\} \tag{18}$$

Von den 10 Gliedern, welche in dieser Klammer auftreten, sind die Mittelwerte einzeln zu bilden, und man sieht bald, dass für alle diejenigen Glieder, welche kein $[b\,\varepsilon\,.\,1]$ enthalten, die früheren Betrachtungen (6)—(10), sowie das frühere (16) S. 86 u. s. w. wieder gebraucht werden können, und was die Glieder mit $[b\,\varepsilon\,.\,1]$ betrifft, so braucht man nur dieselben in $[b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,\varepsilon]$ aufzulösen, um alles auf $[a\,\varepsilon]$, $[b\,\varepsilon]$ u. s. w. zurückzuführen.

Die Ausführung ist umständlich, sie giebt:

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \left(\frac{m_0^2}{n-2}\right)^2 \left\{\begin{array}{llll} +\,n\,(n+2) & -\,2\,(n+2) & -\,2\,(n+2) & -\,2\,(n-2)\,n \\ +\,3 & +\,2 & +\,2\,(n-2) & \\ & +\,3 & +\,2\,(n-2) & \\ & & +\quad (n-2)^2 & \end{array}\right\}$$

$$\Big(m\,(m^2)\Big)^2 = \left(\frac{m_0^2}{n-2}\right)^2 \Big\{2\,n-4\Big\} = 2\,\frac{m_0^4}{n-2}$$

und da man nun m^2 und m_0^2 nicht mehr zu unterscheiden braucht:

$$m\,(m^2) = m^2\sqrt{\frac{2}{n-2}}$$

oder in anderer Form:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{n-2}}\right)$$

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-2)}}\right) \tag{19}$$

Die Ausdehnung auf mehr als 2 Unbekannte, allgemein u Unbekannte wird geben:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-u}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,(n-u)}}\right) \tag{20}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ohne auch dieses noch durchzuführen, wollen wir nur bemerken, dass man dazu verschiedene Wege einschlagen kann, etwa mit Einführung der $b'\ s'$ in m, wie in (14) § 28. S. 86, wobei aber die Bildung der Mittelwerte nicht so einfach ist wie dort.

Die erste Quelle der Sache ist Art. 39—40 der Gauss schen theoria combinationis (vgl. S. 4), wobei die Coefficienten $[a\ a]$ u. s. w. unseres § 28. S. 89 unten gebraucht werden. Gauss behandelt die Aufgabe zunächst ohne eine bestimmte Annahme über das Fehlergesetz und findet alle auftretenden Mittelwerte ausdrückbar in m_0^2 und in ν^4 in dem Sinne von (15) § 116. S. 447. Es wird also bei unbestimmtem Fehlergesetz zunächst *nicht* $\nu^4 = 3\,m^4$ gesetzt, sondern ν^4 unbestimmt gelassen. Trotzdem lässt sich das gesuchte m (m^2) in gewisse Grenzen einschliessen, welche auch ohne die Kenntnis von ν^4 zu einer plausiblen Schätzung von m (m^2) führen, und dann mit $\nu^4 = 3\,m^4$ zu dem Schlussergebnis führen, welches in unserer Gleichung (20) enthalten ist. Es ist auch die entsprechende Bearbeitung aus Helmert, „Ausgleichungsrechnung nach d. M. d. kl. Q. 1872", S. 111—113 zu zitieren, mit *einer* Unbekannten, wobei unsere Gleichung (4 a) in der Form auftritt $\left(\frac{[\varepsilon^2] - [a\,\varepsilon]\,[\alpha\,\varepsilon]}{n-1} - m^2\right)^2$.

Wenn man die Gleichung (20) auf den Fall bedingter Beobachtungen mit r unabhängigen Bedingungsgleichungen anwendet, z. B. Triangulierung mit r Bedingungsgleichungen, so wird $n - u = r$ also

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}\left\{1 \pm \sqrt{\frac{1}{2\,r}}\right\} \qquad (21)$$

Nehmen wir hiezu beispielshalber das belgisch-deutsche Verbindungsnetz von § 83., so haben wir nach S. 298 die Summe $[v^2\,p] = 4{,}2$, also in unserem Sinne zu (21):

$$[v^2] = 4{,}2 \text{ und } r = 11$$

also

$$m = \sqrt{\frac{4{,}2}{11}}\left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{22}}\right)$$

$$m = \pm\,0{,}618''\,(1 \pm 0{,}213) = \pm\,(0{,}618'' \pm 0{,}132'')$$

d. h. der mittlere Fehler $0{,}618''$ ist aus jener Triangulierung hervorgegangen mit einer Unsicherheit von rund 21 % seines eigenen Betrags oder $0{,}13''$.

§ 119. Vergleichung des Fehlergesetzes mit Beobachtungsreihen.

Um das auf rein theoretischem Wege gefundene Fehlerverteilungs-Gesetz von § 111., nämlich $\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\varepsilon^2}$ mit der Erfahrung zu vergleichen, muss man sich eine Reihe wahrer Beobachtungsfehler oder eine Reihe solcher zufälliger Ereignisse verschaffen, von denen man annehmen kann, dass sie gleichen Bedingungen unterworfen sind, wie Beobachtungsfehler.

Als solche Zufallsreihe wollen wir die Verteilung der Nullen in einer Logarithmentafel nehmen.

Wir haben nach Vega-Hülsse (Leipzig 1840) gezählt, und zwar nach S. 2—185, wo die 7 stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 99999 stehen. Dieselben Logarithmen stehen natürlich auch in Vega-Bremiker, und in Schrön in gleicher Anordnung, nur mit dem kleinen Unterschied bei Vega-Bremiker, dass in jeder Kolumne nicht 50, sondern 51 Werte stehen, weil am Fusse die Zahl von der folgenden Seite wiederholt steht. Sehen wir davon ab, so haben wir in jeder Kolumne 50 Logarithmen, und die Zählung erstreckte sich auf die Zahl der Nullen in der 6ten Stelle, wie folgendes Beispiel einer Seitenabzählung zeigt:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Zählung der Nullen in der 6ten Logarithmenstelle.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2000	0300	0517	0734	0951	1168	1386	1603	1820	2037	2254
2001	2471	2688	2905	3122	3339	3556	3773	3990	4207	4424
2002	4641	4858	5075	5291	5508	5725	5942	6159	6376	6593
2003	6809	7026	7243	7460	7677	7893	8110	8327	8544	8760
2004	8977	9194	9411	9627	9844	0061	0277	0494	0711	0927
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2045	6933	7145	7358	7570	7783	7995	8207	8419	8632	8844
2046	9056	9269	9481	9693	9905	0117	0330	0542	0754	0966
2047	1178	1391	1603	1815	2027	2239	2451	2663	2875	3087
2048	3300	3512	3724	3936	4148	4360	4572	4784	4996	5208
2049	5420	5632	5843	6055	6267	6479	6691	6903	7115	7327
Summe	9	1	7	6	6	4	8	5	6	3

Es wurden 1800 solcher Spalten mit zusammen 90 000 Ziffern in Hinsicht auf Nullen durchgezählt.

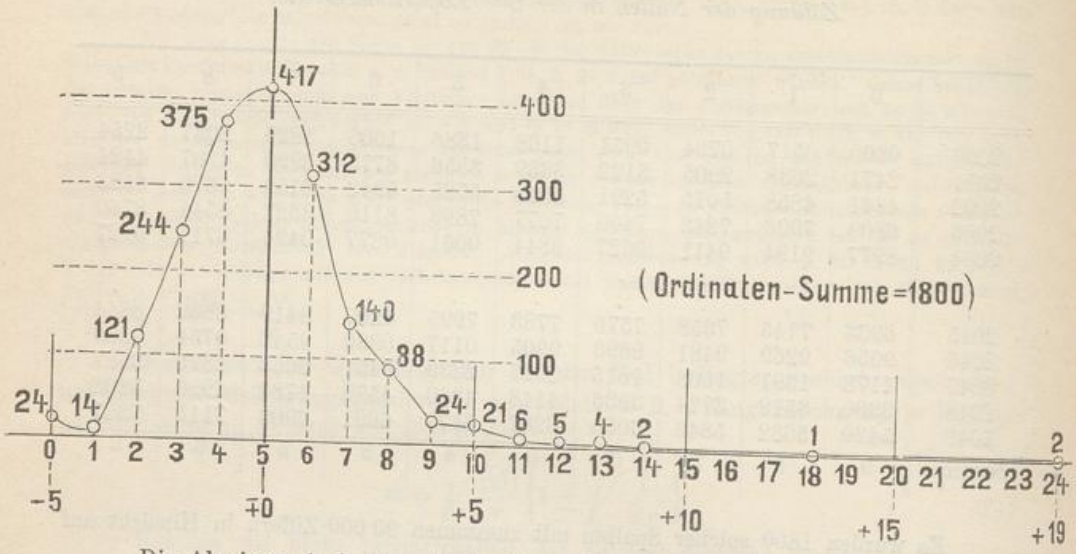
Einiges Nähere hierüber haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1890", S. 560—564 mitgeteilt, auch sei zu dem entsprechenden Beispiele in den früheren Auflagen dieses Buches (z. B. 3. Aufl. I. Band 1888, S. 282—285) bemerkt, dass jenes frühere Beispiel in zweifacher Beziehung ein anderes war, erstens waren nur 600 Spalten, statt jetzt 1800 Spalten behandelt, und zweitens waren die Spalten nicht einzeln, sondern je 2 zusammen behandelt.

Im Einzelnen gab die Zählung Folgendes:

Anzahl der Nullen in einer Spalte l	kommt vor p	Produkt pl	Fehler $l-5=\varepsilon$	ε^2	$p\varepsilon^2$
0	24mal	0	− 5	25	600
1	14	14	− 4	16	224
2	121	242	− 3	9	1089
3	244	732	− 2	4	976
4	375	1500	− 1	1	375
5 (Mittelwert)	417 (Maximum)	2085	0	0	0
6	312	1872	+ 1	1	312
7	140	980	+ 2	4	560
8	88	704	+ 3	9	792
9	24	216	+ 4	16	384
10	21	210	+ 5	25	525
11	6	66	+ 6	36	216
12	5	60	+ 7	49	245
13	4	52	+ 8	64	256
14	2	28	+ 9	81	162
18	1	18	+13	169	169
24	2	48	+19	361	722
Summe 1800		8827			7607

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hiezu wurde auch folgende graphische Darstellung gemacht:



Die Abscissen 0, 1, 2 ... 24 beziehen sich auf die Anzahl l der Nullen, welche in je einer fünfziggliedrigen Kolumne gefunden wurden. Die Ordinaten $p = 24$, $p = 14 \ldots p = 417 \ldots p = 2$ geben die Zahl der Fälle, in welchen die Nullenzahl l gefunden wurde, z. B. wurden 4 Nullen in je einer Kolumne 375mal gefunden, oder 5 Nullen in je einer Kolumne 417mal u. s. w.

Nun rechnen wir weiter, wie wenn unsere l die Ergebnisse von unabhängigen gleichartigen Beobachtungen einer Unbekannten x wären, welche dann als arithmetisches Mittel aller l berechnet wird:

$$x = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{8827}{1800} = 4{,}9033$$

Dieser Wert $x = 4{,}9033$ ist kleiner als der Wert $x = 5$, welcher bei gleichmässiger Verteilung der Ziffern in den abgezählten Spalten zu erwarten war. Wir wollen nicht den beobachteten Mittelwert $x = 4{,}9033$, sondern den theoretischen Wert $x = 5$ den weiteren Berechnungen zu Grunde legen, indem wir nun die Differenzen $l - x = \varepsilon$ wie wahre Beobachtungsfehler weiter behandeln.

Jedoch betrachten wir zuvor nochmals die graphische Darstellung, wobei in die Augen fällt, dass diese Curve nicht symmetrisch gegen die Achse ist. Eine solche Unsymmetrie, oder ungleiche Wahrscheinlichkeiten für $-\varepsilon$ und für $+\varepsilon$, ist auch von vornherein zu erwarten gewesen, namentlich bei den Grenzwerten; denn der Fehler $\varepsilon = -5$, oder 0 Nullen, ist unbedingt die untere *Grenze*, weil $\varepsilon = -6$, oder weniger als 0 Nullen, in einer Spalte undenkbar ist, während auf der positiven Seite mit $\varepsilon = +5$ oder 10 Nullen in einer Spalte die Sache gar nicht abgeschlossen ist, und es kommen darüber hinaus 11, 12, 13, 14 Nullen noch ganz stetig vor, worauf zwei Lücken folgen, und die Reihe mit zweimal 24 Nullen in einer Spalte abschliesst.

Trotz dieser Unsymmetrie im Ganzen können wir einen mittleren Fehler berechnen, wozu die Quadrate ε^2 schon oben in der Hauptzusammenstellung von S. 455 enthalten sind, nämlich $[\varepsilon^2] = 7607$, also mittlerer Fehler $m = \sqrt{\frac{7607}{1800}} = \pm 2{,}056$.

Ausserdem wollen wir noch die beiden Teile, $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, getrennt behandeln, und zwar soll der wichtige Fall $\varepsilon = 0$ mit $n = 417$ dabei hälftig nach der negativen Seite und hälftig nach der positiven Seite hin gezählt werden, so dass wir erhalten:

negative Fehler:

ε	ε^2	p	$p\,\varepsilon^2$
0	0	208,5	0
−1	1	375	375
−2	4	244	976
−3	9	121	1089
−4	16	14	224
−5	25	24	600
		986,5	3264

$$m^2 = \frac{3264}{986{,}5} = 3{,}3087$$
$$m = \pm 1{,}8190$$

positive Fehler:

ε	ε^2	p	$p\,\varepsilon^2$
0	0	208,5	0
+1	1	312	312
+2	4	140	560
+3	9	88	792
+4	16	24	384
+5	25	21	525
+6	36	6	216
+7	49	5	245
+8	64	4	256
+9	81	2	162
+13	169	1	169
+16	361	2	722
		813,5	4343

$$m^2 = \frac{4343}{813{,}5} = 5{,}3387$$
$$m = \pm 2{,}3106$$

Die nächste Betrachtung soll sich auf die negativen Fehler allein erstrecken, und wir wollen die Verteilung mit dem theoretischen Fehlergesetze von § 111. vergleichen, wozu es zuerst nötig ist, das Intervall $d\varepsilon = 1$ in Teilen des mittleren Fehlers m auszudrücken. Aus $m = 1{,}8190$ folgt:

$$d\varepsilon = 1 = 0{,}54976\, m$$

und

$$\frac{d\varepsilon}{2} = 0{,}5 = 0{,}27488\, m$$

Nun bestimmt man nach der Tabelle S. [21] des Anhangs die Wahrscheinlichkeiten W für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den $n$fachen mittleren Fehler und rechnet zugleich weiter, wie nachstehende Tabelle zeigt:

Grenzen				W nach Seite [21]	986,5 W	Differenzen p'
0 und ε		0 und n				
0	0,5	0	0,27488	0,2166	213,7	213,7
0	1,5	0	0,82464	0,5904	582,4	368,7
0	2,5	0	1,37440	0,8307	819,5	237,1
0	3,5	0	1,92416	0,9456	932,8	113,3
0	4,5	0	2,47392	0,9867	973,4	40,6
0	5,5	0	3,02368	0,9975	984,0	10,6
0	∞	0	∞	1,0000	986,5	2,5
						986,5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die in der letzten Spalte stehenden Differenzen p' sind nun die theoretischen Anzahlen, welche den beobachteten p in der vorhergehenden Tabelle S. 457 entsprechen, und man hat daher folgende Vergleichung für die negativen ε:

Grenzen	Anzahl der Fehler nach der Theorie p'	Anzahl der Fehler nach der Erfahrung p	Abweichung
0 und 0,5	214	209	+ 5
0,5 „ 1,5	369	375	− 6
1,5 „ 2,5	237	244	− 7
2,5 „ 3,5	113	121	− 8
3,5 „ 4,5	41	14	+ 27
4,5 „ 5,5	11	24	− 13
5,5 „ ∞	2	0	+ 2
Summe	987	987	0

Die Übereinstimmung zwischen der Theorie und der Erfahrung ist so, dass man sagen kann, die Verteilung der Nullen folgt näherungsweise dem Gesetze von § 111. Allerdings die entsprechende Verteilung der positiven ε stimmt noch erheblich schlechter mit der Theorie, wir wollen diese Verteilung nicht auch noch vorführen, dieselbe wird namentlich durch die vereinzelten *grossen* ε (vgl. die Fig. auf S. 456 mit den rechts auslaufenden Werten bis 24) entstellt.

Solche Vergleichungen zwischen der Fehlerverteilung nach der Erfahrung und nach der Theorie des Gauss'schen Fehlergesetzes sind zuerst angestellt worden von Bessel in „fundamenta astronomiae" S. 19–20, mit drei Fehlerreihen, von denen die dritte, 470 Rectascensionsbeobachtungen umfassend, auch von Encke im „Berl. Astr. Jahrbuch für 1834" S. 274–275 behandelt wird dieselbe war auch enthalten in der 2ten Auflage unseres „Handb. d. Verm., 1. Band 1877", S. 101 und 104).

Die neueste und bedeutendste Untersuchung dieser Art betrifft die Schlussfehler von 2238 Dreiecken der Italienischen Triangulierung, behandelt auf Anregung von General Ferrero durch Ingenieur Guarducci, mitgeteilt in der italienischen Zeitschrift „Rivista di topografia e catasto", Roma 1889, Volume II, S. 1–12. Es sind 2 Gruppen, erstens 661 Dreiecke mit dem mittleren Schlussfehler 14,08″ und zweitens 1577 Dreiecke mit Schlussfehler 17,13″. Ein Bericht hierüber wird auch gegeben von Czuber in „Theorie der Beobachtungsfehler", Leipzig 1891, S. 193–194, und ferner eine Reihe von 40 Teilstrichbestimmungen aus A. R. Clarke's Geodesy, mitgeteilt von Faye in Comptes rendus, 106. Band, 1888, S. 783–786.

General Ferrero hat ferner in dem „Rapport sur les triangulations, présenté à la dixième Conférence générale à Bruxelles en 1892" eine Tafel mit 12 graphischen Darstellungen zu 18085 Schlussfehlern gegeben, und berichtet auf S. 4 dieses Rapports, dass er auf der Pariser Versammlung 1889 eine Broschüre verteilt habe, welche an mehr als 5000 Dreiecksschlussfehlern die Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung schlagend nachgewiesen habe.

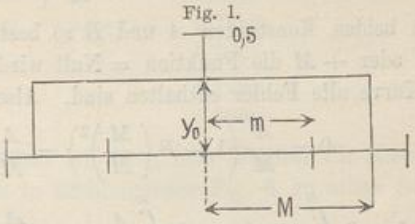
§ 120. Fehler-Kurven mit endlicher Erstreckung.

Bei der Bestimmung der Fehlerfunktion in § 111. wurde die Annahme gemacht, dass die Fehlergrenzen die denkbar weitesten, nämlich $-\infty$ und $+\infty$ seien. Die Praxis steht dieser Annahme entgegen, und deswegen machen wir nun verschiedene Versuche mit solchen Fehlerfunktionen, deren Kurven nicht asymptotisch auslaufen, sondern die Achse berühren oder schneiden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wir wollen sogar im Interesse möglichster Allgemeinheit mit dem gröbsten Falle beginnen, dass nämlich die Fehler-Kurve eine begrenzte Gerade, parallel der Achse, sei, wie in Fig. 1. dargestellt ist.

Fig. 1.



$$M^2 = 3\,m^2$$

$$y_0 = \frac{1}{2\,M} = \frac{0{,}2887}{m}$$

I. Parallele Gerade (Rechteck).

Wir nehmen zuerst unbestimmt an $\varphi(\varepsilon) = A$ und wollen die Konstante A so bestimmen, dass zwischen den Grenzen $-M$ und $+M$ alle Fehler enthalten sind, d. h.:

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 1$$

$$2\int_0^M A\,d\varepsilon = 2\,A\,M = 1 \quad \text{also} \quad A = \frac{1}{2\,M}$$

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\,M} \tag{1}$$

Das mittlere Fehlerquadrat wird:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\int_0^M \frac{\varepsilon^2}{2\,M}\,d\varepsilon = \frac{M^2}{3}$$

also $$M^2 = 3\,m^2 \qquad M = 1{,}732\,m \tag{2}$$

Zu späteren Vergleichungen wollen wir auch den Mittelwert r^4 der 4ten Potenzen ausrechnen:

$$r^4 = 2\int_0^M \varepsilon^4\,\varphi(\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\int_0^M \frac{1}{2\,M}\,\varepsilon^4\,d\varepsilon = \frac{M^5}{5}$$

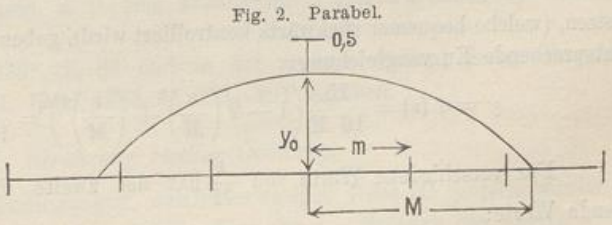
und da $M^2 = 3\,m^2$ ist, hat man auch

$$r^4 = \frac{9}{5}\,m^4 \quad = \quad 1{,}800\,m^4 \tag{3}$$

II. Parabel.

Die Fehlerkurve soll vom Scheitel nach beiden Seiten symmetrisch abnehmen.

Fig. 2. Parabel.



$$M^2 = 5\,m^2$$

$$y_0 = \frac{3}{4\,M} = \frac{0{,}3354}{m}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Funktion sei zunächst unbestimmt in dieser Form:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{A}{M}\left(1 - B\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2\right) \tag{4}$$

wobei die beiden Konstanten A und B so bestimmt werden sollen, dass erstens für $\varepsilon = -M$ oder $+M$ die Funktion $=$ Null wird, und dass zweitens zwischen der Achse und der Kurve alle Fehler enthalten sind. Also:

$$0 = \frac{A}{M}\left(1 - B\left(\frac{M}{M}\right)^2\right) = \frac{A}{M}(1 - B) \quad , \quad B = 1$$

$$1 = 2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2\int_0^M \frac{A}{M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right) d\varepsilon = 2\,\frac{A}{M}\left(M - \frac{M^3}{3\,M^2}\right)$$

$$1 = 2A\left(1 - \frac{1}{3}\right) \quad , \quad A = \frac{3}{4}$$

Also die Funktion:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{3}{4\,M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right) \tag{5}$$

Dieses ist die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $= \frac{2}{3}M^2$. Damit wird:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{3}{2\,M}\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^5}{5\,M^2}\right) = \frac{M^2}{5}$$

$$M^2 = 5\,m^2 \qquad M = 2{,}236\,m \tag{6}$$

$$r^4 = 2\int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{3}{2\,M}\left(\frac{M^5}{5} - \frac{M^7}{7\,M^2}\right) = \frac{3}{35}M^4$$

$$r^4 = \frac{15}{7}m^4 = 2{,}143\,m^4 \tag{7}$$

III. Berührung erster Ordnung.

Wenn man von der Fehlerkurve verlangt, dass sie zunächst im Scheitel ähnlich wie die Parabel ansetzt, dann aber links und rechts in Abständen M symmetrisch die Achse berühren soll, so kann man der Kurvengleichung 3 Coefficienten geben, und diese bestimmen durch die 3 Bedingungen, dass erstens $2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1$, zweitens $y = 0$ für $\varepsilon = M$, und drittens $\frac{dy}{d\varepsilon} = 0$ für $\varepsilon = M$. Ohne die Ausrechnung herzusetzen, (welche bequemer rückwärts kontrolliert wird), geben wir die diesen 3 Bedingungen entsprechende Kurvengleichung:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{15}{16\,M}\left(1 - 2\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4\right) = \frac{15}{16\,M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^2 \tag{8}$$

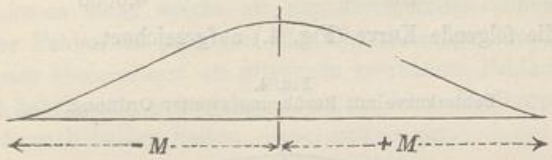
Für verschiedene Werte von $\frac{\varepsilon}{M}$ hat der zweite Faktor dieser Funktion folgende Werte:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$\frac{\varepsilon}{M} = 0{,}0$	$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^2 = 1{,}0000$
0,2	0,9216
0,4	0,7056
0,6	0,7056
0,8	0,1296
1,0	0,0000

Da der erste Faktor in (8) konstant ist, kann man hiernach die Kurve für (8) in beliebigem Massstabe auftragen, wie in nachfolgender Fig. 3. zu sehen ist.

Fig. 3.
Fehlerkurve mit Berührung erster Ordnung.



Das mittlere Fehlerquadrat m^2 und das mittlere Biquadrat r^4 werden aus (8) erhalten:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{15}{8M}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) M^3$$

$$\left.\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{7} M^2 & m &= 0{,}3796\, M \\ M^2 &= 7\, m^2 & M &= 2{,}64575\, m \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$r^4 = 2\int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{15}{8M}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9}\right) M^5$$

$$r^4 = \frac{1}{21} M^4 \qquad r^4 = 0{,}04762\, M^4$$

$$r^4 = \frac{1}{21} 49\, m^4 = \frac{7}{3} m^4 = 2{,}3333\, m^4 \quad (10)$$

In gleicher Weise kann man auch den durchschnittlichen Fehler t und den wahrscheinlichen Fehler r berechnen:

$$t = \frac{5}{16} M = 0{,}3125\, M = \frac{5\sqrt{7}}{16} m = 0{,}8268\, m$$

$$r = 0{,}28108\, M = 0{,}74367\, m$$

Dieses und weiteres hiezu, z. B. eine Tabelle für $\int_{-M}^{+M} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$ haben wir früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1878", S. 39 und in der vorigen Auflage dieses Buches „Handb. d. Verm., 3. Aufl., I. Band 1888, S. 289—291 gegeben.

IV. Berührung zweiter Ordnung.

Wenn man zu den 3 Bedingungen, welche im vorigen Falle III gestellt wurden, auch noch als vierte Bedingung hinzunimmt, dass für $\varepsilon = M$ auch die zweite Ab-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

leitung $\frac{d^2 y}{d\varepsilon^2} = 0$ werde, so kann man der Funktion y noch ein weiteres Glied geben, und man wird dadurch erhalten:

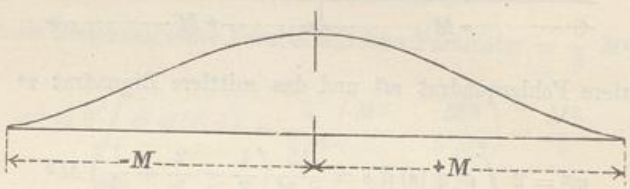
$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{35}{32\,M}\left(1 - 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^2 + 3\left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^4 - \left(\frac{\varepsilon}{M}\right)^6\right) = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^3 \tag{11}$$

Hiernach ist berechnet:

$\frac{\varepsilon}{M}$	$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^3$
0,0	1,0000
0,2	0,8847
0,4	0,5927
0,6	0,2621
0,8	0,0466
1,0	0,0000

Damit ist die folgende Kurve (Fig. 4.) aufgezeichnet.

Fig. 4.
Fehlerkurve mit Berührung zweiter Ordnung.



Aus der Funktion (11) wird auch wieder m^2 und r^4 bestimmt:

$$m^2 = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{35}{16\,M}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) M^3$$

$$m^2 = \frac{1}{9} M^2 \quad , \quad m = \frac{1}{3} M \quad , \quad M = 3\,m \tag{12}$$

$$r^4 = 2\int \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{35}{16\,M}\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{7} + \frac{3}{9} - \frac{1}{11}\right) M^5$$

$$r^4 = \frac{1}{33} M^4 \qquad r^4 = 0{,}03030\, M^4$$

$$r^4 = \frac{1}{33} 81\, m^4 = \frac{27}{11} m^4 = 2{,}4545\, m^4 \tag{13}$$

Die Fortsetzung dieser Entwicklungen giebt für Berührung von der n^{ten} Ordnung:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\frac{1}{M}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^n \tag{14}$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{5+2n} \quad , \quad \frac{r^4}{M^4} = \frac{3}{(5+2n)(7+2n)} \tag{15}$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\,m^4}{r^4} - 1\right) \tag{16}$$

Wenn man mittelst (15) $M^2 = (5+2n)\,m^2$ in (14) einsetzt, und auch m selbst durch (17) S. 432 in h ausdrückt, so wird (14):

$$y = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2n+1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\frac{h}{\sqrt{10+4n}}\left(1 - \binom{n}{1}\varepsilon^2 \frac{2h^2}{5+2n} + \ldots\right) \tag{17}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Mit $n = \infty$ geht der Faktor vor der Klammer über in $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$, wegen des Wallisschen Ausdruckes für π (Zeitschr. f. Verm. 1894 S. 489), und die Reihe in der Klammer wird als Exponentialreihe (S. 434) gleich $e^{-h^2\varepsilon^2}$ und damit geht mit $n = \infty$ der Ausdruck (17) über in die Fehlerfunktion (13) S. 430.

§ 121. Der Maximalfehler.

Schon die allerersten Betrachtungen über das Wesen der Beobachtungsfehler (vgl. § 3. S. 11) führen darauf, dass diese Fehler zwar unvermeidlich, aber in gewisse *Grenzen* eingeschlossen sind, welche sie nur überschreiten können beim Auftreten sogenannter grober Fehler, die aber von aller Theorie ausgeschlossen sind.

Im Gegensatz hiezu nimmt die allgemein anerkannte Fehlertheorie, die wir in § 111. entwickelt haben, an, es bestehen keine endlichen Fehlergrenzen, sondern die Grenzen Unendlich nach beiden Seiten, $-\infty$ und $+\infty$.

Wenn man daher das Fehlergesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$ auf gewöhnliche Beobachtungsfehler anwendet, so begeht man eine Inkonsequenz, denn z. B. die Wahrscheinlichkeit, bei der Winkelmessung mit einem guten Theodolit einen Fehler von 1° zu begehen, ist ohne Frage = Null und nicht ein Wert, der von der Null verschieden ist.

Dieser Inkonsequenz muss man sich klar bewusst sein, und man darf das theoretische Fehlergesetz nur als eine Annäherung an die Wirklichkeit, niemals aber als das Gesetz der wirklichen Beobachtungsfehler selbst betrachten.

Als Analogie zu der Ungültigkeit des theoretischen Fehlergesetzes ausserhalb gewisser Grenzen möchten wir ein Fortpflanzungsgesetz anderer Art betrachten, welches ebenfalls innerhalb enger Grenzen gilt, aber auf weitere Ausdehnung völlig unzutreffend wird:

Ein Mäuse-Paar oder ein Paar anderer sich rasch vermehrender Tiere, Kaninchen oder dergleichen, möge in 1 Jahr eine Nachkommenschaft von M Paaren erzeugen, welche im nächsten Jahre selbst fortpflanzungsfähig sind, und daher nach dem Schlusse des zweiten Jahres eine Anzahl von M^2 neue Paare hinterlassen. Wenn das so fortgeht, so würde nach n Jahren eine Anzahl von M^n solcher Paare vorhanden sein, d. h. wenn n nur einigermassen gross ist, würden bei Mäusen, Kaninchen u. s. w. nach diesem Gesetze bald Millionen und Milliarden von Nachkommen vorhanden sein. Wenn nicht vernichtende Kräfte einwirken, so tritt solch masslose Vermehrung in der That ein (z. B. Kaninchen-Plage in Australien), im Allgemeinen aber wird der Vermehrung der Tiere bald kräftig entgegengewirkt durch die zahlreichen Feinde jener Tiere, namentlich die Vernichtung durch den Menschen; und das Gesetz der Vermehrung M^n mag zwar durch einige Generationen wirksam sein, (mit bereits auf mittlere Vernichtung gültigem M), aber die Millionen- und Milliarden-Vermehrung tritt thatsächlich nicht ein.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den Beobachtungsfehlern: das Gesetz $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}$ gilt für kleine Werte ε, etwa innerhalb des mittleren Fehlers $\varepsilon = M$ jedenfalls, aber darüber hinaus, schon bei $\varepsilon = 2m$, $\varepsilon = 3m$ und vollends $\varepsilon > 3m$ sind so viele Ver-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nichtungskräfte für die Fehler vorhanden, dass sehr grosse Fehler überhaupt nicht mehr zu stande kommen können.

Um die Unmöglichkeit sehr grosser Fehler, etwa über dem 5—10fachen mittleren Fehler, nachzuweisen, wollen wir das dem Geodäten am nächsten liegende Beispiel der Winkelsumme eines Dreiecks ($\alpha+\beta+\gamma$, bezw. $\alpha+\beta+\gamma+$ sph. Excess) betrachten.

Zuerst kommen die Teilungsfehler der Theodolitkreise in Frage, allein schon diese Kreise sind, *ehe* sie der Geodät in die Hand bekommt, schon so gründlich kontrolliert, dass die Fehler nur ein gewisses Durchschnittsmass, aber nicht darüber erreichen können. Jeder Mechaniker weiss schon aus dem Verlaufe der Teilungs-Arbeit, ob der Kreis für gewisse Zwecke zulässig ist oder nicht; er wird zum mindesten den Kreis, ehe er ihn abliefert, nochmals summarisch durchgehen, ob er ihn ohne Schaden für sein Geschäft abliefern kann. Sollte aber auch das nicht sein, so würde doch der ausübende Geodät, schon nach den ersten Wochen, etwaige starke Fehler selbst finden, den Kreis zurückschicken und die etwa bereits damit gemachten Messungen streichen.

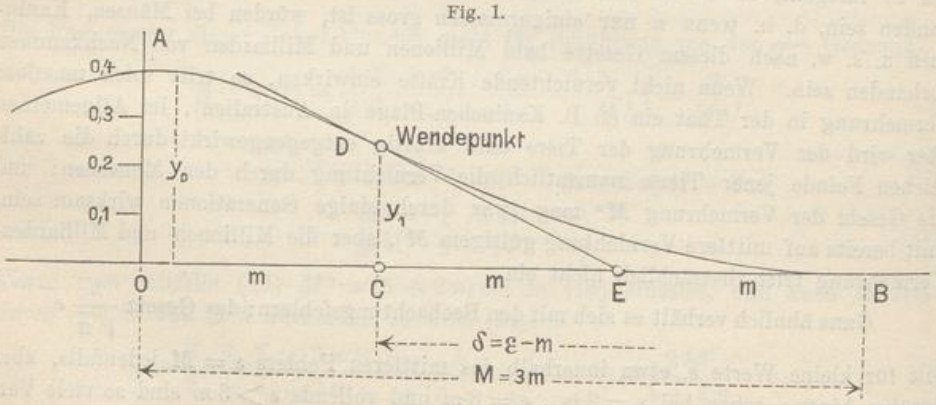
Sei nun der Kreis innerhalb gewisser Grenzen richtig, dann wird auch der Geodät schon im Felde etwaige vorstehende Abweichungen seiner Ablesungen entdecken, dann in der Berechnung seiner Satzmittel u. dergl. wird er starke Messungsfehler finden; er wird — auch bei strengster Objektivität — sehr starke Fehler unbarmherzig ausmerzen. Sollte ein solcher Fehler, etwa gleich dem 10fachen mittleren Fehler, sich bis zur Zusammenstellung der Dreieckssummen durchwinden, so wird nach dem Auftreten desselben nochmals eine Revision bis herunter zu der Aufschreibung der Ablesungen in den Feldbüchern stattfinden, und — ein Grund zum Ausscheiden *wird gefunden werden*, auch bei Wahrung der strengsten Unparteilichkeit. —

Wir wollen unterlassen, all diese Einzelheiten noch weiter zu verfolgen. Jeder Praktiker weiss, dass starke Fehler die zahlreichen Kontrollstationen geodätischer Messung und Berechnung einfach nicht passieren *können*.

Dieses eine Beispiel mag genügen zur Begründung des Satzes, dass das gewöhnliche Fehlergesetz $\varphi(\varepsilon)$ als strenges Gesetz nur gültig ist für Fehler ε kleiner als der mittlere Fehler m, oder gleich demselben und wenig darüber hinaus, dass aber für ε grösser als m ein *anderes* allmählich von dem ersten $\varphi(\varepsilon)$ abweichendes Gesetz zur Geltung kommt.

Dieses hat uns dazu geführt, in der nachfolgenden Fig. 1. eine Fehlerkurve

Fig. 1.



zu betrachten, welche aus zwei Teilen zusammengesetzt ist, nämlich erstens aus einem Teil AD nach der Gauss'schen Funktion von § 111, und zweitens einem Teile DB, welcher in D die erste Kurve AD und in B die Achse berührt, und zwar sollen die beiden Berührungen in D und in B nicht bloss von erster, sondern von zweiter Ordnung sein.

Für den Kurventheil AD haben wir nach § 111:

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{1}$$

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} \varepsilon e^{-h^2\varepsilon^2} \tag{2}$$

$$\frac{d^2y}{d\varepsilon^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2}\left(1 - 2h^2\varepsilon^2\right) \tag{3}$$

Die zweite Abteilung gleich Null gesetzt giebt die Wendepunktsabscisse, welche nach (17) § 111. S. 432 gleich dem mittleren Fehler ist, nämlich:

$$OC = m = \frac{1}{h\sqrt{2}} \quad , \quad \text{oder} \quad h^2 = \frac{1}{2m^2} \tag{4}$$

Die Scheitel-Ordinate wird mit $\varepsilon = 0$:

$$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} = \frac{0{,}39894}{m} \tag{5}$$

Die Wendepunkts-Ordinate mit $\varepsilon = m$ wird

$$y_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m\sqrt{2e\pi}} = \frac{0{,}24197}{m} \tag{6}$$

Die Wendepunkts-Tangente giebt mit $\varepsilon = m$:

$$\left.\frac{dy}{d\varepsilon}\right]_1 = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} m e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{y_1}{m} \tag{7}$$

Diesem entspricht in Fig. 1. die Tangente DE, welche den Punkt E im Abstande $CE = m$ liefert.

Nun soll eine Kurve DB so gelegt werden, dass sie in D und in B Berührung zweiter Ordnung hat. Man wird dieses durch Rechnung mit unbestimmten Coefficienten erzielen, mit dem Ergebnis:

$$y = y_1\left(1 - \frac{\delta}{m} + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3 - \frac{1}{16}\left(\frac{\delta}{m}\right)^4\right) \tag{8}$$

dabei sind die Abscissen δ von C an gezählt, also $\delta = \varepsilon - m$. Die Gleichung (8) giebt:

$$\frac{dy}{d\delta} = \frac{y_1}{m}\left(-1 + \frac{3}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^3\right) \tag{9}$$

$$\frac{d^2y}{d\delta^2} = \frac{y_1}{m^2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\delta}{m}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\delta}{m}\right)^2\right) \tag{10}$$

Man überblickt alsbald, dass die Gleichung (8) mit (9) und (10) den vorher ausgesprochenen Bedingungen der Kurve DB von Fig. 1. entspricht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hiezu wollen wir zuerst den Maximalwert von δ bestimmen, welcher $y = 0$ macht; es ist $\delta = 2m$, wie sich aus (8) erprobt, nämlich:

$$y = y_1 \left(1 - 2 + \frac{8}{4} - \frac{16}{16}\right) = 0$$

Es ist also:

$$\delta_{max} = 2m \quad \text{und} \quad \varepsilon_{max} = M = 3m \tag{11}$$

Als Probe für die Berührungen in D und B hat man aus (9) mit $\delta = 0$ denselben Wert wie früher (7) und mit $\delta = 2m$ giebt (9) den Wert Null. Ferner (10) wird = Null erstens mit $\delta = 0$ und zweitens mit $\delta = 2m$.

Als Hauptergebnis wollen wir die Beziehung (11) mit $M = 3m$ betrachten; d. h. wenn man die Gauss'sche Funktion $\varphi(\varepsilon)$ nur bis $\varepsilon = m$ gelten lässt, und dann eine Funktion anschliesst, welche als Kurve betrachtet nicht asymptotisch ausläuft, sondern die Achse mit Berührung zweiter Ordnung erreicht, so wird der Maximalfehler M gleich dem *drei*fachen mittleren Fehler.

Um hieraus einen Rückschluss auf die Verhältnisse wirklicher Beobachtungsfehler zu ermöglichen, müssen wir zuerst allgemein die Kurve als *Bild* irgend einer Erscheinung auffassen, wie bei graphischen Darstellungen der Technik, der Statistik u. s. w. täglich geschieht.

Eine unbegrenzt der Null sich nähernde Funktion ist unserem geistigen Vorstellungsvermögen viel schwieriger auszudenken, als eine asymptotisch auslaufende Kurve mit dem physischen Auge erfasst wird. Das geometrische Asymptotenbild erleichtert uns den *vorher* geschaffenen Begriff des unbegrenzten Abnehmens mit geistigem Auge zu erfassen. Umgekehrt muss für einen *neuen* Begriff, für welchen ein abstrakter Ausdruck fehlt, das Kurvenbild aushelfen.

In diesem Sinne sagen wir, die berührende Kurve DB erleichtert uns die Vorstellung eines allmählichen Abweichens von dem abstrakten Gauss'schen Fehlergesetz, und in demselben Sinne sind auch die Kurven von § 120 aufzufassen.

Nun kann aber das Verhältnis $M : m$, welches, in Fig. 1. S. 464, $= 3$ angenommen wurde, *überhaupt nicht allgemein bestimmt werden*, ebensowenig, als die Konstante h des Fehlergesetzes (1) allgemein bestimmbar ist. Wie jeder Beobachtungsart eine gewisse Genauigkeitskonstante h zukommt, ebenso hat auch jede Beobachtungsbehandlung ein gewisses Verhältnis $M : m$. Je gewissenhafter und objektiver ein Beobachter ist, desto grösser wird bei ihm $M : m$ werden, und je mehr in einer Beobachtungstabelle grosse Fehler ausgeschieden wurden, — bewusst oder unbewusst — desto kleiner wird $M : m$ sein.

Es kommt nun darauf an, dieses mathematisch zu fassen, und dazu scheinen uns die mittleren Fehlerbiquadrate $r^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ geeignet zu sein.

Im Gauss'schen Fehlergesetz ist $r^4 : m^4 = 3$ (nach (15) § 116. S. 447), und dabei sind Fehler ε von Null bis Unendlich angenommen, werden aber die grossen Fehler von einer gewissen Grenze an ausgeschieden, so drückt das auf die Biquadrate ε^4 viel stärker als auf die Quadrate ε^2, und das Verhältnis $r^4 : m^4$ wird in diesem Fall *kleiner* als 3 werden; oder das Verhältnis $r^4 : m^4$ im Allgemeinen wird einen Massstab für das Ausscheiden grosser Fehler abgeben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aus den theoretischen Fehlergesetzannahmen von § 120. bilden wir folgende Vergleichung:

1) Rechteck S. 459	$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$		$\frac{p^4}{m^4} = \frac{9}{5} = 1{,}8000$		
2) Parabel S. 460	„	$\frac{1}{5} = 0{,}2000$	„	$\frac{15}{7} = 2{,}1429$	
3) Berührung 1. Ordnung S. 461	„	$\frac{1}{7} = 0{,}1429$	„	$\frac{7}{3} = 2{,}3333$	
4) „ 2. „ S. 462	„	$\frac{1}{9} = 0{,}1111$	„	$\frac{27}{11} = 2{,}4545$	
5) Asymptote S. 447	„	$\frac{1}{\infty} = 0{,}0000$	„	$\frac{3}{1} = 3{,}0000$	

Der Anblick dieser Zahlen, und mehr noch ihre Darstellung in einer Kurve, giebt zweifellos zu erkennen, dass das Verhältnis $\frac{m^2}{M^2}$ in einer gewissen Beziehung zu dem anderen Verhältnis $\frac{p^4}{m^4}$ steht, welche bereits in (16) § 120. S. 462 allgemein gegeben ist durch die Gleichung:

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3\,m^4}{p^4} - 1\right) \text{ oder } = \frac{1}{2}\frac{m^4}{p^4}\left(3 - \frac{p^4}{m^4}\right) \tag{12}$$

Wir denken uns eine Beobachtungsart, welche in Hinsicht auf $M:m$ untersucht werden soll, irgend einer der unendlich vielen Funktionen (14) S. 462 angepasst durch Vermittung des Verhältnisses $m^4:p^4$ nach der vorstehenden Gleichung (12).

Zu einer ersten Anwendung dieser Theorie wollen wir die 22 Dreiecksschlussfehler benützen, welche in § 3. S. 12. mitgeteilt sind. Wenn man dieselben quadriert und biquadriert, so erhält man:

$$m^2 = \frac{30{,}52}{22} = 1{,}387 \qquad p^4 = \frac{70{,}02}{22} = 3{,}183$$

$$m^4 = 1{,}924 \qquad \frac{p^4}{m^4} = 1{,}654$$

$$m = 1{,}178 \qquad 3 - \frac{p^4}{m^4} = 1{,}346$$

Damit nach (12): $\frac{m^2}{M^2} = 0{,}407$

$$\frac{m}{M} = 0{,}638 \qquad \frac{M}{m} = 1{,}568 \tag{13}$$

Da $m = 1{,}178$ ist, müsste also $M = 1{,}568 \times 1{,}178 = 1{,}847$ werden, und in der That ist der grösste Wert auf S. 12, mit der Nummer 14, $\varepsilon_{max} = +1{,}86''$, also sehr nahe dem theoretischen 1,847.

Das Verhältnis $M:m = 1{,}568$ ist hier erheblich kleiner als das Verhältnis $M:m = 3$, welches für asymptotisches Fehlergesetz gilt, und man kann daraus auf Ausscheidungen der grossen Fehler schliessen.

Auch schon das Verhältnis des mittleren Fehlers m zum durchschnittlichen Fehler t lässt sich in solcher Weise verwerten, dieses Verhältnis ist im Falle unserer 22 Dreiecksschlüsse (vgl. S. 22) $m:t = 1{,}18:1{,}03 = 1{,}15$, während für das asymptotische Fehlergesetz dieses Verhältnis $= 1{,}25$, also grösser sein soll, woraus abermals auf Ausmerzung der grössten Fehler, welche in m stärker ins Gewicht fallen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

würden, geschlossen werden kann, jedoch mit geringerer Sicherheit als bei Benützung von r^4 und m^4. Ausser den 4ten Potenzen könnten auch noch die 6ten, 8ten u. s. w. Potenzen von ε zugezogen werden.

Mag unsere vorstehende Gleichung (12) so bleiben, oder noch weiter behandelt werden, jedenfalls haben wir in der Vergleichung der Werte $m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}$ und $r^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ einen ersten Weg zur Auffindung des bis jetzt von aller Theorie ausgeschlossen gewesenen Maximalfehlers eröffnet.

Wenn zu den vielen Tausenden von Dreiecksschlussfehlern w, welche in dem nachfolgenden § 123. u. ff. zu berichten sein werden, nicht bloss die Mittelwerte $\frac{[w^2]}{n}$ sondern auch noch $\frac{[w^4]}{n}$ ausgerechnet würden, so könnte daran unsere Theorie der Gleichung (12) erprobt werden. —

Kapitel V.

Genauigkeit der Triangulierungen. Geschichtliche Abrisse.

§ 122. Allgemeines.

Die Frage nach der Genauigkeit der Messungen und die Beantwortung dieser Frage ist der Anfang und das Ende aller feineren geodätischen Untersuchungen, und zur Gewinnung eines Urteils über solche Fragen ist es von besonderer Wichtigkeit, die Werke der Vergangenheit in Hinsicht auf die erstrebte und die erreichte Genauigkeit zu studieren.

Wie wir schon in der Einleitung S. 8 bemerkt haben, sind die Genauigkeits-Untersuchungen in der früheren geodätischen Litteratur viel zu wenig gepflegt worden.

Vor etwa 30 Jahren, zu Beginn der Europäischen Gradmessung, diente als Anhaltspunkt zur geodätischen Genauigkeitsschätzung eine gelegentliche Bemerkung von General Baeyer in seinem „Messen auf der sphäroidischen Oberfläche“ 1862, S. 79, nämlich: „den wahrscheinlichen Fehler der besten Winkelmessungen können wir nicht unter $\frac{1}{4}$ Sekunde annehmen.“ Die Gradmessung in Ostpreussen bot gar keine Genauigkeitsberechnung, und die „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen in Baeyers berühmter „Küstenvermessung“, erwies sich beim ersten Blick im Sinne der M. d. kl. Q. als unzutreffend.

Über die klassischen Messungen von Gauss in Hannover war nichts bekannt.

Ebenso war es in Süddeutschland. Über die Bayerische Triangulierung, das geodätische Hauptwerk Deutschlands im Anfang des Jahrhunderts, gab die Bayerische Litteratur, in welcher man nachzuschlagen berechtigt war, nur unbestimmte Auskunft über „befriedigende Übereinstimmung“ oder dergl. Auch das amtliche Württembergische Landesvermessungswerk ging allen Genauigkeitsfragen entweder geflissent-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

lich aus dem Wege oder es bot Zahlen, welche an Objektivität augenscheinlich zu wünschen übrig liessen. Die vorzügliche Badische Triangulierung war in der geodätischen Litteratur ganz unbekannt. Ein Mann machte in jener Zeit eine rühmliche Ausnahme in solchem Schweigen, *Gerling*, den wir schon auf S. 5 mit Anerkennung nennen mussten, hat über seine Kurhessischen Messungen Auskunft durch mittlere Fehler gegeben, ebenso auch Schleiermacher in Darmstadt.

Im Jahre 1872 haben wir alles, was sich damals an geodätischen Genauigkeitsangaben finden liess, gesammelt und in den „astr. Nachrichten, 80. Band", 1873, Nr. 1898, S. 17—22 veröffentlicht; es war dieses die erste derartige Arbeit, welche auch die heutige internationale Fehlerformel für eine Anzahl von Dreiecksschlussfehlern benützt hat. Seit jener Zeit hat die internationale Erdmessung angefangen, geodätisches Genauigkeitsmaterial zu sammeln und geordnet zu veröffentlichen, und zwar für Triangulierung in den Berichten des italienischen Generals *Ferrero*, wodurch die private Thätigkeit in solcher Hinsicht zum grossen Teil überflüssig geworden ist.

Hiebei wollen wir auch aus den Verhandlungen der Konferenz 1893 in Genf, S. 70 citieren: Der allgemeine Bericht über Triangulierungen würde merklich an Wert gewinnen, wenn sämtliche Staaten der Erdmessung eine historische Übersicht ihrer geodätischen Arbeiten, sowie Angaben über die angewandten Instrumente geben wollten.

Auch in dieser Hinsicht hat schon 2 Jahrzehnte früher der deutsche Geometer-Verein das Mögliche gethan, und indem wir in den nachfolgenden Paragraphen einen Überblick über die Geschichte der Triangulierungen in charakteristischen Beispielen, insbesondere für Deutschland geben, können wir die zahlreichen Vorarbeiten dazu, welche vom deutschen Geometerverein ausgegangen sind, benützen.

§ 123. Die internationale Näherungsformel für den mittleren Winkelfehler.

Auf der Konferenz der permanenten Kommission der internationalen Erdmessung in Nizza 1887, wurde eine Formel zur Berechnung des mittleren Winkelfehlers von Triangulierungen vereinbart, worüber die veröffentlichten „Verhandlungen" über diese Konferenz, Berlin 1888, S. 54—55 bzw. S. 56—58 Folgendes geben:

Nach dem Vorschlag des Herrn General *Ferrero*, unter Mitwirknng von *Helmert* und *Foerster* sollen die Berichte über die Triangulierungen in Zukunft für jedes System von Dreiecken einen Zahlenwert m enthalten, zu berechnen nach der Formel:

$$m^2 = \frac{\Sigma w^2}{3 \cdot n} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{\Sigma w^2}{3 \cdot n}} \tag{1}$$

In dieser Formel bezeichnet man mit w den Widerspruch zwischen $180° +$ sphär. Excess und der Winkelsumme jedes Dreiecks, und mit n die Zahl der Dreiecke des Netzes.

Dieser Wert m soll als *Näherungswert* für die erlangte Genauigkeit betrachtet werden.

Unter Lassung voller Freiheit für weitergehende Untersuchungen dieser Art kann man dieser Formel eine bereits gute Annäherung an die Wahrheit zuschreiben, und es spricht zu Gunsten dieser Formel auch der Umstand, dass man mit deren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Hilfe ohne erhebliche Rechenarbeit rasch ein Vergleichsmass für die Genauigkeit der Triangulierungen gewinnt.

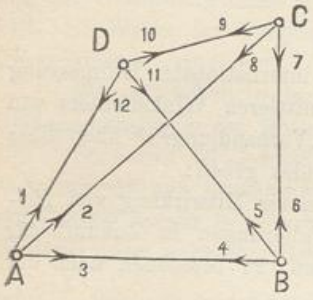
Für ein einzelnes Dreieck ist der Wert $m^2 = \frac{w^2}{3}$ genau das aus dem Widerspruche w hervorgehende arithmetische Mittel der mittleren Fehlerquadrate der drei Winkel.

Bildet man für n Dreiecke den Wert m^2 nach der Formel (1), so ist m^2 das arithmetische Mittel der mittleren Fehlerquadrate aller Dreieckswinkel, wobei dieselben zunächst als unabhängig von einander gedacht sind.

Die Formel ist aber auch noch richtig, wenn die Dreiecke wie in einem Netze von einander abhängen; nur gehen dann bei der Mittelbildung die mittleren Fehler verschiedener Richtungen mit etwas verschiedenem Gewichte in das Ergebnis ein, infolge dessen die Sicherheit seiner Berechnung nicht die erreichbar grösste ist. Dieser Mangel wird aber unerheblich, sobald die Anzahl n eine bedeutende ist, wie in allen grösseren Dreiecksnetzen. Es ist erwünscht, zur Berechnung *alle* überhaupt in einem Netze vorhandenen Dreiecke heranzuziehen (und nicht z. B. in einem Vierecke nur 3 Dreiecke), damit jede die Sicherheit beeinflussende Auswahl vermieden wird.

Wenn eine Triangulierung sich nicht in lauter Dreiecke zerlegen lässt, d. h. wenn auch Vierecke, Fünfecke u. s. w. auftreten, so sind diese letzteren natürlich entsprechend zu behandeln, d. h. aus einem Viereck würde man $m = w : \sqrt{4}$ berechnen. Um glatte Tabellen zu erhalten, verfährt man dann am einfachsten so, dass man das w^2 eines Vierecks zunächst ausrechnet, aber nur mit $\frac{3}{4}$ seines Wertes zu den Dreiecken in Rechnung stellt, ebenso $\frac{3}{5}$ bei einem Fünfeck u. s. w.

Fig. 1.



Zu den vorerwähnten Bemerkungen über verschiedene Richtungsgewichte in einem Vierecke haben wir die nachfolgende Betrachtung angestellt:

In Fig. 1. ist ein Viereck mit Richtungsmessung in allen 6 Linien hin und her, also mit 12 Sichten in 4 Sätzen angenommen.

Wir betrachten die drei Dreiecke

$$ADC \qquad ADB \qquad ABC$$

und bilden diesen entsprechend folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -v_1 + v_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -v_8 + v_9 - v_{10} \quad . \quad +v_{12} + w_1 &= 0 \\ -v_1 \quad . \quad +v_3 - v_4 + v_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -v_{11} + v_{12} + w_2 &= 0 \\ -v_2 + v_3 - v_4 \quad . \quad +v_6 - v_7 + v_8 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad +w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hiezu gehören die drei Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} +6k_1 + 2k_2 - 2k_3 + w_1 &= 0 \\ +2k_1 + 6k_2 + 2k_3 + w_2 &= 0 \\ -2k_1 + 2k_2 + 6k_3 + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Auflösung giebt:

$$k_1 = \frac{-2w_1 + w_2 - w_3}{8}, \quad k_2 = \frac{w_1 - 2w_2 + w_3}{8}, \quad k_3 = \frac{-w_1 + w_2 - 2w_3}{8}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nun ist $[v\,v] = -[w\,k]$ und die Ausrechnung hiernach giebt:

$$-8\,[w\,k] = 2\,w_1^2 + 2\,w_2^2 + 2\,w_3^2 - 2\,w_1\,w_2 + 2\,w_1\,w_3 - 2\,w_2\,w_3 \qquad (4)$$

Das kann man aber übersichtlicher gestalten durch Einführung eines *vierten* Summen-Widerspruches w_4, welcher dem vierten Dreieck $B\,C\,D$ als Ergänzung zu (1) entspricht, nämlich:

$$w_4 = w_1 - w_2 + w_3 \qquad (5)$$

Durch diese Einführung kann man die Summe (4) algebraisch auf folgende Form bringen:

$$-8\,[w\,k] = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$$

und den mittleren Richtungsfehler n erhält man, da 3 unabhängige Bedingungsgleichungen benützt wurden:

$$\mu^2 = \frac{[v^2]}{3} = \frac{-[w\,k]}{3} = \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{3\,.\,8}$$

Der mittlere Winkelfehler m, welcher zum Richtungsfehler μ in der Beziehung steht, $m = \mu\sqrt{2}$, wird also erhalten:

$$\left.\begin{aligned} m^2 = 2\,\mu^2 &= \frac{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{12} \\ \text{oder} \qquad m &= \sqrt{\frac{[w^2]}{12}} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Wo nun $[w^2]$ die Summe aller *vier* w^2 ist.

Wenn die 4 Dreiecke, welche zu dem Viereck (Fig. 1.) gehören, nun mit *anderen* Dreiecken zusammen genommen werden sollen, so darf man den Wert m^2 aus (6) nur als aus *drei* Dreiecken berechnet einführen. Wenn also z. B. folgende 6 Werte w vorliegen:

$$w_0\ ,\ w_1\ ,\ w_2\ ,\ w_3\ ,\ w_4\ ,\ w_5 \qquad (7)$$

wobei w_0 und w_5 selbständig aus je *einem* Dreieck, dagegen w_1, w_2, w_3, w_4 zusammen aus einem Viereck mit 2 Diagonalen erhalten sind, so hat man zu rechnen:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + \frac{3}{4}(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) + w_5^2}{3\,(1 + 3 + 1)} \qquad (8)$$

Wenn man diese Unterscheidung nicht macht, sondern kurz so rechnet:

$$m^2 = \frac{w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 + w_5^2}{3\,.\,6} \qquad (9)$$

so werden die 12 Richtungen des Vierecks mit zu starken Gewichten eingeführt.

Als einfaches Zahlenbeispiel hiezu wollen wir das Hannoversche Stadt-Triangulierungsnetz von S. 189 nehmen. Dasselbe giebt nach S. 190—191 folgende 7 Dreiecksschlüsse:

$w_1 = -1{,}02''$	$w^2 = 1{,}04$	$w_4 = -0{,}76''$	$w^2 = 0{,}58$
$w_2 = +2{,}22$	$w^2 = 4{,}93$	$w_5 = +2{,}30$	$w^2 = 5{,}29$
$w_3 = -2{,}36$	$w^2 = 5{,}57$	$w_6 = +4{,}30$	$w^2 = 18{,}49$
	$11{,}54$	$w_7 = -2{,}76$	$w^2 = 7{,}62$
	$31{,}98$		$31{,}98$
	$[w^2] = 43{,}52$		$\frac{3}{4}[w^2] = 23{,}99$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man kurzer Hand nach der Formel (1) oder (9) rechnet, so hat man:

$$m = \sqrt{\frac{43{,}52}{3 \cdot 7}} = \pm 1{,}44'' \tag{10}$$

dagegen nach der etwas strengeren Formel (8):

$$m = \sqrt{\frac{11{,}54 + 23{,}99}{3 \cdot 6}} = \pm 1{,}40'' \tag{11}$$

Diese beiden Werte differieren nicht viel, man sieht also, dass in diesem Falle die glatte internationale Formel ziemlich dasselbe giebt, wie die kleine Verfeinerung mit der Viereckbehandlung.

Streng sind die beiden Werte (10) und (11) nicht, denn die strenge Rechnung mit allen Proben gab nach S. 195 den mittleren Fehler einer *Richtung* (dort ebenfalls mit m bezeichnet) $= \pm 1{,}04''$, es ist also der mittlere Winkelfehler entsprechend zu nehmen:

$$m = 1{,}04 \sqrt{2} = \pm 1{,}47'' \tag{12}$$

dass dieses etwas besser mit (10) als mit (11) stimmt, ist Zufall. —

Einen Zusatz zu der internationalen Fehlerformel wollen wir noch in dem Sinne machen, dass wir die Zuverlässigkeit eines darnach berechneten m schätzen. Da man die w als wahre unabhängige Fehler behandelt, muss man weiter die Formel (14) § 117. S. 450 anwenden, welche auf den fraglichen Fall übertragen giebt:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}} \left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n}}\right)$$

also nach (10):

$$m = 1{,}44'' \left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{7}}\right) = 1{,}44'' \left(1 \pm 0{,}267\right)$$

oder $$m = \pm 1{,}44'' \pm 0{,}38''$$

d. h. die Angabe, der mittlere Fehler sei $= 1{,}44''$, ist selbst mit einer Unsicherheit von 27 % ihres eigenen Wertes oder $\pm 0{,}38''$ behaftet.

§ 124. Verschiedene Berechnungen des mittleren Winkelfehlers.

Die internationale Fehlerformel ist streng richtig nur in dem seltenen Falle, dass Dreiecke unabhängig von einander, z. B. in einer Kette ohne Seitengleichungen, gemessen vorliegen. Schon bei Messung in vollen Richtungssätzen, wo ein Satz sich auf mehr als ein Dreieck erstreckt, ist die Formel nicht mehr streng.

Im Allgemeinen haben wir bei Winkelausgleichung mit r Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \text{ bzw. } = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{r}} \tag{1}$$

Als Beispiel hiezu können wir das Schwerd'sche Basisnetz von § 65. nehmen, welches hiernach den mittleren Fehler eines Winkels vom Gewichte 1, auf S. 211 gegeben hat $m = \pm 4{,}77''$. Wir haben aber auch sofort dabei gesehen (S. 212—213), dass dieser Gewichts-*Einheits*-Fehler nicht das ist, was man als Charakteristikum einer Triangulierung haben will, weshalb auf S. 213 auch noch der mittlere Fehler für mittleres Gewicht g berechnet wurde, den wir nun mit m' bezeichnen wollen:

$$m' = \pm 0{,}99'' \tag{2}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aber auch das ist noch nicht ein mit anderen Netzergebnissen vergleichbarer Wert, weil auf einer der Stationen des Netzes auf S. 208 ein für die Station selbst überschüssiger Winkel gemessen ist. (Station Mannheim mit 3 Winkeln (7) , (8) , (9) zwischen 3 Strahlen.) Wir wollen daher die weitere Aufgabe stellen, den mittleren Fehler zu berechnen für das mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels. Indem wir die Formeln (6) S. 255 auf die letzten 3 Werte unten auf S. 208 anwenden, bekommen wir:

$$\frac{1}{P_7} = 0{,}1000 - \frac{0{,}1000^2}{0{,}1690} = 0{,}0408$$

$$\frac{1}{P_8} = 0{,}0357 - \frac{0{,}0357^2}{0{,}1690} = 0{,}0282$$

$$\frac{1}{P_9} = 0{,}0333 - \frac{0{,}0333^2}{0{,}1690} = 0.0267$$

Hiezu noch die Summe der 6 ersten $\frac{1}{p}$ von S. 208:	0,2177
Gesamtsumme	0,3134
Mittel für 9 Werte	0,0348

Dieses ist die mittlere Gewichts-Reciproke für einen auf der Station ausgeglichenen Winkel, man berechnet also den mittleren Fehler m eines auf der Station ausgeglichenen Winkels von mittlerem Gewichte, unter Zuziehung der Zahl 4,77″ von (15) S. 211:

$$m = 4{,}77\sqrt{0{,}0348} = \pm 0{,}89'' \qquad (3)$$

Dieses ist etwas kleiner als das obige 0,99″ bei (2), wie es auch sein muss, weil das Gewicht des auf der Station ausgeglichenen Winkels im Allgemeinen grösser sein muss als das Gewicht des nicht ausgeglichenen Winkels.

Dieses kleine Beispiel hat uns dazu gedient, den scharfen Begriff zu bilden für das, was wir künftig stets berechnen wollen, nämlich den *mittleren Fehler m von mittlerem Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.*

In dem einfachen Falle des Schwerd schen Netzes S. 208 konnte dieses m leicht streng berechnet werden. Die allgemeinere strenge Theorie hiezu auf später (Gleichungen (17)—(20) verschiebend, haben wir inzwischen noch einiges andere zu behandeln.

Hat man eine Triangulierung nach *Richtungen* ausgeglichen, wie z. B. das Hannover sche Stadt-Netz in § 61. mit Fig. 1. S. 189, so giebt die Ausgleichung einen mittleren *Richtungs*-Fehler, welchen wir nun mit μ bezeichnen wollen, also bei r Bedingungsgleichungen:

$$\mu = \sqrt{\frac{[v^2]}{r}} \qquad (4)$$

Diesem entspricht ein mittlerer Winkelfehler:

$$m = \mu\sqrt{2} \qquad (5)$$

wie als Beispiel schon in (12) § 123. S. 472 angegeben wurde.

Hat man dabei ungleiche Richtungs-Messungs-Gewichte p in der Zahl n, so ist das mittlere Gewicht g zu berechnen aus den Reciproken, d. h.:

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right] \qquad (5)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Z. B. in dem belgisch-deutschen Verbindungs-Netze von S. 292—293 hat man $\left[\frac{1}{p}\right] = 57{,}8$ und mit $n = 34$ (ohne Rücksicht auf die Anschluss-Besonderheiten):

$$\frac{1}{g} = \frac{57{,}8}{34} = 1{,}70$$

der mittlere Richtungsfehler für die Gewichtseinheit ist nach S. 293 (dort mit m bezeichnet):

$$\mu_1 = \pm 0{,}62''$$

also der mittlere Richtungsfehler für mittleres Stationsrichtungsgewicht:

$$\mu = \mu_1 \sqrt{\frac{1}{g}} = 0{,}62\sqrt{1{,}7} = \pm 0{,}81'' \tag{6}$$

Wir gehen über zu dem sehr häufigen Falle der Ausgleichung nach Bessels Methode (§ 72—74.). Die hier auftretenden Verbesserungen, welche man gewöhnlich mit (1) (2) (3) ... bezeichnet, sind *Winkel*-Verbesserungen im Netz, und wenn man von Gewichts-Unterscheidungen absieht, so bekommt man bei r Bedingungsgleichen den mittleren Winkelfehler geradezu:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots (n)^2}{r}} \tag{7}$$

Wenn die Besselschen Nullpunkts-Korrektionen z nach § 74. berechnet sind, so kann man daraus zuerst einen mittleren Richtungs-Fehler und dann wieder durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ einen mittleren Winkelfehler berechnen in dieser Weise:

$$m = \sqrt{2\frac{v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \ldots}{r}} \tag{8}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} v_0 &= z \\ v_1 &= z + (1) \\ v_2 &= z + (2) \text{ u. s. w.} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Für die einzelne Station ist hiebei:

$$-z = \frac{[p'](1) + p''(2) + p'''(3)}{[p^\circ] + [p'] + [p''] + [p''']} \tag{10}$$

wo $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$, $[p''']$ nach S. 234 die Anschnitts-Zahlen der einzelnen Strahlen sind, so dass die Beziehung besteht:

$$[p^\circ]v_0 + [p']v_1 + [p'']v_2 + \ldots = 0 \tag{11}$$

Da diese ganze Berechnung mit z eine willkürliche Verteilungsart ist, kann man statt (10) auch kürzer so rechnen:

$$-z = \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (s-1)}{s} \tag{12}$$

wo s die Zahl der Strahlen für die fragliche Station ist, d. h. man stimmt nach (12) und (9) die $s - 1$ Winkel-Korrektionen auf s Richtungs-Korrektionen mit der Summe Null ab, indem dann statt (11) einfach $[v] = 0$ entsteht.

Dieses Verfahren ist angewendet in dem „Schweizerischen Dreiecksnetz, II. Band, Zürich 1885", S. 39, und auch bei der Neubearbeitung der Mecklenburgischen Triangulierung wurde in den Abrissen nicht mehr wie früher nach Bessel mit $[[p]v] = 0$, sondern einfach mit $[v] = 0$ orientiert (vgl. den späteren § 138.).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man die Wahl hat, entweder nach der Winkelformel (7) oder nach der Richtungsformel (8) zu rechnen, wobei aber m selbst beidemal ein Winkelfehler ist, so ist die Richtungsform (8) vorzuziehen, weil dabei keine Richtung im Vergleich mit einer anderen bevorzugt oder benachteiligt ist.

Die ganze Rechnung (7) oder (8) wird wohl nur noch auf ältere Triangulierungen, etwa bis 1880 anzuwenden sein, und zwar mit der Form (8) im Geodätischen Institut, (7) bei der Landesaufnahme.

Bequemlichkeits-Berechnungen mit dem durchschnittlichen Fehler.

In allen bisherigen Formeln treten Quadratsummen auf, welche für den vorliegenden Zweck auszurechnen sind. Obgleich dieses keine ins Gewicht fallende Arbeit ist, fühlt man doch manchmal bei überschläglichen Berechnungen, kritischen Vergleichungen u. s. w. das Bedürfnis, rasch einen mittleren Fehler zu bilden, indem man nur die absolute Summe $[\pm \delta]$ irgend welcher Fehler-Elemente δ benützt. Da wir die hiezu nötigen Theorieen bereits früher in § 114. und § 115. behandelt haben, bilden wir hier sofort die Anwendungen:

Wenn n einzelne Dreiecke vorliegen und die Summe $[\pm w]$ ihrer ohne Rücksicht auf das Vorzeichen zusammengenommenen Widersprüche, so hat man den mittleren Winkelfehler:

$$m = 1{,}2533 \frac{[\pm w]}{n\sqrt{3}} \tag{13}$$

Für Besselsche Ausgleichung und Winkel-Verbesserungen (1) (2)... hat man mit absoluter Summierung (1) + (2) + (3) + ... nach (12) § 115. S. 444:

$$m = 1{,}2533 \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (n)}{\sqrt{n\,r}} \tag{14}$$

Wenn man die Besselschen Winkel-Korrektionen (1) (2) (3)... mittelst der Nullpunkts-Korrektionen z auf Richtungen reduziert hat, so dass die Richtungsverbesserungen v_0 , v_1 , v_2... nach (9) vorliegen, wobei die Anzahl aller dieser v gleich n' sei, so wird der mittlere Winkelfehler:

$$\left.\begin{aligned} m &= 1{,}2533\sqrt{2}\,\frac{v_0 + v_1 + v_2 + \ldots}{\sqrt{n'\,r}} \\ m &= 1{,}7715\,\frac{[\pm v]}{\sqrt{n'\,r}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

In geschichtlicher Beziehung ist hiezu zu berichten, dass in dem Werke von General Baeyer „die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie", Berlin 1849, in § 97. S. 353 eine „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen angegeben wird nach der Formel:

$$s = \frac{s}{m}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{1 \pm \frac{\varrho\sqrt{\pi - 2}}{\sqrt{m}}\right\} \tag{16}$$

wo s die Summe $[\pm v]$ unserer Formel (15) und m die Anzahl der v bedeutet, also mit umgesetzten Bezeichnungen entsprechend unserer Formel (15):

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{[\pm v]}{n'}\left\{1 \pm \frac{0{,}5096}{\sqrt{n'}}\right\} \tag{16a}$$

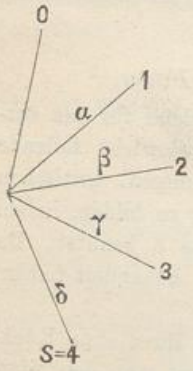
$$m = 1{,}2533\,\frac{[\pm v]}{n'}\left\{1 \pm \frac{0{,}5096}{\sqrt{n'}}\right\} \tag{16b}$$

Dieses ist die erste Formel der Gruppe (15) in unserem § 117. S. 540, wenn daselbst im ersten Gliede der mittlere Fehler, im zweiten Gliede der wahrscheinliche Fehler gewonnen wird.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die ganze Rechnungsart (16) gehört aber offenbar gar nicht hierher, da die v nicht wahre Fehler, sondern scheinbare Fehler für n' Elemente mit r Bedingungsgleichungen sind. Auch würde m Sinne der heutigen Terminologie (§ 70. S. 230) die Formel (16) nicht einen mittleren Winkelfehler, sondern einen Richtungsfehler geben. Wir haben all dieses hier nur mitgeteilt zur Aufklärung für die geodätische Litteratur, etwa 1850—1875, wo die falsche Formel (16) lange eine Rolle spielte.

Fig. 1.



Mittleres Gewicht eines Winkels auf der Station.

In dem einfachen Falle, den wir oben bei (2)—(3) behandelt haben, konnte das mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels leicht angegeben werden. Folgendes ist die weitere Theorie hiezu nach dem Vorgang des „Schweizerischen Dreiecksnetzes, II. Band, Zürich 1885", S. 38 und des „Märkisch-Thüringischen Netzes des geodätischen Instituts, Berlin 1889", S. 63—64.

Bezeichnet Fig. 1. eine Station, deren Nullstrahl nicht zum Netze gehört, dann haben die Winkel zwischen den übrigen Strahlen folgende Gewichts-Reciproken:

$$(1,2) = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\beta] + [\beta\,\beta] \qquad (2,3) = [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\gamma] + [\gamma\,\gamma]$$
$$(1,3) = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\gamma] + [\gamma\,\gamma] \qquad (2,4) = [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\delta] + [\delta\,\delta]$$
$$(1,4) = [\alpha\,\alpha] - 2\,[\alpha\,\delta] + [\delta\,\delta] \qquad (2,1) = [\beta\,\beta] - 2\,[\beta\,\alpha] + [\alpha\,\alpha] \text{ u. s. w.}$$

Denkt man sich alle diese Werte angeschrieben und addiert, so findet man mit Rücksicht darauf, dass $[\alpha\,\beta] = [\beta\,\alpha]$ u. s. w. ist, allgemein für s Strahlen 1. 2. 3. 4. die Summe:

$$(2\,s-2)\,([\alpha\,\alpha]+[\beta\,\beta]+[\gamma\,\gamma]) - 4\,([\alpha\,\beta]+[\alpha\,\gamma]+[\alpha\,\delta]+[\beta\,\gamma]+[\beta\,\delta]+[\gamma\,\delta]) \quad (17)$$

kürzer bezeichnet $= \qquad 2\,(s-1)\,[A\,A] - 4\,[A\,B] \qquad (18)$

Da $s\dfrac{s-1}{2}$ Winkel zwischen s Strahlen möglich sind, und hiebei jeder Winkel zweimal auftritt, bekommt man den Mittelwert für einen Winkel dieser Station:

$$m^2 = \frac{\mu^2}{s}\left(2\,[A\,A] - 4\,\frac{[A\,B]}{s-1}\right) \qquad (19)$$

Dabei ist die Bedeutung der Zeichen $[A\,A]$ und $[A\,B]$ durch Vergleichung von (17) und (18) bestimmt, und in (19) ist μ der Gewichtseinheits-Fehler. Denkt man sich diesen Ausdruck (19) auch für die übrigen Stationen berechnet, so bekommt man daraus nach dem Prinzip des arithmetischen Mittels der Fehlerquadrate, den Gesamt-Mittelwert:

$$\frac{m^2}{\mu^2} = 2\,\frac{\left([A_1\,A_1] - \dfrac{2}{s_1-1}\,[A\,B]\right) + \left([A_2\,A_2] - \dfrac{2}{s_2-1}\,[A_2\,B_2]\right) + \ldots}{s_1 \qquad + \qquad s_2 \qquad + \ldots} = \frac{1}{P} \quad (20)$$

Diese Formel gilt zunächst für den Fall von Fig. 1., wo der Nullstrahl nicht zum Netz gehört. Wenn der Nullstrahl selbst zum Netz gehört, so gilt die Formel (20) immer noch, jedoch muss dann der Nullstrahl in der Zahl s mitgezählt werden. Man findet dieses, wenn man die ganze Betrachtung für diesen Fall wiederholt.

Der durch (20) bestimmte Wert P ist das gesuchte mittlere Gewicht eines auf der Station ausgeglichenen Winkels.

Um die Bedeutung dieser Formeln deutlich zu machen, nehmen wir von § 72.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

die Vierecks-Ausgleichung der Gradmessung in Ostpreussen, und haben von S. 240 oder aus der Tabelle von S. 244:

	$[\alpha\,\alpha]$, $[\beta\,\beta]$ u. s. w.	$[\alpha\,\beta]$, $[\alpha\,\gamma]$ u. s. w.	
Nidden	+ 0,0611	0,0175	$s_1 = 3$
„	+ 0,0764		
Lattenwalde	+ 0,1431	0,0745	$s_2 = 3$
„	+ 0,0805		
Kalleninken	+ 0,1667	0,0833	$s_3 = 3$
„	+ 0,1667	0,1753	
Gilge	+ 0,3333	0.	$s_4 = 1$
	1,0278		10

$$\frac{1}{P} = 2\,\frac{1{,}0278 - 0{,}1753}{10} = 0{,}17050$$

Als mittleren Gewichtseinheits-Fehler nehmen wir nach (6) S. 247 den Wert m_2 aus der Netz-Ausgleichung, nämlich $\pm 4{,}88''$, es ist also nun der mittlere Winkel-Fehler für mittleres Stationsgewicht:

$$m = 4{,}88\sqrt{0{,}1705} = \pm 2{,}02''.$$

Bei einer grossen Zahl von Stationen und Richtungen wird diese Rechnung wohl meist nahe dasselbe geben, wie eine der früher bei (7) und (8) S. 474 erwähnten genäherten Mittelbildungen.

Es sind hier auch die drei Formeln für den Gewichtseinheits-Fehler vorzuführen, welche wir früher auf S. 152 und S. 157—160 kennen gelernt haben, nämlich mit kurzen Bezeichnungen zusammengefasst:

Stationen $$\mu_1 = \sqrt{\frac{[v'\,v']}{n'}} \qquad (21)$$

Netz $$\mu_2 = \sqrt{\frac{[v''\,v'']}{r}} \qquad (22)$$

Gesamt-Ausgleichung $$\mu = \sqrt{\frac{[v'\,v'] + [v''\,v'']}{n' + r}} \qquad (23)$$

Das Verhältnis $\mu_2 : \mu_1$ giebt für eine Triangulierung Aufschluss darüber, ob, und in welchem Mass, die Netz-Ausgleichung Fehler-Einflüsse zu Tage gefördert hat, welche auf den Stationen verborgen blieben.

Die Netz-Ausgleichung ist für die Genauigkeitsbeurteilung im Ganzen massgebend, und unser im bisherigen behandelter mittlerer Winkelfehler m bezieht sich nur auf Netz-Ausgleichung. Hat man Genauigkeits-Berechnungen, welche sich bei einer Triangulierung auf μ_1 oder μ beziehen, so kann man sie, wenn alle drei Werte μ_1, μ_2 μ bekannt sind, dadurch verhältnismässig auf μ_2 reduzieren.

§ 125. Triangulierung der Niederlande von Snellius 1610.

Die erste Triangulierung im heutigen Sinne, mit Winkelmessung in Gradmass, und trigonometrischer Berechnung verdanken wir dem Niederländer *Willebrord Snel van Roien* (latinisiert *Snellius*) geb. 1580 in Leiden, gest. 1626.

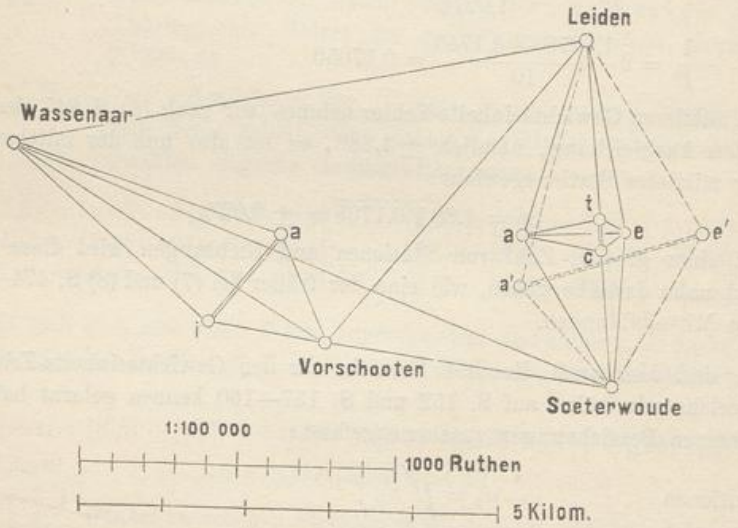
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Sein berühmtes Werk (in d. Kgl. Bibliothek in Berlin vorhanden) hat den Titel: „Eratosthenes Batavus, de terrae ambitus vera quantitate, a Willebrordo Snellio Διὰ τῶν ἐξ ἀποσχημάτων μετρυσῶν διοπτρῶν. Suscitatus. (O quam contemta res est homo, nisi supra humana se erexerit) Lugduni Batavorum apud Jodocum à Colster. Ann. CIↃIↃCXVII (1617).

Hiezu ist weiter zu erwähnen eine wertvolle historische Abhandlung in der „Tijdschrift voor Kadaster en Landmeetkunde, onder redactie van I. Boer, Hz. te Utrecht, Jaargang V, 1889, 1e Aflevering": Overzicht van de graadmetingen in Nederland (met plaat) door Dr. J. D. van der Plaats, und: Graadmeting, Geschiedkundig overzicht door G. B. H. de Balbian.

Nachstehende Fig. 1. giebt das Basisnetz der Triangulierung von Snellius.

Fig. 1. (1 : 100 000.)



Die erste Basis von Snellius war die kleine Strecke $t\,c$ auf der Geraden Leiden-Soeterwoude, nämlich $t\,c = 87{,}05$ Ruten ($= 327{,}85^{m}$). Daraus wurde durch zwei Dreiecke abgeleitet $a\,e = 326{,}43$ Ruten und unmittelbar gemessen 326,90 Ruten. Das trigonometrische Ergebnis $a\,e = 326{,}43$ R. wurde beibehalten, und daraus abermals durch 2 Dreiecke abgeleitet: Leiden-Soeterwoude $= 1092{,}35$ Ruten ($= 4114{,}06^{m}$). Damit wurde trianguliert bis Wassenaar und Vorschooten, und zwischen diesen zwei Punkten wieder eine Grundlinie $a\,i = 348{,}1$ Ruten gemessen. Der trigonometrische Anschlussfehler wird hier nicht mitgeteilt.

Dagegen hat Snellius einen Anschluss an eine dritte 166 Ruten lange Grundlinie zwischen Oudewater und Montfort etwa 30^{km} östlich von der ersten Grundlinie, der trigonometrische Anschluss ist $2923{,}3 - 2934{,}6 = -11{,}3$ Ruten oder 1 : 260, wozu Snellius bemerkt (S. 181), dass er solche Genauigkeit kaum zu hoffen gewagt habe.

Unsere Fig. 1. zeigt noch eine vierte, punktierte Grundlinie $a'\,e' = 475{,}00$ R. Dieses ist Snellius' spätere Messung und Musschenbroeks Berechnung, sie giebt Leiden-Soeterwoude $= 1097{,}117$ Ruten gegen 1092,35 R. der ersten Bestimmung.

Die ganze Triangulierung von Snellius umfasst 33 Dreiecke, welche im wesentlichen in der heute noch üblichen Weise zu einer Breitengradmessung zwischen Alkmaar und Bergen op Zoom benützt wurden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 126. Triangulierung von *Schickhart* in Württemberg 1620.

Als zweiten selbständigen Urheber einer Landestriangulierung haben wir den schwäbischen Professor *Schickhart* in Tübingen zu nennen, welcher im Jahre 1629 eine kleine Schrift veröffentlichte, die nach seinem Tode nochmals gedruckt worden ist mit dem Titel:

„Kurtze Anweisung, wie Künstliche Land-Tafeln auss rechtem Grund zu machen, und die bisher begangene Irrthumb zu verbessern, sampt etlich New erfundenen Vörtheln, die Polus Höhin auffs leichtest, und doch scharpff gnug zu forschen. Durch Herrn Wilhelm Schickharten Seel. gewesenen Professorn in Tübingen. Emendationis primus est gradus, Errorem detexisse. Tübingen. Verlegts Johann Georg Cotta. Im Jahr 1669. (22 Seiten 4° und 1 Kupfertafel.)

Über sein trigonometrisches Messungsverfahren sagt der Verfasser in diesem Buche:

Hierzu muss man ein gerechtes Instrument haben, mit demselbigen hin und her auff die hohe Berg und Kirchen-Thürn steigen, die *Angulos* oder Winckel der umbliegenden Ort fleissig absehen, ihre Zahl in ein Schreibtafel verzeichnen, und darauss hernachher die Landtafel formiren. Darzu brauchen andere gemeiniglich ein Scheiben, so in 360 Grad abgetheilt, auch mit eim Zeiger und Absehen zugericht ist, wie in der figur numero I zu sehen. Ich aber halte nicht vil drauff, wo man gar scharpff handeln soll: dann ist sie klein, so giebt sies nicht subtil gnug, ist sie aber gross, so wirds unbequem über Land zu bringen. Das Metall ist schwer, Holz aber wandelbar. Drumb mach ich nur 3 gleiche Stäb in Form eines Δ aequilateri zusamen, theil sie auss *ex Tabulis Tangentium*, gib ihnen auff den Ecken ihr unbewegliche, an die Seit aber ein lauffendes Absehen, und observire damit, so zeigt es mir alle Minuten fleissig. Dann die Stäb seind lang, bringen doch dem Raisenden kein Beschwerd, weil man sie von einander legen kann; so ist auch ihrer Beständigkeit wol zu trauen, sintemal kein Holtz nach der Längin schweinet. Mit solche stäben sind die Ort, so im andern Exempel abgerissen, abgesehen worden. Ich will von dem Prozess nur ein stücklin zum Beyspill erzehlen. Es ligt bei Reutlingen ein zerfallen Schloss auff eim hohen Berg, die Achel genannt, darauf bin ich, sampt guten Freunden (als Gehülffen und Zeugen diser Verrichtung) gestige, hab mein Schragen aufgestellt, und zur lincke seit von dem Capellin des Wurmlingerbergs angefangen, gegen der rechten Hand hinumb zu messen, auf den Tübinger S. Gergen Thurn 7 gr. 45 min. von dannen gen Walthausen (vor Zeiten der Graven von Tübingen Cantzley, jetzund ein Mayerhof) 10 gr. 18 min. dannen gen Kirchentälinsfurt 8 g. 10 m. dannen gen Oferdingen 37 gr. 54 m. dannen gen Metzingen (seind alle Dörfer) 55 g. 13 m. dannen gen Hohen Neyffen, das veste Bergschloss, 24 g. 49 m. dannen Eningen 67 g. 7 m. endlich wider biss an den ersten Wurmlinger Berg, 148 gr. 46 min. Und obwol in disem Spatio gegen der Alb, nichts anders zu sehen war, als der rauhe Berg, geliebt es mir doch, zur Ergäntzung des Vmbkreises, diss auch zu messen, von Prob und Sicherheit wegen, weil die gantze Summ, als ein voller Circkel 360 Grad machen soll, hab ich nun ein paar Minuten zu vil gefunden, so für unempfindlich zu halten, und etwan durch den unebnen Horizont, mögen eingeschlichen sein. Also fort hab ich auch zu vorgemelte Kirchentälinsfurt, Walthausen, Wurmlinger Berg; item Roseck, Herrenberg, Weilenburg, alt Rotenburg (eim alten Burgstell) und mehr andern, sonderlich hohen Orten, gethan: Darauss die umbligende Dörffer und Stätt mit solcher Schärpf in Grund gelegt, dass, so man von eim Thurn zum andern ein Schnur anspannen sollt, die Tafel weisete wie viel sie Würtembergische Schuch lang seyn.

Als Beispiel seiner Methode giebt Schickhart das in Fig. 2. S. 480 abgebildete Netz.

Dieses ist ein Holzschnitt nach der Figur in Schickhart s Buche von 1669 (aus der Bibliothek der Universität Tübingen).

Herr Vermessungs-Kommissär *Steiff* in Stuttgart schrieb uns dazu, dass die erste Ausgabe Schickhart s von 1629, (welche sich in der Stuttgarter öffentlichen Bibliothek befindet), ein wesentlich besseres Dreiecksnetz enthält, das auch mehr Winkel giebt, und den Winkel Tübingen-Achalm-Kirchentellinsfurt = 18° 28′ statt 16° 28′, wie in der Ausgabe von 1669 ist (vgl. Z. f. V. 1891, S. 535 und nun in unserem nachstehenden Holzschnitte S. 480 verbessert).

Herr Steiff hat auch, entsprechend dem Wunsche von „Z. f. V. 1891“, S. 536, die Punkte Schickhart s mit verschiedenen Hilfsmitteln erforscht und deren Coordinaten im heutigen Württembergischen System bestimmt, nämlich für die von Achalm aus angezielten Punkte:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wurmlingen	$y = -17697$	$x = -5234$	
Tübingen Kirchturm	$+1276$	$+98$	
Kirchentellinsfurth Kirchturm	$+25168$	$+4456$	
Oferdingen Kirchturm	$+40883$	$+12138$	(1)
Metzingen Kirchturm	$+60599$	$+6704$	
Hohen-Neuffen	$+88102$	$+14133$	
Eningen Kirchturm	$+53979$	-12707	

Diese Coordinaten sind in Württembergischen Fuss gegeben, wobei 1 Fuss = 0,2864226m ($log = 9.4570073$). Der Punkt Waldhausen ist als unsicher nicht dabei.

Achalm Turm hat die Coordinaten in Württemb. Fuss:

$$y = +49865 \qquad x = -9889$$
$$= +14282{,}5^m \qquad = -2832{,}4^m$$

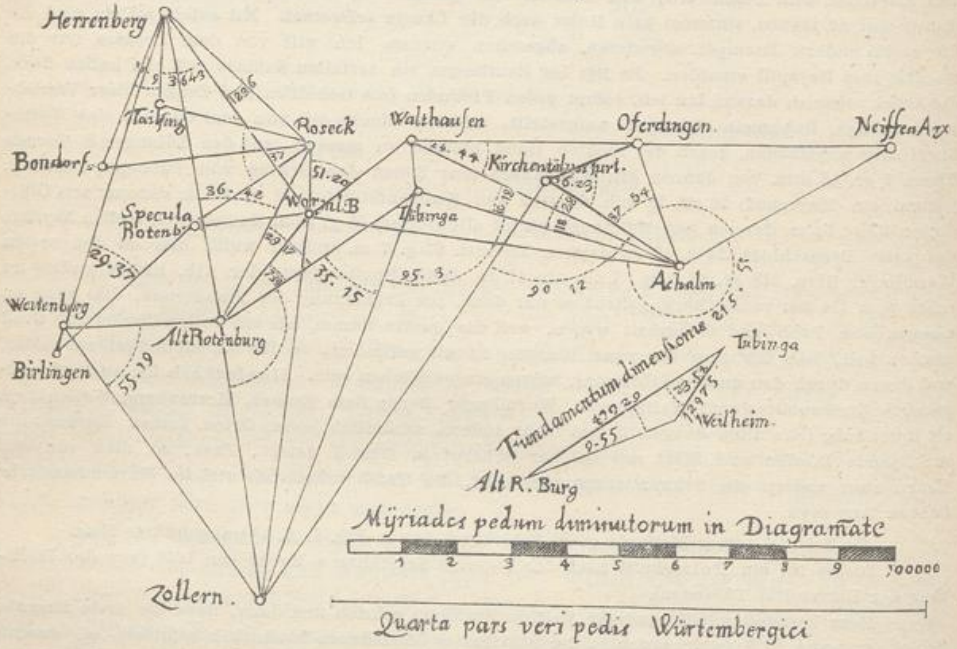
Schickhart s Standpunkt vor 1829 war aber jedenfalls nicht der Turm, sondern nach Steiffs Ermittlung die Mitte der Burgfläche mit den Coordinaten

in Württemb. Fuss $y = +9833$ $x = -9801$.

Fig. 2. Trigonometrisches Netz von Schickhart etwa 1620.

Exemplum Regionis circa Tubingam ex concatenatis angulis accuratissime delineati.

(Massstab 1 : 440 000)



Wir haben daraus Veranlassung genommen, die Schickhart schen Winkel in Form eines Richtungssatzes als Rückwärts-Einschneidung auszugleichen (nach dem Schema S. 351), wie aus folgendem Abrisse zu ersehen ist, in welchem unter α die von Schickhart in seinem Texte und in seinen Netzbildern als gemessen angegebenen Einzelwinkel und unter β deren Horizontausgleichung verstanden sind, und das übrige im Wesentlichen ebenso wie auf S. 351 ist.

Abriss der Station Achalm, nach Schickhart 1629.

Zielpunkt	Entf. s	Einzelwinkel α	Einzelwinkel β	Richtungswinkel beob. B	Richtungswinkel trig. φ	$v = \varphi - B$	v^2
Neuffen . . .	12,93km			57° 56,1′	57° 59,4′	+3,3′	11
		67° 7′	67° 6,7′				
Eningen . . .	1,45			125 2,8	125 2,8	0,0	0
		148 46	148 45,7				
Wurmlingen. .	19,39			273 48,5	273 51,8	+3,3	11
		7 45	7 44,8				
Tübingen. . .	14,19			281 33,3	281 31,0	−2,3	5
		18 28	18 27,7				
Kirchentellinsf.	8,16			300 1,0	300 1,4	+0,4	0
		37 54	37 53,7				
Oferdingen . .	6,79			337 54,7	337 49,0	−5,7	32
		55 13	55 12,7				
Metzingen . .	5,64			33 7,4	33 8,7	+1,3	2
		24 49	24 48,7				
Neuffen . . .	12,93			204,0	204,1	+0,3	61
		360° 2′	360° 0,0′				

$$m = \sqrt{\frac{61}{7-3}} = \pm 3{,}9'$$

Der mittlere Fehler einer Richtung ergiebt sich $= 4'$, ein befriedigendes Mass, wenn man bedenkt, dass auch in der Unsicherheit der Zielpunkte noch ein Teil der Fehler enthalten ist. Die Standpunkts-Coordinaten selbst fanden wir:

Achalm (1629) $y = +49826 \pm 16$ $x = -9794 \pm 14$ Württemb. Fuss
$= +14271{,}3^m \pm 4{,}6^m$ $= -2805{,}3^m \pm 4{,}1^m$ Meter.

Dieser Punkt liegt 29m nordwestlich (Richtungw. = 338°) vom Turm. Weiteres hierüber ist zu erwarten von den Untersuchungen, welche Herr *Steiff* in Stuttgart angestellt hat und noch fortsetzen wird.

Berichtigend haben wir auch noch anzugeben, dass unsere Entfernungsberechnungen von „Zeitschr. f. Verm. 1891", S. 536 insofern unzutreffend waren, als der Punkt Tübingen nicht das zu Schickharts Zeit noch gar nicht vorhandene Schloss mit den Coordinaten $y = 0$ und $x = 0$, sondern Stadtkirchturm mit $y = +1276$ und $x = +98$ Württb. Fuss zu nehmen ist, womit die Entfernungsvergleichung ganz erheblich besser wird, und jedenfalls den Massstab 1 : 440 000 giebt, ebenso wie auch die Vergleichung der 7 Entfernungen s aus vorstehender Ausgleichung mit den entsprechenden Abmessungen aus Schickharts Karte.

Einen tieferen Einblick in die Geschichte von Schickharts trigonometrischem Werke giebt eine vor Kurzem von dem Inspektor *Regelmann* des Württemb. statistischen Landesamtes aus tief vergrabenen Archiv-Schätzen an das Licht gezogene Sammlung von alten Karten und Urkunden, mit sehr interessanten Facsimile-Abbildungen, herausgegeben unter dem Titel:

Abriss einer Geschichte der Württembergischen Topographie, und nähere Angaben über die Schickhart'sche Landesaufnahme Württembergs, zum X. Geographentag zu Stuttgart, von Inspektor *C. Regelmann*, aus den Württemb. Jahrbüchern für Statistik und Landeskunde 1893, im Auszug auch „Zeitschr. f. Verm. 1893" S. 289—296.

Wilhelm Schickhart, geb. 1592, Hebraicer, Mathematiker und Astronom, Professor in Tübingen, gest. 1635, machte seine trigonometrischen Messungen von 1624 bis 1635. Als Scholarch des Landes stieg er bei seinen Visitationsreisen auf alle Berge und Türme, und beobachtete auf seinem „Schragen" oder mit dem Kompass, nach allen wichtigen Zielpunkten, machte auch Aufzeichnungen über Wasserläufe u. s. w. Seine Originalmessungen sind vor Kurzem im Geheimen Haus- und Staatsarchiv in Stuttgart wieder aufgefunden worden als ein Büchlein von 216 Seiten mit dem Titel:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

„Pinax observationum chorographicarum. Portolani ejusmodi lineas vocant Πορεντ(?)άνες N.B. Diss kleine Büchlin hatt mich vil und grosse Mühe kostet, biss ich auff so vil berg herum geraiset bin, und alles abgemessen. Wilhelm Schickhart, G. W. — Thesauri loco asservetur."

Dazu kreisrunde Scheiben von 16^{cm} Durchmesser mit Strahlen und beigeschriebenen Zielpunktsnamen.

Zu dem Worte „Portolani" entnehmen wir aus einem Berichte über den Deutschen XI. Geographentag in Bremen, 19. April 1895, Prof. Oberhummer (München), „dass im Altertum Seekarten vorhanden gewesen sein müssen, die erhaltenen Periplen, die den Portolanen der Italiener entsprächen, verlangen eine kartographische Ergänzung". Das von Schickhart gebrauchte griechische Wort Πορ . . . ist noch nicht erklärt.

Das von Regelmann beigegebene Facsimile der Seite 216 dieses Buches giebt:

Vayhing auf d. Fildern 15. Febr. 1635.

108 Mayring	126 Sielming
135 Hoh. Neuffen	115 Pliening
145 Hoh. Aurach	73½ Degerloch
140 Echterding	45 Cannstatt
193 Rohr	46 . . oder 47 . . circiter, Stuttgart
127 Bernhausen	65 Kaltenthal.

Hiezu sind uns die Coordinaten der heutigen Württembergischen Landesvermessung, bezogen auf Tübingen, mitgeteilt worden, mit welchen wir folgende Richtungswinkel berechnet haben:

106°	16′	Möhringen	124° 17′	Unter-Sielmingen
133	12	Hohen-Neuffen	113 54	Plieningen
143	15	Hohen-Urach	72 2	Degerloch
137	58	Echterdingen	43 24	Cannstatt
191	13	Rohr	45 32	Stuttgart
126	2	Bernhausen	?	Kaltenthal

Vaihingen mit $y = +4342^m$ und $x = +23672^m$ liegt 3′ 32″ östlich von Tübingen und hat gegen Tübingen die Meridianconvergenz $= 2'\,40''$. Damit und durch Vergleichung der beiden vorstehenden Zahlenreihen findet man weiter, dass Schickharts Angaben von 1635 magnetische Azimute sind mit einer Missweisung 2° 40′ westlich, auch kann man daraus den mittleren Fehler von Schickharts Kompass-Peilungen berechnen, derselbe ergiebt sich $= \pm 22'$.

Zu dieser magnetischen Missweisung von $\delta = 2°\,40'$ westlich für das Jahr 1635 mögen auch noch zwei andere alte Angaben aus Württemberg citiert werden, nämlich nach Kieser 1684, $\delta = 5°\,49'$ westlich („Zeitschr. f. Verm. 1893", S. 15) und Joh. Majer in Walddorf 1705, $\delta = 9°\,30'$ westl. (Jordan-Steppes, „deutsches Verm. I." S. 265) und nach Regelmann S. 45 giebt Majer auch an: Deklination „welche alle 7 Jahre variert" (jährliche Änderung $\frac{1°}{7}$?).

Auf den 216 Seiten seines Pinax hat Schickhart mehrere tausend Richtungsmessungen von 1624—1635 gesammelt, und daraus eine Karte konstruiert in 13 Blättern in 1 : 130 000, von denen leider nur noch ein *einziges*, Tabule VIII, in Form der heutigen Gradabteilungskarten, mit 50′ geogr. Länge und 25′ geogr. Breite erhalten ist. Alle 12 anderen Blätter sind — ein echt schwäbisches Schicksal — im dreissigjährigen Krieg zu Grunde gegangen. Aber wenigstens eine Verkleinerung und Ergänzung des Schickhartschen Landesvermessungswerkes vom Anfang des 17. Jahrhunderts ist erhalten und weiter ausgebildet worden in der Karte des Herzogtums Wirtenberg des Pfarrers Joh. Majer in 1 : 250 000 von 1710, über welche wir früher (Jordan-Steppes, „deutsch. Verm. 1882", S. 264—265) einiges berichtet haben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Dass Schickhart bereits die Aufgabe des Rückwärts-Einschneidens (Konstruktion mit 2 Kreisen) kannte, haben wir auch schon früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1892", S. 297 durch einen Brief von Schickhart an Kepler von 1624, mitgeteilt, wie auch in unserem Band II. 4. Aufl. 1893, S. 307, und Schickharts Anschauung des Messtisches daselbst S. 687.

In diesem Zusammenhange ist auch zu erwähnen (aber allerdings nicht als trigonometrische Messung) das altwürttembergische Forstkartenwerk in 1 : 8256 von Kieser, beschrieben von Regelmann in der „Zeitschr. f. Verm. 1893", S. 7—19.

Nach neuester Mitteilung ist Aussicht vorhanden, dass das Württembergische statistische Landesamt den ganzen *Pinax* Schickharts mit einer Übersichtskarte veröffentlichen und dadurch eine Ehrenpflicht gegenüber dem Ahnherrn der Schwäbischen Geodäten erfüllen wird. — Die Fortsetzung der Untersuchungen von Herrn Steiff würde sich namentlich auch darauf erstrecken, ob Schickhart 1830 seine auf einige Minuten genauen Winkelmessungen nur graphisch verwertet hat oder ob er auch schon im heutigen Sinne trigonometrisch gerechnet hat?

§ 127. Die französischen Gradmessungen des vorigen Jahrhunderts.

Von den Niederländern (Snellius 1615) ging die geodätische Führerschaft an die Franzosen über, welche namentlich im 18ten Jahrhundert die berühmten Gradmessungen in Peru und Lappland ausgeführt haben, durch welche die Abplattung der Erde geodätisch entschieden worden ist.

Die französische Gradmessung in Peru von 1736 ist beschrieben in dem Werke „Mesure des trois premiers degrés dans l'hémisphère australe, par M. de La Condamine", Paris 1751. Auf S. 22—39 dieses Werkes sind die Winkel von 43 Dreiecken mitgeteilt. Der grösste Widerspruch ist 13″ und die Quadratsumme aller Widersprüche ist 1718, also der mittlere Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{1718}{43 \cdot 3}} = \pm 3{,}65'' \qquad (1)$$

Auf S. 85 dieses Werkes wird auch der Basisanschluss mitgeteilt. Die Triangulierung stützte sich auf die 6273 Toisen lange Basis von Yarouqui und leitete aus derselben durch 43 Dreiecke die Basis von Tarqui ab mit dem Resultat 5260,03 Toisen, während die unmittelbare Messung 5258,949 Toisen gab. Die Differenz ist:

1,081 Toisen oder 205^{mm} für 1^{km}.

Die Entfernung beider Grundlinien unter sich ist etwa 3° oder ungefähr 330 Kilometer.

Die Triangulierung der französischen Gradmessung in Lappland vom Jahre 1736 zwischen Tornea und Kittis umfasst 21 Dreieckspunkte mit einer Basis. Diese Triangulierung ist deutscherseits wiederholt nach d. M. d. kl. Q. behandelt worden. Im Jahre 1827 wurde dieselbe von Rosenberger ausgeglichen, wobei der wahrscheinliche Fehler eines Winkels = 6,0″ berechnet wurde („Astr. Nachr.", 6. Band, S. 18). Hansen hat im Jahr 1831 ebenfalls eine Ausgleichung dieser Triangulierung unternommen und findet den mittleren Winkelfehler = 10,99″ („Astr. Nachr." 9. Band, S. 243). Der Unterschied rührt davon her, dass Rosenberger, wie Hansen „Astr.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nachr." 9. Band, S. 216 angiebt, unter 24 Bedingungs-Gleichungen 6 hatte, welche bereits in den übrigen enthalten waren.

Nach einer Notiz von Nagel im „Civilingenieur 1890", S. 412 findet man aus 16 Dreiecken nach der internationalen Formel:

$$m = \sqrt{\frac{8744}{16 \,.\, 3}} = \pm 13{,}50'' \qquad (2)$$

Die französische Gradmessung von Méchain und Delambre zwischen Dünkirchen und Barcelona von 1792 wurde in 3 Bänden 1806—1810 veröffentlicht in dem berühmten Werke: „Base du système métrique etc." III. Band, S. 605 sagt über die Genauigkeit:

bei 36 Dreiecken ist der Dreiecks-Widerspruch w zwischen 0″ und 1″
„ 27 „ „ „ „ „ „ „ 1″ „ 2″
„ 18 „ „ „ „ „ „ „ 2″ „ 3″
„ 4 „ „ „ „ „ „ „ 3″ „ 4″
„ 3 „ „ „ „ „ „ „ 4″ „ 5″

Indem man nun auch für die einzelnen w jeweils den Durchschnitts-Wert der betreffenden Gruppe nimmt, z. B. 0,5″ für die ersten 36 Dreiecke, 1,5″ für die folgenden 27 Dreiecke u. s. w., berechnet man den mittleren Winkelfehler näherungsweise $m = \pm 1{,}05''$.

(Dieses sind 88 Dreiecke, während auf S. 605 die Zahl 90 Dreiecke genannt ist.)

Nagel berechnet im Civilingenieur 1890 S. 412 nach der internationalen Formel aus 98 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{367{,}48}{98 \,.\, 3}} = \pm 1{,}12'' \qquad (3)$$

§ 128. England, Russland, Dänemark.

I. Die britische Landes-Vermessung.

Die schon 1783 unter General Roy begonnene Triangulierung gelangte 1858 zum Abschluss unter James und Clarke.

Es wurde hierüber ein grosses Werk herausgegeben:

„Ordnance trigonometrical survey of Great Britain and Ireland. Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimensions and mean specific gravity of the earth as derived from, etc., by Captain Alexander Ross Clarke under the direction of Colonel H. James, Superintendent of the Ordnance survey. London 1858."

Die Ausgleichung der Triangulierung ist in 21 Partial-Netze, mit zusammen 202 Punkten, zerlegt worden.

Die Ausgleichung erfolgte nach Richtungen („ord. trig. surv." S. 273—277). Der Netz-Ausgleichung ging eine genäherte Stations-Ausgleichung voran, welche wir schon in § 69, Tabelle S. 228 beschrieben haben. An diese Stations-Ausgleichungen schlossen sich genäherte Gewichts-Bestimmungen an („ord. trig. surv." S. 66), wobei teils die Abweichungen der einzelnen Richtungs-Beobachtungen von ihrem Mittel, teils die Zahl der Einstellungen, als Genauigkeitsmass dienten. Die Resultate der Stations-Ausgleichungen gingen mit diesen Gewichten wie unmittelbar beobachtete Richtungen in die Netz-Ausgleichungen ein.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Es findet also in jedem einzelnen der 21 Partialnetze Richtungs-Ausgleichung mit ungleichen Gewichten statt, worüber schon in § 82. S. 283 einiges bemerkt wurde.

Die Anzahl aller Richtungen ist 1554, es kommen also durchschnittlich 74 Richtungen auf ein Partialnetz.

Als ganzes behandelt hätte die Ausgleichung 920 Gleichungen gegeben, während in den Gruppen die Gleichungs-Anzahl zwischen 12 und 64 sich bewegt („ord. trig. survey" S. 277). In Bezug auf die gegenseitigen Gruppen-Anschlüsse wird auf S. 272—273 Folgendes berichtet: Nachdem eine Gruppe unabhängig von allen anderen ausgeglichen war, wurden die daraus erhaltenen Korrektionen in den Bedingungs-Gleichungen der nächsten Gruppe substituiert und die Quadratsumme der Fehler in dieser zweiten Gruppe zum Minimum gemacht, in gleicher Weise schloss sich eine zweite Gruppe an, und so fort. Vier der Triangulierungs-Gruppen haben unabhängigen Anfang (oder fünf nach S. 276 und 277, nämlich 1. 6. 7. 12. 14.), ohne fremde Bedingungen, vielmehr wurden Bedingungen aus diesen Anfangs-Gruppen in die anstossenden Gruppen übertragen. Für die Anschlüsse der gemessenen Grundlinien wurden keine Zwangs-Bedingungen eingeführt, denn es kamen niemals 2 Grundlinien in einer Gruppe zusammen. Zwar könnte man durch Basis-Anschlussbedingungen die Fehler-Anhäufung vermindern, allein andernfalls bekommt man in den ungezwungenen Basis-Anschlüssen eine gute Probe für die Theodolit-Arbeit.

Über die Winkel-Genauigkeit sind keine Berechnungen angestellt, doch sind die Dreiecks-Schlüsse sämtlich angegeben; wir haben aus diesen 464 Dreiecks-Schlüssen („ord. trig. surv." S. 426—495) folgende Tabelle gebildet, wobei mit n die Anzahl der Dreiecke in jeder Gruppe, mit $[\pm w]$ die absolute Summe der Dreiecks-Widersprüche und mit $\frac{[\pm w]}{n}$ deren Durchschnittswerte bezeichnet sind.

Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$	Gruppe Num.	n	$[\pm w]$	$\frac{[\pm w]}{n}$
1.	21	34,65″	1,6″	11.	35	116,67″	3,3″
2.	24	94,58	3,9	12.	16	32,49	2,0
3.	14	66,31	4,7	13.	16	69,23	4,3
4.	19	65,68	3,5	14.	22	43,03	2,0
5.	40	104,31	2,6	15.	45	202,14	4,5
6.	14	78,69	5,6	16.	29	63,72	2,2
7.	18	42,70	2,4	17.	19	57,17	3,0
8.	20	39,54	2,0	18.	12	33,35	2,8
9.	21	27,08	1,3	19.	19	45,42	2,4
10.	14	38,77	2,8	20.	19	53,25	2,8
				21.	27	105,79	3,9
		Summe von 1. bis 21.			464	1414,57	

Aus allen 464 Dreiecken hat man also nach der Bequemlichkeitsformel (13) § 124. S. 475:

$$m = 1{,}2533\,\frac{1414{,}57}{464\sqrt{3}} = \pm 2{,}21''$$

In dem Rapport sur les triangulations, Brüssel 1892, von Ferrero, Grande Bretagne S. 4 wird nach der internationalen Formel berechnet aus 476 Dreiecken:

$$m = \pm 1{,}79''$$

ausserdem auf S. 30 aus 552 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{5548}{552 \cdot 3}} = \pm 1{,}83'' \qquad (1)$$

Wir wollen auch noch die Basisanschlüsse mitteilen:

Von den 6 gemessenen Grundlinien wurden zwei ausgewählt, nämlich die von Lough Foyle und Salisbury Plain, welche mit Colby s Kompensations-Stangen gemessen sind. Die trigonometrische Verbindung zwischen den zwei ausgewählten Grundlinien gab einen Widerspruch von 0,418 Fuss dessen Verteilung auf *eine* Masseinheit für die ganze Vermessung führte. Die Differenzen zwischen den wirklich gemessenen Linien und den hiefür trigonometrisch aus jener festgesetzten Einheit abgeleiteten Werten zeigt folgende Tafel („ord. trig. surv." S. XIV und S. 422):

Basis	Basismess-Apparat	Basislänge	trigon. Resultat	Differenz	für 1km
Jahr		engl. Fuss	engl. Fuss	engl. Fuss	*mm*
1791 Hounslow Heath	Stahlkette	27 406,190	27 406,363	+ 0,173	+ 6,3
1794 Salisbury Plain I	Stahlkette	36 576,830	36 577,656	+ 0,826	+ 22,6
1801 Misterton Carr	Stahlkette	26 344,060	26 343,869	— 0,191	— 7,2
1806 Rhuddlan Marsh	Stahlkette	24 516,000	24 517,596	+ 1,596	+ 65,1
1817 Belhelvie	Stahlkette	26 517,530	26 517,770	+ 0,240	+ 9,1
1827 Lough Foyle	Kompens.-Stangen	41 640,887	41 641,103	+ 0,216	+ 5,2
1849 Salisbury Plain II	Kompens.-Stangen	36 577,858	36 577,656	— 0,202	— 5,5
		219 579,355	219 582,013	+ 2,658	

Die Entfernungen der Grundlinien von einander betragen zwischen 62 und 371 englischen Meilen („ord. trig. survey" S. 424) oder etwa zwischen 100 und 600 Kilometern.

Die Gesamtlänge dieser 7 Grundlinien ist rund 66,9km, also eine Grundlinie im Mittel 9,6km.

II. Russland.

Die erste Russische Gradmessung ist behandelt in dem Werke:

„Beschreibung der unter allerhöchstem Kaiserlichen Schutze von der Universität veranstalteten Breitengrad-Messung in den Ostsee-Provinzen Russlands, ausgeführt und bearbeitet 1821—1831 mit Beihilfe von B. W. v. Wrangel und Anderen, von *F. G. W. Struve*, Direktor der Dorpater Sternwarte. Erster und zweiter Teil, Dorpat 1831. (S. 137—138 und S. 148—149.)

Der mittlere Fehler eines Dreiecks-Winkels nach den Wiederholungen und Vergleichungen auf den Stationen fand sich:

$$m = \pm 0{,}60''$$

Für 31 geschlossene Dreiecke ist die Quadratsumme der Widersprüche = 30,60, also der mittlere Fehler eines Winkels hieraus:

$$m = \sqrt{\frac{30{,}60}{31 \cdot 3}} = + 0{,}57'' \qquad (2)$$

Aus der Vereinigung der beiden von Struve und Tenner geleiteten Gradmessungen wurden 2 Dreiecke doppelt erhalten, deren Proben im 10. Band (1833) der „Astr. Nachr." S. 323—328 mitgeteilt sind, (auch abgedruckt in unserer vorigen Auflage, III. Band, 2. Aufl. 1890, S. 178—179).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

III. Dänemark.

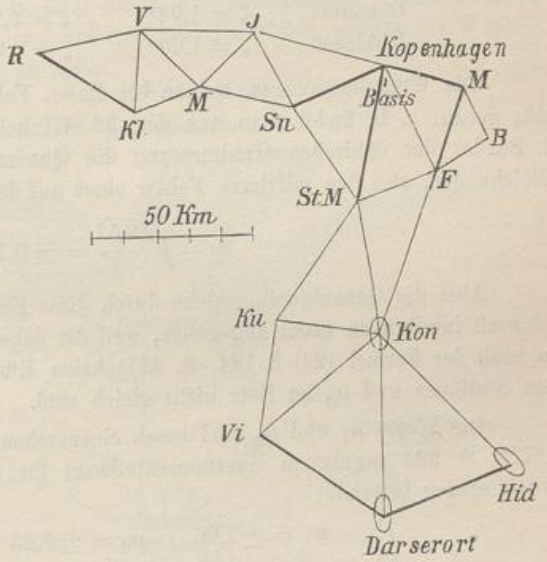
Die dänische Gradmessung wurde im Jahr 1816 unter Leitung von Schumacher begonnen, und bis 1823 von Altona bis Lysabbel auf Alsen fortgesetzt, dann 1837 bis 1848 weiter ausgedehnt, 1850 unter Leitung von Andrae vollendet und veröffentlicht in dem Werke:

„Den Danske Gradmaaling, udgived af C. G. Andrae, Geheime Etatsraad og Directeur for Gradmaalingen Kjobenhavn, I.—IV. Band, 1867—1884". Hiezu gehört auch:

„Problèmes de haute géodésie, extraits de l'ouvrage danois: „den danske gradmaaling", 1er cahier: Formation et calcul des triangulations géodésiques, Copenhague 1881; 2er cahier: calcul des latitudes, des longitudes et des azimuts sur le sphéroïde terrestre etc. 1883."

Ein interessanter Litteratur-Bericht über das Werk: „Den Danske Gradmaaling" ist von Helmert gegeben in der „Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft", 1877, S. 184—239 und 1878, S. 57—80.

Fig. 1.
Dänisches Haupttriangulierungs-Netz.
(Massstab 1 : 2 500 000.)



Die dänische Triangulierungs-Berechnung zeichnet sich durch feine Theorieen und durch scharfe Genauigkeits-Untersuchungen aus. Unsere Fig. 1. zeigt einen Teil der dänischen Dreiecke, welche auf Grund der Kopenhagener Basis berechnet sind. Die Verbindung der 2701 Meter langen Grundlinie bei Kopenhagen mit der ersten Hauptseite Kopenhagen—Snoldelev wird durch ein Basisnetz von 5 Dreiecken erzielt (welches in Fig. 1. wegen Kleinheit des Massstabes nicht mit aufgenommen ist). Für die 7 Dreiecks-Seiten, welche in Fig. 1. stark gezogen sind, sind die mittleren Fehler berechnet worden, und zwar mit Trennung des Einflusses der Winkelmessungs-Fehler von dem Einfluss des Basisfehlers. Folgende Tabelle giebt hiefür die Fehlerquotienten, ausgedrückt in Millionteilen der Seiten selbst, oder in Millimetern für 1 Kilometer.

Dreiecks-Seiten s	Anzahl der Dreiecke	Fehler, herrührend von		Mittlerer Gesamtfehler
		Winkelmessung	Basismessung	
Grundlinie	. .	0,0	1,7	1,7 Milliontel
Kopenhagen-Snoldelev	5	4,4	1,7	4,7
Kopenhagen-St. Möllehöi	6	4,5	1,7	4,8
Kopenhagen-Malmö	8	4,9	1,7	5,2
Malmö-Falsterbo	8	5,0	1,7	5,3
Refsnaes-Klöveshöi	11	6,8	1,7	6,9
Vigerlöse-Darserort	11	7,1	1,7	7,3
Darserort-Hiddensö	12	7,3	1,7	7,5

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Man bemerkt, dass der Einfluss des Basisfehlers neben dem Einfluss der Winkelfehler schon im 5ten Dreieck fast verschwindet.

Für die Punkte Kongsbjerg, Darserort und Hiddensö wurden auch die Fehlerellipsen berechnet.

Indem die Kopenhagener Basis als fehlerfrei angenommen wird, und alle Winkelfehler von der Basis an berücksichtigt werden (Andrae Fall II.), hat man die grosse Halbaxe a, die kleine Halbaxe b und das Azimut z der grossen Halbaxe für die erwähnten drei Fehler-Ellipsen:

Kongsberg	$a = 0{,}56^m$	$b = 0{,}12^m$	$z = 1°$
Darserort	$\quad = 1{,}06^m$	$\quad = 0{,}29^m$	$\quad = 178°$
Hiddensö	$\quad = 1{,}00^m$	$\quad = 0{,}34^m$	$\quad = 156°$

Die Winkelmessungen, welche bei diesen Fehler-Ellipsen benützt wurden, sind sehr genau, z. B. findet man aus den 32 Winkel-Verbesserungen von S. 296 des 1. Bandes der dänischen Gradmessung die Quadratsumme 3,57 mit 7 Bedingungs-Gleichungen, also den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = \sqrt{\frac{3{,}57}{7}} = \pm 0{,}71''$$

Aber die Genauigkeit, welche durch diese Fehler-Ellipsen veranschaulicht wird. ist noch insofern zu gross angegeben, weil der dabei benützte Gewichtseinheits-Fehler (μ nach der Formel (23) § 124. S. 477) keine Rücksicht darauf nimmt, dass μ_1 in den Stationen und μ_2 im Netz nicht gleich sind.

Die Werte μ_1 und μ_2 sind (nach einer schon früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1877", S. 393 gegebenen Zusammenstellung) für 5 Ausgleichungen der dänischen Gradmessung folgende:

1)	$\mu_1 = \pm 1{,}00$	$\mu_2 = \pm 1{,}63$	$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}63$
2)	1,00	1,65	1,65
3)	1,00	3,08	3,08
4)	1,64	2,99	1,82
5)	0,96	1,75	1,82

Der Wert 3) $\mu_2 : \mu_1 = 3{,}08$ ist durch besondere Umstände bedingt, im übrigen ist im Mittel rund:

$$\mu_2 : \mu_1 = 1{,}7$$

d. h. nahezu derselbe Wert wie bei der preussischen Landes-Triangulierung.

Nach dem „Rapport sur les triangulations" von Ferrero, Brüssel 1892, Seite 5 und Seite IV, 5 hat Dänemaek nach der internationalen Formel:

1817—1824	$[w^2] = 37{,}25$	$n = 20$	$m = \pm 0{,}79''$
1837—1847	$\quad = 152{,}19$	$\quad = 51$	$\quad = \pm 1{,}00''$
1867—1870	$\quad = 9{,}39$	$\quad = 16$	$\quad = \pm 0{,}44''$
	$[w^2] = 198{,}83$	$n = 87$	

also aus allen 87 Dreiecken:

$$m = \sqrt{\frac{198{,}83}{87 \cdot 3}} = \pm 0{,}87'' \qquad (3)$$

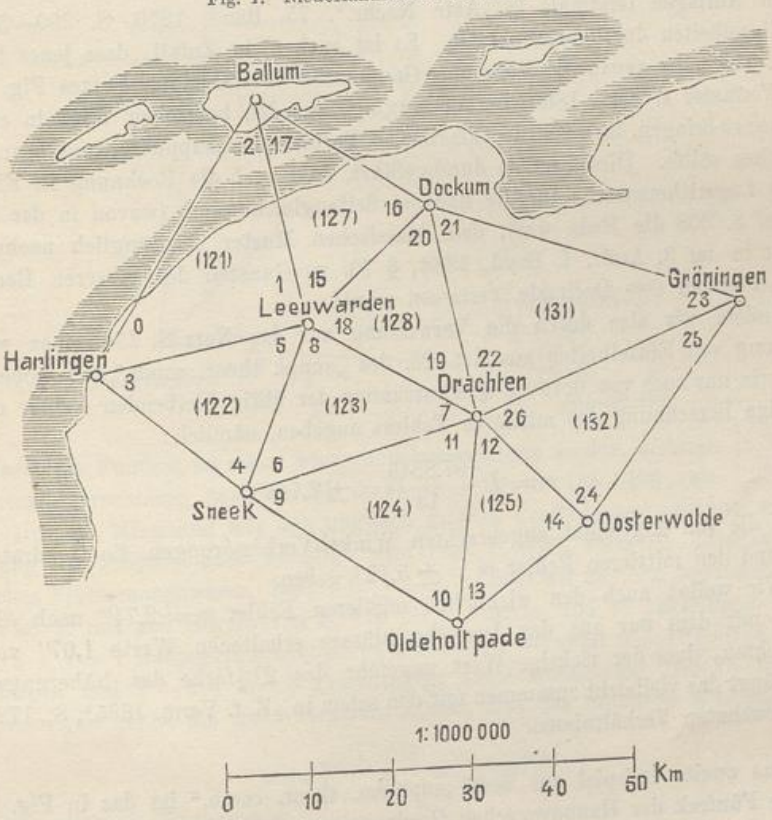
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 129. Die klassischen Arbeiten von Gauss.

Die Theorie der Triangulierungs-Ausgleichung ganzer Netze nach bedingten Beobachtungen (mit Correlaten) ist zuerst veröffentlicht 1826 von Gauss in dem „supplementum theoriae combinationis" (vgl. S. 4 oben oder Gauss' Werke, IV. Band, S. 82—93).

Allerdings die erste trigonometrische Ausgleichung überhaupt ist etwas früher, nämlich 1821, eine Rückwärtseinschneidung für einen Stationspunkt mit 6 Richtungsbeobachtungen (vgl. S. 5 und S. 230) allein die Dreiecks*netze* treten 1826 in dem „supplementum ..." zum erstenmal auf mit zwei Beispielen, erstens für Winkelmessungen, zweitens für Richtungsmessungen.

Fig. 1. Niederländisches Dreiecksnetz.



Das erste Beispiel von art. 23. des suppl. ist in Fig. 1. gezeichnet, die Messungen sind genommen aus „Krayenhof, précis historique des operations trigonométriques en Hollande" (vgl. auch allgemeine geographische Ephemeriden, 4. Band, 1799, S. 80 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 172—173). Die 27 Dreieckswinkel, welche in Fig. 1. mit 0, 1 ... 26 numeriert sind, gelten als einzeln unabhängig gemessen (ob sie das wirklich sind, kam bei einem Rechenbeispiele jener Abhandlung wohl nicht sehr in Frage). Es bestehen 9 Dreiecke mit folgenden Schlussfehlern:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

		w	w^2
121.	c	$-3{,}958''$	15,6658
122.	d	$+0{,}722$	0,5213
123.	e	$-0{,}753$	0,5670
124.	f	$+2{,}355$	5,5460
125.	g	$-1{,}201$	1,4424
			23,7425

		w	w^2
127.	h	$-0{,}461''$	0,2125
128.	i	$+2{,}596$	6,7392
131.	k	$+0{,}043$	0,0018
132.	l	$-0{,}616$	0,3795
			23,7425
			31,0755

Nach der heutigen internationalen Formel würde man also rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{31{,}0755}{9 \cdot 3}} = \pm 1{,}073'' \qquad (1)$$

Indessen ist davon jetzt nicht die Rede. Wir wollen vielmehr die Gauss'sche Ausgleichung verfolgen, und können uns insofern kurz fassen, als ein ganz ähnliches Beispiel, ebenfalls mit 9 Dreiecken und 27 Winkeln mit 2 Horizontproben und 2 Seitengleichungen, dessen Netz auf S. 174 gezeichnet ist, seit Jahren in unseren früheren Auflagen (erstmals in „Astr. Nachr.“, 75. Band, 1870, S. 299—302) mit allen Einzelheiten durchgerechnet ist. Es ist auch nicht Zufall, dass jenes badische Netz S. 174 ganz genau die Form des Gauss'schen vorstehenden Netzes Fig. 1. hat, indem Verfasser s. Zeit, 1869, darauf ausging, aus den badischen Winkeln ein Netz zusammen zu bringen, das genau dem klassischen Vorbilde des „supplementum theor. comb.“ entsprechen sollte. Dieses ist so durchgeführt, dass auch die Rechnung in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle für die linearen Seitengleichungen, (wovon in der Controverse auf S. 308 die Rede war), dem klassischen Muster ursprünglich nachgeahmt, und erst in der 3. Aufl., I. Band, 1888, § 70. zu Gunsten der besseren Rechnung, in Einheiten der 6ten Decimale, verlassen wurde.

Indem wir also durch die Verweisung auf das Netz S. 174 einer weiteren Vorführung von Einzelheiten aus Art. 23. des „suppl. theor. comb.“ überhoben sind, wollen wir nur noch von dort die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler und die zugehörige Berechnung des mittleren Fehlers angeben, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{97{,}8845}{13}} = \pm 2{,}7440'' \qquad (2)$$

während die von Krayenhof angebrachten Winkel-Verbesserungen die Quadratsumme 341,42 und den mittleren Fehler $m = \pm 5{,}12''$ geben.

Wir wollen auch den wirklichen mittleren Fehler $m = 2{,}74''$ nach (2) vergleichen mit dem nur aus den Dreiecksschlüssen erhaltenen Werte $1{,}07''$ von (1), und beachten, dass der richtige Wert ungefähr das $2\,1/2$fache des Näherungswertes ist; es hängt das vielleicht zusammen mit den schon in „Z. f. Verm. 1885“, S. 172—173 unten, erwähnten Verhältnissen.

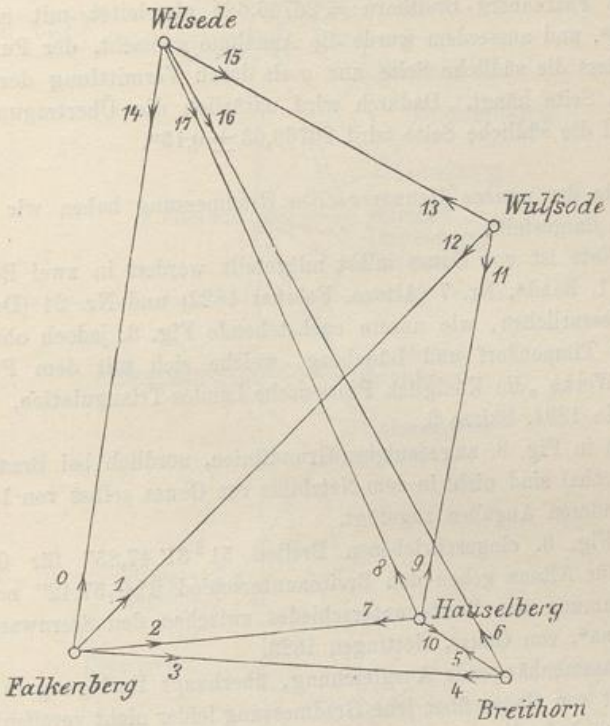
Das zweite Beispiel aus dem „supplem. theor. comb.“ ist das in Fig. 2. gezeichnete Fünfeck der Hannover'schen Gradmessung, deren Netz von Gauss als Beilage der „Astr. Nachr.“, 1. Band, Nr. 24 mitgeteilt worden ist, wie wir in unserer nachfolgenden Fig. 3. S. 493 sehen werden.

Bleiben wir bei diesem als Beispiel herausgeschnittenen Fünfeck stehen, so können wir über dasselbe in Kürze sagen, dass es eine Ausgleichung nach gleichgewichtigen *Richtungen* enthält, ähnlich wie unsere zwei Beispiele von § 59. S. 178 und § 61. S. 189; und es sind unsere dort gegebenen Rechnungen in der That nichts anderes als Nachahmungen des nun schon 70 Jahre alten Beispiels aus der Lüne-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

burger Haide, nur mit dem formellen Unterschiede, dass nicht mehr in Einheiten der 7ten Logarithmenstelle in den linearen Seitengleichungen gerechnet wurde (vgl. 308).

Fig. 2. (1 : 500 000.)



Das klassische Fünfeck ist schon wiederholt kommentiert worden, erstmals in Helmert s Ausgleichungsrechnung nach der M. d. kl. Q. 1872, S. 185—195, wo auch bereits auf S. 189 der Missstand mit den ungleich grossen Coefficienten erkannt und durch Änderung der Masseinheiten beseitigt wird (vgl. S. 308), ferner in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen, 1882", S. 1—10, so dass wir uns hier begnügen können, nach Fig. 1. mit den Regeln von S. 176 für 5 Punkte und 18 Richtungen die Zahl $18 - 15 + 4 = 7$ Bedingungsgleichungen abzuzählen, worunter $9 - 10 + 3 = 2$ Seitengleichungen und $9 - 5 + 1 = 5$ unabhängige Dreiecksschlüsse. Die 18 Richtungsverbesserungen geben die Quadratsumme 1,2288, also den mittleren Richtungsfehler:

$$\mu = \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = \pm 0{,}419'' \tag{3}$$

oder den mittleren Winkelfehler:

$$m = \mu\sqrt{2} = \pm 0{,}593'' \tag{4}$$

Es ist vielleicht auch hier gut, die Anwendung der internationalen Fehlerformel von § 123. zu machen; es sind 7 Dreiecke möglich, welche geben:

w	$-1{,}368''$	$-1{,}139''$	$+1{,}773''$	$+1{,}042''$	$-1{,}481''$	$-0{,}813''$	$-0{,}750''$
w^2	1,8714	1,2973	3,1435	1,0858	2,1934	0,6610	0,5625

$$m = \sqrt{\frac{10{,}8149}{7 \cdot 3}} = \pm 0{,}718'' \tag{5}$$

Es wird dann noch von Gauss in Art. 25. des „suppl." das Funktionsgewicht einer Seite berechnet (also ähnlich wie wir zu unserem Hannoverschen Fünfeck in § 62. die Genauigkeit einer Netzdiagonale berechnet haben). Es wurde die nördliche Seite Wilsede-Wulfsode = 22877,94^m als fehlerfreie Basis angenommen und daraus die südliche Seite Falkenberg-Breithorn = 26766,68^m abgeleitet mit einem mittleren Fehler $\pm$ 0,12^m, und ausserdem wurde die Annahme gemacht, der Punkt Hauselberg falle fort, so dass die südliche Seite nur noch durch Vermittlung der westlichen an der nördlichen Seite hängt. Dadurch wird natürlich die Übertragungs-Genauigkeit vermindert und die südliche Seite wird 26766,63 $\pm$ 0,15^m.

Das Netz der *ganzen* Hannoverschen Gradmessung haben wir in Fig. 3. auf folgender Seite dargestellt.

Dieses Netz ist von Gauss selbst mitgeteilt worden in zwei Beilagen zu den „Astr. Nachr., 1. Band", Nr. 7 (Altona, Februar 1822) und Nr. 24 (Dezember 1822), letzteres im Wesentlichen, wie unsere nachstehende Fig. 3. jedoch ohne die Verbindung zwischen Timpendorf und Lüneburg, welche sich mit dem Punkte Nindorf findet in dem Werke „die Königlich Preussische Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, VI. Teil", Berlin 1894, Skizze 3.

Auch die in Fig. 3. angedeuteten Grundlinien, nördlich bei Braak und südlich bei Seeberg (Gotha) sind nicht in dem Netzbilde von Gauss selbst von 1822 enthalten, sondern nach anderen Angaben zugefügt.

Die in Fig. 3. eingeschriebenen Breiten 51° 31′ 47,85″ für Göttingen und 53° 32′ 45,27″ für Altona geben den Breitenunterschied 2° 0′ 57,42″ nach S. 64 des Werkes „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona", von Gauss, Göttingen 1823.

Eine zusammenhängende Ausgleichung, überhaupt Darlegung in einem öffentlichen Werke ist von Gauss über jene Gradmessung leider nicht veröffentlicht worden. Die Originalakten befanden sich bis nach 1866 in dem Königlichen Archive zu Hannover, wurden dann aber auf Requisition des Generalfeldmarschalls v. Moltke an den Preussischen Generalstab nach Berlin abgegeben, wo sie sich im Besitze der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme noch befinden.

Auf diesem Wege ist über die Geschichte der Gaussschen Vermessungen in Hannover erst in neuester Zeit Aufklärung gegeben worden durch eine Arbeit: „Beiträge zur Kenntnis von Gauss' praktisch geodätischen Arbeiten, nach Original-Materialien bearbeitet von *Gaede*, Hauptmann, bei der trig. Abteilung der Landesaufnahme." („Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 113, 145, 161, 177, 193, 225.) Ferner ist hier zu erwähnen: „Gedächtnisrede auf Carl Friedrich Gauss, zur Feier des 30. April 1877", von Theodor Wittstein, Dr. phil. und Professor. Hannover Hahnsche Buchhandlung 1877.

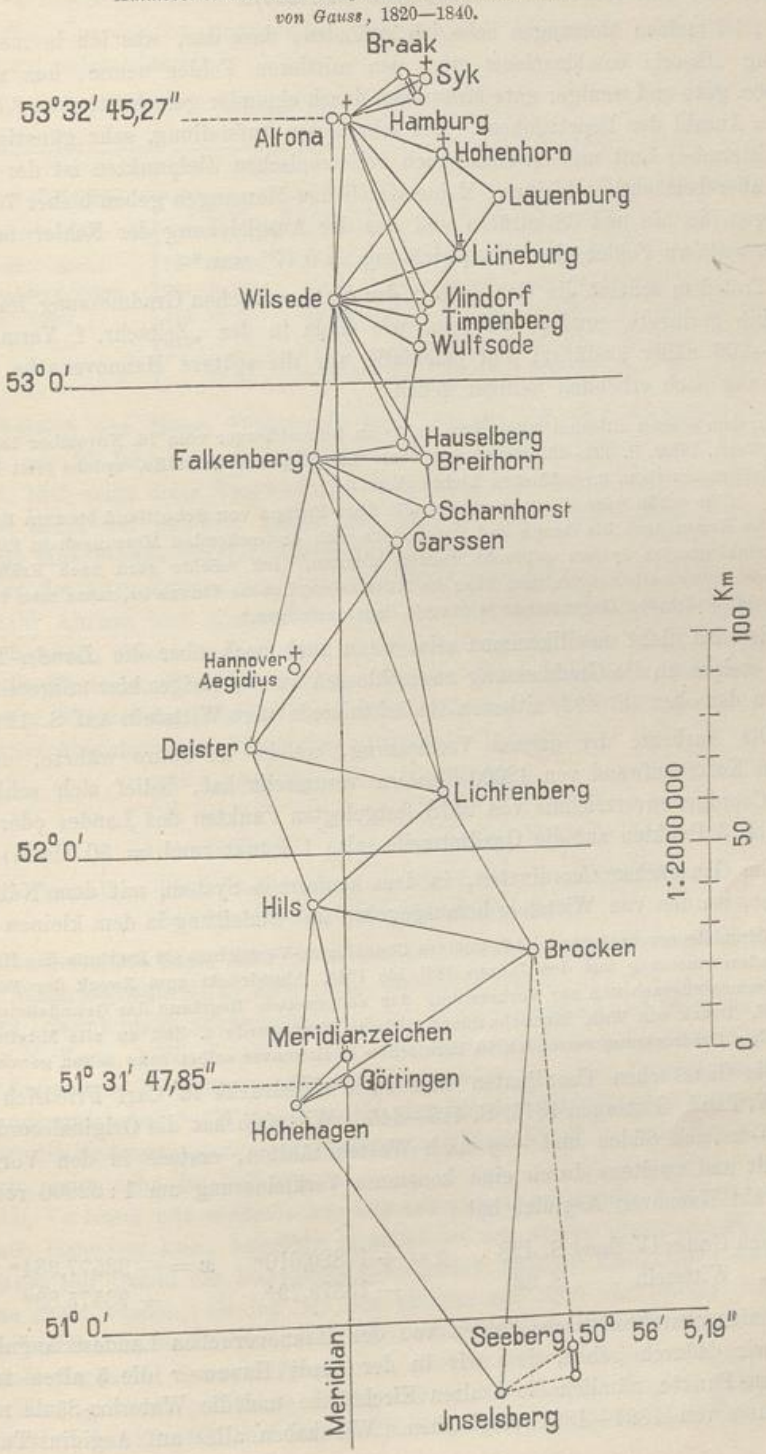
Wir wollen nur einige charakteristische Stellen zitieren:

An Bessel schrieb Gauss am 5. November 1823 („Briefwechsel mit Bessel", S. 423 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205): „Ich habe das System meiner Hauptdreiecke in diesen Tagen sorgfältig ausgeglichen .... Es sind zusammen 26 Dreiecke, worin alle Winkel von mir selbst beobachtet sind. Die grösste Summe der Fehler ist 2,2″, wo bei einer Seite das Pointieren sehr schwierig war; die nächstgrösste ist 1,8″. Keine der 76 vorkommenden Richtungen ist bei der Ausgleichung um eine ganze Sekunde geändert, die grösste Änderung beträgt 0,813″."

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 3.

Hannoversche Gradmessung zwischen Göttingen und Altona von Gauss, 1820—1840.



Ferner Gauss an Bohnenberger am 16. November 1823 („Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 431 und „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205):

„Bei meinen Messungen habe ich gefunden, dass das, was ich in meiner Abhandlung „theoria combinationis etc." den mittleren Fehler nenne, aus mehreren Stationen, gute und weniger gute Messungen durch einander gerechnet, etwa $3{,}5'' : \sqrt{n}$ ist (n = Anzahl der Repetitionen). Bei sehr fester Aufstellung, sehr günstiger (d. i. nicht zitternder) Luft und ausschliesslich heliotropischen Zielpunkten ist der mittlere Fehler aber beträchtlich kleiner. Meine sämtlichen Messungen geben bisher 76 Hauptrichtungen (38 hin und 38 zurück) und aus der Ausgleichung der Fehler fand sich, dass der *mittlere* Fehler einer Hauptrichtung $= 0{,}47''$ war."

Trotzdem scheint die Genauigkeit der Hannoverschen Gradmessung im ganzen doch eine geringere gewesen zu sein, wie Gäde in der „Zeitschr. f. Verm. 1885", S. 205—206 näher ausführt; und jedenfalls war die spätere Hannoversche *Landes*-Vermessung noch erheblich weniger genau.

In dem soeben zitierten Briefe von Gauss an Bohnenberger vom 16. November 1823 („Zeitschrift f. Verm. 1882", S. 430—431) findet sich auch eine prophetische Stelle, welche jetzt 70 Jahre, nachdem sie geschrieben, im schönsten Lichte glänzt:

„Wie schön wäre es, wenn einmal alle über Europa von Schottland bis zum Banat und von Kopenhagen bis Genua und Formentera sich erstreckenden Messungen in Ein zusammenhängendes System gebracht werden könnten. Ich möchte gern nach Kräften dazu vorbereiten, allein wenn man über die Mitte seines Lebens hinaus ist, muss man bei einem so ausgedehnten Gegenstande je eher je lieber anfangen."

Es wird nicht unwillkommen sein, wenn auch noch über die *Landes*-Triangulierung, welche an die Gradmessung angeschlossen wurde, einiges hier mitgeteilt wird:

In der oben (S. 492) zitierten Gedächtnisrede sagt Wittstein auf S. 12:

Die Ausbeute der ganzen Vermessung, welche 24 Jahre währte, und den mässigen Kostenaufwand von 42000 Thalern verursacht hat, belief sich schliesslich auf ein Coordinatenverzeichnis von 2578 festgelegten Punkten des Landes oder durchschnittlich 3 Punkten auf die Quadratmeile (also 1 Punkt rund = 50 Mark.)

Die Gaussschen Coordinaten, in dem konformen System, mit dem Nullpunkte Göttingen, wurden von Wittstein herausgegeben mit Einleitung in dem kleinen Bande:

„Grundsteuerveranlagung. Allgemeines Coordinaten-Verzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844. Abgedruckt zum Zweck der Benützung bei den Vermessungsarbeiten zur Vorbereitung der anderweiten Regelung der Grundsteuer. Hannover 1868. Druck von Wilh. Riemschneider." (Dieses Werk wurde s. Zeit an alle Mitglieder der Europäischen Gradmessung versendet, ist inzwischen in Hannover selbst sehr selten geworden. —)

Die Gaussschen Coordinaten sind auch abgedruckt in Carl Friedrich Gauss Werke IV. Band, Göttingen 1873, S. 415—445. Wittstein hat die Originalcoordinaten, welche $+x$ nach Süden und $-y$ nach Westen zählten, erstens in den Vorzeichen umgestellt und zweitens durch eine konstante Verkleinerung um 1 : 62900 reduziert, z. B. Punkt Hannover, Aegidius hat

nach Gauss IV Band S. 428	$y = +13880{,}010^m$	$x = -93577{,}384^m$
„ Wittstein S. 36	$-13879{,}79^m$	$+93575{,}89^m$

Einige charakteristische Zahlen von der Hannoverschen Landestriangulierung können wir dadurch geben, dass wir in der Stadt Hannover die 5 alten trigonometrischen Punkte, nämlich die 4 alten Kirchtürme und die Waterloo-Säule mit der Neumessung von 1891—1892 vergleichen. Wir haben alles auf Aegidius-Turm als

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Centralpunkt bezogen, die Richtungswinkel nach den 4 anderen Punkten aus den Coordinaten berechnet, durch die Meridiankonvergenzen auf Nord reduziert, und auch die aus den Coordinaten berechneten Entfernungen beigesetzt, wodurch folgende Vergleichung entstanden ist:

Abrisse der Station Aegidius.

Richtung nach	1840		1892		Differenzen	
	Azimut	Entfernung	Azimut	Entfernung		
Waterloo-Säule	247° 23′ 15″	841,78m	247° 22′ 40″	841,26m	− 35″	− 0,52m
Neustädter Turm	284 29 22	761,64	284 29 24	761,98	+ 2	+ 0,34
Markt-Turm	313 25 10	378,56	313 24 54	378,58	− 16	+ 0,02
Kreuz-Turm	314 8 0	631,85	314 9 11	631,64	+ 71	− 0,21
	85′ 47″	2613,83m	86′ 09″	2613,46m	+ 22″	− 0,37m

Obgleich von diesen Differenzen vielleicht ein Teil auf Punktverschiebungen im Laufe von 50 Jahren zu rechnen sein wird („Zeitschr. d. Hann. Arch. u. Ing.-Ver. 1889", S. 156) zeigt diese Vergleichung doch auf einen Blick, dass jene Messungen von 1840 nicht das geliefert haben und offenbar auch nicht liefern wollten, was man heute eine genaue Stadt-Triangulierung nennt.

Von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in Berlin haben wir eine Anzahl Abrisse und Abschriften „aus dem Gradmessungs-Journal 1823 von C. F. Gauss", unter welchen sich findet: „Hannover Aegidius, Juli 19. Vormittags, Aufstellung im Zentrum, Repsolds Ocular, Einfache Winkel, Kreis rechts (der Erfolg zeigt starke Verrückung des Bocks)". Hier sind über 100 Sichten gegeben, welche eine Gesamt-Absuchung des Horizontes vorstellen. Darunter:

133° 35′ 26″ Hannover Marktturm
133 33 24 „ „
104 38 40 „ Neustädter Turm.

An demselben Platz Nachmittags (— 93577,384 + 13880,010)
104° 38′ 55″ Hannover Neustädter Turm.

Wir bemerken dazu, dass der Kreuzturm von Aegidius aus nicht zu sehen ist und die Waterloo-Säule 1823 noch nicht vorhanden war.

Es scheint nicht unpassend, hier auch einen Ausspruch von Gauss zu citieren, (Zeitschr. f. Verm. 1885, S. 185): „Vor Gott ist's am Ende wohl auch einerlei, ob wir die Lage eines Kirchturms auf einen Fuss oder die eines Sternes auf eine Sekunde bestimmt haben." Hiernach wurde also bei dem Einschneiden auf weite Entfernungen die Bestimmung eines Kirchturms „auf einen Fuss" als eine gute angesehen, was heute nicht mehr der Fall ist.

Als Verfasser mit süddeutschen trigonometrischen Begriffen und Anschauungen 1882 nach Hannover kam, bemerkte er sofort bei den ersten Rückwärts-Einschneide-Rechnungen auf Grund der klassischen Coordinaten, dass die Missstimmigkeiten 5 bis 10mal so gross wurden, als bei den aus gleicher und noch viel früherer Zeit stammenden Coordinaten der Türme von Stuttgart oder Karlsruhe; und die trigonometrischen Übungsmessungen bei Springe, Nenndorf u. s. w. bis 1890 bestätigten dieses in vollem Masse. Eine grössere praktische Triangulierung zur Leine-Aufnahme („Zeitschr. f. Verm. 1891", S. 426—427 und Handb. II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 302—303) gab

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

endlich unzweideutig zu erkennen, dass die Landes-Triangulierung 1820—1840 nicht die Absicht gehabt haben kann, eine Grundlage für Kataster-Aufnahmen wie in gleicher Zeit z. B. in Württemberg zu liefern, sondern dass es sich nur um Grundlage für topographische Karten gehandelt haben kann. Die Feldmarks-Vermessungen sind in Hannover ebenso wie überall in Norddeutschland in jener Zeit ohne Anschluss an die Landes-Triangulierungen ausgeführt. Und als man später, wie aus dem Titel des Gauss-Wittstein schen Coordinaten-Verzeichnisses von 1868 zu ersehen ist, anfing, die Gauss schen Coordinaten auch zur „Regelung der Grundsteuer" heranzuziehen, galt das Bestimmen eines trigonometrischen Punktes im Anschluss an die alten Punkte jedesmal als eine Art Haupt- und Staats-Aktion, welche nicht immer zum gewünschten Ziele führte.

Bei alledem ist auch hier wieder zu erinnern: Wenn heute ein Trigonometer in Schwaben oder Preussen — seine $[a\,a]$, $[b\,b.\,1]$ u. s. w. ausrechnet, und seine z durch Mittelbildung eliminiert u. s. w., so thut er nichts anderes als was Gauss 1820 in Hannover ausgedacht und eigenhändig in Tausenden von Fällen ausgerechnet hat. —

Dieselbe Anerkennung ist allerdings dem anderen Produkte von Gauss' Ingenium, dem conformen Coordinaten-System, bis jetzt noch nicht widerfahren, das schwächere System des Bayern Soldner hat fast ganz Deutschland erobert. —

In Hannover wurde das alte klassische Gauss sche System mit dem Nullpunkt Göttingen, nach 1866 in 31 Partialsysteme zerschlagen, welche zwar selbst noch conform waren, dann aber 1881 den Soldner schen nicht conformen Systemen von Celle u. s. w. weichen mussten.

Der scharfsinnige Hannover sche Mathematiker *Wittstein*, welcher zur Zeit des Hannover schen Königreiches sein Land bei der Europäischen Gradmessung vertreten hatte, hat es tief beklagt, dass die Gauss schen geodätischen Werke anderwärts nicht gewürdigt worden seien, darunter die „conforme Abbildung." Wittstein schrieb in der oben S. 492 von uns zitierten Gedächtnisrede auf Gauss, S. 13: „So bleibt denn nur übrig, von der *künftigen Generation* zu hoffen, dass dieselbe eines Tages erkennen wird, welche Schätze hier noch zu heben sind, und dass sie dasjenige, was jetzt im Gebrauche ist, dahin verweisen wird, wohin es längst gehört." — (Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1895," S. 340).

Nach diesen, teilweise abschweifenden, aber für die Geschichte unserer Wissenschaft nicht unwichtigen Bemerkungen haben wir noch als Appendix zu den Gauss-schen Arbeiten die Triangulierung von Kurhessen durch *Gerling* zu behandeln.

Gerling war ein Schüler von Gauss, hat sich mühsam in seines Lehrers Theorie der Fehlerausgleichung eingearbeitet, und dieselbe auf die schöne Aufgabe, welche sein Kurhessisches Land ihm bot, angewendet.

Gerling hat hierüber in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens", Kassel 1839, ausführliche Mitteilungen gemacht; er giebt daselbst auf S. 182 den mittleren Fehler einer Richtung (im Gauss schen Sinn) $= \pm 0{,}88''$.

Ferner wurden im „General-Bericht der Europ. Gradm. für 1865", S. 47 von Börsch und Kaupert Angaben für den mittleren Richtungs-Fehler der kurhessischen Triangulierung gemacht, nämlich für die erste Abteilung $0{,}95''$ und $0{,}99''$, im Mittel $0{,}97''$ und für die zweite Abteilung $1{,}37''$. Unter Voraussetzung, dass die Messungen, für welche Gerling im Jahr 1839 den Wert $0{,}88''$ gab, in den Angaben vom Jahr 1865 mit inbegriffen sind, nehmen wir als Gesamtresultat das Mittel aus den Angaben $0{,}97''$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und 1,37″ für die erste und zweite Abteilung, d. h. 1,17″ und damit wird der mittlere Winkelfehler für Kurhessen:

$$m = 1{,}17\sqrt{2} = \pm 1{,}65''$$

Weiteres über Gerlings Ausgleichung wollen wir im Anschluss an eine Stelle aus Art. 22. des „supplementum theor. comb." behandeln. Gauss sagt nämlich in jenem Art. 22. (wie es scheint, absichtlich unbestimmt ausgedrückt):

„Wir können die Bemerkung nicht übergehen, dass unsere Theorie, wenn deren reine und strenge Anwendung beabsichtigt ist, voraussetzt, dass die mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. bezeichneten Grössen entweder thatsächlich unmittelbar beobachtet sind, oder aus Beobachtungen so abgeleitet sind, dass sie unter sich unabhängig bleiben oder wenigstens als unabhängig betrachtet werden können.

In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet, welche daher als $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. genommen werden können, aber wir müssen eingedenk sein, dass, wenn ein System solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet wurden, sondern als Summen oder Differenzen direkt beobachteter Winkel erhalten werden —, dass dann jene Winkel nicht als Beobachtungen zu nehmen, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung in die Rechnung aufzunehmen sind.

Anders verhält sich die Sache bei einer Beobachtungsart, ähnlich derjenigen, welche Struve befolgt hat („Astr. Nachr. 2. Band, 1824", S. 431), wobei die Richtungen der einzelnen, von demselben Scheitelpunkt ausgehenden Seiten erhalten werden durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung. Dann nämlich sind eben diese Winkel als $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. zu nehmen, wodurch alle Dreieckswinkel in Gestalt von Differenzen sich darbieten, und die Bedingungsgleichungen der ersten Art (Stationsbedingungen), die durch die Natur der Sache von selbst erfüllt sind, als überflüssig wegfallen.

Die Art der Beobachtung, die ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Dreiecksmessung angewendet habe, ist zwar sowohl von der ersten als der zweiten Art verschieden, jedoch kann sie mit Rücksicht auf den Erfolg der zweiten gleich geachtet werden, so dass auf den einzelnen Stationen die Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten, von einem willkürlichen Anfangspunkt an gezählt, als die Grössen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$ etc. genommen werden mussten."

Diese in praktisch-geodätischer Beziehung nicht erschöpfende Darstellung, welche Gauss selbst von seinem Messungsverfahren hinterlassen hat, hat früher manche Zweifel hervorgerufen, zu deren Beseitigung die Mitteilungen, welche durch Gerling auf uns gekommen sind, zuerst den Weg gezeigt haben.

Gerling hat in seinen „Beiträgen zur Geographie Kurhessens" (Kassel 1839) und in seinen „Ausgleichungs-Rechnungen der praktischen Geometrie" (Hamburg und Gotha 1843) eine Triangulierungs-Ausgleichungsmethode angewendet und gelehrt, welche vollständig durchsichtig und anschaulich ist. Er hat nämlich die in grosser überschüssiger Zahl vorhandenen *Winkel*messungen jeder Station durch den „Horizont-Abschluss" auf jeder Station für sich ausgeglichen, und dann die dadurch erhaltenen Resultate in Gestalt von unabhängigen Richtungen mit gleichen Gewichten in die Netzausgleichung eingeführt, genau so, wie es Gauss in Art. 24 des „suppl. theor. comb." gethan hat. Die Winkelmessungen auf der einzelnen Station waren nicht gleichartig verteilt, es wurden nicht alle Kombinationen gemessen.

Das von Gauss selbst in dem Briefwechsel mit Schumacher (2. Band S. 142) gegebene Horizontabschlussbeispiel enthält nicht alle Kombinationen und auch nicht gleiche Gewichte der Winkelmessungen, überhaupt keine symmetrische Gesamtanordnung.

Was sodann die Einführung der Horizontabschlussresultate in die Netzausgleichung betrifft, wobei diese Resultate als unabhängige, gleichgewichtige Richtungen behandelt wurden, so ist zunächst ein theoretischer Irrtum zu erwähnen, in welchem Gerling befangen war. Er schreibt nämlich auf S. 168 u. 169 seiner „Ausgleichungsrechnungen":

„Man kann *offenbar* (?) die aus den Horizontabschlüssen gefundenen mittleren Fehler der gemessenen Winkel auf die Richtungen selbst übertragen, indem man jeden Winkel als die Differenz zweier Richtungen betrachtet. Demgemäss wäre der mittlere Fehler einer einmal angeschnittenen Richtung $= \frac{m}{\sqrt{2}}$ und die *Anschnittszahl* diente als Gewicht, wenn man bei weiterer Benützung dieser Richtungen ihnen verschiedene Genauigkeit beizulegen die Absicht hätte."

„Die Vermehrung der Rechnung . . . würde aber sehr *bedeutend* (?) werden und doch jedenfalls wenig oder gar nichts nützen. Es kommen nämlich ausser den Repetitionszahlen noch manche andere Umstände in Betracht . . ."

Betrachtet man diese Darlegung im Lichte der seit Gerling weiter entwickelten Wissenschaft, so findet man, dass die Aufstellung von *Einzel*gewichten der ausgeglichenen Richtungen nur in besonderen Fällen ausführbar (vgl. unseren früheren § 82. S. 282), im Allgemeinen aber nicht möglich ist, dass vielmehr im allgemeinen Fall der gesamte Horizontabschluss mit einer Gruppe von Gewichts*gleichungen* in die Netzausgleichung übergeht. Indessen ist der Gerling'sche Gedanke der „Anschnittszahlen" oder ähnlicher Einzelgewichte ein so natürlicher, dass er auch schon praktische Verwertung fand (vgl. S. 283).

Wäre die Gewichtsbemessung beim Übergang zum Netz theoretisch so einfach, wie Gerling sie sich dachte, so wäre sie ohne Zweifel schon längst in die Praxis eingeführt.

Dass nun Gauss selbst keine Gewichtsunterscheidungen machte, muss durch die Annahme erklärt werden, dass derselbe eine skrupulöse Gewichtsunterscheidung a priori, welche ja, wie heute zweifellos nachgewiesen, bei solchen Messungen dem Erfolg nicht genügend entspricht, schon damals in praktischer Beziehung für illusorisch hielt. Diese Ansicht wurde von General Schreiber dargelegt durch folgende Worte („Zeitschr. f. Verm. 1879", S. 141):

„Nach meinem Dafürhalten könnte man sich, wenn nun einmal nach Richtungen beobachtet werden soll, die Gewichtsgleichungen füglich schenken. Wenn nur der Beobachter dafür sorgt, dass auf jeder Station ein gewisses Normalgewicht für jeden Winkel ungefähr erreicht wird, so wird man sämtliche Richtungen als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung einführen dürfen, ohne an wirklicher Strenge etwas zu opfern. Ähnlich hat es auch Gauss gemacht, der bekanntlich repetierend, und folglich nach Winkeln, keineswegs aber, wie mehrfach behauptet worden ist, alle Kombinationen beobachtet hat. Aus seinen mir vorliegenden Protokollen geht vielmehr hervor, dass er auf jeder Station so lange gemessen hat, bis er meinte, dass jeder Winkel sein Recht bekommen habe. Er hat dann die Station ausgeglichen, aber keine Gewichtsgleichungen aufgestellt, sondern die hervorgehenden Richtungswerte als gleichgewichtig und von einander unabhängig in die Systemausgleichung eingeführt. Dass Gauss so verfahren ist mit dem vollen Bewusstsein dessen, was die theoretische Strenge erforderte und was an wirklicher Strenge verloren ging, wird kaum bezweifelt werden."

Die Brücke zwischen dem Gauss'schen Verfahren und dem „strengen" Ausgleichungsverfahren wurde zuerst von Hansen gefunden, wie wir auf S. 275 (im Kleingedruckten) angegeben haben; und heute ist durch all das, was wir an Theorieen in § 70., § 82. vorgetragen haben, wohl jeder Zweifel über die Ausgleichung nach Winkeln oder nach Richtungen, sei es formell streng oder nur genähert, beseitigt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

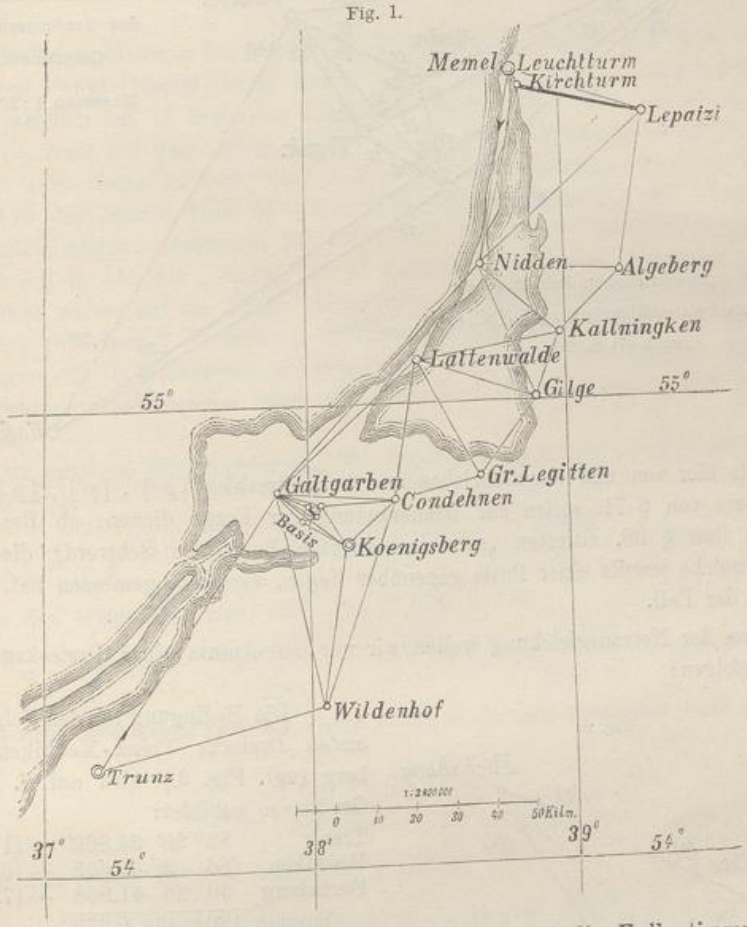
§ 130. Die Arbeiten von Bessel und Baeyer.

I. Die Gradmessung in Ostpreussen.

Das zweite klassische Erdmessungswerk in Deutschland ist veröffentlicht in dem Werke: „Gradmessung in Ostpreussen und ihre Verbindung mit preussischen und russischen Dreiecksketten, ausgeführt von F. W. Bessel, Direktor der Königsberger Sternwarte, Baeyer, Major im Generalstabe, Berlin 1838."

Diese Gradmessung, deren Netz in Fig. 1. dargestellt wird, ist ebenso wie die hannoversche Gradmessung ein in der Geschichte unserer Wissenschaft hochwichtiges

Fig. 1.



Werk, in welchem die Triangulierungs-Ausgleichung und die Erdbestimmung überhaupt in ihrer theoretischen Entwicklung wesentlich gefördert worden sind.

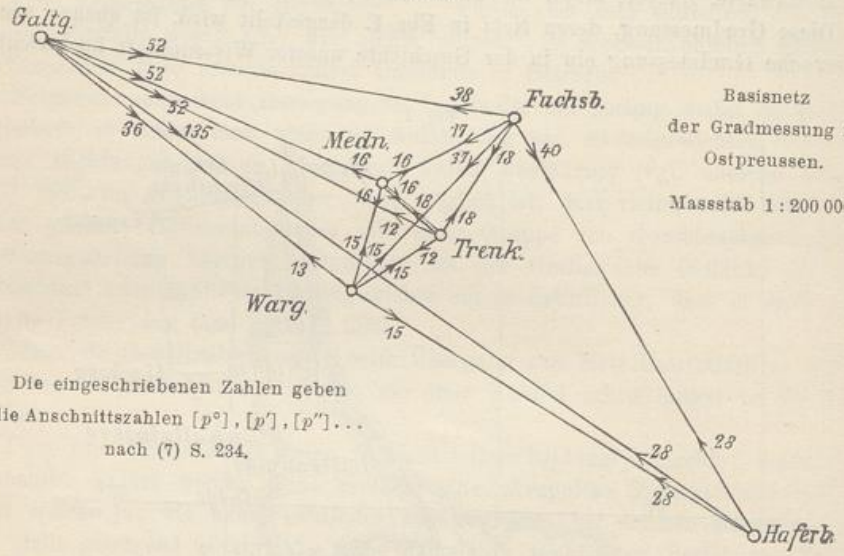
Auf Seite IV des Vorworts wird die neue Triangulation als Bestandteil einer ununterbrochenen trigonometrischen Verbindung von Formentera und von dem nördlichen England bis zu den russischen Gradmessungen bezeichnet, welche, an die Hauptsternwarten Europas angeschlossen, „eine Grundlage für die Bestimmung der Figur der Erde wenigstens in dem Umfange dieses Weltteils" geben sollte.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Man erblickt hierin bereits den Grundgedanken der internationalen Vereinigung, welcher 25 Jahre später durch den Mitarbeiter Bessels, General Baeyer, in der That zur Verwirklichung geführt worden ist.

In nachfolgender Fig. 2. geben wir das Basisnetz mit der kurzen, nur 1,8^{km} langen Grundlinie Trenk-Medniken, deren Doppelmessung schon auf S. 38 und S. 40 von uns erwähnt worden ist.

Fig. 2.



Basisnetz der Gradmessung in Ostpreussen.

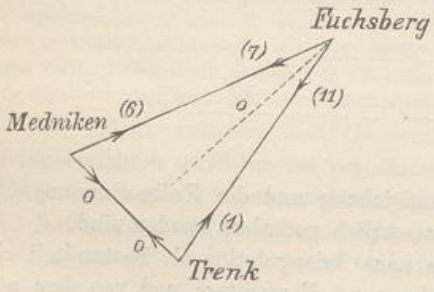
Massstab 1 : 200 000.

Die eingeschriebenen Zahlen geben die Anschnittszahlen $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$... nach (7) S. 234.

Die hier von uns eingeschriebenen Anschnittszahlen $[p^\circ]$, $[p']$, $[p'']$... aus der Theorie von § 71. sollen zur Beantwortung der Frage dienen, ob Bessel nach dem von ihm § 38. zitierten „sehr lesenswerten Buch von Schwerd" die spitzen Winkel, welche jeweils einer Basis gegenüber liegen, verstärkt gemessen hat. Dieses ist nicht der Fall.

Von der Netzausgleichung wollen wir nur den Ansatz einer Dreiecksgleichung näher verfolgen:

Fig. 3.



Die Bedingung für den Schluss des ersten Dreiecks Trenk-Medniken-Fuchsberg (vgl. Fig. 3.) wird auf S. 141 der Gradm. so gebildet:

Trenk	83°	30′	34,866″	+ (1)
Medniken	66	2	43,605	— (6)
Fuchsberg	30	26	41,908	+ (7)—(11)
Summe	180°	0′	0,379″	
Soll	180	0	0,015	
Widerspruch			+ 0,364″	

Bedingungsgleichung

$$0 = +0{,}364'' + (1) - (6) + (7) - (11)$$

Man sieht hieraus, dass die (1), (2), (3)... *Winkel*verbesserungen sind, und nicht Richtungsverbesserungen. Auf jeder Station mit s Richtungen treten solche (1) (2)... in der Anzahl $s - 1$ auf. Da alles übrige in unserem früheren § 71. bis

§ 74. zur Genüge behandelt worden ist, wollen wir nur noch einige Genauigkeitsfragen behandeln mit der Vorbemerkung, dass die Spalten l^2 u. s. w. der Tabelle von S. 238 und alles was mittlere Fehler betrifft (also der ganze § 73.), *nicht* von Bessel selbst, sondern erst aus späterer Zeit stammen, indem Bessel seine Arbeit ohne alle Genauigkeitsuntersuchungen abgeschlossen hat, obgleich er schon im Jahr 1816 eine Formel zur Berechnung des mittleren Fehlers aus Stationsmessungen aufgestellt hatte (vgl. eine Notiz von Helmert nach Hagen „Vierteljahrsschr. d. Astr. Ges. 1877" S. 192). Auch von den mit Hilfe der z berechneten Richtungskorrektionen $v_0 = z$, $v_1 = z + (1)$, $v_2 = z + (2) \ldots$ hat der Verfasser der Gradm. in O. keinen weiteren Gebrauch gemacht.

Wir wollen diese Gelegenheit benützen, um einige unserer früheren Formeln anzuwenden.

Die Triangulierung der Gradm. in O. hat 17 Standpunkte und einen nur angeschnittenen Punkt (Memel-Turm), also $p = 18$ Punkte, dazu 87 eingeschnittene Richtungen, welchen auf 17 Stationen 70 Winkel entsprechen. Von den 87 Richtungen sind 76 (= 2mal 38) gegenseitig, dazu 4 einseitige Netzrichtungen und 7 Richtungen, die nicht zum Netze gehören, also $= 38 + 4 = 42$ Netzlinien. Man hat also nach (18) S. 176 die Anzahl $42 - 36 + 3 = 9$ Seitengleichungen und $38 - 17 + 1 = 22$ Dreiecksgleichungen, zusammen $84 - 4 - 54 + 1 + 4 = 31$ Bedingungsgleichungen, wie auch auf S. 140 der „Gradm. in O." nach anderer Abzählungsart angegeben ist.

Ohne weiter auf die Frage einzugehen, welche Bedeutung den gar nicht zu dem Netze gehörigen 7 Richtungen zuzuweisen wäre, haben wir für 31 Bedingungsgleichungen mit 70 Winkelverbesserungen (1) , (2) , (3)... (70) oder 87 entsprechenden Richtungsverbesserungen nach den Formeln (7) u. ff. von § 124. Folgendes berechnet:

Der mittlere Winkelfehler aus den Quadraten der (1) (2)... (70) wird nach (7) § 124. S. 474:

$$m = \sqrt{\frac{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots (70)^2}{r}} = \sqrt{\frac{17{,}868}{31}} = \pm 0{,}76''$$

oder aus den ersten Potenzen, nach (14) §. 124. S. 475:

$$m = 1{,}2533 \frac{(1) + (2) + (3) + \ldots (70)}{\sqrt{n \cdot r}} = 1{,}2533 \frac{24{,}785}{\sqrt{70 \cdot 31}} = \pm 0{,}67''$$

dagegen nach Reduktion mit dem Besselschen z, aus den Quadraten nach (8) § 124. S. 474:

$$m = \sqrt{2\frac{[v^2]}{r}} = \sqrt{2\frac{11{,}90}{31}} = \pm 0{,}89'' \qquad (1)$$

und mit den ersten Potenzen nach (15) § 124. S. 475:

$$m = 1{,}2533 \sqrt{2} \frac{v_0 + v_1 + v_2 \cdots}{\sqrt{n' r}} = 1{,}2533 \sqrt{2} \frac{23{,}26}{\sqrt{87 \cdot 31}} = \pm 0{,}79''$$

Die 3te dieser Bestimmungen $m = \pm 0{,}89''$ aus den Quadraten der Richtungsverbesserungen dürfte die beste sein. (Näheres s. JordanSteppes I. S. 34—35.)

Wenn wir endlich noch die Näherungsrechnung nach der internationalen Formel aus den Dreiecken anwenden wollen, so haben wir dazu bereits eine Vorbereitung S. 12 und die Anwendung in § 121. S. 467 mit $m = 1{,}177''$, allein die dort be-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nützten 22 Dreiecke sind nur diejenigen, welche als Ausgleichungsbedingungen unabhängig sind. Im ganzen sind es 29 Dreiecke, welche geben:

$$m = \sqrt{\frac{41{,}154}{3 \cdot 29}} = \pm 0{,}688'' \tag{2}$$

II. Die Küstenvermessung.

Der technisch-praktische Mitarbeiter Bessels bei der Gradmessung in Ostpreussen, Major *Baeyer*, hatte bei diesem Unternehmen auch Kenntnis der Besselschen Theorie gewonnen und verwertete dieselbe nach Bessels Tode (1846) selbständig, bei Herausgabe des Werkes:

Die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Ausgeführt von der trigonometrischen Abteilung des Generalstabes. Herausgegeben von J. J. Baeyer, Oberst und Abteilungsvorsteher im Generalstabe und Dirigent der trigonometrischen Abteilung, Berlin 1849.

Man erkennt in der „Küstenvermessung" das peinlichste Bestreben, dem Vorbilde der Gradmessung in Ostpreussen nachzukommen; bei der „Bestimmung des mittleren Fehlers der Winkelmessungen" auf S. 353 der Küstenvermessung wurde von Baeyer die unzutreffende Rechnungsart angewendet, welche wir schon in § 124. S. 475 im Kleingedruckten behandelt haben. Nach gleichen Prinzipien, wie im Vorstehenden, bei der Gradmessung in Ostpreussen (d. h. nach (7) u. ff. in § 124.) behandeln wir nun auch die Küstenvermessung.

Die Küstenvermessung besteht aus zwei Netzen. Das erste Netz hat 30 Stationen, 47 Bedingungsgleichungen, 113 Winkelkorrektionen und entsprechend $113 + 30 = 143$ Richtungskorrektionen, jedoch sind auf S. 290—294 145 Richtungskorrektionen angegeben, weil in Trunz eine Vermehrung um 2 eintritt.

Das zweite Netz hat 25 Stationen, 86 Bedingungsgleichungen, 141 Winkelkorrektionen und $141 + 25 = 166$ Richtungskorrektionen.

Man berechnet daraus den mittleren Winkelfehler m auf verschiedene Weise:

Für das erste Netz: a) aus den Winkelkorrektionen

$$m = \sqrt{\frac{30{,}15}{47}} = \pm 0{,}80''$$

$$m = 1{,}2533 \frac{45{,}327}{\sqrt{113 \cdot 47}} = \pm 0{,}78''$$

b) aus den Richtungskorrektionen

$$m = 1{,}2533 \sqrt{2} \frac{34{,}3764}{\sqrt{145 \cdot 47}} = \pm 0{,}74'' \tag{3}$$

Für das zweite Netz: a) aus den Winkelkorrektionen

$$m = \sqrt{\frac{43{,}86}{86}} = \pm 0{,}71''$$

$$m = 1{,}2533 \frac{72{,}63}{\sqrt{141 \cdot 86}} = \pm 0{,}83''$$

b) aus den Richtungskorrektionen

$$m = 1{,}2533 \sqrt{2} \frac{49{,}7174}{\sqrt{166 \cdot 86}} = + 0{,}74'' \tag{4}$$

Durchschnittswert $m = \pm 0{,}77''$ (5)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Näherungsformel der internationalen Erdmessung giebt nach dem „Rapport" für 1892 von Ferrero auf Seite XIII, 45 als Ergebnis von 148 Dreiecken der Küstenvermessung:

$$m = \sqrt{\frac{139{,}659}{3 \cdot 148}} = \pm 0{,}56'' \qquad (6)$$

Einiges weitere zur „Küstenvermessung" haben wir früher in „Jordan-Steppes d. Verm. I. S. 38—44" gegeben, nebst Kommentierung eines weiteren Werkes von Baeyer: „Verbindung der preussischen und russischen Dreiecksketten."

Nachtrag zu § 130.

Gerade während des Druckes von § 130. erscheint ein neuer, VII. Teil des Werkes „Königlich Preussische Landestriangulation", gemessen und bearbeitet von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, Berlin 1895. Dieser neue Band enthält als zweite Abteilung „die Ergebnisse älterer Messungen" und darunter namentlich die „Gradmessung in Ostpreussen und die Küstenvermessung."

Ohne dieses noch mit unserem Vorstehenden verschmelzen zu können, wollen wir wenigstens die Hauptangaben für mittlere Fehler ausziehen:

Bessel hat 1834 seine Dreiecke in Hinsicht des Excesses sphärisch berechnet mit einem Halbmesser $r = 3271628{,}89$ Toisen $= 6376523^m$ oder $log\ r = 6{,}80458$, d. h. mit r gleich dem Aequatorhalbmesser, welcher dem metrischen System zu Grunde liegt, während nach Bessel'schen Erddimensionen von 1841 in der Breite von 55° zu nehmen ist $log\ r = 6.80514$. Der Radius wird grösser, also die Excesse kleiner, was bei dem grössten Dreieck Galtgarben-Wildenhof-Trunz 0,019" ausmacht. Dadurch ändern sich auch die Dreiecksschlüsse ein wenig, und der schon oben bei (2) S. 502 angegebene Wert $m = 0{,}688''$ entspricht den umgerechneten Dreiecksschlüssen, welche auf S. 153 des VII. Teiles „Triangulation" einzeln angegeben sind.

Für die Küstenvermessung giebt „Hauptdreiecke, VII. Teil" auf S. 186 als Berechnung aus den Richtungskorrektionen:

1. für das erste Netz (nördlicher Teil) $m^2 = 3{,}1416\,\frac{34{,}3764^2}{145 \times 47} = 0{,}545$

$$m = 0{,}738''$$

2. für das zweite Netz (südlicher Teil) $m^2 = 3{,}1416\,\frac{49{,}7174^2}{166 \times 86} = 0{,}544$

$$m = 0{,}738''$$

Diese Werte stimmen mit den unserigen schon oben unter (3) und (4) S. 502 angegebenen überein (abgesehen von der Abrundung).

Auf S. 187 „VII. Teil, Hauptdreiecke" sind auch die Berechnungen des mittleren Winkelfehlers nach der internationalen Formel gegeben:

für den nördlichen Teil $\sqrt{\frac{39{,}021}{3 \cdot 45}} = 0{,}538''$ (7)

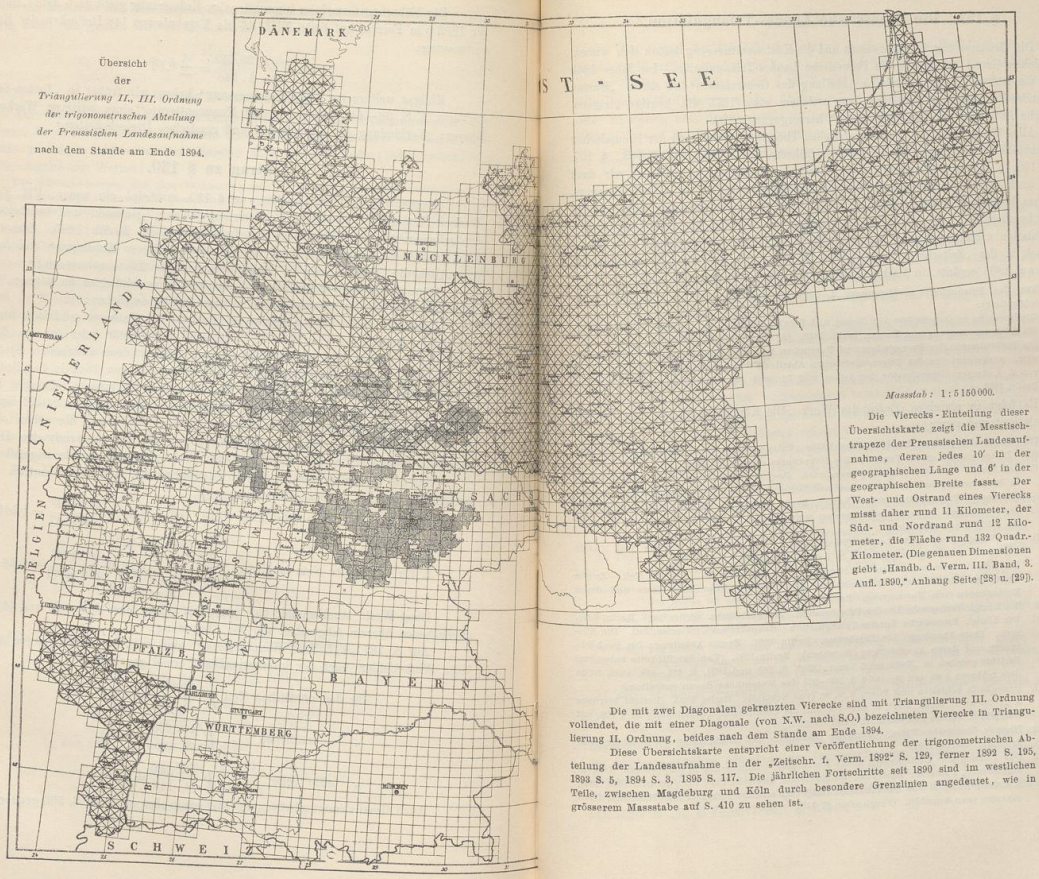
„ „ südlichen „ $\sqrt{\frac{100{,}638}{3 \cdot 103}} = 0{,}571''$ (8)

„ beide Teile $\sqrt{\frac{139{,}659}{3 \cdot 148}} = 0{,}561''$ (9)

Auch dieses stimmt mit dem, was wir schon oben unter (6) S. 503 gegeben haben.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Übersicht
der
Triangulierung II., III. Ordnung
der trigonometrischen Abteilung
der Preussischen Landesaufnahme
nach dem Stande am Ende 1894.



Massstab: 1 : 5 150 000.

Die Vierecks-Einteilung dieser Übersichtskarte zeigt die Messtischtrapeze der Preussischen Landesaufnahme, deren jedes 10′ in der geographischen Länge und 6′ in der geographischen Breite fasst. Der West- und Ostrand eines Vierecks misst daher rund 11 Kilometer, der Süd- und Nordrand rund 12 Kilometer, die Fläche rund 132 Quadr.-Kilometer. (Die genauen Dimensionen giebt „Handb. d. Verm. III. Band, 3. Aufl. 1890," Anhang Seite [28] u. [29]).

Die mit zwei Diagonalen gekreuzten Vierecke sind mit Triangulierung III. Ordnung vollendet, die mit einer Diagonale (von N.W. nach S.O.) bezeichneten Vierecke in Triangulierung II. Ordnung, beides nach dem Stande am Ende 1894.

Diese Übersichtskarte entspricht einer Veröffentlichung der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme in der „Zeitschr. f. Verm. 1892" S. 129, ferner 1892 S. 193, 1893 S. 5, 1894 S. 3, 1895 S. 117. Die jährlichen Fortschritte seit 1890 sind im westlichen Teile, zwischen Magdeburg und Köln durch besondere Grenzlinien angedeutet, wie in grösserem Massstabe auf S. 410 zu sehen ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 131. Die Preussische Landes-Triangulation.

Die Gradmessung in Ostpreussen und die Küstenvermessung haben den wissenschaftlichen Grund gelegt für die Preussische Landes-Triangulation. Im Jahre 1865 wurde die frühere „trigonometrische Abteilung des Generalstabs" zu einem „Bureau der Landes-Triangulation" erweitert, aus welchem etwa 1875 die heutige „trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme" hervorgegangen ist.

Alles Wesentliche der trigonometrischen Theorieen, welche wir der Preussischen Landesaufnahme verdanken, ist in unseren früheren § 71. bis § 81., § 103., § 107. bis § 108. u. a. in wissenschaftlicher Entwicklung dargestellt, und da wir dazu früher auch einen geschichtlichen Kommentar gegeben haben in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", I., S. 59—164, so wollen wir hier uns zunächst darauf beschränken, die wichtigsten Litteratur-Angaben zur Preussischen Landes-Triangulation vorzuführen unter Benützung einer dankenswerten Mitteilung von Oberst Morsbach in der „Zeitschr. f. Verm. 1891", S. 129 u. ff. mit einer Übersichtskarte, welche auf 1895 ergänzt, in Verkleinerung auf S. 504—505 gegeben wird.

Von den Triangulierungs-Messungen I. Ordnung sind bis 1895 die folgenden Druckwerke veröffentlicht:

1) Gradmessung in Ostpreussen von Bessel und Baeyer, Berlin 1838. (S. oben § 130. S. 499.)
2) Die Küstenvermessung von Baeyer, Berlin 1849. (S. oben § 130. S. 502.)
3) Die Verbindungen der Preussischen und Russischen Dreiecksketten bei Thorn und Tarnowitz. Ausgeführt von der Trigonometrischen Abteilung des Generalstabes. Herausgegeben von J. J. Baeyer, Generalmajor der Armee und Dirigent der Trigonometrischen Abteilung. Berlin 1857.

Es folgt in einzelnen *Teilen* das Werk „Die Königliche Preussische Landes-Triangulation" und zwar:

Die Königl. Preussische Landes-Triangulation, Triangulation der Umgegend von Berlin, Berlin 1867. Dieses war ein erster Versuch. Die Hauptwerke dieser Art sind:

I. Teil. *Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke.* Erster Teil: Hauptdreiecke in der Provinz Posen an der Weichsel und östlich derselben, herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation mit 3 Karten, Berlin 1866, und Hauptdreiecke, erster Teil. *Zweite vermehrte Auflage.* Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation. Berlin 1870 (von Morozowicz).

II. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Erste Abteilung: Die Haupttriangulation in Schleswig-Holstein. Berlin 1873.
Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Zweiter Teil. Zweite Abteilung: Die Märkisch-Schlesische und die Schlesisch-Posensche Kette und deren Ergänzungen (von Morozowicz). Berlin 1874.

III. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. (Schreiber.) Berlin 1876.

IV. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Hauptdreiecke. Vierter Teil. Die Elbkette. Erste Abteilung: Die Ergebnisse. Berlin 1887. Zweite Abteilung: Die Beobachtungen und deren Ausgleichung (Morsbach). Berlin 1891. (Von der Elbkette haben wir Berichte gegeben in „Zeitschr. f. Verm. 1888", S. 399 und 1891, S. 455—459, auch ist in dem früheren § 80. mit Netzbild S. 280—281 das Wesentliche davon enthalten.)

V. Teil. Dreiecke in Schlesien und Posen u. s. w. (von Schmidt). Berlin 1893. (Bericht hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1894", S. 452—456 und die Coordinaten-Ausgleichung in § 108. mit Netzbild S. 415 ist aus jenem V. Teil.)

VI. Teil. Hannov.-Sächsische Kette. Göttinger Basisnetz und Sächsisches Dreiecksnetz (von Schmidt). Berlin 1894.

VII. Teil. Das Thüringische Dreiecksnetz, ältere Messungen; Gradmessung in Ostpreussen, Küstenvermessung, Dänischer Anschluss, Weichselkette, Dreiecke 1858, 1859, 1861/62, 1865, 1867. Schleswig-Holsteinsche Dreieckskette, das Posensche Dreiecksnetz, das Märkische Dreiecksnetz (von Schmidt). (Vergl. oben S. 503.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Triangulation II. Ordnung.

Auf Grund der Dreiecke I. Ordnung werden fernere Punkte derart bestimmt, dass einschliesslich der Punkte I. Ordnung auf den Messtisch (126 Quadratkilometer in der Breite von Berlin) deren 2 bis 3, auf die Quadratmeile also etwa 1 entfallen. Die Punkte II. Ordnung werden ähnlich wie die Zwischenpunkte I. Ordnung einzeln oder zu zweien oder dreien, unter völligem Anschluss an die bereits ausgeglichenen Punkte I. und II. Ordnung, ausgeglichen.

Trigonometrische Höhenmessungen führt die II. Ordnung seit 1877 nicht mehr aus.

Triangulation III. Ordnung.

Auf Grund der vorhergegangenen Triangulation I. und II. Ordnung wird das Netz so enge gestaltet, dass die Gesamtzahl von 10 Punkten für jede Quadratmeile bezw. von annähernd 22 Punkten für jeden Messtisch erreicht wird.

Bei idealer Verteilung der Punkte müssen somit noch 19—20 Punkte auf 1 Messtisch seitens der III. Ordnung bestimmt werden.

Ein Netz von 6 Messtischblättern mit Triangulierung III. Ordnung als Arbeit eines Jahres von Trigonometer Messner zeigt S. 411.

Seit 5 Jahren haben wir folgende Einzelmitteilungen über Triangulierung III. Ordnung:

Z. f. Verm. 1892, S. 195 von 1891: 63 Messtische in Sachsen, Hannover und Braunschweig.

Z. f. Verm. 1893, S. 5 von 1892: 40 Messtische in Hannover, Hessen-Nassau, Westfalen, Braunschweig, Waldeck.

Z. f. Verm. 1894, S. 3 von 1893: 63 Messtische in Hannover, Westfalen, Hessen-Nassau.

Z. f. Verm. 1895, S. 117 von 1894: 102 Messtische in Brandenburg, Sachsen, Westfalen. Rheinprovinz.

Die Veröffentlichung der *Gesamt*-Dreiecksmessungen der Preussischen Landesaufnahme I., II. und III. Ordnung erfolgt in einem amtlichen Werke mit Abrissen, Coordinaten und Höhen, dessen Übersichtskarte, mit Einteilung nach Bänden, schon in unserem „Handb. d. V. II. Band, 4. Aufl. 1893, S. 338“ gegeben worden ist.

Die bis jetzt (1895) erschienenen Bände sind:

I. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Polar-Coordinaten, geogr. Positionen und Höhen von 38° der Länge bis zur östl. Landesgrenze. Herausgegeben vom Bureau der Landes-Triangulation (von Morozowicz). Berlin 1874, im Selbstverlage.

II. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation von 36° bis 38° der Länge und von 53° der Breite bis zur Ostsee (Schreiber). Berlin 1875.

III. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation von 34° bis 36° der Länge und von 53° der Breite bis zur Ostsee (Schreiber). Berlin 1876.

IV. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Schleswig-Holstein, Lübeck (Schreiber). Berlin 1878.

V. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Polar-Coordinaten, geogr. Coordinaten und Höhen von 32° bis 34° der Länge und von 53° der Breite bis zur Ostsee, Pommern, Brandenburg, Westpreussen (Schreiber). Berlin 1882.

VI. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Regierungsbezirk Stralsund und Stettin (Schreiber). Berlin 1884.

Bis hierher sind nur *geographische* Coordinaten (Geogr. Längen und Breiten) gegeben. Es folgt die Einführung des *rechtwinkligen* conformen Coordinatensystems der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme, dessen Theorie gegeben ist in unserem „Handb. d. V. III. Band, 3. Aufl. 1890,“ S. 448—453 und neuerdings von Oberst-Lieutenant von Schmidt „Projektionsmethode der trig. Abt. d. Preuss. Landesaufnahme in „Z. f. Verm. 1894,“ S. 385 u. 409.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

VII. Teil. Die Königl. Preussische Landes-Triangulation. Abrisse, Coordinaten und Höhen sämtlicher von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme bestimmter Punkte. Regierungsbezirk Oppeln, herausgegeben von der trig. Abt. d. Landesaufnahme (Schreiber). Berlin 1885. (Litteraturbericht hiezu s. „Zeitschr. f. Verm. 1886", S. 252—256.)

XI. Teil. Mit Titel wie V und VI, Bromberg, Marienwerder, rechtwinkl. Coord. nur für die Punkte I. Ordnung (Schreiber). Berlin 1886.

VIII. Teil. Abrisse, Coordinaten und Höhen (Titel wie VII), Regierungsbezirk Breslau (Schreiber) Berlin 1888.

IX. Teil. dto. Liegnitz (Schreiber). Berlin 1890.

X. Teil. dto. Posen (Morsbach). Berlin 1892.

XII. Teil. dto. Frankfurt a. O. (von Schmidt). Berlin 1894.

Zu all diesem gehört noch die folgende von der trigonometrischen Abteilung ihren Veröffentlichungen beigegebene Bemerkung:

„Die durch Beschluss des Zentraldirektoriums der Vermessungen vom 29. Dezember 1879 für den Anschluss der Spezialvermessungen vorgeschriebenen rechtwinkligen sphäroidischen Coordinaten werden in der Trigonometrischen Abteilung nicht berechnet. Ihre Ableitung aus den geographischen Coordinaten für die durch den genannten Beschluss festgesetzten Coordinatennullpunkte bleibt den Technikern der Spezialvermessungen überlassen."

Die hier erwähnten Coordinatennullpunkte der Spezialvermessungen beziehen sich auf die 40 Kataster-Coordinatensysteme, welche wir in einer Karte dargestellt und beschrieben haben in unserem II. Band „Handb. d. Verm., 4. Aufl. 1893," S. 226 und III. Band, 3. Aufl. 1890, S. 344. Man vergleiche dazu auch eine Erörterung in „Zeitschr. f. Verm. 1891," S. 412—413.

Was die Genauigkeit, insbesondere die mittleren Winkelfehler der Preussischen Landes-Triangulation betrifft, so haben wir viele Auszüge und Berechnungen an verschiedenen Stellen im Vorhergehenden und in dem schon erwähnten Kommentar „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen 1882," I S. 59 u. ff. gemacht, einige Zusammenfassungen auch in unserem III. Bande „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890," S. 182—183 gegeben; worauf zu verweisen ist.

Den mittleren Winkelfehler im Ganzen fanden wir dort $m = \pm 0{,}64''$.

Inzwischen sind nach der internationalen Näherungsformel die Dreiecke seit der Gradmessung in Ostpreussen bis 1891 behandelt worden und es ist daraus abgeleitet auf Seite XIII, 45 des „Rapport für 1892" von Ferrero:

Für 690 Dreiecke $[\Delta^2] = 636{,}427$

also $$m = \sqrt{\frac{636{,}427}{3 \cdot 690}} = \pm 0{,}554''$$

Indessen die *neueren* Messungen der Landesaufnahme geben kleinere Fehler.

Zum Schlusse unserer Berichte über die Preussische Landes-Triangulation wollen wir noch mit nachstehender Fig. 2 die Ausgleichung der Hannoverisch-Sächsischen Kette und des Sächsischen Netzes vorführen, als Auszug aus dem VI. Teil der Königl. Preussischen Landes-Triangulation „Hauptdreiecke, Berlin 1894" (s. oben S. 506). Es wird möglich sein, dadurch einen Einblick in den Gang der Landes-Triangulation, mit ihren Ketten in Zwangsanschluss und ihren Füllnetzen zu erlangen.

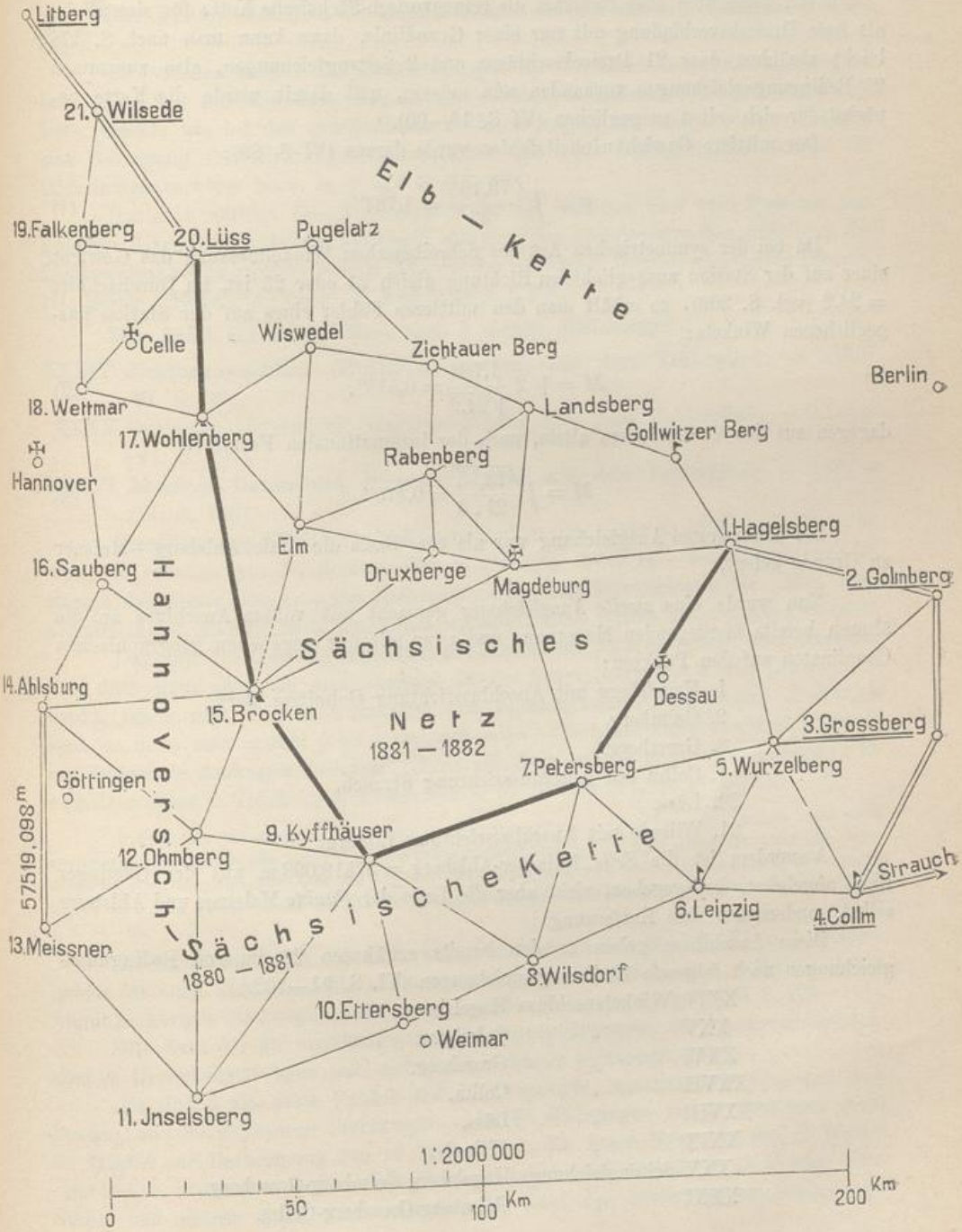
Zuerst müssen wir einen Blick rückwärts werfen auf S. 280—281, wo die Elbkette gezeichnet ist, deren südwestliche Grenze nun auf S. 509 als nordöstliche Grenze wiederkehrt, d. h. die ganze Linie von Litberg bis Hagelsberg ist bereits durch die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Elbkette unabänderlich festgelegt und auch noch der östliche Teil Hagelsberg bis Collm ist festgelegt durch das inzwischen ausgeglichene Märkisch-Schlesische Dreiecksnetz.

Fig. 2.

Hannoverisch-Sächsische Kette und Sächsisches Netz.



Die Hannoverisch-Sächsische Kette ist also im Norden und im Osten vielfach angebunden, was durch die doppelt gezogenen Linien auf S. 509 angedeutet ist, und ausserdem ist im Westen die Linie Meissner—Ahlsburg = 57519,098 m aus der Göttinger Basis abgeleitet.

Wir betrachten aber *zunächst* die Hannoverisch-Sächsische Kette für sich allein, als freie Dreiecksverbindung mit nur einer Grundlinie, dann kann man nach S. 176 leicht abzählen, dass 21 Dreiecksschlüsse und 2 Seitengleichungen, also zusammen 23 Bedingungsgleichungen vorhanden sein müssen, und damit wurde die Kette zunächst für sich selbst ausgeglichen (VI S. 19—90).

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wurde daraus (VI S. 89):

$$m = \sqrt{\frac{73{,}166}{23}} = 1{,}784'' \qquad (1)$$

Da bei der symmetrischen Art der Schreiberschen Winkelmessung das Gewicht einer auf der Station ausgeglichenen Richtung gleich 24 oder 25 ist, im Durchschnitt = 24,2 (vgl. S. 269), so erhält man den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$M = \sqrt{2}\,\frac{1{,}784}{\sqrt{24{,}2}} = 0{,}513'', \qquad (2)$$

dagegen aus den 21 Dreiecken allein, nach der internationalen Formel:

$$M = \sqrt{\frac{13{,}93}{21 \cdot 3}} = 0{,}470'' \qquad (3)$$

Bei dieser ersten Ausgleichung war als *eine* Basis die Linie Ahlsburg—Meisner zu Grunde gelegt,

Nun wurde eine *zweite* Ausgleichung gemacht mit vollem Anschluss an die älteren bereits festliegenden Messungen und zwar mit fest gegebenen geographischen Coordinaten auf den Punkten:

1. Hagelsberg mit Anschlussrichtung Golmitzer Berg,
2. Golmberg,
3. Grossberg,
4. Collm mit Anschlussrichtung Strauch,

20. Lüss,
21. Wilsede mit Anschlussrichtung Litberg.

Ausserdem ist die *Seite* Meissner-Ahlsberg = 57519,098 m aus der Göttinger Basis abgeleitet, fest gegeben, nicht aber die Lage der *Punkte* Meissner und Ahlsburg selbst, sondern nur ihre Entfernung.

Diese Anschlüsse geben zu den bereits erwähnten 23 inneren Bedingungsgleichungen noch folgende 13 Zwangsgleichungen (VI. S. 91—102.)

XXIV	Winkelanschluss	Hagelsberg,
XXV	„	Golmberg,
XXVI	„	Grossberg,
XXVII	„	Collm,
XXVIII	„	Lüss,
XXIX	„	Wilsede,
XXX	Seitengleichung	Hagelsberg-Golmberg-Grossberg,
XXXI	„	Golmberg-Grossberg-Collm,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

XXXII Basisverbindung zwischen Wilsede-Lüss- und Ahlsburg-Meissner, mit einem logarithmischen Fehlergliede $= + 0{,}0000063 \cdot 1$ (VI. S. 94).

XXXIII Basisverbindung zwischen Grossberg-Collm und Ahlsburg-Meissner, mit einem logarithmischen Fehlergliede $= + 0{,}0000062 \cdot 7$ (VI. S. 94).

Nun kommt aber noch der Polygonschluss, den wir auf S. 177 bereits erwähnt haben.

Es bestehen noch 3 Polygongleichungen für die Verbindung zwischen Hagelsberg und Lüss, auf dem Zuge Hagelsberg-Petersberg-Kyffhäuser-Brocken-Wohlenberg-Lüss. Gerade wie bei den gewöhnlichen Feldmesserzügen hat man in diesem Polygon eine Bedingung für Richtungswinkelanschluss und zwei Bedingungsgleichungen für Coordinatenanschluss bezw. in y und in x.

Das dazu nöthige Coordinatensystem ist das conforme über ganz Preussen ausgedehnte System, in welchem überhaupt alle x, y der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme angegeben werden (Theorie der conformen Doppelprojektion in unserem III. Bande, „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890," § 92).

Man findet auf diesem Wege noch 3 weitere Gleichungen:

XXXIV Richtungsanschluss (Kyffhäuser-Brocken) mit dem Fehlergliede $+ 1{,}189''$ (VI. S. 95),

XXXV Ordinaten-Unterschied Hagelsberg-Lüss mit dem Fehlergliede $+ 0{,}173$ m (VI. S. 101),

XXXVI Abscissen-Unterschied Hagelsberg-Lüss mit dem Fehlergliede $+ 0{,}367$ m (VI. S. 102).

Die Gleichung XXXIV für Richtungsanschluss ist leicht zu bilden, auf VI. S. 95 wird sie erhalten aus der Summe aller $t_{2 \cdot 1} - t_{1 \cdot 2}$, wenn $t_{2 \cdot 1}$ der Richtungswinkel einer Polygonseite und $t_{1 \cdot 2}$ der Richtungswinkel der Gegenrichtung ist. Man kann die Gleichung XXXIV auch durch den sphäroidischen Excess des Polygons ableiten.

Dagegen die Coordinatengleichungen XXXV und XXXVI werden *sehr* umständlich, denn wenn man sie sich zunächst in der Form $[s \sin t] = 0$ und $[s \cos t] = 0$ denkt, wo s und t die Entfernungen und Richtungswinkel der ebenen Projektion sind, so muss man sowohl jedes s als auch jedes t durch alle Dreieckswinkel hindurch auf fehlerfreie Anfangswerte zurückführen und dann nach s und t differentiieren. So enthalten diese 2 Gleichungen schliesslich je 51 Glieder (VI. S. 101—102).

Früher, als das allgemeine conforme Coordinatensystem x y der Landesaufnahme noch nicht vorhanden war, wurde für den Zweck der Polygongleichungen je ein *besonderes* geodätisches Coordinatensystem angenommen, was für den Fall eines Polygons von 1867 mit Eingehung auf Einzelheiten von uns kommentiert worden ist in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", I. S. 81—85.

Nachdem wir somit die 13 Zwangsgleichungen XXIV bis XXXVI nachgewiesen haben, ist auch klar, dass die zweite Ausgleichung 36 Gleichungen enthalten muss, womit im übrigen die Ausgleichung nach bekannter Weise vor sich geht (VI. S. 103—114).

Die Zahl der 36 unabhängigen Bedingungsgleichungen der Hannoverisch-Sächsischen Dreieckskette kann man sich auch nochmals so zurechtlegen:

Es sind 6 alte feste Punkte und 15 Neupunkte, zusammen 21 Stationen vorhanden und 86 gemessene Richtungen. Also 86 Richtungen auf 21 Stationen giebt 65 Winkel zur Bestimmung von 15 Neupunkten. Zu einem Neupunkt sind 2 Winkel erforderlich, zusammen $2 \cdot 15 = 30$ Winkel, folglich sind $65 - 30 = 35$ Winkel überzählig und ebenso gross auch zunächst die Zahl der unabhängigen Bedingungs-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

gleichungen. Es ist dabei aber die Seitenlänge Meissner-Ahlsburg noch nicht berücksichtigt, diese giebt noch eine Seitengleichung hinzu, man hat also nun $35 + 1 = 36$ Bedingungsgleichungen, ebenso wie oben in der Aufsuchung I ... XIV ... XXXVI.

Die Verbesserungen sind begreiflicher Weise in der zweiten Ausgleichung wegen des Anschlusszwanges erheblich grösser geworden als in der ersten freien Ausgleichung. Nach VI. S. 115 war in der ersten Ausgleichung bei 23 Bedingungsgleichungen die Quadratsumme der Verbesserungen = 73,166, dagegen in der zweiten Ausgleichung mit 36 Bedingungen, Quadratsumme = 223,049, woraus man zur Vergleichung berechnen kann den Gewichtseinheitsfehler:

ohne Anschlusszwang $$m = \sqrt{\frac{73{,}166}{23}} = 1{,}78'' \qquad (4)$$

mit „ $$m' = \sqrt{\frac{223{,}049}{36}} = 2{,}49'' \qquad (4\,a)$$

Der Wert (4) ist derselbe wie schon oben bei (1).

Wir haben auch noch die Netzrichtungsverbesserungen (1), (2) ... (86) zugezogen, deren absolute Summe im ersten Falle = 12,898 und im zweiten Falle = 19,406 ist, woraus man rechnen kann den mittleren Netzrichtungsfehler:

ohne Anschlusszwang $$\mu = 1{,}2533\,\frac{12{,}898}{\sqrt{83{,}23}} = 0{,}370'' \qquad (5)$$

mit „ $$\mu' = 1{,}2533\,\frac{19{,}406}{\sqrt{86{,}36}} = 0{,}437'' \qquad (5\,a)$$

Man hat $m : m' = 1 : 1{,}4$ und $\mu : \mu' = 1 : 1{,}2$.

Interessanter sind die auf VI. S. 115—116 gegebenen Vergleichungen beider Ausgleichungen in Hinsicht auf Verdrehung u. s. w. durch den Anschlusszwang. Derselbe hat eine Vergrösserung von etwa 1 : 100 000 hervorgebracht.

Werfen wir noch einen Blick auf das „Sächsische Netz", welches nach Festlegung der soeben besprochenen Hannoverisch-Sächsischen Kette von allen Seiten durch einen festen Rahmen begrenzt ist.

Die Ausgleichung wurde ebenso gemacht wie die schon in § 108. mit dem Netzbilde S. 415 von uns beschriebene Coordinaten-Einschaltung, wir können uns also kurz fassen.

Da im Norden die Elbkette und auf allen anderen Seiten die Hannoverisch-Sächsische Kette festliegen, hat das Sächsische Netz nur noch 5 freie Innenpunkte nämlich:

Magdeburg	mit	$\delta y =$	II	und	$\delta x =$	I
Druxberge	„	„	IV	„	„	III
Elm	„	„	VI	„	„	V
Rebenberg	„	„	VIII	„	„	VII
Wiswedel	„	„	X	„	„	IX

Die Ausgleichung bekommt also 10 Unbekannte I bis X, entsprechend den 20 Unbekannten von S. 416—417.

Damit haben wir das Wesentliche angeführt, was zu dem auf S. 509 dargestellten Netzen und Ketten gehört, und es scheinen uns diese Beispiele sehr willkommen zur Darstellung der Methoden der heutigen Preussischen Landesaufnahme.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die beste Übersicht aller Ketten und Netze der Preussischen Landesaufnahme bekommt man aus der Kartenbeilage zu dem VII. Teil, „Preuss. Landes-Triangulation, Hauptdreiecke, 1895 (vgl. S. 506). Man sieht daraus, dass die Landes-Triangulation ihrer Vollendung entgegengeht, wie auch der Chef der trigonometrischen Abteilung Oberstlieutenant von Schmidt in der „Zeitschr. f. Verm., 1894," S. 385 berichtet, „dass die Triangulation I. Ordnung voraussichtlich im Jahre 1897 abgeschlossen sein „werde — worauf die Aufgabe komme, das geschaffene Werk dauernd zu erhalten und „soweit es Not thut, mit veränderten Mitteln und auf neuen Grundlagen fortzusetzen."

§ 132. Triangulierungen des geodätischen Instituts.

Von 1864—1886 sind von dem königlich preussischen geodätischen Institute drei grössere Triangulierungs-Arbeiten ausgeführt worden, nämlich, nach der Zeit ihrer Veröffentlichung:

1) Das rheinische Dreiecksnetz I. Heft: die Bonner Basis, 1876,
II. „ die Richtungsbeobachtungen, 1878,
III. „ die Netz-Ausgleichung, 1882;
2) das hessische Dreiecksnetz, 1882;
3) das märkisch-thüringische Dreiecksnetz, 1889.

Berichte hierüber sind gegeben in der „Vierteljahrsschrift d. Astr. Gesellschaft 1877", S. 146—166, Bonner Basis, ferner „Zeitschr. f. Verm., 1879", S. 97—149, Schreiber, Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen „Z. f. Verm., 1884", S. 69—78, Rheinisches Dreiecksnetz und „Z. f. Verm., 1889", S. 155—159, Hessisches Dreiecksnetz.

Diese Triangulierungen wurden ursprünglich nach dem Muster der „Küsten-Vermessung" angelegt, und sind später im Anschluss an die übrige Weiter-Entwicklung der Ausgleichungs-Theorie fortgeführt worden.

Die Bonner Basis und das Basisnetz sind schon 1847 unter Baeyers Leitung gemessen worden, zur Verbindung der früheren preussischen und französischen Dreiecke. Aus manchen Gründen blieben diese Messungen 20 Jahre lang liegen und wurden von General Baeyer erst nach Gründung des geodätischen Instituts etwa um 1869 wieder aufgenommen und nach Süden zu dem Rheinischen Dreiecksnetz erweitert; wobei namentlich die *badische* Regierung durch liberales Entgegenkommen und Kostenteilnahme zu dem Gelingen des Unternehmens beigetragen hat.

Das Rheinische Dreiecksnetz war nach der Absicht seines Urhebers dazu bestimmt, als erstes Werk *über die Hindernisse der politischen Landesgrenzen in Deutschland hinweg*, eine neue Aera der Geodäsie in Deutschland einzuleiten. —

In idealem Sinne ist dieser Zweck erreicht worden, aber die Landes-Triangulierungen der 6 Staaten, über welche das Rheinische Dreiecksnetz sich ausbreitet, werden unabhängig von demselben weiter behandelt. —

Das Rheinische Dreiecksnetz ist ein Torso geblieben.

Die Bonner Basis von 1847, mit ihrem Basisnetze ist in nachstehender Fig. 1. dargestellt. Die Vergrösserung der kurzen Basis $AB = 2134^m$ auf die Seite Michelsberg—Löwenburg = 34552 ist rund 16fach.

Die Bonner Basis wurde im Jahre 1892 zweifach nachgemessen, d. h. es wurde eine Länge von 2513^m in der Nähe der früheren Basis gemessen und auf die alte Linie bezogen, erstens von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme mit

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dem Besselschen Basis-Apparate, und zweitens von dem geodätischen Institute mit dem mikroskopischen Brunner-Apparate. Die erstere Messung (Landesaufnahme) ist mitgeteilt von Oberst Morsbach in der „Zeitschr. f. Verm., 1893", S. 2:

Mittel aus 4 Messungen auf die Höhe von Normal-Null reduziert:

$$B_0 = 2512{,}92767^m$$

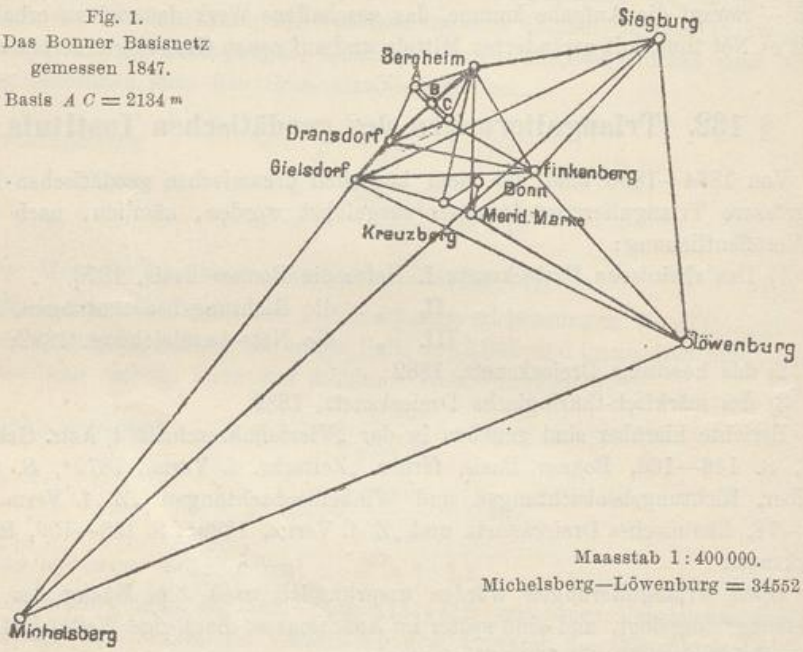


Fig. 1.
Das Bonner Basisnetz
gemessen 1847.
Basis $A\,C = 2134^m$

Maasstab 1 : 400 000.
Michelsberg—Löwenburg = 34552 m

Die Messung des geodätischen Instituts ist mitgeteilt in den Verhandlungen der internationalen Erdmessung in Genf 1893, Seite 178, nämlich mit Vergleichung mit der Landesaufnahme, in der mittleren Basishöhe:

geodätisches Institut	$B = 2512{,}995^m$
Landesaufnahme	$B = 2512{,}984$
Differenz	11^{mm}

Zurückkehrend zu dem Rheinischen Dreiecksnetz des geodätischen Instituts 1878—1883 haben wir über das angewendete Messungsverfahren zuerst zu berichten, dass das schon von der Gradmessung in Ostpreussen und von der Küstenvermessung her geläufige Verfahren der Richtungsbeobachtungen ohne festen Verteilungsplan, aber mit der Neuerung einer *Nullpunktsmarke* angewendet wurde. Es wurde nämlich ein künstlicher Zielpunkt in Entfernung weniger Kilometer auf jeder Station hergestellt, welcher in *jedem* Satze als Nullpunkt eingestellt wurde. Es wurde dadurch eine gewisse Unabhängigkeit von den Zufällen der Heliotropen-Lichter erzielt, aber das Verfahren im Ganzen hat sich schliesslich doch nicht völlig bewährt. —

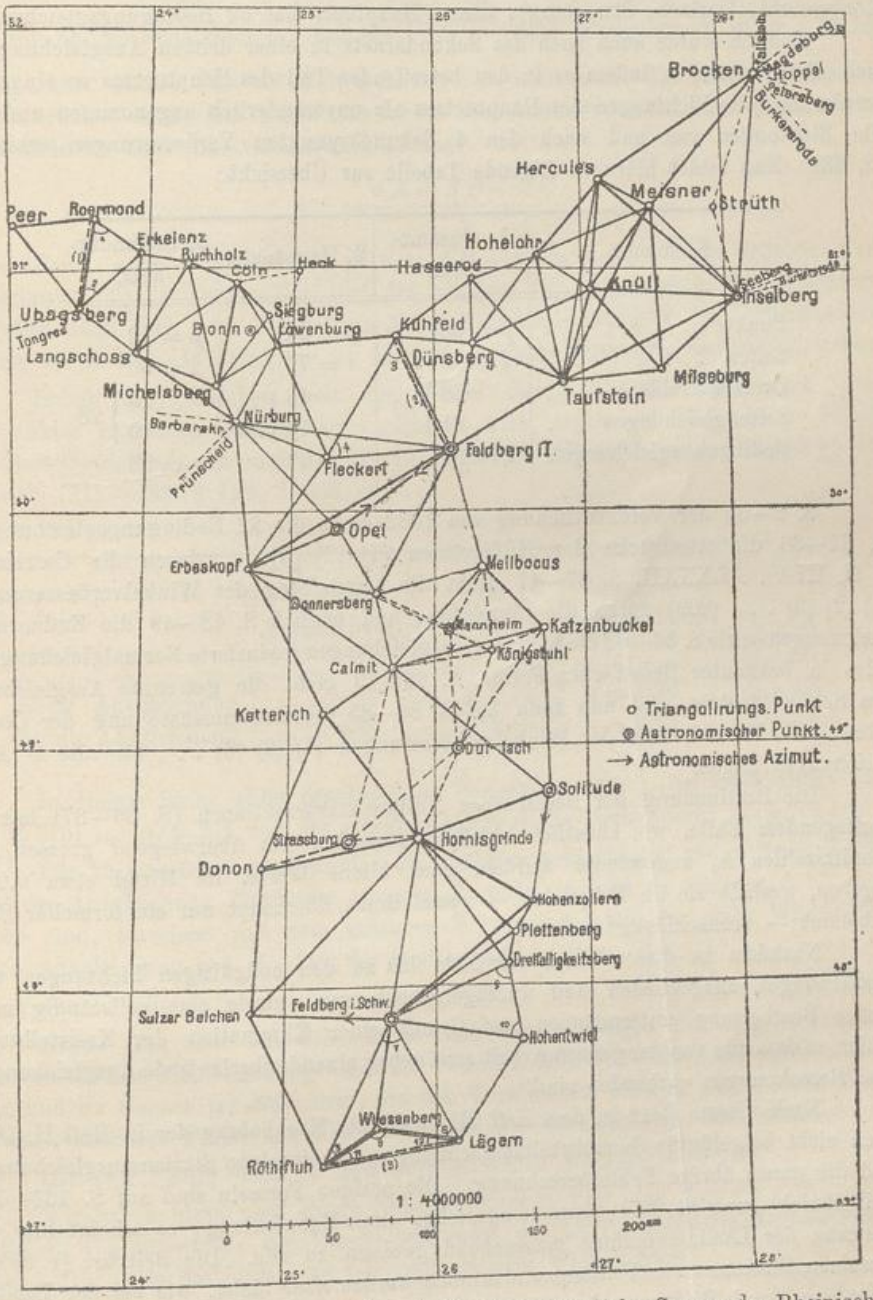
Nach diesem betrachten wir das Netz selbst in der Darstellung von Fig. 2, S. 515, welche jedoch in ihrem nordöstlichen Teile auch noch das „hessische Dreiecksnetz" des geodätischen Instituts von 1882 mitenthält.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 2.

Das Rheinische und das Hessische Dreiecksnetz.

(Maassstab 1:4000000).



Indem die Seite Kühfeld-Feldberg i. T. als nordöstliche Grenze des Rheinischen Netzes genommen wird, bleiben 36 trigonometrische Punkte mit 93 vorwärts und

rückwärts beobachteten Richtungen, welche als Gesamtnetz mit 82 Bedingungsgleichungen ausgeglichen wurden.

Nebenher geht aber eine zweite Ausgleichung mit Trennung des Ganzen in ein „Hauptnetz" von 32 Punkten und ein Sekundärnetz von 4 Punkten (Mannheim, Königsstuhl, Durlach, Strassburg); dieses Hauptnetz hat 62 Bedingungsgleichungen.

Endlich wurde auch noch das Sekundärnetz in einer dritten Ausgleichung für sich allein behandelt, indem es in den betreffenden Teil des Hauptnetzes so eingefügt wurde, dass die Richtungen des Hauptnetzes als unveränderlich angenommen und nur die Richtungen von und nach den 4 Sekundärpunkten Verbesserungen erhielten (S. 63). Man bildet hiernach folgende Tabelle zur Übersicht:

Elemente.	1. Gesamtnetz.	2. Hauptnetz.	3. Sekundärnetz.
Punkte	$p = 36$	$p = 32$	$p = 12$
Seiten	$l = 93$	$l = 77$	$l = 30$
Dreiecksschlüsse . . .	58 } 82	46 } 62	19 } 28
Seitengleichungen . .	24 }	16 }	9 }
Bedingungsgleichungen	$r = 82$	$r = 62$	$r = 28$

S. 2—30 der Veröffentlichung von 1882 giebt die 82 Bedingungsgleichungen, S. 31—36 die Ausdrücke der Hilfsgrössen [1] [2] [3] . . . durch die Correlaten I, II, III . . . LXXXII, S. 37—47 giebt die Darstellung der Winkelverbesserungen (1) (2) (3) . . . (209) durch die Correlaten, und endlich S. 48—49 die Endnormalgleichungen sowie S. 56—62 die Eliminationsgleichungen (reduzierte Normalgleichungen), alles in bekannter Bessel scher Form. S. 63—79 giebt die getrennte Ausgleichung des Sekundärnetzes, und nun kann auf S. 80—85 die Zusammenstellung der Correlaten I, II, III etc. und der Winkelverbesserungen (1) (2) (3) . . . für alle 3 Ausgleichungen folgen.

Die Bestimmung der Bessel schen Nullpunktskorrektionen (S. 86—87) hat in vorliegendem Falle, wo künstliche *Nullpunktsmarken* mit überwiegend grossen Abschnittszahlen h_0 angewendet wurden, ganz kleine Werte, im Mittel etwa 0,01″, ergeben, weshalb sie im Folgenden — zumal ihnen überhaupt nur ein formeller Sinn zukommt — vernachlässigt wurden.

Nachdem in dieser Weise das Netz bis zu den endgültigen Richtungen und Entfernungen ausgeglichen und durchgerechnet war, wurde eine vollständig neue *zweite* Bearbeitung unternommen auf Grund einer Elimination der Kreisteilungsfehler, so dass nun von der ganzen Arbeit *zwei* neben einander herlaufende Ausgleichungen und Berechnungen vorhanden sind.

Nach diesem folgt in dem Heft III, 1882 die Nachholung der in Heft II, 1878 noch nicht beigefügten Genauigkeitsberechnungen der einzelnen Stationsausgleichungen und die ganze übrige Fehlerberechnung. Die nötigen Formeln sind auf S. 134—135 (mit Berichtigung S. 207) zusammengestellt, ohne Entwicklung; es scheint hier der Vorgang der Landesaufnahme massgebend gewesen zu sein. Die Beiträge $[v\ v]$ der einzelnen Stationen zur Fehlerquadratsumme werden aber nicht, wie bei der Landesaufnahme, durch Beifügung des Gliedes $[V_0\ V_0]$ zu jeder Stationselimination gewonnen, sondern durch Bildung aller einzelnen Differenzen dA, dB, dC . . . zwischen den

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beobachtungen und dem aus der Stationsausgleichung hervorgegangenen wahrscheinlichsten Wert jeder Richtung (vgl. hiezu das Frühere S. 239 im Kleingedruckten und S. 318). Nachdem die Stationseliminationen bereits abgeschlossen sind, ist dieses Verfahren sehr praktisch und auch theoretisch ohne Weiteres klar, wenn man nur sich von der Notwendigkeit des Abzuges $\frac{[\Sigma d A]^2}{o}$ noch Rechenschaft giebt. Dieser Abzug rührt daher, dass die $d A$, $d B$, $d C$ . . . noch nicht die wahrscheinlichsten Verbesserungen sind, das wahrscheinlichste Verbesserungssystem jeder Station verlangt vielmehr noch eine Gesamtverschiebung

$$z = -\frac{d A + d B + d C}{4}$$

woraus dann $v_0 = z$ $v_1 = d A + z$ $v_2 = d B + z$ $v_3 = d C + z$ als definitive Verbesserungen mit der Summe Null und der richtigen Quadratsumme $[v v]$ hervorgehen. Nachdem dann auch noch der Beitrag N der Netzausgleichung zu der Fehlerquadratsumme auf S. 144—145 ermittelt ist, kann die Fehlerberechnung selbst vor sich gehen.

Indem die Gewichtseinheit dem Mittel der Richtungsbeobachtungen eines Zielpunktes in beiden Fernrohrlagen zugeteilt wird, ergab sich der mittlere Fehler für diese Gewichtseinheit nach S. 146—147 von Heft III, 1882, unter Anwendung der Formeln (21) — (23) § 124. S. 477 so:

	Stations-Ausgleichung	Netz-Ausgleichung	Gesamt-Ausgleichung	Quotient $\frac{\mu_2}{\mu_1}$	Quotient $\frac{\mu_2}{\mu}$
Erste Ausgleichung	$\mu_1 = 1{,}17''$	$\mu_2 = 2{,}16''$	$\mu = 1{,}20''$	1,8	1,8
Zweite Ausgleichung	$\mu_1 = 0{,}78$	$\mu_2 = 2{,}18$	$\mu = 0{,}83$	2,8	2,6

In diesem Sinne giebt das hessische Dreiecksnetz (d. h. der nordöstliche Teil auf S. 515) $\mu_2 : \mu_1 = 2{,}4$ und das märkisch-thüringische Dreiecksnetz $\mu_2 : \mu_1 = 1{,}9$.

Für 12 einzelne Winkel wurden die Funktionsgewichte und die mittleren Fehler nach der Ausgleichung durch die strengen Formeln, welche in unserem § 53. enthalten sind, berechnet mit dem mittleren Ergebnis $\pm 0{,}29''$ für einen Winkel der ersten Ausgleichung und $\pm 0{,}20''$ der zweiten Ausgleichung

also im Mittel: $m' = \pm 0{,}25''$ (1)

Dieses sind aber nur theoretische Rechenwerte, wegen des oben erwähnten Missverhältnisses 1,8, beziehungsweise 2,6 zwischen dem Gewichtseinheitsfehler μ_2 im Netz und im Ganzen μ, muss man, um der Wirklichkeit sich zu nähern, die theoretischen mittleren Fehler mit diesen Verhältnissen multiplizieren, und erhält dann:

Mittlerer Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels $= \pm 0{,}52''$ (2)

Wir haben hiezu noch einige Nebenrechnungen nach den Formeln (13) — (15) § 124. S. 475 angestellt: der Durchschnittswert der 58 Dreiecksschlusswidersprüche ist $= 1{,}016''$, also der hieraus zu folgernde mittlere Winkelfehler:

$$= 1{,}2533 \frac{1{,}016}{\sqrt{3}} = 0{,}74'' \quad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ferner geben die 209 Winkelverbesserungen (1) (2) . . . (209) der Auflösung 1. S. 83—85, Heft III, 1882 den Durchschnittswert 0,261″ also bei 82 Bedingungsgleichungen den mittleren Winkelfehler:

$$= 1{,}2533 \sqrt{\frac{209}{82}}\, 0{,}261'' = \pm 0{,}52'' \qquad (4)$$

Im Mittel aus diesen zwei Werten (3) und (4) hat man also für den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels den Wert $\pm 0{,}63''$ und wegen der 82 Bedingungsgleichungen kann man entsprechend den mittleren Fehler eines im Netz ausgeglichenen Winkels setzen:

$$= \sqrt{\frac{209 - 82}{209}}\, 0{,}63'' = \pm 0{,}49'' \qquad (5)$$

was mit (2) nahezu übereinstimmt und eine Bestätigung dafür ist, dass man die theoretischen mittleren Fehler unter (1) zuvor mit den betreffenden Quotienten 1,8 beziehungsweise 2,6 multiplizieren muss, um sie den in Wirklichkeit zu befürchtenden Fehlern zu nähern. (Einiges weitere hiezu haben wir noch in der „Z. f. V. 1884", S. 74—78 gegeben).

Die mittleren Winkelfehler nach der internationalen Formel sind von Helmert gegeben auf S. XII. 5 des „Rapport sur les triangulations" für 1892 von Ferrero, nämlich:

Bonner Basisnetz $m = \sqrt{\frac{46{,}9505}{27 \,.\, 3}} = \pm 0{,}761''$

Rheinisches Dreiecksnetz $m = \sqrt{\frac{117{,}9386}{73 \,.\, 3}} = \pm 0{,}734''$

Hessisches Dreiecksnetz $m = \sqrt{\frac{72{,}5128}{34 \,.\, 3}} = \pm 0{,}843''$

Anschluss Breslau u. s. w. $m = \sqrt{\frac{8{,}7037}{3 \,.\, 3}} = \pm 0{,}983$

Gesamtmittel $m = \sqrt{\frac{246{,}1056}{137 \,.\, 3}} = \pm 0{,}774''$

§ 133. Bayern.

Bayern hat das Verdienst, am Anfang dieses Jahrhunderts die erste zusammenhängende Triangulierung und Landesvermessung mit rechtwinkligen Coordinaten durchgeführt und dadurch ein erstes geodätisches Zentrum in Deutschland geschaffen zu haben, an welches sich die andern Südstaaten rasch anschlossen.

Ausser dem Astronomen und Geodäten *Soldner* (1776—1833) sind es die Mechaniker und Optiker *Reichenbach*, *Utzschneider*, *Fraunhofer*, welche durch ihre lange unübertroffenen geodätischen Instrumente zu diesem Ergebnisse beigetragen haben.

Man vergl. hiezu

„Johann Georg Soldner und sein System der bayerischen Landesvermessung, Vortrag vom 27. Juli 1885 von Bauernfeind, München 1885, „Zeitschr. f. Verm. 1886," S. 45.

Die trigonometrischen Messungen begannen am Anfang dieses Jahrhunderts, die letzte Berechnung erfolgte aber erst 1866—1870.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ein amtliches Werk über die bayerische Triangulierung erschien 1873, aus Veranlassung der internationalen Erdmessung:

„Die bayerische Landesvermessung in ihrer wissenschaftlichen Grundlage, herausgegeben von der Kgl. Steuer-Kataster-Kommission in Gemeinschaft mit dem topographischen Bureau des Kgl. Generalstabs", München 1873. 1. Abschnitt, die Grundlinien, bearbeitet von Direktor v. Bauernfeind, 2.—8. Abschnitt, Triangulierung und Gradmessungsresultate, bearbeitet von Oberstlieutenant v. Orff, (vgl. die Einleitung S. 6).

Es sind drei Grundlinien gemessen, bei München 1801, Nürnberg 1807 und Speyer 1819. Die Winkelmessungen sind nach der Repetitionsmethode gemacht und stationsweise ausgeglichen. Die Ergebnisse der Stationsausgleichungen wurden in die Netzausgleichung von 1866—1870 als unmittelbare Richtungsmessungen eingeführt, jedoch nicht mit gleichen Gewichten (wie bei Gauss und Gerling), sondern mit den Anschnittszahlen als Gewichten (vgl. hiezu § 82. S. 283).

Das Gesamtnetz wurde in 32 Polygone zerlegt, von denen jedoch ein Teil, namentlich die letzten, Nichts zum Zusammenhalt des Ganzen beiträgt, sondern mehr den Charakter von Punkteinschaltungen hat. Die ersten Polygone schliessen sich an die 3 gemessenen Grundlinien an, und der Zusammenhang der Polygone wird durch Zwangsbedingungen, welche sich auch auf die Basisanschlüsse erstrecken, gewonnen.

Als Beispiel für die Zwangsanschlüsse zwischen den einzelnen Teilnetzen nehmen wir mit Fig. 1 die Verbindung der Polygone IV und V. Das Polygon IV gründet sich auf die Basis Speyer—Oggersheim (welche mit 19794,974^m in die Rechnung eingeht) nahezu in ähnlicher Weise wie bei dem badischen Netze von S. 174. Das Polygon IV wird als frei ausgeglichen und bietet Anschlusszwang nach dem Polygon V.

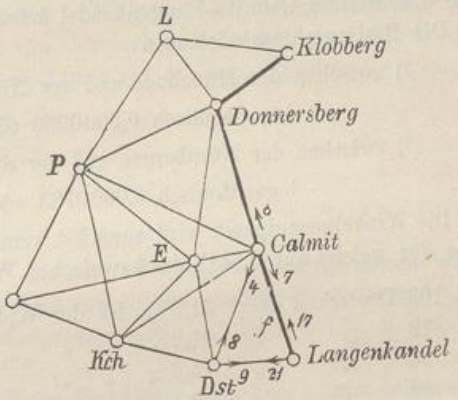
Fig. 1.

Zwangsanschluss zwischen dem Polygon IV und V.

Polygon V (1 : 2 000 000).

Polygon IV.

Das östliche Polygon IV enthält dieselben Anschlussseiten wie die drei starkgezogenen Seiten des westlichen Polygons V (vgl. auch S. 174).



Dst = Derstenberg

Da in dem Polygon V alle Sichten gemessen sind, kann man aus den 10 Punkten und 21 Linien nach bekannten Regeln (S. 176) abzählen, dass 12 Dreiecksgleichungen und 4 Seitengleichungen bestehen, *ohne* Rücksicht auf den Anschluss, welcher, da 3 Grundlinien vorhanden sind, jedenfalls noch 2 weitere Seitengleichungen herbeigeführt (*E* und *F* zu den ursprünglichen *A*, *B*, *C*, *D* S. 362—363 des bayerischen Triangulierungswerkes).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der Umstand, dass die Winkel in Calmit und in Donnersberg nicht wieder geändert werden dürfen, giebt nicht etwa zu den bereits vorhandenen 12 Winkelgleichungen noch deren 2 neue, sondern er äussert sich darin, dass z. B. die Richtungskorrektionen (17), (7), (8) u. s. w., welche von dem östlichen Netz herkommen, auch im westlichen Teile beibehalten werden müssen.

Die Winkelgleichung f für das Dreieck Derstenberg, Langenkandel, Calmit würde ohne Anschlusszwang lauten:

$$(9) - (8) + (17) - (21) + (4) - (7) - 3{,}759'' = 0,$$

Es ist aber im östlichen Polygon IV bereits unabänderlich bestimmt $(17) = +0{,}355''$, $(7) = -0{,}282''$, womit die vorstehende Gleichung übergeht in:

$$(9) - (8) - (21) + (4) - 3{,}122'' = 0$$

wie sie in der That auf S. 362 des bayerischen Triangulierungswerkes unter f) steht.

Thatsächlich braucht man diese umständliche Herleitung nicht zu machen, man nimmt einfach die Winkel des Dreiecks f als Differenzen der Stationsrichtungen, nachdem man bei denjenigen Strahlen, welche bereits eine Netzausgleichung durchgemacht haben, die von dort erhaltenen Richtungskorrektionen angebracht hat, z. B. in unserem Dreieck f):

Derstenberg	=	65°	6′	12,500″
Calmit	=	42	31	25,482
Langenkandel	=	72	22	20,255
		179	59	58,237
	Soll	180	0	1,359
				— 3,122″

Daraus geht die obige Gleichung hervor, wenn man für die Richtungen Langenkandel—Calmit und Calmit—Langenkandel *keine* Korrektionen einführt.

Die Basisanschlüsse betragen:

1) zwischen der Münchner und der Nürnberger Basis:

logarithmisch 0,0000030 oder 7^{mm} für 1^{km}

2) zwischen der Nürnberger und der Speyerer Basis:

logarithmisch 0,0000133 oder 31^{mm} für 1^{km}

Die Winkelgenauigkeit wird zunächst veranschaulicht durch die Dreieckswidersprüche, für welche auf S. 481 des bayerischen Werkes folgende Tabelle gegeben wird:

Bei	106	Dreiecken	oder	31,3 %	ist	der	Widerspruch	zwischen	0,0″	und	0,9″
„	72	„	„	21,2	„	„	„	„	1,0	„	1,9
„	53	„	„	15,6	„	„	„	„	2,0	„	2,9
„	42	„	„	12,4	„	„	„	„	3,0	„	3,9
„	29	„	„	8,6	„	„	„	„	4,0	„	4,9
„	13	„	„	3,8	„	„	„	„	5,0	„	5,9
„	11	„	„	3,2	„	„	„	„	6,0	„	6,9
„	7	„	„	2,1	„	„	„	„	7,0	„	7,9
„	4	„	„	1,2	„	„	„	„	8,0	„	8,9
„	2	„	„	0,6	„	„	„	„	9,0	„	9,9
	339			100,0 %							

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Indem man in der ersten Gruppe den Mittelwert 0,5″ für alle einzelnen Dreiecke annimmt, in der zweiten Gruppe den Mittelwert 1,5″ etc., findet man den mittleren Winkelfehler:

$$m = \pm 1{,}81''$$

In dem internationalen „Rapport" für 1892 von Ferrero wird auf Seite II, 4 für Bayern und Pfalz nach der internationalen Formel aus 337 Dreiecken berechnet:

$$m = \sqrt{\frac{3183{,}0102}{337 \cdot 3}} = \pm 1{,}774'' \qquad (1)$$

Dazu hat *Nagel* im „Civilingenieur" 36. Band, 1890, S. 407 bemerkt, dass die bayerische Gradmessungs-Kommission aus Versehen ein Viereck als Dreieck gezählt und zwei andere Vierecke absichtlich weggelassen hat. Indem dann Nagel die Vierecke nach § 123. S. 470 auf Dreiecke reduziert, berechnet er:

$$m = \sqrt{\frac{3205{,}5771}{339 \cdot 3}} = \pm 1{,}775'' \qquad (2)$$

Man hat also aus den Dreiecksschlüssen allein den mittleren Winkelfehler 1,78″, worin der Anschlusszwang nicht wirksam ist.

Aus den 32 Polygonausgleichungen, welche allen Anschlusszwang mitenthalten, berechnet v. Orff auf S. 485 des bayerischen Werkes aus 1013 Richtungsverbesserungen ζ mit 593 Bedingungsgleichungen, den mittleren Fehler einer Richtung vom Gewichte 1:

$$e = \sqrt{\frac{[P\zeta^2]}{593}} = \sqrt{\frac{10295}{593}} = \pm 4{,}16'' \qquad (3)$$

Um hieraus einen mittleren Fehler für durchschnittliches Gewicht zu bilden, kann man auf S. 341—477 des bayerischen Werkes die Summe der Anschnittszahlen $= 75258$ und die Anzahl der Richtungen $= 1013$ abzählen, womit man die durchschnittliche Anschnittszahl $= 75$, oder das durchschnittliche Gewicht $= 7{,}5$ berechnet und damit den mittleren Fehler einer Richtung für durchschnittliches Gewicht:

$$e_1 = \frac{4{,}16}{\sqrt{7{,}5}} = \pm 1{,}52'' \qquad (4)$$

und den mittleren Winkelfehler:

$$m = e_1 \sqrt{2} = \pm 2{,}15'' \qquad (5)$$

Dieses ist der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels für *durchschnittliches* Stationsgewicht. Eine bessere Berechnung für *mittleres* Stationsgewicht (mit dem Mittel der Gewichtsreciproken) nach (17)—(20) § 124. S. 476 haben wir nicht gemacht.

Der Wert (5) ist grösser als (2) im Verhältnis etwa 1,2 : 1, was bei den zahlreichen Zwangsbedingungen in stärkerem Masse erwartet werden konnte, oder auch die Rechnung nach (5) ungenügend erscheinen lässt.

Unter Bayern gehört auch noch *Schwerd*s Basisnetz, das wir bereits in § 65. behandelt haben. Wenn man dazu auch den mittleren Fehler nach der internationalen Formel berechnen will, so muss man zu den 3 Dreiecksschlüssen, welche wir bereits auf S. 209 unten bei (6) angegeben haben, noch den 4ten bilden, welchen wir mit den Winkeln $(1 - 2)$, $(3 + 4)$ und (7) finden $= -0{,}832''$, wobei aber zu bemerken ist,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

dass die internationale Formel nicht mehr *ein*deutig ist, wenn, wie in diesem Falle Stationsproben vorhanden sind.

Wir nehmen die angegebenen 4 Dreiecksschlüsse, nämlich:

w	$=$	$-1{,}578''$	$+1{,}655''$	$+0{,}809''$	$-0{,}832''$
w^2	$=$	2,4901	2,7390	0,6545	0,6922

$$m = \sqrt{\frac{6{,}5758}{4 \cdot 3}} = \pm 0{,}740'' \qquad (6)$$

Dieses wäre mit dem strenger gerechneten Werte 0,989″ von (25) S. 213 zu vergleichen.

§ 134. Württemberg

Nachdem wir die Württembergischen Messungen des 17ten Jahrhunderts schon in § 126. behandelt haben, kommen wir an die Landesvermessung dieses Jahrhunderts, deren Geschichte eng verknüpft ist mit dem Namen *Bohnenberger*s.

Derselbe wurde 1765 in Simmotzheim geboren, wurde Pfarrvikar 1789, ging zur Geodäsie und Astronomie über, worin er als Professor in Tübingen 1803, und später als wissenschaftlicher Leiter der Württembergischen Landes-Triangulierung, von 1818 bis zu seinem Tode 1831, thätig war.

(Joh. G. F. Bohnenberger, Lebensbeschreibung, von Ofterdinger in Ulm, Sep.-Abdr. aus „math.-naturw. Mitteilungen II 1885“, Tübingen, Fues, 1885).

Schon vor der amtlichen Landesvermessung, welche 1818 begann, hatte Bohnenberger privatim viel trigonometrisch und topographisch gemessen, worüber wir anderen Orts („J.-St., deutsches Vermessungswesen 1882 I,“ S. 244—251 und S. 265—266) berichtet haben.

Auch als Astronom und mathematischer Geodät hat Bohnenberger grosse Verdienste, aber die amtliche Württembergische Landes-Triangulierung 1818—1840 ist nur in ihren Anfängen Bohnenbergers unverkümmertes Werk.

Am deutlichsten hat hierüber Professor *Baur* in Stuttgart, welcher noch aus mancher lebenden Tradition aus Landesvermessungszeiten schöpfen konnte (vgl. Baurs Lebensgang 1820—1894, „Z. f. V. 1894“, S. 423—427) sich ausgesprochen als er 1869 für die Europäische Gradmessung einen Bericht über die Württembergische Triangulierung zu erstatten hatte:

Die Winkel der Hauptdreiecke sind grösstenteils von Bohnenberger selbst gemessen worden, und zwar durchgängig nach der Repetitionsmethode. Die Zahl der Repetitionen wechselt von 2 bis 25, meist beträgt sie 5; mit wenigen Ausnahmen wurden die Ablesungen nur an *einem* Nonius gemacht. Die Signale waren teils Türme, teils Pyramiden bis 20m Höhe. Die Punktbezeichnung für die Dauer wurde durch Signalsteine bewirkt.

Die Originalaufzeichnungen sind durchaus nicht mehr über alle auf den Hauptpunkten gemachten Messungen vorhanden, es scheinen von den Bohnenbergerschen Aufzeichnungen selbst welche verloren gegangen zu sein. An die Direktion der Vermessung sind nur die von ihm berechneten Coordinaten abgegeben, die Aufzeichnungen und Berechnungen aber von ihm selbst zurückbehalten worden.

Dass das Triangulierungsnetz von 1818—1840 nicht ein einheitliches Ganzes ist, wird bald erkannt, insbesondere fallen am Nordwestrand der Alb zwei Lücken in den Hauptverbindungen unangenehm auf.

Diese Verhältnisse werden begreiflich, wenn man sich des Ganges erinnert, den Bohnenbergers Triangulierung genommen hat und vermöge der Umstände überhaupt nehmen musste. Er war nicht in der Lage, vor Beginn der Katastervermessung ein zweckmässiges, möglichst wenig Hilfspunkte umfassendes Netz über das Land legen zu können, sondern war gezwungen, für die

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

mit der Triangulierung beginnende Detailvermessung in denjenigen Landesteilen, in denen sie nach und nach, vermöge irgend welcher für die *Verwaltungsbehörden* (Obersteuerrat *Mittnacht*) massgebender Rücksichten, angeordnet wurden, die erforderlichen trigonometrischen Anhaltspunkte herzustellen. So musste die Landestriangulierung stückweise zu Ende gebracht werden, und es ist wohl nicht zu verwundern, wenn bei aller anerkennenswerten Tüchtigkeit Bohnenbergers in den Grenzen solcher benachbarter Triangulierungsgebiete (z. B. an dem oben erwähnten Nordwestrand der Alb) eine Häufung von nahe bei einander liegenden Hauptpunkten, Einschaltungen kleiner Anschlussdreiecke, überhaupt ein Netz zum Vorschein kommt, welches das Gepräge seines Ursprungs an der Stirn trägt.

Bohnenberger s theoretische Geodäsie ist enthalten in der Schrift:

„De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis commentatur Joan. Theophil Frider. Bohnenberger, ordinis philosophici T. T. Decanus. Tubingae litteris Ernesti Eiferti 1826."

In § 15 entwickelt hier Bohnenberger die sphärischen Coordinaten und sagt dazu: Formulae *conveniunt* cum iis, quibus usus est cel. *Soldner* in computandis dimensionibus bavaricis.

Bohnenberger würde Soldners Vorgang nicht bedurft haben, und der schwierigere Teil der Sache, nämlich die Berechnung der *geographischen* Coordinaten aus den rechtwinkligen ist durchaus Bohnenbergers Werk.

Die Abhandlung „De computandis . ." ist seit Baur württembergisches geodätisches Quellenwerk gewesen und wurde später vollständig ins Deutsche übersetzt: „Die Berechnung der trigonometrischen Vermessungen, von E. Hammer, Stuttgart 1885."

Das Württembergische Coordinatensystem mit dem Nullpunkt in der Tübinger Sternwarte hat die Eigentümlichkeit, dass seine X-Achse gegen den Tübinger Meridian um um einen kleinen Winkel von 15,58″ verdreht ist.

Es rührt dieses davon her, dass ein vorläufiges Azimut, das Bohnenberger schon 1792 und 1796 mit einem Sextanten gemessen hatte, auch für die Landesvermessung 1818 zunächst beibehalten wurde, nämlich:

Azimut Tübingen Kornbühl

$$\alpha' = 169° 12' 44{,}3''$$

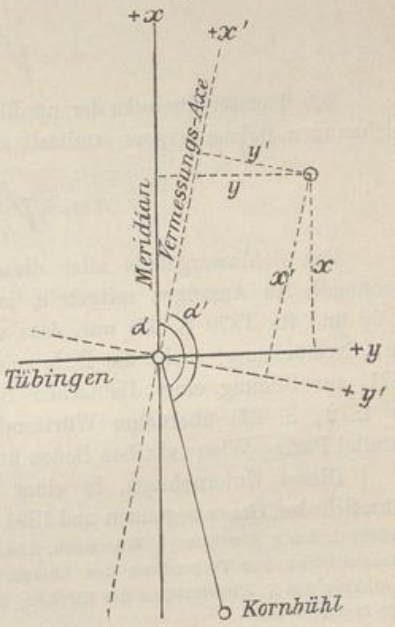
Später 1819 wurde endgiltig bestimmt:

Azimut Tübingen Kornbühl

$$\alpha = 169° 12' 59{,}88''$$

(Kohler S. 131 und Bohnenberger „De computandis etc. . . § 17)." Für die eigentliche Landesvermessung blieb man aber bei dem alten Azimut α' und hat damit die Coordinaten, welche in Fig. 1. mit x' y' bezeichnet sind, aus denen man x y herleiten kann durch die Gleichungen:

Fig. 1.



$$y = y' + x' \sin(\alpha - \alpha')$$
$$x = x' - y' \sin(\alpha - \alpha')$$

wobei $\alpha - \alpha' = 15{,}58''$. Die Breite und Länge des Nullpunktes sind (nach Kohler S. 295 u. S. 316):

Tübingen $\varphi_0 = 48° 31' 12{,}4''$ $\lambda_0 = 26° 42' 51''$ (1)

Nach Abschluss der ganzen Landesvermessung wurde ein mit Karten und Aktenauszügen wohl versehenes amtliches Werk herausgegeben:

„Die Landesvermessung des Königreichs Württemberg, in wissenschaftlicher, technischer und geschichtlicher Beziehung, auf Befehl der K. Regierung bearbeitet, und mit deren Genehmigung herausgegeben von Konrad Kohler, Professor, Trigonometer bei dem K. Katasterbureau. Stuttgart, J. G. Cotta scher Verlag. 1858."

Aber auch hier vermisst man die Hand Bohnenbergers, denn gerade in dem wichtigsten Teile der Triangulierung giebt Kohlers Buch nicht den Nachweis des Zusammenhangs der Schluss-Coordinaten mit den Originalmessungen, sondern nur viele Beispiele der angewendeten Messungs- und Rechnungsmethoden.

Der eigentlich wissenschaftliche Nachfolger Bohnenbergers, der oben genannte Prof. *Baur* hat 1869 als Probe von dem, was sich aus der Bohnenberger schen Triangulierung für wissenschaftliche Zwecke herstellen liesse, zwei Ketten von Dreiecken, teils aus den Originalbeobachtungen, teils aus denjenigen Bohnenberger schen Dreiecken, bei welchen „beobachtete Winkel" in den Berechnungen angeführt sind, hergestellt, durch welche der Zusammenhang zwischen der Bayerischen und Badischen Vermessung einerseits im Norden, andererseits im Süden, und hier wiederum auf der Basis Solitude Ludwigsburg vermittelt werden könnte (Gen. Ber. der Eur. Gradmessung für 1869 S. 68). Die erste der zwei untersuchten Ketten enthält 33 geschlossene Dreiecke, die zweite hat deren 22. Alle diese 55 Dreiecke geben die Quadratsumme der Widersprüche = 820,7 also den mittleren Winkelfehler

$$m = \sqrt{\frac{820{,}7}{55 \cdot 3}} = \pm 2{,}23'' \qquad (1)$$

Die 6 ersten Dreiecke der nördlichen Kette, welche unmittelbar aus Originalaufzeichnungen Bohnenbergers ermittelt sind, geben:

$$m = \sqrt{\frac{13{,}64}{6 \cdot 3}} = \pm 0{,}87'' \qquad (2)$$

Das Schlussergebnis aller dieser von Prof. Baur 1869 angestellten Untersuchungen (in Auszügen mitgeteilt in den Gen.-Ber. d. Europ. Gradm. für 1869, S. 68 und für 1870 S. 67) war, dass von einer Verwertung der alten Messungen für die „Gradmessung" nicht die Rede sein könne, und auf der Versammlung in Berlin 1871, zur Bildung einer Deutschen Reichs-Gradmessungs-Kommission, (Gen.-Bericht für 1872, S. 27) übernahm Württemberg eine Verbindungstriangulierung auf dem Parallel Paris—Wien zwischen Baden und Bayern, im südlichen Teile von Württemberg.

Dieses Unternehmen, in einer Kette von 6 Dreiecken bestehend, wurde von Baur, Schoder, Gross begonnen und 1891 von Hammer zu Ende geführt in einer amtlichen Veröffentlichung der Königl. Württemb. Kommission für die internationale Erdmessung, III. Heft. Triangulierung zur Verbindung des Rheinischen Netzes mit dem bayerischen Hauptdreiecksnetz, im Auftrag des K. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens bearbeitet von E. Hammer, Stuttgart. J. B. Metzler 1892."

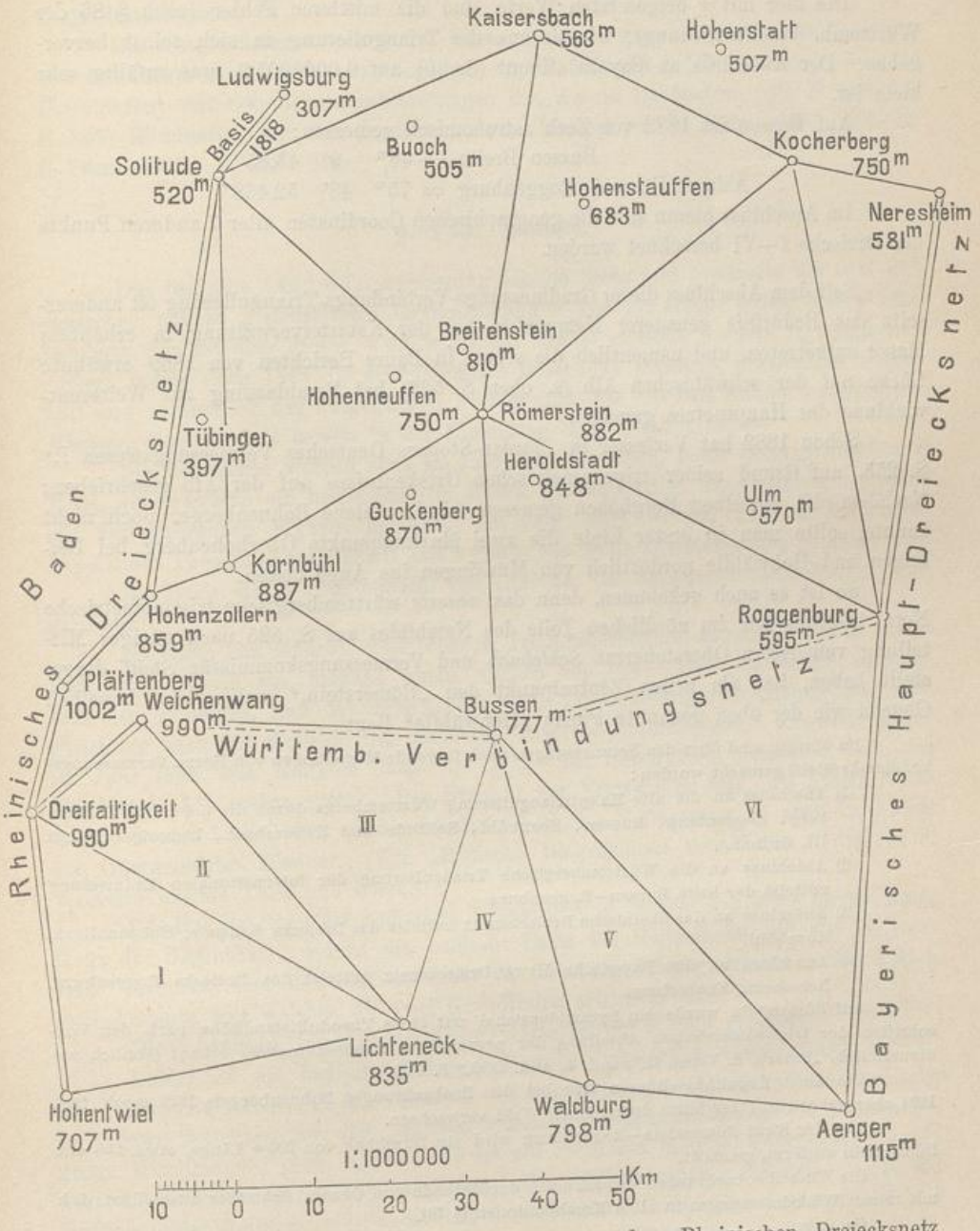
Nach diesem Werke ist der südliche Teil unseres Netzbildes auf S. 525 mit den Dreiecken I bis VI dargestellt; wir berichten auch sofort von S. 86 daselbst die 6 Dreiecksschlüsse, welche nach der internationalen Formel den mittleren Winkelfehler geben:

$$m = \sqrt{\frac{4{,}0469}{6 \cdot 3}} = \pm 0{,}474'' \qquad (3)$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 2.

Neue Württembergische Triangulierung.



Die Dreiecksberechnung begann mit der aus dem Rheinischen Dreiecksnetz entlehnten Basis (S. 71):

Hohentwiel—Dreifaltigkeit = 35577,505 m ($log = 4.5511755 \cdot 0$)

Durch die 6 Dreiecke hindurch wurde erhalten:

Aenger—Roggenburg = 62203,318 m ($log = 4.7938135 \cdot 5$)
$\pm$ 0,309 $\pm$ 21.6

Die hier mit $\pm$ beigesetzten Werte sind die mittleren Fehler (nach § 86 der Württemb. Veröffentlichung), wie sie aus der Triangulierung in sich selbst hervorgehen. Der Anschluss an Bayern stimmt (S. 90) auf 0.0000005·9, was zufällig sehr klein ist.

Auf Bussen ist 1882 von Zech astronomisch gemessen:

Bussen Breite = 48° 9′ 45,85″
Azimut Bussen—Roggenburg = 75° 43′ 52,468″

Im Anschluss hieran sind die geographischen Coordinaten aller 7 anderen Punkte der Dreiecke I—VI berechnet worden.

Seit dem Abschluss dieser Gradmessungs-Verbindungs-Triangulierung ist andererseits das Bedürfnis genauerer Netzpunkte bei der Katasterverwaltung in erhöhtem Masse aufgetreten, und namentlich die schon in Baurs Berichten von 1869 erwähnte Lücke auf der schwäbischen Alb (s. oben S. 522) hat Veranlassung zur Weiterentwicklung des Hauptnetzes gegeben.

Schon 1882 hat Verfasser in „Jordan-Steppes Deutsches Vermessungswesen I," S. 255, auf Grund seiner trigonometrischen Ortskentnisse auf der Alb geschrieben: Nachdem die einzelnen Berghöhen gemessen sind, welche Bohnenberger noch nicht kannte, sollte man in erster Linie die zwei Maximalpunkte Oberhohenberg bei Deilingen und Hohwäldle nordöstlich von Münsingen ins Auge fassen.

So ist es auch gekommen, denn das *neueste* württembergische trigonometrische Netz, welches wir im nördlichen Teile des Netzbildes auf S. 525 nach gütiger Mitteilung von Herrn Obersteuerrat *Schlebach* und Vermessungskommissär *Steiff* dargestellt haben, hat als neuen Zentralpunkt den „Römerstein," welcher in derselben Gegend wie der oben genannte Punkt „Hohwäldle" liegt.

Im übrigen sind über den Neumessungen noch folgende Mitteilungen von Herrn Vermessungskommissär Steiff gemacht worden:

1) Anschluss an die alte Haupttriangulierung Württembergs durch die 6 Punkte Kochenberg, Roggenburg, Bussen, Kornbühl, Solitude und Kaisersbach, bisheriger Punkt III. Ordnung.
2) Anschluss an die Württembergische Triangulierung der internationalen Erdmessung mittelst der Seite Bussen—Roggenburg.
3) Anschluss an das Rheinische Dreiecksnetz mittelst des Dreiecks Solitude, Hohenzollern, Kornbühl.
4) Anschluss an das Bayerische Haupt-Dreiecksnetz mittelst des Dreiecks Roggenburg, Neresheim, Kocherberg.

Auf Römerstein wurde ein Pyramidensignal mit 19,6 m Theodolitstandhöhe nach den Vorschriften der trigonometrischen Abteilung der preussischen Landesaufnahme erbaut (ähnlich wie Steuerndieb, „Handb. d. Verm. II. Band, 4. Aufl. 1893," S. 256).

Die Sicht Kornbühl—Bussen war bei den Beobachtungen Bohnenbergers 1821 noch frei, 1894 aber nahezu in ihrer Mitte durch einen Wald verwachsen.

Auf der Sicht Römerstein—Roggenburg wird ein Durchhau von 200 m Länge, etwa 6 km von Römerstein entfernt, gemacht.

Die Winkelbeobachtungen werden nach der Methode von General Schreiber ausgeführt, d. h. mit reinen Winkelmessungen in allen Kombinationen (§ 79).

Über den neuesten Stand der Triangulierung III. Ordnung wird Auskunft gegeben in

Vorschriften, betreffend die Erhaltung und Fortführung der Flurkarten und Primärkataster im Königreich Württemberg. Amtsblatt des Steuerkollegiums von 1895, Nr. 1 und 2.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Württemberg hat auf 19504 Q.-Kilom. (oder rund 354 Q.-Meilen) 29244 trigonometrische Signalpunkte I.—III. Ordnung, nämlich 2890 Hochpunkte (namentlich Kirchtürme) und 26354 Bodenpunkte, also rund 3 trigonometrische Punkte auf je 2 Quadratkilometer.

Die Ausgleichungen werden im Wesentlichen so gemacht wie unsere Vorwärts- und Rückwärts-Einschneide-Ausgleichungen von S. 343 und S. 351 (jedoch in anderen Formularen) mit Coordinatenverbesserungen dx, dy in Decimetern (vgl. S. 329 und S. 397) Elimination mit dem Rechenschieber. Einiges weitere hiezu giebt „Zeitschr. f. Verm. 1895," S. 280—286.

§. 135. Baden.

Die badische Landes-Triangulierung ist die beste und genaueste der drei süddeutschen nahezu gleichzeitigen Unternehmungen aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts, sie hat aber diesen Wert nicht auf *ein*mal erreicht, sondern in zweifachem Anlauf, indem nach 1840 die grundlegenden Messungen revidiert, grossenteils wiederholt und namentlich neu ausgeglichen worden sind, wie wir zum Ruhme des Urhebers, *Rheiner*, dieser Arbeit bereits in der Einleitung S. 6 erwähnt haben.

Die Messungen wurden etwa im Jahr 1816 begonnen, unter Leitung von Oberst Tulla, von welchem ein heute noch in Baden gebräuchliches Ausgleichungsverfahren mit fehlerzeigenden Figuren herrührt. Im Jahr 1823 wurden mehrere Münchener Repetitions-Theodolite angeschafft, mit welchen von da an alle Messungen gemacht sind.

Als Basis diente ursprünglich, von 1820 an, die bayerische Linie Speyer—Oggersheim.

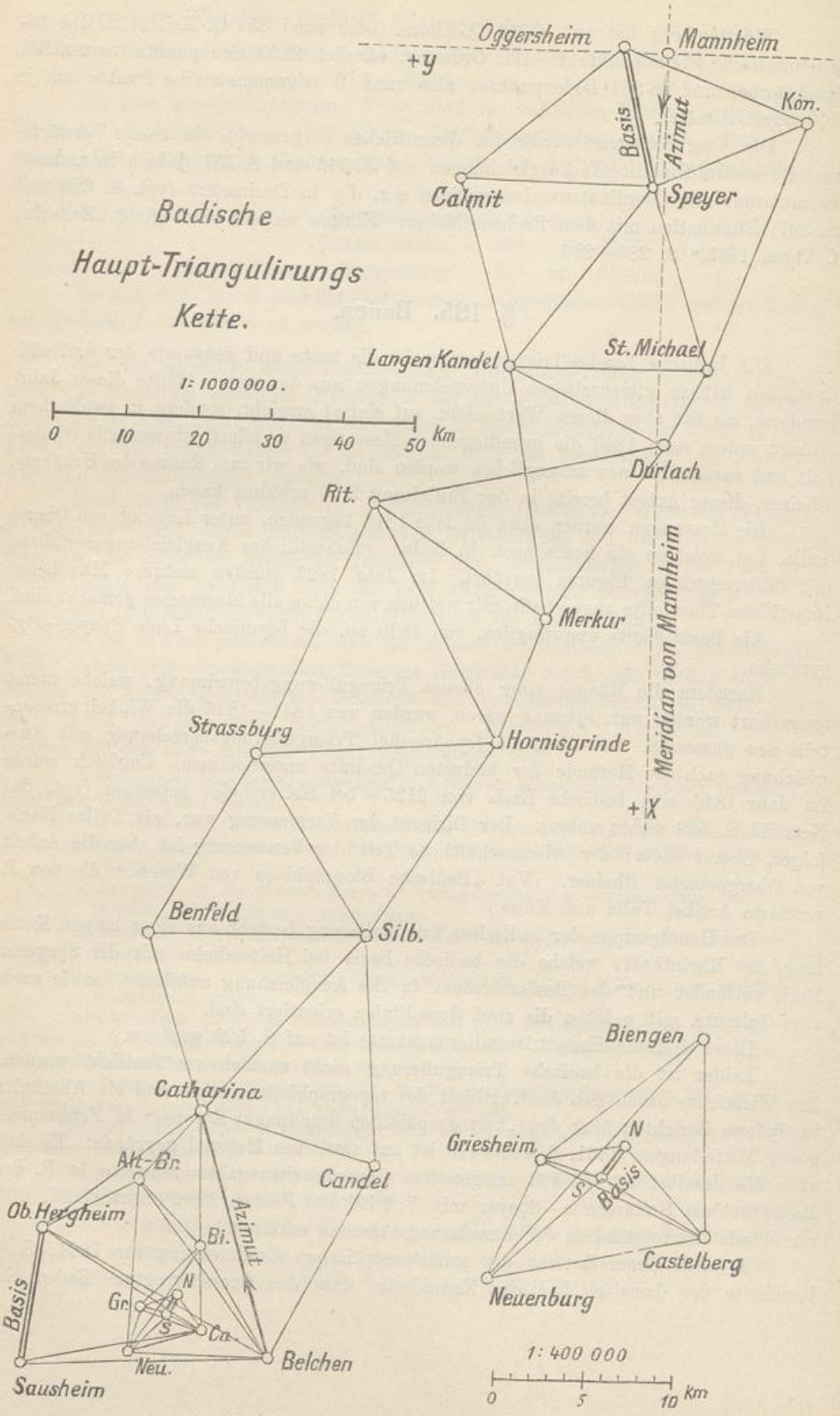
Nachdem die Mängel einer ebenen Triangulierungsberechnung, welche zuerst ausgeführt worden war, erkannt waren, wurden von 1841—1846 die Winkel grossenteils neu gemessen, und die neue (sphärische) Triangulierungsberechnung mit Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate unternommen. Zugleich wurde im Jahr 1846 eine badische Basis von 2125^m bei Heitersheim gemessen (vgl. das Netzbild S. 528 rechts unten). Der Dirigent der Vermessung war, als Tullas Nachfolger, Oberst Klose; der wissenschaftliche Teil der Vermessung ist aber die Arbeit von Obergeometer Rheiner. (Vgl. „Badische Biographieen von Weech," die von J. verfasstn Artikel Tulla und Klose.)

Das Hauptgerippe der badischen Triangulierung besteht aus einer langen Kette längs des Rheinthals, welche die badische Basis bei Heitersheim mit der Speyerer Basis verbindet und den Basisanschluss in die Ausgleichung aufnimmt, sowie auch *zwei* Azimute, mit welchen die zwei Grundlinien orientiert sind.

Diese badische Haupttriangulierungskette ist auf S. 528 gegeben.

Leider ist die badische Triangulierung nicht amtlich veröffentlicht worden. Das Wichtigste davon gab das Textblatt des topographischen Atlas, und ein Abschnitt in Sydows Berichten über den „kartographischen Standpunkt Europas" in Petermanns geogr. Mitteilungen, 1861, S. 468—470 ist auf amtliches Material gegründet. Es sind aber die daselbst auf S. 468 mitgeteilten Genauigkeitsangahen teilweise (z. B. der Basisanschluss Heitersheim—Speyer mit 1 : 2199000 Fehler) ganz unzutreffend, und nur durch Missverständnis der Berechnungsakten zu erklären.

In dem Generalbericht der mitteleuropäischen Gradmessung für 1864, S. 4 berichtete der damalige badische Kommissär, dass das Grossherzogtum Baden ein


Badische
Haupt-Triangulirungs
Kette.
1: 1000 000.
0 10 20 30 40 50 Km
Oggersheim
Mannheim
+y
Basis
Azimut
Kön.
Calmit
Speyer
Langen Kandel
St. Michael
Durlach
Rit.
Merkur
Meridian von Mannheim
+X
Strassburg
Hornisgrinde
Benfeld
Silb.
Catharina
Alt-Br.
Candel
Ob. Hergheim
Bi.
Azimut
Basis
N
Gr.
S
Ca.
Neu.
Belchen
Sausheim
Biengen
Griesheim
N
Basis
S
Castelberg
Neuenburg
1: 400 000
0 5 10 km

Dreiecksnetz von Tranchot (?) besitze, über dessen Genauigkeit keine Mitteilung gemacht werden konnte. —

In dem Generalbericht der mitteleuropäischen Gradmessung für 1866, Seite 3—4 wird weiter von Differenzen berichtet, erstens zwischen badischen und hessischen Dreiecksseiten u. s. w. und zweitens zwischen badischen Dreiecksseiten selbst und ihren aus den rechtwinkligen Coordinaten abgeleiteten Werten, z. B. der Differenz von 0,44 m zwischen einer Seite s und ihrem Werte $\sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}$ (Einzelheiten hiezu in unserer 2. Aufl. II. Band, 1878, S. 157). Diese Differenz 0,44 m ist aber lediglich die Wirkung der *Erdkrümmung* in den Soldnerschen Coordinaten, eine Wirkung, welche damals, 1866, übersehen wurde. —

Unter solchen und ähnlichen Umständen, namentlich nachdem die weniger genaue Bayerische Triangulierung zur amtlichen Veröffentlichung als Gradmessungswerk bestimmt war, und nachdem eine Deutsche Reichs-Kommission für Gradmessung 1871 in Berlin vorläufig sich versammelt und die geodätischen Verhältnisse der deutschen Staaten erwogen hatte („Generalbericht über die Europ. Gradm. für 1872," S. 22—35) hielt ich es für das dringendste Bedürfnis, — unbeschadet aller Neumessungspläne — wenigstens einmal zu untersuchen und festzustellen, *was* an geodätischem Material in Baden vorhanden war und welche Genauigkeit dem Vorhandenen zuzuschreiben sei.

Auf diesem Wege entstand eine autographisch als Manuskript gedruckte Denkschrift:

„Triangulierung des Grossherzogtums Baden, in der Zeit von 1823—1852 ausgeführt von Oberst Klose und Obergeometer Rheiner, im Auftrage des Gr. Ministeriums des Innern, auf Grund der Akten des Gr. Kataster-Bureaus beschrieben und durch Revisions-Berechnungen nach der Methode der kleinsten Quadrate erläutert von W. Jordan, Professor der Geodäsie am Gr. Polytechnikum. Karlsruhe, Februar 1873." 68 S. 4° und 5 Tafeln.

Dieses wurde von dem Verfasser nur als eine Vorarbeit betrachtet zu einem erschöpfenden amtlichen Werke (etwa wie in Bayern) über die geodätischen Messungen, welche bis heute die Grundlage der gesamten badischen amtlichen Geodäsie bilden. Dieser Gedanke ist unausgeführt geblieben. —

Aus jener Autographie und aus den amtlichen Akten ist folgendes mitzuteilen:

Alle Winkelmessungen waren nach der Repetitionsmethode gemacht in *neuer* (centesimaler) Teilung (viele Originalmessungen hievon sind auch veröffentlicht in unserer 2. Aufl. „Handb. d. Verm., I. Band, 1877," S. 270—271). Bei der grossen Zahl solcher Einzelwinkel (z. B. auf Mannheim sind 59 Winkel zwischen 14 Richtungen vorhanden) musste vor allem Horizontausgleichung stattfinden, über welche aber kaum Nachweise gegeben werden können; es wurden eben schliesslich gewisse einzelne Winkel auf jeder Station herausgemittelt und als unabhängige Winkel in das Netz eingeführt.

Wo man die Geschichte der trigonometrischen Ausgleichungen verfolgt, findet man namentlich bei Praktikern (bis in die jüngsten Jahrzehnte) eine lange Scheu, von dem Euklidischen Begriff des Winkels die geodätische Abstraktion der „Richtung" zu bilden. So auch in Baden um 1840—1850. Von dem Gerlingschen Buch von 1843 (vgl. Einleitung S. 5) findet sich keine Einwirkung in Rheiners Rechnungen.

Es scheinen *eigene* Theorien, die sich auch an die Namen der Gebrüder Dienger knüpfen, damals in Baden wirksam gewesen zu sein (von Professor Dienger in Karls-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

ruhe haben wir eine spätere Schrift „Ausgleichung der Beobachtungsfehler, Braunschweig 1857," mit vielen geodätischen Anwendungen).

Wir wollen das an dem Beispiele des Heitersheimer Basisnetzes (S. 528 rechts unten) zeigen.

Es sind 18 einzelne Winkel als gemessen eingeführt, (deren Verteilung jedoch aus der Figur von S. 528 unten nicht ersehen werden kann), das Netz bietet 10 Bedingungsgleichungen, worunter 3 Seitengleichungen. Es schiene somit nach heutiger Anschauung angezeigt, 10 Correlatengleichungen zu bilden und die 18 Winkelcorrektionen in den 10 Correlaten auszudrücken. Statt dessen verfährt die offizielle Rechnung umständlicher so: Es seien $x_1\, x_2\, x_3 \ldots . x_{18}$ die zu findenden Winkelkorrektionen, und die 10 Bedingungsgleichungen allgemein ausgedrückt durch:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots \quad + a_{18} x_{18} + w_1 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \ldots \quad + b_{18} x_{18} + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\ k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \ldots \quad + k_{18} x_{18} + w_{10} = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

wozu die Minimumsgleichung gehört:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots \quad x_{18}^2 = \text{Minimum} \quad (2)$$

Nun wurden die Gleichungen (1) und (2) differentiiert:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\, dx_1 + a_2\, dx_2 + a_3\, dx_3 + \ldots \quad a_{18}\, dx_{18} = 0 \\ b_1\, dx_1 + b_2\, dx_2 + b_3\, dx_3 + \ldots \quad b_{18}\, dx_{18} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 + \ldots \quad x_{18}\, dx_{18} = 0 \quad (4)$$

Eine Zahl von 10 einzelnen Differentialen dx_1 etc. wurde mittelst der 10 Gleichungen (3) in den 8 übrigen Differentialen ausgedrückt und in (4) substituiert, worauf hier alle Coefficienten der noch vorhandenen Differentiale einzeln gleich Null zu setzen waren, um 8 Gleichungen für die 8 unabhängigen x zu erhalten. Diese 8 Gleichungen wurden zuerst für sich aufgelöst und führten dann auch zur Bestimmung der übrigen x.

Es ist bekannt, dass dieses die Art und Weise ist, mittelst welcher man die Correlatenmethode analytisch zu begründen pflegt; die numerische Anwendung ist aber offenbar umständlicher als die Correlatenmethode selbst, doch hat dieses auf die Schlussergebnisse keinen Einfluss. Die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler wurde im obigen Falle = 88,68, woraus bei 10 Bedingungsgleichungen der mittleren Winkelfehler $= \pm 2{,}95^{cc} = \pm 0{,}95''$ folgt.

In dieser schwerfälligen, aber den badischen Geodäten von 1840—1850 zur Ehre gereichenden Weise, (wobei auch z. B. die Coefficienten $\frac{\mu}{\varrho}\, cotg$ der linearen Seitengleichungen 7stellig, ebenso genau wie die Dreieckswinkel selbst gerechnet wurden) — ist dann in der heute noch üblichen Weise Netz an Netz mit Zwangsanschlüssen gereiht worden, so dass das Ganze mit 21 Partialnetzen weit über die badischen Grenzen hinaus zum Anschluss an Hessen, Württemberg, Schweiz und Frankreich durchgeführt wurde. Wir wollen dieses hier nur soweit verfolgen, als das Netzbild S. 528 gestattet.

Das Heitersheimer Basisnetz haben wir schon oben bei den Gleichungen (1)—(4) durchgenommen, der Übergang von dem kleinen Basisnetz zu der französischen Basis Sausheim-Oberhergheim und zur Anschlussseite Belchen-Catharina ist formell in *ein* Netz zusammengefasst, besteht aber sachlich aus *fünf* Partialnetzen, deren jedes immer

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nur *einen* neuen Punkt hinzufügt (offenbar Wirkung der schwerfälligen Ausgleichungsmethode).

Als dritte Gruppe ist die lange Kette von Catharina-Belchen bis zu der Basis Speyer-Oggersheim zu nennen, welche nach dem Netzbilde S. 528 den Rückgrat des Ganzen bildet. Diese Gruppe bietet in sich selbst 15 Dreiecksgleichungen nebst einer Horizontgleichung und einer Seitengleichung um Speyer, also 17 innere Bedingungsgleichungen. Dazu treten aber die 2 äusseren Zwangs-Gleichungen für den Basisanschluss (eine durchlaufende Seitengleichung) und für Identität der geographischen Orientierung durch die *zwei* Azimute Belchen-Catharina und Mannheim-Speyer (letzteres durch das Hilfsdreieck Mannheim-Speyer-Oggersheim mit der Basis Speyer-Oggersheim verbunden). Das Netz als Ganzes giebt mit seinen 19 Bedingungsgleichungen einen mittleren Winkelfehler von $\pm 4{,}51^{cc} = \pm 1{,}46''$.

Nun ging es nördlich zu den Punkten Donnersberg, Klobberg, Melibocus u. a., welche auf S. 174 dargestellt sind (in dem Netze das erstmals in „Astr. Nachr. 75. Band, 1870," S. 289—306 als Nachweis für die Genauigkeit süddeutscher Triangulierungen von uns veröffentlicht worden war). Nach Vollendung der ganzen Ausgleichung, mit ihren 17 bzw. 21 Partialnetzen, wurde ein rechtwinkliges Coordinatensystem nach Soldner scher Art, angelegt mit der Sternwarte Mannheim als Nullpunkt, $+x$ nach Süden, $+y$ nach Westen, worauf dann 1852 die vorzügliche badische Katastervermessung in solidester Weise aufgebaut werden konnte.

Im Übrigen auf die Autographie selbst oder auch den Abschnitt in „Jordan-Steppes, Deutsches Vermessungswesen 1882, I," S. 270—285 verweisend, wollen wir hier nur diejenigen Genauigkeitsrechnungen vorführen, welche aus den Dreiecksschlüssen nach der internationalen Formel gewonnen werden können:

Auf S. 54—57 der Autographie sind 121 Dreiecke mit ihren Schlussfehlern angegeben, von denen aber nur 86 badischen Messungen zugehören; die 35 übrigen sind von den Nachbarstaaten entlehnt und werden auch zum Teil auf die theoretische Summe 200^g + Excess bereits ausgeglichen vorgeführt. Die 86 badischen Dreiecke geben die Quadratsumme der Widersprüche in Sekunden neuer Teilung = 6215,24, also den mittleren Winkelfehler:

$$m = \sqrt{\frac{6215{,}24}{86 \cdot 3}} = \pm 4{,}908^{cc} = \pm 1{,}590'' \qquad (5)$$

oder in anderer Form:

$$m = \sqrt{\frac{652{,}45}{86 \cdot 3}} = \pm 1{,}590'' \qquad (6)$$

Statt der alten Seiten- und Basis-Anschlüsse aus der Zeit von 1850 können wir nun seit der Herausgabe des Rheinischen Dreiecksnetzes 1882 des geodätischen Instituts, die an Objektivität und Unabhängigkeit nichts zu wünschen übriglassenden Vergleichungen zwischen alten badischen Dreiecksseiten und Dreiecksseiten des geodätischen Instituts vornehmen (im Nachfolgenden S. 532):

Die Pfeilerbauten und Punktfestlegungen für das Rheinische Dreiecksnetz auf badischem Gebiete waren 1868—1872 vom Verfasser besorgt worden, und ich hatte namentlich alles gethan, um die neuen Punkte in das alte badische Coordinatensystem mit dem Nullpunkt Mannheim genau einzubinden. Die badischen Coordinaten der neuen Punkte sind in unserer 2. Aufl. „Handb. d. Verm., II. Band, 1878," S. 450

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

mitgeteilt (dagegen fehlen sie in der Veröffentlichung des geodätischen Instituts, Rheinisches Dreiecksnetz II, 1882, wie auch die Lagepläne, die Höhen und andere Einzelheiten dort weggelassen sind —).

Mit diesen badischen Coordinaten haben wir alsbald nach dem Erscheinen des Rheinischen Dreiecksnetzes 1883, Vergleichungen berechnet, welche zuerst in der „Zeitschr. f. Verm. 1884," S. 77 mitgeteilt sind, wie auch in Nachstehendem zu sehen ist, wo mit Rh_1 und Rh_2 die zwei Ausgleichungen des Rheinischen Dreiecksnetzes unterschieden sind, welche schon in § 132 S. 517 erwähnt wurden.

Seite.	$log\ \frac{Rh_1}{Rh_2}$	log Bad.	Bad.—Rhein.
Mannheim-Durlach	4.736 2660 4.736 2651	4.736 2765	log + 0.000 0105 114
Königsstuhl-Katzenbuckel . . .	4.378 5264 4.378 5259	4.378 5363	0.000 0101 104
Königsstuhl-Durlach	4.686 1360 4.686 1356	4.686 1437	0.000 0077 81
Katzenbuckel-Durlach	4.822 6414 4.822 6409	4.822 6505	0.000 0091 96
Durlach-Hornisgrinde	4.683 2435 4.683 2426	4.683 2449	0.000 0014 23
Hornisgrinde-Feldberg	4.917 6656 4.917 6644	4.917 6674	0,000 0018 30
		Mittel	+ 0.000 0071

Die logarithmische Differenz 0,000 0071 entspricht 7,1 : 0,434 = 16 Milliontel der Länge oder 16 Millimeter auf 1 Kilometer, und nahezu ebenso gross, nämlich 0,000 0085 oder 19 Milliontel beträgt die *Änderung* des Massstabsverhältnisses innerhalb des badischen Gebietes. Beides sind sehr befriedigende Ergebnisse.

§ 136. Hessen.

Im Jahre 1808 wurde durch *Eckhardt* und *Schleiermacher* zwischen Darmstadt und Griesheim eine 7,7^{km} lange Basis mit drei Messstangen von je 4 Toisen Länge, aus Kiefernholz gemessen. Als Normalmass diente eine noch heute auf dem Darmstädter Museum befindliche Toise von Lenoir. Die definitive Annahme für die Basislänge ist 3976,087 Toisen = 7749,5379^m (vgl. die Dreiecksberechnung von Nell, „Zeitschr. f. Verm. 1881," S. 109, nämlich 3099,815 hess. Klafter (zu 2,5^m) = 7749,5375^m). Die Winkelmessung geschah durch Theodolite mit centesimaler Teilung, mit 20facher Repetition.

Für die Ausgleichung der Triangulierung wurde in Hessen schon sehr frühzeitig die Methode der kleinsten Quadrate angewendet, und zwar in einer Form, welche *Schleiermacher* (geb. etwa um 1780, gest. 1844) dafür fand, dieselbe besteht darin, dass man bei der Ausgleichung von Winkeln, welche in einzelnen Dreiecken mit Polygonschlussproben gruppiert sind, die einzelnen Dreiecke zuerst vorläufig auf $180° + \varepsilon$ ausgleicht, und dann die Seitengleichungen und Horizontgleichungen von den Dreiecksgleichungen trennt, indem die Correlaten der letzteren möglichst früh eliminiert werden. Es wird hiebei der Umstand, dass die Dreiecksgleichungen nur je

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

drei Unbekannte enthalten, also eine ganze Menge Coefficienten = Null sind, zur bequemen Elimination benützt.

Da indessen dieser Umstand auch in anderer Art ausgenützt werden kann, und sich bei jeder Eliminationsart in irgend welcher Weise von selbst günstig bemerklich machen muss (wie an dem Netze von S. 174 und an dessen Behandlung in den früheren Auflagen unseres Buches gesehen werden kann), so ist ein besonderer Gewinn in der fraglichen Methode nicht zu sehen, dagegen ist es ein ungemein grosses Verdienst Schleiermachers, dass er schon vor 1830 *überhaupt* die M. d. kl. Q. praktisch zu verwerten verstand.

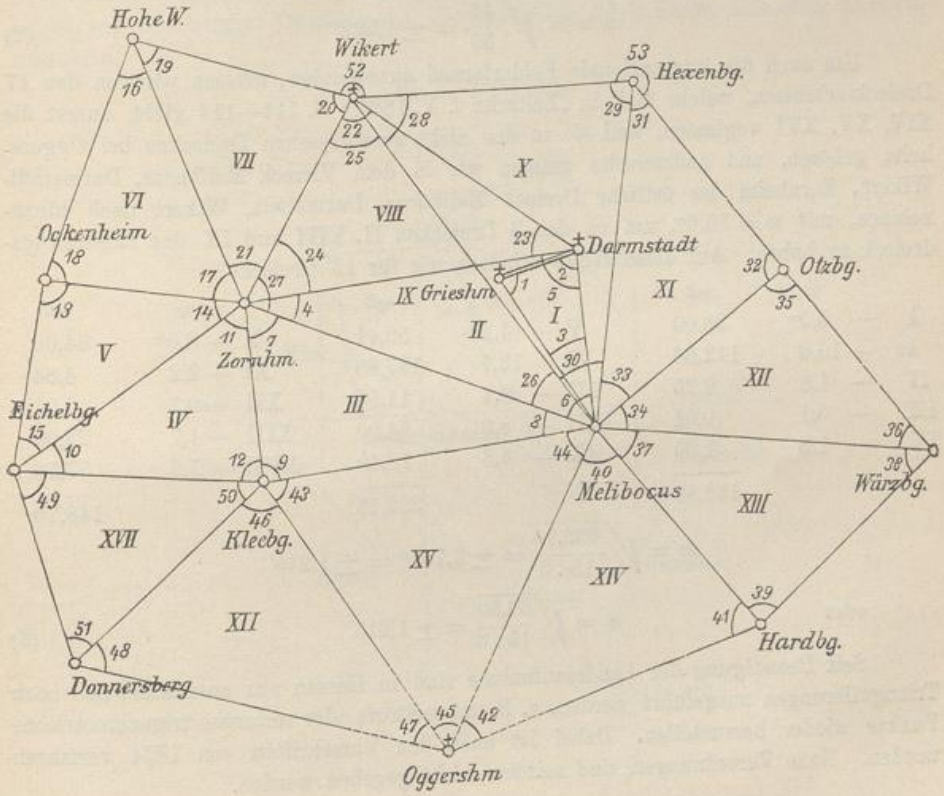
Eine kritische Beleuchtung der Schleiermacherschen Methode giebt Helmert in Schlömilchs „Zeitschr. f. M. u. Ph. 14. Jahrg. 1869," S. 201—205 mit dem Resultat, dass die Methode unter Umständen am Platz, aber z. B. nicht auf Richtungsmessungen zu übertragen sei. Die neueste Mitteilung von Nell in der „Zeitschr. f. Verm. 1881," S. 7—11 (mit Anwendung auf unser badisches Netz von S. 174) bestätigt dieses.

Amtlich veröffentlicht ist über die Triangulierung von Hessen nur eine kleine Schrift: Die Dreiecke I. und II. Ranges in der Provinz Rheinhessen für die Basis bei Darmstadt berechnet, Darmstadt gedruckt in dem lithographischen Institute 1821.

In der „Zeitschr. f. Verm. 1891," S. 109—121 wurde von Prof. *Nell* eine Dreiecksausgleichung nach Schleiermachers Methode gegeben für ein Netz, das in nachstehender Fig. 1. dargestellt ist:

Fig. 1.

Hessisches Dreiecksnetz 1 : 750 000.



Das Netz hat 15 Punkte, 31 Linien und 50 gemessene Winkel. Die 3 Winkel 42, 45, 47 auf Oggersheim sind nicht gemessen, man hat also $p = 15$ Punkte im Ganzen, aber darunter einen, welcher nur vorwärts eingeschnitten ist, und $l = 31$ Linien im Ganzen, worunter $l' = 4$ einseitig gemessene.

Man hat daher nach (12) S. 174:

$$31 - 30 + 3 = 4 \text{ Seitengleichungen}$$
$$(31 - 4) - (15 - 1) + 1 = 14 \text{ Dreiecksgleichungen}$$
$$50 - 30 + 4 = 24 \text{ Gleichungen im Ganzen,}$$

und zwar ausser den $4 + 14$ Netzgleichungen noch 6 Stationsgleichungen, nämlich 2 auf Zornheim und je eine auf Melibocus, Klobberg, Wikert, Hexenberg. Die von Nell gegebene Ausgleichung liefert die Quadratsumme der 50 Winkelverbesserungen in Sekunden neuer Teilung $(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + \ldots = 609{,}45$, also den mittleren Fehler eines gemessenen Winkels:

$$m' = \sqrt{\frac{609{,}45}{24}} = \pm 5{,}04^{cc} = \pm 1{,}633'' \qquad (1)$$

Dieses ist aber nicht der mittlere Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels, wegen der 6 Stationsgleichungen.

Ohne uns auf eine genauere Berechnung nach (17)—(20) § 124. S. 476 einzulassen, wollen wir die 50 Winkel mit 6 Stationsgleichungen näherungsweise betrachten als konzentriert auf $50 - 6 = 44$ Winkel ohne Stationsgleichungen, d. h. wir wollen aus (1) ableiten den mittleren Fehler eines auf der Station ausgeglichenen Winkels:

$$m = m' \sqrt{\frac{44}{50}} = \pm 1{,}532'' \qquad (2)$$

Um auch die internationale Fehlerformel anzuwenden, müssen wir von den 17 Dreiecksschlüssen, welche Nell in „Zeitschr. f. V. 1881," S. 111—114 giebt, zuerst die XIV, XV, XVI weglassen, weil sie zu den nicht geschlossenen Dreiecken bei Oggersheim gehören, und andererseits müssen wir in dem Viereck Melibocus, Darmstadt, Wikert, Zornheim das östliche Dreieck Melibocus, Darmstadt, Wikert noch hinzunehmen, mit $w = 10{,}6^{cc}$, um zu den 3 Dreiecken II, VIII und IX das Ergänzungsdreieck zu haben. Auf diese Weise erhalten wir für 15 Dreiecke:

	w	w^2		w	w^2		w	w^2
I	$- 6{,}0^{cc}$	36,00	V	$- 7{,}1^{cc}$	50,41	X	$+ 8{,}0^{cc}$	64,00
Ia	$+ 10{,}6$	112,36	VI	$- 13{,}7$	187,69	XI	$+ 2{,}2$	4,84
II	$- 1{,}5$	2,25	VII	$+ 3{,}4$	11,56	XII	$+ 0{,}1$	0,01
III	$- 0{,}1$	0,01	VIII	$- 8{,}0$	64,00	XIII	$+ 4{,}7$	22,09
IV	$- 1{,}3$	1,69	IX	$- 4{,}3$	18,49	XVII	$- 7{,}6$	57,76
		152,31			332,15			148,70

$$m = \sqrt{\frac{633{,}16}{15 \cdot 3}} = \pm 3{,}751^{cc} = \pm 1{,}215''$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{66{,}50}{15 \cdot 3}} = \pm 1{,}215'' \qquad (3)$$

Seit Beendigung der Landesaufnahme sind in Hessen nur ausnahmsweise noch Triangulierungen ausgeführt worden, z. B. um zerstörte oder verlorene trigonometrische Punkte wieder herzustellen. Dabei ist nach den Vorschriften von 1824 verfahren worden. Neue Verordnungen sind seitdem nicht gegeben worden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

§ 137. Nassau.

Obgleich Nassau kein selbständiger Staat mehr ist, ist doch die Nassausche Landes-Triangulierung erhalten geblieben mit dem Soldnerschen Coordinatensystem, dessen Nullpunkt *Schaumburg* als Nr. 36 unter den 40 Preussischen Coordinaten-Nullpunkten erscheint, welche in der Anweisung IX vom 25. Okt. 1881 angegeben wurden.

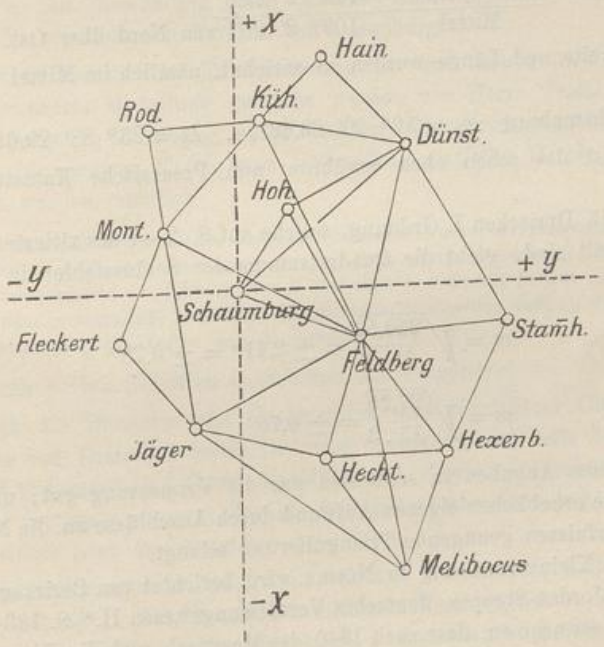
Über die Triangulierung des früheren Herzogtums Nassau wollen wir aus den früher in der „Zeitschr. f. Verm. 1882", S. 313—322 gesammelten Nachrichten einiges vorführen.

Die Nassauische Triangulierung und Landesvermessung ist der jüngste Zweig an dem süddeutschen von Bayern hervorgegangenen Stamme der deutschen Geodäsie. Da der Beginn dieses Unternehmens erst in die zweite Hälfte dieses Jahrhunderts fällt, konnten die inzwischen in den Nachbarstaaten gesammelten Erfahrungen dabei gut benützt werden. Aus diesem Grunde und wegen der Kleinheit des bereits von andern Triangulierungen fast ganz umgebenen Landes erscheint dessen Vermessung in geodätischer Hinsicht als ein einheitliches leicht zu überblickendes Ganzes.

Eine Beschreibung der Vermessung und eine Zusammenstellung ihrer Hauptresultate wurde amtlich veranstaltet und im Druck vervielfältigt, doch kam das Werk nicht in den Buchhandel. Dasselbe heisst:

„Die Landesvermessung des Herzogtums Nassau, insbesondere die als Grundlage derselben festgestellten Resultate der Triangulierung." Wiesbaden 1863. (Bearbeitet von Oberbergrat Oderheimer.) Gedruckt bei Adolf Stein, mit einer Dreiecksnetzkarte.

Fig. 1. (1 : 200 000.)



Unterm 14. Februar 1853 wurde eine Kommission zur Ausführung der Landesvermessung niedergesetzt, bestehend aus den technischen Mitgliedern Oberstlieutenant Heymann, Baurat Born und Geometer Wagner unter einem Ministerial-Präsidenten.

Die Kommission zog zuerst in Hessen-Darmstadt Erkundigungen ein, und beschloss auf den Rat des dortigen Geheimen Obersteuerrats Dr. Hügel, die Triangulierung an die Hauptdreieckspunkte der Nachbarstaaten anzubinden, und damit eine eigene Basismessung, sowie astronomische Orientierung zu ersparen.

Das so entstandene Netz ist Fig. 1. S. 535 dargestellt:

Als Basis diente die Seite Melibocus-Feldberg. Diese Seite war nämlich von Bayern mitgeteilt worden:

$$= 19828{,}99 \text{ bayr. Ruten} = 11574{,}54 \text{ nass. Ruten} = 57872{,}70^{m}$$

und von Hessen, aus hessischen Coordinaten abgeleitet:

$$= 23149{,}21 \text{ hess. Ruten} = 11574{,}61 \text{ nass. Ruten} = 57873{,}05^{m}$$

Das Mittel aus diesen beiden Werten, nämlich

$$\text{Melibocus-Feldberg} = 11574{,}573 \text{ nass. Ruten} = 57872{,}86^{m} \quad (1)$$

oder

$$\log MF = 4.0635062 \text{ in nass. Ruten}$$

wurde der Triangulierung als Basis zu Grunde gelegt.

Nach Vollendung der Dreiecksseitenberechnung wurde zu rechtwinkligen sphärischen (Soldner schen) Coordinaten übergegangen.

Als Coordinatenursprung wurde der Punkt Schaumburg gewählt (vgl. oben Fig. 1.) mit $+x$ nach Norden und $+y$ nach Osten; und dazu ein Orientierungs-Azimut von den Nachbarstaaten geodätisch entlehnt, nämlich das Azimut Schaumburg-Feldberg

aus Hessen	109° 2′ 17,5″	
„ Bayern	109 2 22,6	
Mittel	109° 2′ 20″	von Nord über Ost. (2)

Auch Breite und Länge wurden so entlehnt, nämlich im Mittel von Mannheim und München:

$$\text{Schaumburg} \quad \varphi_0 = 50° 20' 23{,}63'' \quad , \quad \lambda_0 = 25° 38' 29{,}61'' \quad (3)$$

Dieses ist das schon oben erwähnte, nun Preussische Kataster-Coordinatensystem Nr. 36.

In den 15 Dreiecken I. Ordnung, welche auf S. 2—7 des zitierten Nassauischen Werkes mitgeteilt sind, giebt die Quadratsumme der Schlussfehler in neuer Teilung 260,52, also:

$$m = \sqrt{\frac{260{,}52}{15 \cdot 3}} = \pm 2{,}41^{cc} = \pm 0{,}78''$$

oder

$$m = \sqrt{\frac{27{,}35}{15 \cdot 3}} = \pm 0{,}78'' \quad (4)$$

Nach diesen Angaben zu schliessen war die Vermessung gut, und es hat das kleine Land ohne erheblichen eigenen Aufwand durch Anschlüsse an die Nachbarstaaten eine allen Bedürfnissen genügende Triangulierung erlangt.

Über die Kleinvermessung in Nassau wird berichtet von Bezirksgeometer Kreis in Eltville, in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen II.“ S. 133—147, woraus wir von S. 136 entnehmen, dass nach 1840 der Messtisch und die Lineartriangulation

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

in Abnahme und die Polygonalmethode mit dem Theodolit in Aufschwung kam, zunächst mit Partial-Coordinaten einzeln für jede Gemarkung und nach 1862, als die vorhin beschriebene Landes-Triangulierung vollendet war, als allgemeines Coordinatenverfahren im neueren Sinne.

§ 138. Oldenburg.

In dem General-Bericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1865, Berlin 1866, S. 21—29 ist mitgeteilt, dass Oldenburg ein Dreiecksnetz besitzt, welches zum Teil von Gauss selbst gemessen und im übrigen im Anschluss an die Gauss'sche Gradmessung in Hannover ausgeführt wurde von dem Geheimen Oberkammerrat *v. Schrenck*. Die daselbst mitgeteilten Dreiecke sind auf die theoretische Summe 180° sph. Excess abgestimmt, und daher zur Genauigkeitsberechnung nicht dienend.

In „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen II.", S. 452 ist mitgeteilt, dass unterm 24. Februar 1836 eine Instruktion für das Verfahren bei der Vermessung erschienen ist, mit 14 Schematen für Winkelmessung, Dreiecks- und Coordinaten-Berechnung.

Über das hiebei zu Grunde gelegte Coordinaten-System, ob dasselbe wegen des Anschlusses an Hannover conform ist oder dergl., ist dort keine Mitteilung gemacht.

Der Meridian von Oldenburg ist als x-Achse angenommen worden, wie ersehen werden kann aus dem Werke: „Die Korrektion der Unter-Weser u. s. w.", dargestellt von *L. Franzius*, Oberbaudirektor, Leipzig 1895.

Die diesem Werke beigegebene Karte in 1 : 50000 enthält ein rechtwinkliges Coordinaten-Netz mit Bezifferung nach Kataster-Ruten „östlich vom Meridian von Oldenburg" und „nördlich vom Parallel von Oldenburg".

Über die Oldenburgische Triangulierung ist uns soeben (5. Juli 1895) noch eine sehr dankenswerte Mitteilung gemacht worden von Herrn *Treiss*, Grossherzogl. Vermessungsinspektor in Oldenburg, wobei von Herrn Obervermessungsdirektor *Scheffler* zwei nur noch in wenigen Exemplaren vorhandene amtliche Drucksachen zur Verfügung gestellt wurden, nämlich:

Resultate der, behufs der höchst verordneten Landes-Parzellar-Vermessung in den Jahren 1835, 1836 und 1837 ausgeführten Triangulierung des Herzogtums Oldenburg. Abgeleitet aus der Hannover'schen Gradmessung. Oldenburg den 2. Mai 1838, v. Schrenk, Hofrat und Obergeometer.

Kammer-Bekanntmachung, betreffend die spezielle Vermessung der, zu dem vormals Münsterischen Landesteil gehörigen Ämter, vom 24. Februar 1836.

Aus diesen beiden Schriften entnehmen wir Folgendes:

Da durch die Hannover'sche Gradmessung das Herzogtum Oldenburg bereits mit einer Reihe von Dreiecken erster Ordnung umspannt und teils bedeckt war, so wurde durch Mitteilungen von Gauss die Mühe, ein eigenes Dreiecksnetz erster Ordnung zu legen, fast ganz erspart; nur die 2 Punkte erster Ordnung, Oldenburg und Wildeshausen waren noch zu bestimmen.

Bei allen Rechnungen ist unterstellt worden, dass unsere Erde ein Ellipsoid sei mit der Abplattung 1 : 302,78 und dem mittleren Meridiangrad = 57009,76 Toisen (nach Walbeck). Die Entfernungen sind nach Preussisch-Rheinländischen Ruten zu

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

12×139,13 Pariser Linien und nach Oldenburgischen Katasterruten = 10×131,161964 Pariser Linien = 10×135,75306 Preuss.-Rheinl. Linien angegeben. Hienach ist:

1 Preuss. Rute = 3,7662420^m ($log = 0.5759082 \cdot 2$)
1 Oldenburg. Rute = 2,9587897^m ($log = 0.4711041 \cdot 0$)

Ein Verzeichnis giebt geodätische Coordinaten, bezogen auf den Meridian des Schlossturms zu Oldenburg; welcher Art diese Coordinaten sind, conform oder congruent, wird nicht angegeben. Indem wir die Coordinaten in Meter verwandeln, entnehmen wir aus diesem Verzeichnis als Beispiele:

Punkt	y	x	Breite	Länge
Oldenburg	0,000^m	0,000^m	53° 8′ 22,447″	25° 52′ 51,334″
Windberg	46232,275	28530,337	52 52 52,194	25 11 38,474
Quekenberg	31177,742	66505,958	52 32 27,367	25 25 16,642
Crapendorf	12173,470	32818,276	52 50 40,110	25 42 0,761

Hier ist x nach Süden positiv und y nach Westen positiv gezählt.

Dazu sind auch Polar-Coordinaten gegeben, von welchen wir die Entfernungen in Meter verwandelt haben, wie folgendes zeigt, wobei wir auch die zu den vorhergehenden Breiten und Längen gehörigen genauen Meridianconvergenzen zugesetzt haben:

Punkt	Azimut von Süd über West	Entfernung	Meridian-Convergenz
Oldenburg	0° 0′ 0″	0,000^m	0′ 0,000″
Windberg	58 19 17	54326,689	32 51,857
Quekenberg	25 7 3	73451,063	21 53,485
Crapendorf	20 21 6	35003,306	8 38,509

Da diese Azimute nur auf 1″ abgerundet gegeben sind, kann man damit nicht mit der Genauigkeit der rechtwinkligen Coordinaten x , y rechnen, und die obigen geographischen Coordinaten sind zunächst unbequem, weil sie mit den *Walbeck*schen Erddimensionen abgeleitet sind, welche besondere Hilfstafeln oder Differentialformeln im Vergleich mit den üblichen Besselschen Erddimensionen verlangen.

Wir haben daher, um über die Natur der rechtwinkligen Coordinaten einen ersten Aufschluss zu erhalten, die Dreiecksseiten zugezogen, welche in dem „Generalbericht der mitteleurop. Gradmessung für 1864“, S. 26 mitgeteilt sind, und zwar in Metermass verwandelt wie im nachstehenden unter $log\ S$ gegeben ist. Dazu haben wir berechnet aus den Coordinaten $x\,y$ zuerst $\sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}$ und dann die $log\ S'$ nach den bekannten Soldnerschen Formeln, und dazu noch $log\ S''$ unter der Annahme, dass die $x\,y$ conforme Coordinaten seien (also $log\ S''$ nach der Formel (13) von „Zeitschr. f. Verm. 1894“, S. 171). Für die Breite $\varphi = 53°$ hat man dazu

$$log\ r = 6.80504,\ log\frac{1}{2r^2} = 6.8089\ ,\ log\frac{\mu}{2r^2} = 2.7267$$

für 7stell. Logarithmen. So wurde erhalten:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

	$\log S$	$\log S'$ (Soldner)	$\log S''$ (conform)	$\log \sqrt{(y'-y)^2+(x'-x)^2}$ eben
Windberg	4.611 1937	4.611 1934	4.611 1924	4.611 2004
Quekenberg	4.587 4703	4.587 4670	4.587 4663	4.587 4690
Crapendorf	4.535 6451	4.535 6442	4.535 6388	4.535 6443
Windberg				

Wegen der nahen Beziehungen der Oldenburgischen Vermessung zu der Hannoverschen Landesvermessung mit den Gauss schen conformen Coordinaten war die Vermutung nahe, dass auch die Oldenburgischen Coordinaten conform seien; indessen aus diesen kurzen Vergleichsrechnungen kann das nicht geschlossen werden. Näheres hierüber hoffen wir in nächster Zeit in der „Zeitschr. f. Verm." zu bringen.

Hier sei nur noch bemerkt, dass in der oben (S. 537) zitierten „Kammer-Bekanntmachung" vom 24. Februar 1836 sich auch ein Formular (Schema Nr. *V*) für Polygonzüge befindet, mit Anweisung (§ 31.—41.) schon ganz im heutigen Sinne. Ausser dem Schema *V* für Polygonberechnung mit Logarithmen, ist noch ein Schema *VI* für Berechnung ohne Logarithmen und ein Schema *VII* für Berechnung mit Ulffer schen Coordinatentafeln.

§ 139. Mecklenburg.

Im Norden von Deutschland ist in der Zeit von 1853—1874 ein geodätisches Werk ausgeführt worden, welches durch seinen Urheber *Paschen*, der in Göttingen ein Schüler von Gauss gewesen, und von 1862—1873 als Mitglied der Europäischen Gradmessung thätig war, den Gauss schen und den Bessel schen Theorien gefolgt ist, und zu dem Besten aus jener geodätischen Periode gehört.

Die darüber vorhandenen amtlichen Veröffentlichungen sind:

Grossherzoglich Mecklenburgische Landesvermessung, ausgeführt durch die Grossherzoglich Mecklenburgische Landesvermessungs-Kommission, unter der wissenschaftlichen Leitung von F. Paschen, weiland Grossherzoglich Geheimer Kanzleirat. Herausgegeben im Auftrage und auf Kosten des Grossherzoglichen Ministeriums des Innern, von Köhler, Generalmajor z. D. zu Schwerin, Bruhns, weiland Geheimer Hofrat, Professor und Direktor der Sternwarte zu Leipzig, Förster, Professor und Direktor der Sternwarte zu Berlin. Schwerin 1882.

I. Teil. Die trigonometrische Vermessung. 251 Seiten 4° und 4 Tafeln.
II. Teil. Das Coordinatenverzeichnis. 79 Seiten und 2 Tafeln.
III. Teil. Die astronomischen Bestimmungen. 80 Seiten.
IV. Teil. Die geometrischen Nivellements. 106 Seiten und 1 Tafel.
V. Teil. Die conforme Kegelprojektion und ihre Anwendung auf das trigonometrische Netz 1. Ordnung, herausgegeben im Auftrage der Grossherzoglichen Ministerien des Innern und der Finanzen, Abteilung für Domänen und Forsten, von Dr. W. Jordan, Professor an der technischen Hochschule in Hannover, Karl Mauck, Kammer-Ingenieur in Schwerin. Mit einer lithographierten Netzkarte. Schwerin 1895. Zu beziehen durch die Stiller sche Hofbuchhandlung (J. Ritter).

Ausserdem ist hier zu zitieren:

Über Vermessungswesen in Mecklenburg-Schwerin, Vortrag auf der IV. Hauptversammlung des Mecklenburgischen Geometervereins zu Ludwigslust, 26. Juli 1878, von Carl Mauck Kammeringenieur in Schwerin, „Zeitschr. f. Verm. 1879", S. 321—351 und S. 425—438.

Litteraturbericht zu I—IV. Teil, „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 355—367.

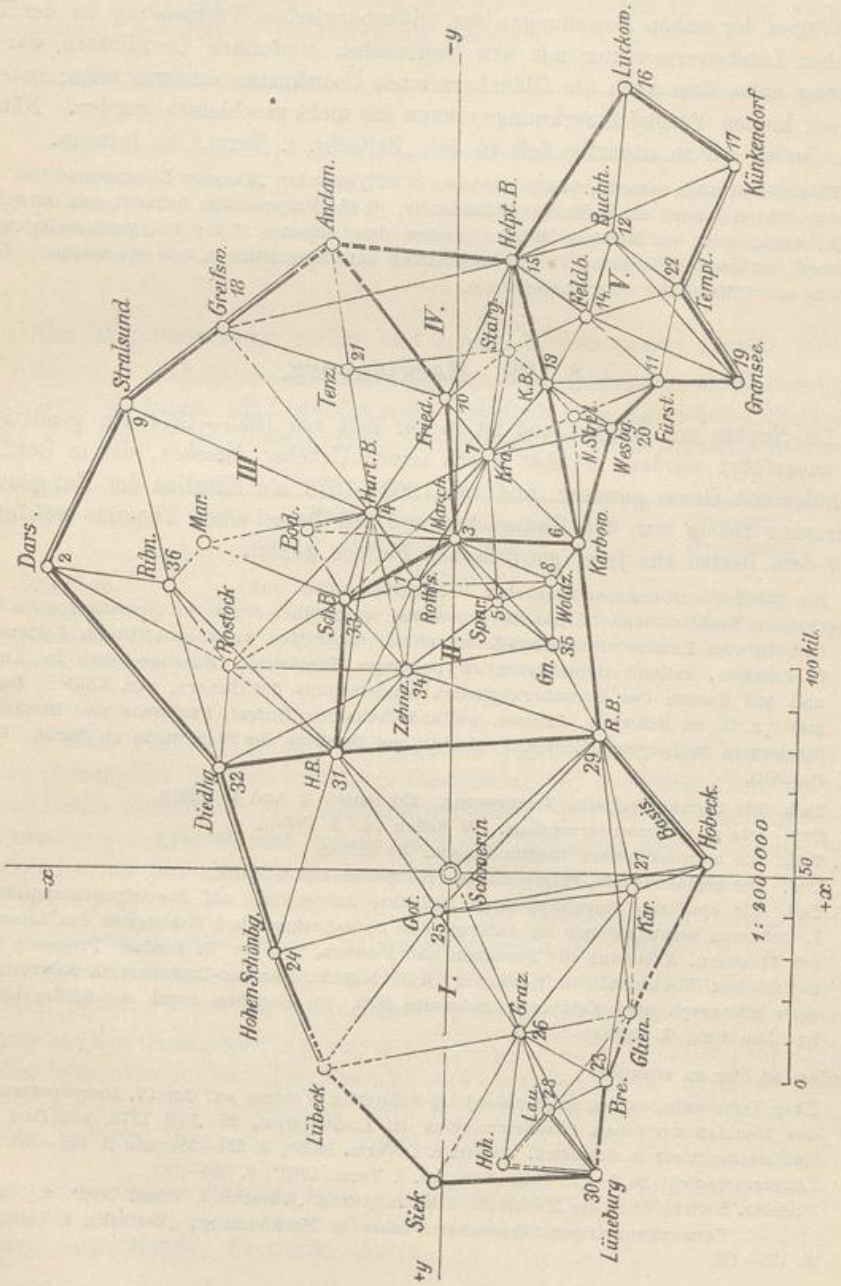
Vogeler, Bericht über die Mecklenb. Triangulierung, „Zeitschr. f. Verm. 1892", S. 552—563.

„ Vermarkung trigonometrischer Punkte in Mecklenburg, „Zeitschr. f. Verm. 1893", S. 179—185.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Nachdem von 1780—1788 eine topographische Karte durch Zusammenlegung der einzelnen seit 1756 gemachten Feldmarkaufnahmen durch den Grafen von Schmettau hergestellt worden war, wurde auf Anregung des Generals Baeyer bei dessen Küstenvermessung eine wissenschaftliche Neumessung beschlossen, deren Netzbild hier unten zu sehen ist.

Fig. 1.
Mecklenburgische Triangulierung 1853—1874.



Wegen der Anschlüsse an die zahlreichen Nachbartriangulationen von Preussen, Dänemark, Hannover, entschied man sich dafür, von einer Basismessung in Mecklenburg abzusehen.

Mit der „Küstenvermessung" hat Mecklenburg 10 Anschlussseiten gemeinsam, nämlich die in unserer Fig. S. 540 am Umfang doppelt ausgezogenen Linien im Norden, Süd-Osten und im Süden.

Mit Dänemark und Hannover ist das westliche kleine Dreieck Lüneburg, Lauenburg, Hohenhorn gemeinsam (jedoch Hohenhorn nicht mehr vorhanden).

Mit der Preussischen Landesaufnahme von Schleswig-Holstein bestehen Verbindungen durch die schon der Küstenvermessung angehörigen Punkte Hohenschönberg und Dieterichshagen, und an die Elbkette hat Mecklenburg Anschluss in Gliewitz, Höhbeck, Ruhnerberg (vgl. die Elbkette S. 280—281).

Das Mecklenburgische Netz umfasst 36 Stationen (auf S. 540 mit den Numern 1—36 bezeichnet, hiezu kommen die von der Preussischen Landesaufnahme und von Dänemark entlehnten 2 Stationen Höhbeck und Sick, und 10 nur vorwärts eingeschnittene Punkte, also $36 + 2 + 10 = 48$ Punkte.

Zu den Winkelmessungen dienten zwei grössere Universalinstrumente von Pistor und Martins mit nicht drehbaren Kreisen, deren 1″—2″ betragende regelmässige Teilungsfehler bestimmt und in Rechnung gebracht wurden. Die Anordnung der Horizontalmessungen nach Richtungen ist im Wesentlichen diejenige der Gradmessung in Ostpreussen, jede Hauptrichtung wurde mindestens 24 mal eingestellt. Die Stationsausgleichungen folgten ebenfalls dem Bessel schen Muster, jedoch mit Zufügung der von der Preussischen Landesaufnahme mit (VV) bezeichneten Fehlerquadratsummen nebst Divisoren (vgl. S. 157).

Zur Signalisierung dienten Betram sche Heliotrope in 96 Fällen, Türme in 69, Signalpyramiden in 11 und Signaltafeln von circa 1^m im Quadrat in 70 Fällen, zusammen 246 Richtungen, wozu noch 16 Entlehnungen aus fremden Vermessungen kommen, so dass im Ganzen 262 Richtungen vorhanden sind, von denen aber 23 nicht zum Netze gehören, also nur 239 Netzrichtungen übrig bleiben.

Zur Anwendung der Regeln von § 58. S. 176 haben wir hiernach:

$$\begin{aligned} R &= 239 \text{ Richtungen, } p = 48 \text{ Punkte} \\ &\quad \text{worunter } p' = 10 \text{ nur vorwärts eingeschnittene Punkte} \\ r &= 239 - 134 + 4 = 109 \text{ Bedingungsgleichungen} \end{aligned} \tag{1}$$

ferner

$$\begin{aligned} l &= 94 + 51 = 145 \text{ gemessene Linien} \\ l' &= 51 \text{ nur einseitig gemessene Linien} \\ &\quad (\text{wobei } 2 \cdot 94 + 51 = 239 = R) \end{aligned}$$

also

$$145 - 96 + 3 = 52 \text{ Seitengleichungen} \tag{2}$$

und

$$94 - 38 + 1 = 57 \text{ Dreiecksgleichungen} \tag{3}$$

Ehe von der Ausgleichung mit diesen $52 + 57 = 109$ Bedingungsgleichungen weiter gehandelt wird, ist zu sagen, wie die vielen Fremd-Anschlüsse behandelt wurden:

Von allen Anschlussseiten wurde zunächst nur *eine*, nämlich die südliche Höhbeck-Ruhnerberg als Basis angenommen, worauf sich *nach* der Ausgleichung gegen 5 andere sichere Anschlussseiten Differenzen bis zu 80 Einheiten der 7. logarithmischen Decimale ergaben, im Mittel Differenz $10 \cdot 0$, was mit einer anderweitig angegebenen

Korrektion von $+31 \cdot 6$ nun eine Gesamtkorrektion von $+41 \cdot 6$ Einheiten der 7. logarithmischen Decimale im Vergleich mit der ersten Annahme der Basisseite Höhbeck-Ruhnerberg ergab.

Vor der Netzausgleichung wurde auch eine Überlegung betreffs der Gewichtsverhältnisse angestellt mit dem Ergebnis, dass für die zwei verschiedene Instrumente von Gewichtsunterscheidung abgesehen, und alle Messungen mit gleicher Gewichtseinheit in die Netzausgleichung aufgenommen wurden.

Diese Ausgleichung selbst wurde nach der Bessel schen Methode vollzogen, aber mit Trennung in 5 Partialgruppen mit beziehungsweise 22, 22, 22, 21, 22 Bedingungsgleichungen (in unserer Fig. S. 540 mit I II III IV V bezeichnet) und successiver Herstellung der gegenseitigen Verbindung nach der Anleitung, welche Gauss im Artikel 20 des Supplementum theor. comb. so gegeben hat: Man verteilt die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Gruppen und sucht zuerst eine Ausgleichung, durch welche die erste Gruppe mit Umgehung der übrigen befriedigt wird, dann werden die durch diese Ausgleichung veränderten Beobachtungen so behandelt, dass nur die zweite Gruppe berücksichtigt wird und so fort. So wird man, indem bald die eine, bald die andere Gruppe benützt wird, immer kleinere Korrektionen erhalten, und wenn die Abteilung geschickt angelegt war, bald zu stehenden Werten kommen.

Nach dieser Anleitung hat Paschen sein Netz mit 109 Gleichungen in den schon erwähnten 5 Partialnetzen behandelt, wobei nicht nur, wie wohl Gauss ursprünglich dachte, die Bedingungsgleichungen für *ein*gewichtige unabhängige Richtungsmessungen, sondern die schwerfälligen Bessel schen Gewichtsgleichungen durch alle Näherungen hindurch geschleppt werden mussten.

Dabei ist auch zur Bezeichnungsart etwas zu sagen: In Preussen bezeichnete man allgemein die Winkelkorrektionen mit (1), (2), (3)..., dann gewisse Hilfsgrössen mit [1], [2], [3]... und die Correlaten mit I II III... (vgl. unsere Formelzusammenstellung von § 55. S. 156—160). Letztere Bezeichnung I II III ist zweifellos unbequem, wenn man es mit grossen Zahlen zu thun hat. Die Mecklenburgische Publikation bezeichnet deswegen die Correlation mit [*1*] [*2*] [*3*]... (Einiges Weitere hiezu haben wir in der „Zeitschr. f. Verm. 1883", S. 359—360 gegeben.)

Es mag hier genügen, mitzuteilen, dass die indirekte Auflösung durch 5malige Wiederholung erreicht worden ist, nämlich durch 4 erste „Überrechnungen" und dann noch eine empirische Verteilung der noch gebliebenen Widersprüche in einer „fünften Überrechnung". Z. B. die erste Korrektion hat so nach und nach folgende Werte durchlaufen: (Seite 164—165 des Meckl. Werkes I. Teil):

$$(1) = +0{,}64280'' \;,\; 0{,}54339'' \;,\; 0{,}55545'' \;,\; 0{,}53864''.$$

Ob durch diese indirekte Methode im Vergleich mit der Ausgleichung in einem Ganzen ein Vorteil erzielt worden ist, könnte wohl nur der Urheber derselben beantworten, wenn er etwa in die Lage gekommen wäre, abermals eine solche Arbeit auszuführen. Jedenfalls ist der beabsichtigte Erfolg erreicht worden mit einer Genauigkeit von etwa 0,05″.

Genauigkeitsberechnungen wurden in der ersten Bearbeitung 1882 nicht angestellt; es hat aber Kammeringenieur Vogeler in der „Zeitschr. f. Verm. 1892", S. 560 bis 562 Verschiedenes über die Genauigkeit des Mecklenburgischen Hauptnetzes mitgeteilt, namentlich die Schlussfehler der Dreiecke betreffend, aus denen er den mittleren

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Winkelfehler $m = 1{,}16''$ herleitete. Auch der internationale „Rapport sur les triangulations" für 1892 von Ferrero giebt auf S. XII 7 für die 69 Mecklenburgischen Dreiecksschlüsse mit Einschluss von 4 durch Multiplikation mit $\sqrt{0{,}75}$ auf Dreiecke reduzierten Werten die Berechnung für den mittleren Winkelfehler; in Übereinstimmung mit Vogeler:

$$m = \sqrt{\frac{276{,}873}{69 \,.\, 3}} = \pm 1{,}157'' \qquad (4)$$

Die conforme Kegel-Projektion.

Zur Gewinnung rechtwinkliger Coordinaten, überhaupt zur Nutzbarmachung der Triangulierung für kartographische Zwecke, hat Paschen eine Projektionsart gewählt, welche erstens im Sinne aller Gauss schen geodätischen Prinzipien eine „*conforme*" Abbildung der krummen Erdoberfläche bietet, und zweitens der geographischen Form des Mecklenburgischen Landes mit Hauptausdehnung von West nach Ost sich möglichst anpasst, d. h. die conforme Kegelprojektion mit dem mittleren Parallelkreis von Mecklenburg unter 53° 45′ Breite als Normalparallel.

Diese Projektionsart, deren Grundgedanke mit sphärischer Anwendung zuerst ausgesprochen wurde von Lambert in „Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, III. Teil, Berlin 1772, S. 135 u. ff., ist schon von Gauss zur Papen schen Karte von Hannover nutzbar gemacht worden, wie Wittstein in „Astr. Nachr., 71 Band, 1868", S. 369 angiebt, in dem er selbst dann die Theorie dieser Projektion auf dem Ellipsoid entwickelt.

Eine im engeren Sinne geodätisch zu nennende Anwendung der conformen Kegelprojektion haben wir von Schreiber in dem Werke „die Königl. Preuss. Landestriangulation, Hauptdreiecke, III. Teil, 1876", S. 103 u. ff., doch sind die im Vorwort das. S. VI angekündigten weiteren Ausführungen nicht mehr erschienen. Einen Kommentar dazu haben wir in „Jordan-Steppes, deutsches Vermessungswesen 1882", I., S. 96—102 gegeben.

Die Kegelprojektion eignet sich zur geodätischen Anwendung dann sehr gut, wenn man es mit geographischen Coordinaten zu thun hat, während für rechtwinklige Coordinaten jene Projektion mehr nur in übertragener Weise sich anpasst; allein bei so mässiger Ausdehnung von nur etwa 200 Kilometer von Westen nach Osten, wie in dem Falle von Mecklenburg, wird die conforme Kegelprojektion mit einer conformen querachsigen Projektion fast identisch, und schon bei Dreiecken II. Ordnung praktisch genommen damit identisch, oder in den Hauptformeln entsprechend der bekannten Gauss schen conformen Projektion mit cylindrischem Meridiananschluss, wenn man nur x und y in beiden Fällen vertauscht.

Ohne auf all dieses, was in dem V. Teile des oben auf S. 539 zitierten Werkes enthalten ist, hier einzugehen, wollen wir nur das Wesentliche zur Anlage des Coordinatensystems vorführen:

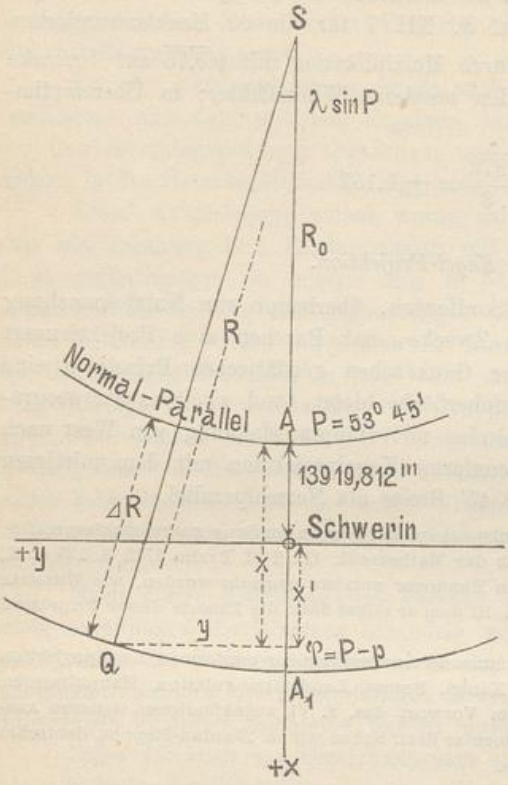
Nachdem auf Grund der Netzausgleichung sämtliche Winkel und Entfernungen des Dreiecksnetzes endgültig berechnet waren, wurde zur Gewinnung von Coordinaten geschritten. Zur astronomischen Orientierung diente die Polhöhe des Dreieckspunktes Granzin, beziehungsweise deren Übertragung auf Schwerin:

Schwerin Schlossturm, Breite = 53° 37′ 26,6900″.

Die Länge dieses Punktes von Berlin beträgt 1° 58′ 26,895″ in dem System der Preussischen Landesaufnahme, doch wurden die geographischen Längen für Mecklenburg lediglich relativ gegen den Schlossturm Schwerin angegeben. Die Berechnung der geographischen Breiten und Längen geschah Punkt für Punkt nach den indirekten

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Fig. 1.



Formeln der zweiten Abhandlung von Gauss über „Gegenstände der höheren Geodäsie", (welche in abgeänderter Form und mit neuen Hilfstafeln in unserem III. Bande, „Handb. d. Verm., 3. Aufl. 1890", S. 398 u. S. [39] gegeben werden).

Auf der Breite P hat eine Meridiantangente bis zum Schnitte mit der Erdachse die Länge $R_0 = N_0 \, cotg \, P = AS$ in Fig. 1. (wenn N_0 der Querkrümmungshalbmesser ist) und die Meridianconvergenz zweier Punkte auf der Breite P mit dem Längenunterschiede λ ist $= \lambda \, sin \, P$.

Ein Punkt mit der Breite φ erhält den Projektionsstrahl $SA_1 = SQ = R$, indem für R die Formel (12) S. 3 des amtlichen Werkes, V. Teil, Mecklenb. Landesverm. gilt. Indem man dann ein rechtwinkliges Coordinatensystem anordnet, mit dem Ursprung A, mit $+x$ nach Süden und $+y$ nach Westen, hat man für einen Punkt Q, dessen Breite $= \varphi$ und Projektionsstrahl $= R$, dessen Länge westlich vom Meridiane von Schwerin $= \lambda$ ist, nach Fig. 1. die Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} y &= R \, sin \, \lambda' \qquad (\text{wobei } \lambda' = \lambda \, sin \, P) \\ x &= R \, cos \, \lambda' - R_0 \\ \text{oder wenn } R - R_0 &= \Delta R \text{ gesetzt wird:} \\ x &= \Delta R - 2 \, R \, sin^2 \frac{\lambda'}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Verschiebung des Coordinaten-Nullpunktes.

Das zuerst sich darbietende Coordinatensystem mit dem Nullpunkte A im Normalparallel, mit der Breite $P = 53° \, 45'$, (vgl. Fig. 1.) ist nicht unmittelbar beibehalten worden, sondern es wurde eine konstante Verschiebung in der Meridianrichtung vorgenommen, so dass der Nullpunkt in dem Schlossturm von Schwerin liegt.

Die Verschiebung beträgt $\Delta x = 13919{,}812^m$.

Da hiernach (Fig. 1.) $x' = x - \Delta x$ ist, so erhalten wir für die neuen Coordinaten (5):

$$\left.\begin{aligned} y &= R \, sin \, \lambda' \\ x' &= -13919{,}812^m + R \, cos \, \lambda' - R_0 \\ \text{oder } x' &= -13919{,}812^m + \Delta R - 2 \, R \, sin^2 \frac{\lambda'}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Ausser diesen strengen Formeln (5) oder (6) sind auch Reihenentwicklungen angewendet worden, welche aber jetzt nicht vorgeführt zu werden brauchen.

Nachdem mit diesen Mitteln die rechtwinkligen Coordinaten aller 38 Standpunkte des Netzes von S. 540 berechnet waren, wurden daraus wieder rückwärts alle Richtungswinkel abgeleitet, nämlich für irgend zwei Punkte $M \, N$:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$tang\,(M\,N) = \frac{y_n - y_m}{x_n - x_m}$$

wozu noch Correktionsglieder von der Ordnung $\frac{1}{r^2}$ kommen, die hier nicht namhaft gemacht werden sollen. (Vgl. hiezu auch „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 421—424.)

Alle solche Richtungswinkel $(M\,N)$, deren Zahl $R = 239$ ist, (vgl. oben S. 541) wurden dann stationsweise mit den gemessenen Richtungssätzen verglichen, indem letztere mit der Verbesserungssumme $[v] = 0$ auf die $(M\,N)$ orientiert wurden, und für jede Station einen Beitrag $[v^2]$ zur Gesamtsumme aller v^2 lieferten.

Diese $[v^2]$ sind in nachfolgender Tabelle enthalten, welche ausserdem unter der Bezeichnung $[v'^2]$ die Quadratsummen derjenigen Richtungsverbesserungen v' enthält, welche nach der Theorie des Bessel'schen z aus den Winkelverbesserungen (1), (2), (3) ... der Netzausgleichung erhalten worden waren, d. h. die in der nachfolgenden Tabelle mit v' bezeichneten Grössen sind dieselben, welche früher in (9) und (11) § 124. S. 474, mit v_0 , v_1 , v_2 ... bezeichnet waren.

Damit kann die nachfolgende Tabelle verstanden werden:

Zusammenstellung der Fehlerquadratsummen auf den 38 einzelnen Stationen des Mecklenburgischen Dreiecksnetzes von S. 540.

Nr.	Stationen	$[v^2]$	$[v'^2]$	Nr.	Stationen	$[v^2]$	$[v'^2]$
1	Breetze	0,13″	0,11″	20	Kraase	2,80″	2,68″
2	Buchholz	0,51	0,72	21	Künkendorf . . .	5,08	4,77
3	Dars	2,69	2,55	22	Lauenburg . . .	1,83	1,79
4	Dietrichshagen . .	3,95	3,83	23	Lukow	0,29	0,28
5	Feldberg	10,24	10,09	24	Lüneburg	2,90	2,89
6	Friedrichsruh . .	4,75	4,85	25	Marxhagen . . .	6,69	6,39
7	Fürstenberg . . .	0,73	0,61	26	Ribnitz	4,35	4,56
8	Gnevsdorf . . .	2,30	2,37	27	Rothspalk . . .	3,59	3,68
9	Gottmannsförde .	0,83	0,80	28	Ruhnerberg . . .	4,96	5,12
10	Gransee	0,26	0,27	29	Schmokberg . . .	4,84	5,17
11	Granzin	1,14	1,09	30	Hohen-Schönberg	0,30	0,23
12	Greifswald . . .	0,37	0,30	31	Siek	0,08	0,14
13	Hartberg	6,20	6,14	32	Sparow.	3,24	3,30
14	Helpterberg . . .	2,50	2,74	33	Stralsund	0,68	0,75
15	Hoebeck	0,67	0,72	34	Templin	4,61	4,07
16	Hohe-Burg . . .	1,50	1,40	35	Tenzerow. . . .	0,55	0,56
17	Karbow	0,90	0,85	36	Wesenberg . . .	2,80	3,09
18	Karenz.	5,64	5,63	37	Woldzegarten . .	3,77	3,80
19	Keulenberg . . .	5,37	5,04	38	Zehna	3,22	3,21
	Summe 1—19 =	50,68	50,11		Summe 20—38 =	56,58	56,48
					Hiezu „ 1—19 =	50,68	50,11
						107,26	106,59

Das Netz enthält, wie oben auf S. 541 mitgeteilt ist, 109 Bedingungsgleichungen; hieraus folgt ein mittlerer Richtungsfehler:

$$\mu = \sqrt{\frac{107{,}26}{106}} = \pm 0{,}99''$$

und für die Paschen'sche Netzausgleichung:

$$\mu = \sqrt{\frac{106{,}59}{109}} = \pm 0{,}99''$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aus diesen mittleren Richtungsfehlern folgt ein mittlerer Winkelfehler:

$$m = \sqrt{2} \times 0{,}99'' = \pm 1{,}40''. \quad (7)$$

Dieses ist unter den gegebenen Umständen die beste Bestimmung des mittleren Winkelfehlers. Dass derselbe etwas grösser ausfällt als der Wert $m = 1{,}157''$ in (4) von S. 543 nach der internationalen Näherungsformel, wird nicht bloss Zufall, sondern auch durch die kleinen Fehlerreste der indirekten Elimination und ähnliche Umstände zu erklären sein.

§ 140. Sachsen.

In dem Königreich Sachsen sind vor 30 Jahren zwei glückliche Umstände zusammengekommen, deren Vereinigung eine vorzügliche Haupttriangulierung des Landes hervorgebracht hat, nämlich erstens die in jene Zeit fallende Gründung der mitteleuropäischen Gradmessung (jetzt internationalen Erdmessung) und zweitens das dringende Bedürfnis einer neuen Landesvermessung für Kataster, Topographie u. s. w.

Während in anderen Staaten die in abgeschlossenem Zustande befindlichen oder bereits selbständig wissenschaftlich arbeitenden Landesaufnahme der „Gradmessung" gegenüber sich neutral, oder gar ablehnend verhielten, bedurfte es in Sachsen nur eines geringen Anstosses, um an Stelle der alten Triangulierung aus dem vorigen Jahrhundert, deren Winkel höchstens auf 15″ sicher sein konnten, („Nagel, Denkschrift 1876," S. 6) eine neue Triangulierung im Sinne der Gauss'-Bessel'schen neueren Geodäsie zu setzen.

Über die älteren Vermessungszustände in Sachsen erhält man Auskunft in dem Werke:

Die Vermessungen im Königreich Sachsen, eine Denkschrift mit Vorschlägen für eine auf die europäische Gradmessung zu gründende rationelle Landesvermessung von *A. Nagel*, Regierungsrat und Professor der Geodäsie am Königl. Sächs. Polytechnikum. Dresden, in Kommission von A. Huhle 1876.

Dieses enthält eine geschichtliche Darstellung der seit 1781 in Sachsen ausgeführten Vermessungsarbeiten, nämlich der topographischen Landesvermessung von 1781—1811 und 1821—1825, der Landesvermessung für das Grundsteuersystem 1827—1841, dann von 7 grösseren Lokalmessungen 1811—1863 und endlich der europäischen Gradmessung in Sachsen seit 1862. (Bericht hierüber s. „Zeitschr. f. Verm. 1876," S. 264—269).

Die im Laufe von 28 Jahren, 1862—1890 entstandene neue sächsische Triangulierung ist veröffentlicht worden in einem grossen Werke:

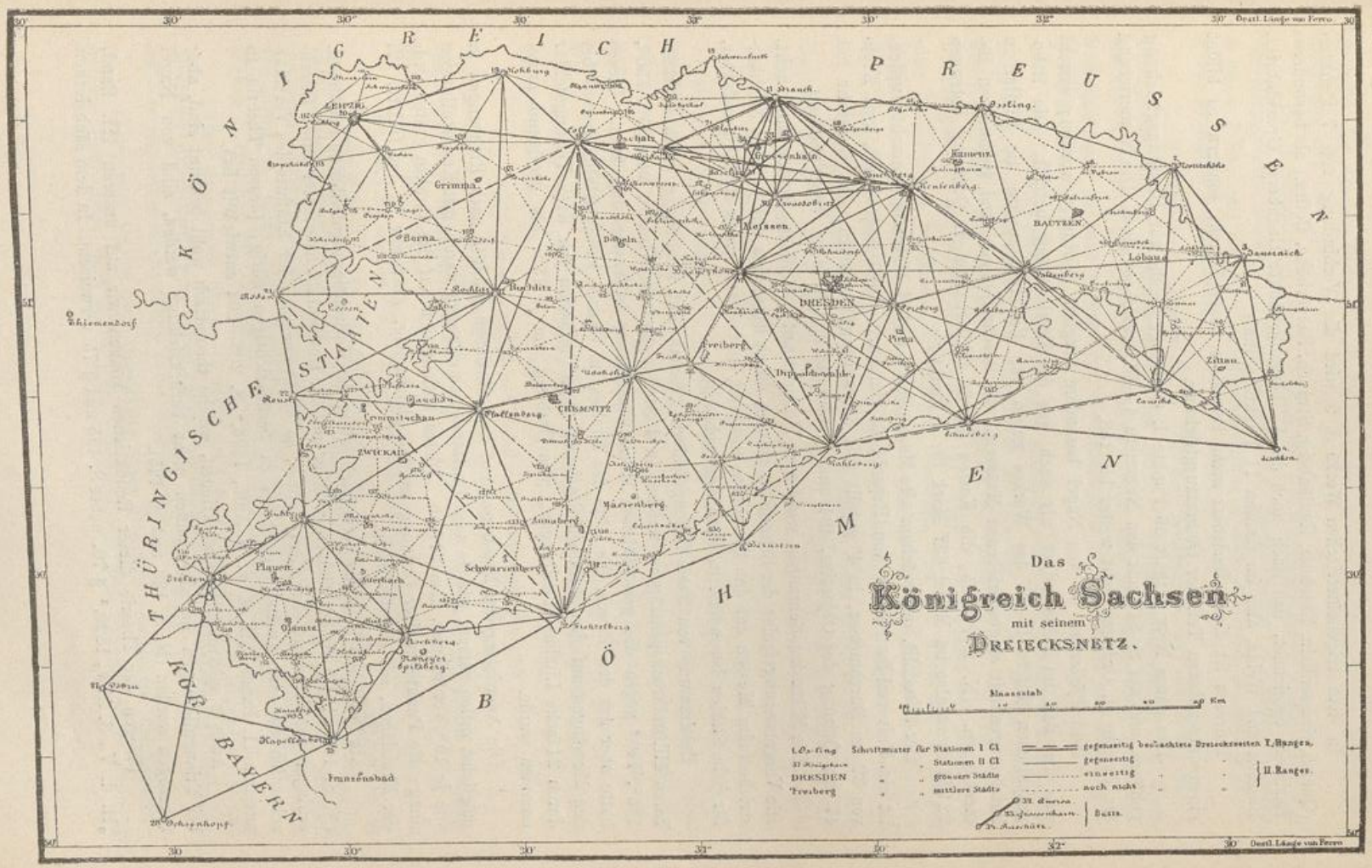
I. Die Grossenhainer Grundlinie. Astr.-geodät. Arbeiten für die Europ. Gradm. im Königreich Sachsen, I. Abteil. die Grossenhainer Grundlinie, von Bruhns und Nagel, Berlin 1882, und Auszug hieraus im Civilingenieur XXVIII, 1882, Heft 1. (Bericht von Helmert in der „Zeitschr. f. Verm. 1883," S. 596—604).

II. Das trigonometrische Netz. Astronomisch-geodätische Arbeiten für die europäische Gradmessung im Königreiche Sachsen, ausgeführt und veröffentlicht im Auftrage des Königl. sächsischen Ministeriums der Finanzen. II. Abteilung, das trigonometrische Netz I. Ordnung, bearbeitet von A. Nagel, Professor der Geodäsie an der königl. technischen Hochschule zu Dresden, mit 7 lithographierten Tafeln und 32 in den Text gedruckten Figuren. 1890, Druck und Verlag von P. Stankiewicz' Buchdruckerei zu Berlin. (1. Band, 772 S., 4° mit VII Tafeln.)

Hiezu haben wir in der „Z. f. V. 1891," S. 47—58 einen Bericht gegeben mit einer Übersichtskarte, welche wir auch hier S. 547 nochmals vorführen.

Die Basis bei Grossenhain ist 1872, in der Länge von 8909^m in 12 Teilen mit dem Bessel'schen Apparate gemessen worden; in unserem „Handb. d. Verm., III. Band. 3. Aufl. 1890," S. 117 ist das Basisnetz mit 11 Punkten gezeichnet.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN


KÖNIGREICH PREUSSEN
THÜRINGISCHE STAATEN
KÖNIGREICH BAYERN
BÖHMEN
Das
Königreich Sachsen
mit seinem
Dreiecksnetz.
Massstab
DRESDEN
CHEMNITZ
ZWICKAU
Freiberg
Plauen
Schwarzenberg
Marienberg
Bautzen
Lobau
Zittau
Reichenberg
Franzensbad
Schneeberg
Annaberg
Oschatz
Grimma
Meissen
Pirna
Schiemendorf
Leipzig
Dippoldiswalde
Kamenz
Rosenberg
Hainichen
Zschopau
Auerbach
Oelsnitz
Adorf
Asch
Eibenstock
Kupferberg
Kaiserswalde
Weipert
Reitzenhain
Brüx
Teplitz
Aussig
Tharandt
Dohna
Radeberg
Bautzen
Görlitz
Zittau
Reichenberg
Gabel
Leitmeritz
Bodenbach
Tetschen
Schandau
Pirna
Meissen
Riesa
Oschatz
Torgau
Eilenburg
Leipzig
Borna
Altenburg
Zeitz
Weissenfels
Merseburg
Halle
Naumburg
Zeitz
Gera
Greiz
Plauen
Hof
Asch
Eger
Karlsbad
Saaz
Laun
Kralup
Prag
Leitmeritz
Tetschen
Schandau
Pirna
Dresden

In dem trigonometrischen Werke S. 9 wird die Verbindung von 7 Punkten (Quersa, Grossenhain, Raschütz, Keulenberg, Strauch, Baeyerhöhe, Collm,) als besonderes Basisnetz bezeichnet, das auch noch die 4 Übergangspunkte Buchberg, Grossdobritz, Baselitz und Weida, also im Ganzen 11 Punkte enthält.

Indessen ist dieses Basisnetz *nicht* besonders ausgeglichen, sondern es bildet einen untrennbaren Teil der Gesamtausgleichung.

Das ganze Netz enthält 36 Punkte I. Ordnung, welche zur Hauptausgleichung gehören, und auf S. 547 mit den Nummern 1—36 bezeichnet sind. Die Numerierung für Punkte II. Ordnung geht weiter bis 158.

Dem *Pfeilerbau* ist von Nagel besondere Sorgfalt gewidmet worden; sowohl was den Bau im Felde selbst, als auch was die Versicherung betrifft. Die lithographischen Tafeln II—V des Werkes geben für die Hauptpunkte die Pfeiler in Zeichnungen mit eingeschriebenen Maassen, mit Beschreibungen und besonderen Bemerkungen. (N. S. 26—45, die Kosten der 36 Pfeilerbauten I. Ordnung betrugen 22944 Mark also im Mittel 637 Mark für 1 Punkt.)

Der Theodolit, mit welchem alle Messungen I. und II. Ordnung gemacht wurden, ist ein Universal-Instrument von Repsold in Hamburg, 1863 angeschafft, mit Kreis von 32 cm Durchmesser, in 4′ geteilt mit Schraubenmikroskopen, das Fernrohr hat 47 mm Offnung des Objectivs, 494 mm Brennweite und 27fache Vergrösserung.

Die Mikroskop-Schrauben wurden in Hinsicht auf periodische Fehler untersucht. Die Vergrösserungsfehler der Schrauben wurden durch Einstellen auf je beide Nachbarstriche beim Messen auf den Stationen bestimmt und durch einen Reduktionsfaktor, für jede Station besonders, in Rechnung gebracht.

Bestimmung von Kreis-Teilungsfehlern geschah mit Benützung eines verstellbaren Hilfsmikroskopenträgers, welcher in 4 Stellungen mit Winkeln von 90°, 150°, 135°, 140° gegen die gewöhnlichen Mikroskopenträger in Anwendung kam. Dieses hatte aber nur den Zweck, die Güte des Kreises im Ganzen zu ermitteln, worauf bei den Messungen auf den einzelnen Stationen die Elimination der Kreis-Teilungsfehler durch 24fache Limbusverstellungen, also Drehung um je 15°, als genügend angenommen wurde.

Die Anordnung der Messungen auf den Stationen erfolgte nach Richtungen in möglichst vollen Sätzen, wie sie nach Umständen zu erlangen waren, mit Kreisstellungen von je 15° Verdrehung, also 24fach. Dieses bezieht sich auf die Punkte erster Ordnung; die Punkte zweiter Ordnung wurden gleichzeitig, aber nur in der Hälfte, 12, der Kreislagen, *mit* angeschnitten.

Als Besonderheit ist die Berücksichtigung der Horizontierungsfehler zu erwähnen. (N. S. 103—114.) Da der Zielachsenfehler und der Horizontalachsenfehler durch Durchschlagen des Fernrohrs eliminiert werden, so bleibt nur noch der Einfluss des Vertikalachsenfehlers oder Aufstellungsfehlers zu berücksichtigen übrig, (dessen Theorie in unserem II. Bande, „H. d. V., 4. Aufl., 1893," S. 203—204 entwickelt ist).

Auch 2 sphäroidische Korrektionen, welche theoretisch wohl bekannt sind, aber bei Triangulierungen im allgemeinen nicht berücksichtigt werden, sind von Nagel zugezogen worden (N. S. 123 und S. 125).

(Wegen der Theorie dieser Reduktionen können wir auf unseren III. Band, „H. d. V., 3. Aufl., 1890," § 70. nebst S. 495 und § 75 verweisen). In dem sächsischen

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Beispiel der Station Röden (N. S. 125) ist die grösste Wirkung dieser beiden Reduktionen nur 0,04".

Die Stationsausgleichungen und dann die Netzausgleichung wurde nach der vervollständigten Bessel schen Methode gemacht, deren Theorie in unseren früheren § 49. — § 55., mit der Formelzusammenstellung S. 156—160 und Beispiel § 71. — § 74. genügend behandelt ist.

Z. B. Station 1. Ossling (N. S. 165 und Netzbild S. 547 nordöstl.) hat 4 Richtungen und 3 Stationswinkel, also auch 3 *Winkel*verbesserungen im Netz, welche (N. S. 167) mit (1) (2) (3) bezeichnet sind, aber fälschlicherweise *Richtungs*verbesserungen genannt werden (vgl. die Unterscheidung von Winkel und Richtung in § 70. S. 230—231).

Die meisten Stationsausgleichungen enthalten ausser den Richtungen I. Ordnung auch eine erhebliche Zahl von Richtungen II. Ordnung, welche in die Hauptausgleichung nicht mit eingehen. Z. B. Station 6. Valtenberg (N. S. 212) hat 21 Richtungen mit den Winkelverbesserungen (37) . (38) . . . (56), welche sich alle auf die eine Nullrichtung Neukirch, II. Ordnung, beziehen, und von allen 21 Richtungen gehen nur 11 in die Hauptausgleichung ein, während die 10 anderen, einschliesslich der Nullrichtung Neukirch, in den Bedingungsgleichungen nicht mehr vorkommen.

Diese Umstände sind namentlich zu beachten beim Abzählen der Zahl aller Bedingungsgleichungen. Wenn alles, I. und II. Ordnung in die Ausgleichung einginge, so hätte man (N. S. 640—644) bei 36 Stationen und 435 Winkeln die Zahl von $435 + 36 = 471$ Richtungen, es sind aber deren nur 262 in der Ausgleichung, weil nur 255 Winkel I. Ordnung vorhanden sind (N. S. 665, $[k] = 255$) und nur 7 Stationen Nullrichtungen I. Ordnung haben, nämlich Ossling, Nostitzhöhe, Jauernick, Lausche, Hohburg, Döbra, Grossenhain. Alle anderen 29 Stationen haben Nullrichtungen II. Ordnung. Die Zahl der Richtungen I. Ordnung ist also $255 + 7 = 262$ in Übereinstimmung mit N. S. 488, wo 131 gegenseitig beobachtete Linien angegeben sind.

Mit $p = 36$ und $l = 131$, $R = 262$ hat man daher nach den Gauss schen Regeln S. 176:

$$l - 2p + 3 = 131 - 72 + 3 = 62 \text{ Seitengleichungen,}$$
$$l - p + 1 = 131 - 36 + 1 = 96 \text{ Dreiecksgleichungen,}$$

dazu noch eine Basisseitengleichung (N. S. 535), weil die Basis mit einem Zwischenpunkte eingeführt ist.

Im Ganzen sind es $62 + 96 + 1 = 159$ Bedingungsgleichungen.

Diese Zahl von 159 Gleichungen ist sehr gross und man kann fragen, ob es nicht besser gewesen wäre, ein Basisnetz auszuscheiden. Durch Abtrennen eines besonderen Basisnetzes, mit der Diagonale Weida-Buchberg oder wenigstens Strauch-Gross-Dobritz, hätte, ohne wesentliche Genauigkeitseinbusse, die Ausgleichung des Netzes I. Ordnung an Gleichungen erheblich entlastet werden können.

Hier ist auch zu fragen, ob nicht die Punkte Baselitz neben Gross-Dobritz und Buchberg neben Keulenberg hätten gespart werden können, was ebenfalls die Gleichungszahl vermindert und das Ganze übersichtlicher gemacht hätte?

Allerdings würden bei Abtrennung eines besonderen Basisnetzes die Basisnetzpunkte ihrer *Lage* nach nicht mehr genügend mit den Punkten erster Ordnung

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

verbunden sein, sondern sie müssten nach der Hauptausgleichung nochmals besonders angeschlossen werden, doch wäre das neben der Entlastung der Hauptausgleichung nebensächlich.

Die 159 Normalgleichungen wurden in *einem* Gusse aufgestellt und aufgelöst, was wohl das Äusserste ist, was in Bezug auf die Zahl der Gleichungen bisher geleistet worden ist oder noch geleistet werden wird. — Allerdings ging bei dieser Riesenarbeit nicht alles glatt ab; schon im Vorwort S. IV wird berichtet, dass in Folge eines Druckfehlers im 10stelligen thesaurus logarithmorum die erste Auflösung vergeblich war. Auch nach Entdeckung dieses Hindernisses stiess die Auflösung noch auf Schwierigkeiten (N. S. 628), indem nach der ersten Durchrechnung noch Widersprüche von etwa 0,01″ in den Bedingungsgleichungen blieben, welche durch indirekte Hilfsmittel in *fünfmaliger* Wiederholung schliesslich bis auf 0,00005″ heruntergebracht wurden.

Bei der Aufstellung der linearen Seitengleichungen hat Nagel unseren Satz von dem Flächenmass für die Günstigkeit mit benützt, wie wir schon auf S. 307 erwähnt haben.

Welche kolossale Arbeit in der sächsischen Auflösung der 159 Gleichungen aufgewendet wurde, kann man aus den allmählichen Mitteilungen hierüber in den Gen.-Berichten der Gradmessung sehen; für 1878 S. 107, 1879 S. 112, 1880 S. 37, für 1882 S. 129. —

Die sächsische Triangulierung hat den Ruhm, den kleinsten mittleren Winkelfehler bis zu ihrer Zeit erreicht zu haben, nämlich $= \pm 0{,}35''$.

Die 197 geschlossenen Dreiecke, (welche N. S. 484—485 mit ihren Schlussfehlern zusammengestellt sind), geben die Quadratsumme der 197 Schlussfehler = 72,53, also den mittleren Winkelfehler (N. S. 662):

$$m = \sqrt{\frac{72{,}53}{197 \cdot 3}} = \pm 0{,}35'' \qquad (1)$$

Die Verteilung der Schlussfehler nach der Grösse der Dreiecke zeigt gerade für die grössten Dreiecke gute Schlüsse, was (N. S. 102) durch den Umstand erklärt wird, dass *lange* Sichten stets *hoch* über dem Boden weggehen und deswegen von Seitenrefraktion weniger zu leiden haben als kurze und niedere Sichten.

Aus allen 36 Stationen zusammen wurde der mittlere Gewichtseinheitsfehler berechnet (N. 665):

$$m = \sqrt{\frac{9350}{9814}} = \pm 0{,}976''$$

Ausserdem wurde (N. S. 663—664) eine Rechnung mit den Gewichtscoefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. angestellt, welche aber richtiger nach unserem § 124. (17)—(20) S. 476 zu machen wäre. —

Es folgt noch der mittlere Gewichtseinheitsfehler im Netz (N. S. 673) entsprechend unseren Formeln (21)—(23) § 124 S. 477.

$$\mu_2 = \sqrt{\frac{281}{159}} = 1{,}33'' \text{ (Netz)} \qquad (2)$$

und aus N. S. 665 und S. 673 zusammen der mittlere Gewichtseinheitsfehler aus den Stationen und dem Netz zusammen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\mu = \sqrt{\frac{9350 + 281}{9814 + 159}} = \pm 0{,}98'' \qquad (3)$$

wie gewöhnlich ist μ_2 grösser als μ und zwar ist das Verhältnis:

$$\frac{\mu_2}{\mu} = \frac{1{,}33}{0{,}98} = 1{,}36 \qquad (4)$$

Dieser Quotient, welcher eigentlich gleich 1 sein sollte, ist charakteristisch für etwaige verdeckte Fehler im Netz: und giebt also eine Fehlervergrösserung im Verhältnis 1,36 : 1.

Dazu wurden noch einige Funktions-Gewichte und Fehler berechnet, die wir schon in „Z. f. V., 1891," S. 56—57 zusammengestellt haben.

Der kleine mittlere Winkelfehler $m = \pm 0{,}35''$ in (1) wird, abgesehen von der Vortrefflichkeit des Beobachters, in der grossen Zahl der Messungen zu suchen sein, welche aus der Hereinziehung vieler Richtungen II. Ordnung in die Stationsausgleichungen I. Ordnung folgte, indem I. Ordnung 262 Richtungen hat, wozu noch 209 Richtungen II. Ordnung hinzukamen.

Auf der Station Porsberg (N. S. 214—227) sind 8 Richtungen I. Ordnung, welche mit 13 Richtungen II. Ordnung zusammen eine Ausgleichung von 21 Richtungen bilden, und davon haben die 8 Richtungen I. Ordnung Anschnittszahlen zwischen 33 und 36, dabei ist Einstellung mit Fernrohr links und rechts zusammen als Anschnittszahl = 1 gerechnet. Nach der Schreiberschen Methode (S. 270—271) würden die Anschnittszahlen erheblich kleiner werden, und bei dieser grossen Ungleichheit müssen auch die sächsischen Stationswinkelgewichte erheblich grösser werden als bei der preussischen Wiederholungsart, d. h. es ist die grosse Schlussgenauigkeit der sächsischen Triangulierung wesentlich auf der grossen Zahl und der Verknüpfung der Messungswiederholungen beruhend.

Jenes in Sachsen zum erstenmal unternommene Hineinziehen von Richtungen II. Ordnung in die Sätze der Stationsausgleichungen I. Ordnung hatte ausser der Genauigkeitssteigerung in I. Ordnung noch den Vorteil, dass II. Ordnung selbst mit grosser Genauigkeit sofort mit eingebunden wurde (jedoch ohne Rücksicht, ob nach Jahren Sichthindernisse für Fortsetzung II. Ordnung entstehen). Andererseits erforderte das Zusammennehmen einen bequemen von Zeit und anderen Umständen unabhängigen Geschäftsgang, welchen *ein* Beobachter und Leiter sich verschaffen konnte, der aber bei der sonst nötigen Arbeitsteilung zwischen I. und II. Ordnung nicht immer ausführbar sein würde.

Nach der Netzausgleichung und Berechnung wurde ein rechtwinkliges Coordinatensystem nach Soldnerscher Art angelegt, dessen Nullpunkt der Basiszwischenpunkt 33 Grossenhain, und dessen x-Achse der durch diesen Punkt gehende Meridian ist.

§ 141. Zusammenfassung der mittleren Winkelfehler.

Um eine erste Übersicht über die zahlreichen in dem vorstehenden Kapitel berechneten Genauigkeitswerte zu gewinnen, wollen wir damit beginnen, eine Tabelle aller derjenigen mittleren Winkelfehler aufzustellen, welche nach der Näherungsformel (1) S. 469 von § 123 für deutsche Triangulierungen aus diesem Jahrhundert berechnet worden sind.

Folgendes ist diese Tabelle:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Triangulierung	Citat	$[w^2]$	n	$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}$
Hannover, Gauss	§ 129. S. 491, (5)	10,81	7	± 0,72″
Gradmessung in Ostpreussen, Bessel	§ 130. S. 502, (2)	41,15	29	0,69
Küstenvermessung, Baeyer	§ 130. S. 503.	139,66	148	0,56
Preussische Landesaufnahme	§ 131. S. 508.	636,43	690	0,55
„ „	§ 131. S. 510, (3)	13,93	21	0,47
Geodätisches Institut	§ 132. S. 518.	246,11	137	0,77
Bayern	§ 133. S. 521, (2)	3205,58	339	1,77
„ Schwerd	§ 133. S. 522, (6)	6,58	4	0,74
Württemberg, Bohnenberger	§ 134. S. 524, (2)	13,64	6	0,87
„ Schoder, Hammer	§ 134. S. 524, (3)	4,05	6	0,47
Baden	§ 135. S. 531, (6)	652,45	86	1,59
Hessen	§ 136. S. 534, (3)	66,50	15	1,22
Nassau	§ 137. S. 536, (4)	27,35	15	0,78
Mecklenburg	§ 139. S. 543, (4)	276,87	69	1,16
Sachsen	§ 140. S. 550, (1)	72,58	197	0,35
	Summe	5413,64	1769	

$$\text{Gesamtmittel } m = \sqrt{\frac{5413{,}64}{1769 \cdot 3}} = \pm 1{,}01'' \qquad (1)$$

Wir haben also aus 1769 deutschen Dreiecken dieses Jahrhunderts den mittleren Fehler eines Winkels in runder Zahl $m = \pm 1''$.

Wenn man die vorstehenden Zahlen auch zu kritischen Vergleichungen benützen will, so muss man, abgesehen von allen Nebenumständen geschichtlicher und sachlicher Art, von denen jetzt nicht die Rede sein soll, in mathematischer Beziehung auch die Zahl n der Dreiecke berücksichtigen, aus welcher ein Wert m berechnet ist, und gerade mit Rücksicht hierauf haben wir in § 117. und § 118. auch noch den mittleren Fehler des mittleren Fehlers bestimmt, und da die Dreieckswidersprüche den Charakter *wahrer* Fehler ε haben, wobei aber im einzelnen Falle $w^2 = 3\varepsilon^2$ ist, haben wir aus (14) S. 450 für unseren Fall:

$$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2)$$

Dieses auf zwei Werte von der vorstehenden Tabelle, Bayern und Württemberg angewendet giebt:

$$\text{Bayern } m = 1{,}77''\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{339}}\right) = 1{,}77''\,(1 \pm 0{.}04)$$

$$\text{Württemberg } m = 0{,}47''\left(1 \pm \frac{0{,}7071}{\sqrt{6}}\right) = 0{,}47''\,(1 \pm 0{,}29)$$

Es erscheint also der Bayerische Wert 1,77″ viel mehr feststehend, weil aus der grossen Zahl von 339 Dreiecken ermittelt, als der nur aus 6 Dreiecken abgeleitete Württembergische Wert 0,47″, welcher mehr nur den Charakter eines innerhalb 1″ schwankenden Zufallswertes hat.

Eine weitere Tabelle dieser Art bietet uns der schon mehrfach zitierte „Rapport sur les triangulations présenté à la dixième conférence générale à Bruxelles, en 1892, par le Général A. Ferrero," welcher auf S. 5 eine solche Zusammenstellung giebt, aus welcher wir nachstehendes entlehnen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Triangulierung.	$[w^2]$	n	$m = \sqrt{\frac{[w^2]}{3n}}$
Oesterreich-Ungarn	1753,37	670	$+0{,}93''$
Belgien	523,04	219	0,89
Dänemark	198,82	87	0,87
Spanien	791,15	325	0,90
Frankreich	5467,08	914	1,41
Grossbritannien	5548,18	552	1,83
Griechenland	179,79	102	0,77
Italien	1305,24	514	0,92
Norwegen	273,13	179	0,71
Portugal	699,05	139	1,29
Rumänien	325,67	36	1,74
Russland	4181,79	998	1,18
Schweden	1088,96	304	1,09
Schweiz	88,75	40	0,86
Summe	22424,02	5079	

$$\text{Gesamtmittel } m = \sqrt{\frac{22424{,}02}{5079 \,.\, 3}} = \pm 1{,}21'' \qquad (3)$$

Wenn man diese Tabelle und die vorhergehende für Deutschland zusammennimmt, so bekommt man aus 6848 Dreiecken als Gesamtmittel für Europa:

$$m = \sqrt{\frac{27838{,}66}{6848 \,.\, 3}} = \pm 1{,}16'' \qquad (4)$$

Alle diese 6848 Dreiecksschlüsse zusammengebracht zu haben, ist das Verdienst des italienischen Generals und internationalen Erdmessungs-Kommissärs Ferrero.

Der mittlere Winkelfehler $m = \pm 1''$ für Europäische Triangulierungen I. Ordnung ist dadurch sichergestellt.

Wenn wir von diesen 6848 Dreiecken nicht bloss die Summen $[w^2]$ sondern auch noch die Summen $[w^4]$ hätten, dann könnten wir mit Hilfe unserer Gleichung (12) § 121. S. 467 noch weitere Schlüsse aus jenem kostbaren Materiale ziehen. —

Zur Zeit der ersten Triangulierungen, die wir haben, am Anfange des 17ten Jahrhunderts war der mittlere Winkelfehler, vor Erfindung des Fernrohrs, soweit wir aus den dürftigen Angaben von Snellius und Schickhart (§ 125. und § 126.) schliessen können, etwa $\pm 2'$ bis $\pm 4'$ (Schickhart $\pm 4'$ für eine Richtung, S. 481).

Im 18. Jahrhundert, bei den klassischen Gradmessungen der Franzosen, ging der mittlere Winkelfehler rasch herunter auf einige Sekunden ($\pm 3{,}6''$ und $\pm 1{,}1''$, S. 483 und S. 484).

Im 19. Jahrhundert haben wir in Europa aus den gründlichen Berechnungen von Ferrero, (s. oben (4)) einen mittleren Winkelfehler von $\pm 1''$.

Welches wird die Genauigkeitssteigerung im 20. Jahrhundert werden? —

Alles Vorstehende bezieht sich nur auf die *Winkel*-Genauigkeit. Wie sich die Winkelfehler in den Dreiecken fortpflanzen und zu Basisanschlussfehlern führen, ist eine Frage, welche interessante Theorien erzeugt hat und in neuerer Zeit durch die internationale Erdmessung auch praktischer Lösung näher geführt worden ist. Wir werden in unserem III. Bande „Handb. d. V.," 4. Aufl. darauf zurückkommen. Inzwischen ist hiezu zu zitieren das Werk „Veröffentlichung des geodätischen Instituts, die Europäische Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau. I. Heft. Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von Helmert, Berlin 1893." (Vgl. auch S. 283 und 291).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Einen Bericht über S. 241 u. ff. dieses Werkes, Basisanschlüsse betreffend, haben wir in „Z. f. V., 1894," S. 220—222 gegeben; auch gehört hiezu: „Verbindung und Vergleichung geodätischer Grundlinien, zusammengestellt im Centralbureau der internationalen Erdmessung, von Dr. Fr. Kühnen, Verhandl. d. X. allgem. Konferenz d. internat. Erdmessung zu Brüssel, 1892," S. 518—546. „Zeitschr. f. Verm., 1894," S. 75—79.

Nachträge.

Die Neubearbeitung dieses im Sept. 1893 unerwartet rasch im Buchhandel vergriffenen Bandes ist aus verschiedenen Gründen nicht ganz in einem Zuge möglich gewesen, und es sind am Schlusse noch einige Ergänzungen zu früheren Kapiteln angewachsen.

§ 142. Rückwärtseinschneiden mit mehreren Standpunkten.

Von der Triangulierung der Stadt Hannover, deren Netz auf S. 408—409 gegeben ist, hat sich im Jahre 1894 eine Gruppen-Ausgleichung von 5 unter sich polygonometrisch verbundenen Punkten ergeben, welche als praktisches Beispiel zu Kap. III hier noch eine Stelle finden mag (vgl. auch „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 273—276).

Bei Stadttriangulierungen kann es oft vorkommen, dass man von einem Platze aus zwar eine genügende Zahl von Türmen oder anderen bereits durch Coordinaten bestimmten Hochpunkten sehen, aber sie nicht auf *einen* Theodolitstandpunkt zusammenbringen kann. Wie man trotzdem alles in eine Ausgleichung zusammenfassen kann, wollen wir an dem nachfolgenden Beispiele zeigen:

Der Lageplan (Fig. 1. S. 555) zeigt den Königsworther Platz in Hannover, von welchem aus 7 trigonometrische Punkte gesehen werden können, aber nie von *einem* Punkte aus mehr als 4, weil die Gebäude, Bäume u. s. w. die Sichten stören. Nach vielem Absuchen wurden 4 Standpunkte A, B, D, E ausgewählt, welche mit einem Hilfspunkte C als Polygon zusammen gemessen wurden und dadurch in die nötigen Centrierungsverbindungen gebracht wurden. Zugleich wurden auch 2 Kontrollbolzen a und b gesetzt, welche zu der nachfolgenden Ausgleichung zwar in keiner Beziehung stehen, aber doch, um alles Technische zu erwähnen, auch mit aufgeführt werden sollen. (Die Festlegungen von A, B, C, D, E sind mit Eisenbolzen nach „Handb. d. Verm. II. Band, 4. Aufl., 1893", S. 281 und die Punkte a und b nach S. 364 ebendas. gemacht.) Die 6 Entfernungen $AB = 22{,}783$ m, $BE = 60{,}276$ m u. s. w. sind mit gewöhnlichen Messlatten auf wenige Millimeter genau erhalten. Der beste Punkt ist A mit 4 Sichten: Martin, Wasserturm, Hochschule S. und SO.; auch B hat noch 3 Sichten: Martin, Wasserturm, Solms, während E und D nur noch je 2 Sichten: Palmenhaus, Christus und Hochschule, Christus haben.

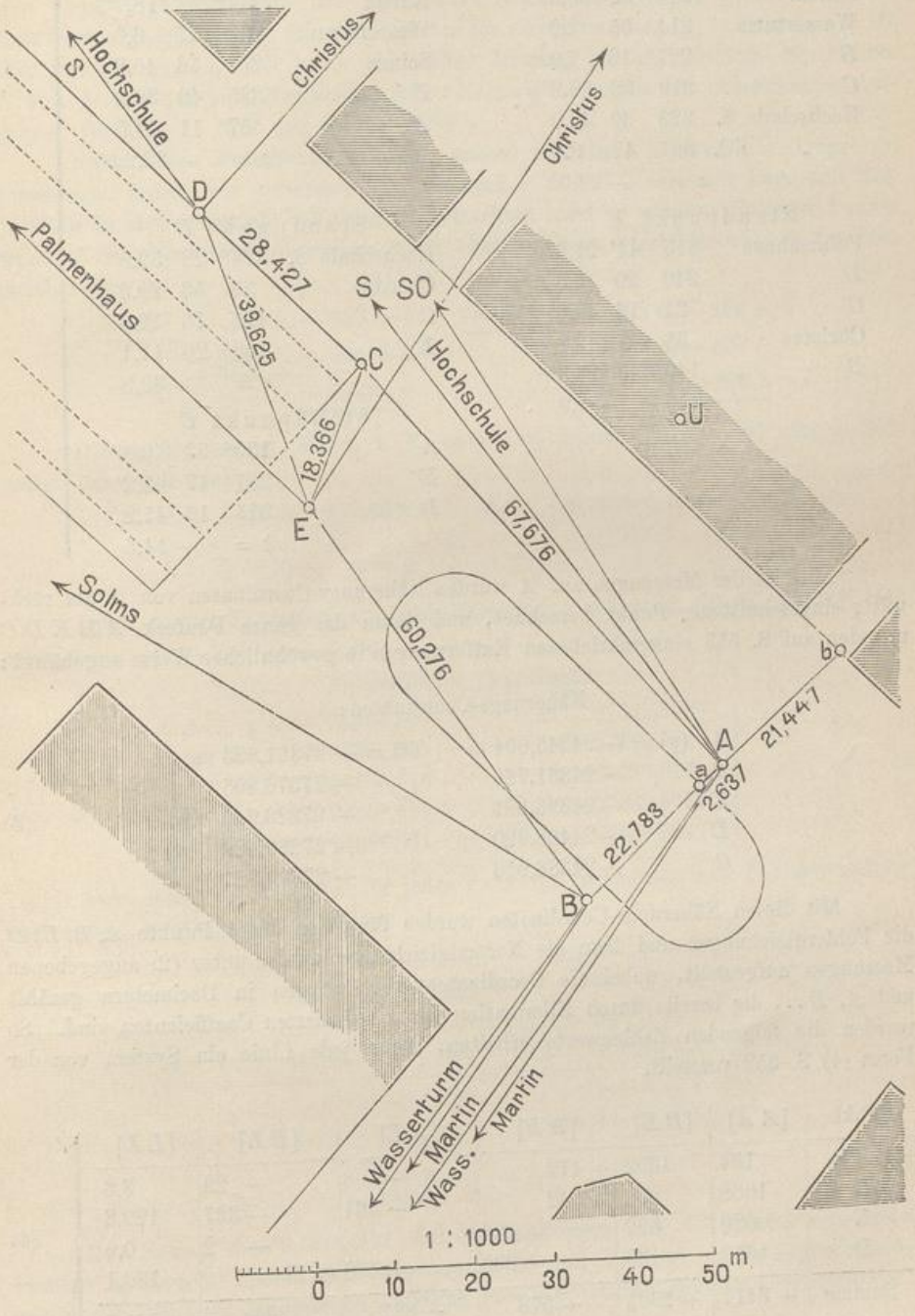
Wir wollen zuerst die Coordinaten aller gegebenen Punkte und die genähert orientierten Messungs-Abrisse geben:

festgegebene Punkte:

Martin, Turm	$y = -25273{,}930$ m	$x = -28710{,}901$ m	(1)
Wasserturm	$-25538{,}488$	$-29071{,}474$	
Solms, Turm	$-24695{,}660$	$-27176{,}634$	
Palmenhaus	$-25977{,}983$	$-25706{,}108$	
Hochschule S. Turm	$-24709{,}769$	$-26868{,}278$	
„ SO. „	$-24667{,}066$	$-26851{,}965$	
Christus, Turm	$-24158{,}271$	$-26989{,}625$	

Fig. 1.

Königsworther Platz in Hannover.



Messungsabrisse, genähert orientiert mit Zufügung der Verdrehung z nach der Ausgleichung:

Standpunkt A

Martin	214°	32′	50,5″
Wasserturm	214	55	2,9
B	227	12	7,9
C	319	32	58,2
Hochschule S.	323	30	43,0
„ SO.	327	42	9,2
$z =$			— 29,0

Standpunkt E

Palmenhaus	315°	41′	25,8″
D	340	20	5,3
C	21	16	49,6
Christus	35	7	49,8
B	140	49	25,8
$z =$			— 9,9

Standpunkt B

Martin	214°	22′	18,7″
Wasserturm	214	47	6,0
Solms	300	56	40,3
E	325	49	32,9
A	47	11	44,0
$z =$			— 32,2

Standpunkt D

Hochschule S.	324°	28′	52,9″
Christus	39	53	29,3
C	135	16	52,9
E	160	20	11,1
$z =$			— 39,8

Standpunkt C

A	139°	33′	0,0″
E	201	17	5,2
D	315	16	41,2
$z =$			— 14,5

(2)

Mittelst der Messungen auf A wurden Näherungs-Coordinaten von A als rückwärts eingeschnittener Punkt berechnet, und daran das ganze Fünfeck $A\,B\,E\,D\,C$ mit den auf S. 555 eingeschriebenen Entfernungen in gewöhnlicher Weise angehängt:

Näherungs-Coordinaten:

A	$(y) =$ — 24345,004 m	$(x) =$ — 27361,323 m
B	— 24361,720	— 27376,805
E	— 24395,581	— 27326,940
D	— 24408,920	— 27289,629
C	— 24388,916	— 27309,827

(3)

Mit diesen Näherungs-Coordinaten wurden für jeden der 4 Punkte A, B, E, D die Fehlergleichungen und dann die Normalgleichungen zu den unter (2) angegebenen Messungen aufgestellt, wobei die Coordinatenverbesserungen in Decimetern gezählt und A, B... die bereits durch Elimination der z reduzierten Coefficienten sind. So wurden die folgenden Zahlenwerte erhalten, deren jede Linie ein System von der Form (4) S. 352 vorstellt.

Punkt	$[A\,A]$	$[B\,B]$	$[A\,B]$	$[A\,L]$	$[B\,L]$	$[L\,L]$
A	164	1392	+ 472	— 8	— 22	3,3
B	1008	888	+ 942	— 361	— 337	129,3
E	620	592	— 606	+ 2	— 2	0,0
D	1619	33	— 230	— 470	+ 67	136,1
Summe	+ 3411	+ 2905	+ 578	— 837	— 294	+ 268,7

(4)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Ehe wir weiter gehen, wollen wir die Einzelbestandteile betrachten: Der Punkt A für sich würde eine ganz gewöhnliche Ausgleichung als Rückwärtsschnitt geben, ähnlich wie S. 351, weil auf dem Punkte A die Zahl von 4 Richtungen, also eine überzählige vorhanden ist. Der Punkt B mit 3 Richtungen giebt zwar auch noch Normalgleichungen in dem gewöhnlichen Sinn mit Gewichten ($p_y = 12$ und $p_x = 10$) aber mit $[ll.2] = 0$, weil keine überzählige Messung da ist. Endlich die Punkte E und D mit nur je 2 Richtungen geben Normalgleichungen mit unbestimmter Auflösung, Gewichte = Null und $[ll.2]$ = Null.

Nach diesen Zwischenbemerkungen fassen wir alle 4 Systeme der Gruppe (4) zusammen, indem wir annehmen, das Fünfeck $ABEDC$ sei nach Lage und Verdrehung in sich selbst als fehlerfrei zu betrachten, oder es werden alle seine Punkte *dieselben* Coordinatenverbesserungen δ_x, δ_y erhalten, kurz wir bilden aus (4) die Endgleichungen:

$$\begin{array}{rrr|rrr} \underline{3411\,\delta_x} & + 578\,\delta_y & - 837 = 0 & \underline{+ 2905\,\delta_y} & + 578\,\delta_x & - 294 = 0 \\ & \underline{+ 2905\,\delta_y} & - 294 = 0 & & \underline{+ 3411\,\delta_x} & - 837 \\ & & \underline{+ 268{,}7} & & & \underline{+ 268{,}7} \end{array}$$

Dieses in üblicher Weise, z. B. nach dem Schema von S. 343 oder S. 351, weiter behandelt giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_y = + 0{,}05^{dm} \pm 0{,}06^{dm} \qquad \delta_x = + 0{,}23^{dm} \pm 0{,}06^{dm} \\ [ll.2] = 56 \quad , \quad m = \sqrt{\frac{56}{5}} = \pm 3{,}3'' \end{array}\right\} \tag{5}$$

Diese δ_y und δ_x werden zu *allen* Näherungs-Coordinaten (3) hinzugefügt und geben:

Ausgeglichene Coordinaten

$$\left.\begin{array}{lll} A & y = - 24344{,}999^m & x = - 27361{,}300^m \\ B & - 24361{,}715 & - 27376{,}782 \\ E & - 24395{,}576 & - 27326{,}917 \\ D & - 24408{,}915 & - 27289{,}606 \\ C & - 24388{,}911 & - 27309{,}804 \end{array}\right\} \tag{6}$$

Damit kann man nun auch noch für jeden Punkt die trigonometrische Fehlerverteilung ausrechnen, wodurch man bekommt:

Punkt A	$[v^2] = 21{,}7$	mit $4 - 1 = 3$
B	8,3	$3 - 1 = 2$
E	21,8	$2 - 1 = 1$
D	6,1	$2 - 1 = 1$
	57,9	$11 - 4 = 7$
		und $7 - 2 = 5$

$$m = \sqrt{\frac{58}{5}} = 3{,}4'' \tag{7}$$

Der Nenner $7 - 2$ entsteht aus 11 Richtungen mit 4 Orientierungs-Unbekannten z, und 2 Coordinaten-Unbekannten δ_x und δ_y. Der so in (7) erhaltene mittlere Fehler einer gemessenen Richtung $m = 3{,}4''$ stimmt genügend mit $m = 3{,}3''$ von (5).

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die vorstehende Ausgleichung hat ihren Zweck vollständig erreicht, nämlich Zusammenfassung aller der 7 auf dem Königsworther Platze (S. 555) nicht zusammen sichtbaren Richtungen, und wir wüssten kaum ein anderes einfaches Mittel, um eine Ausgleichung des vorliegenden Falles zu Stande zu bringen und zudem haben wir 5 gute Polygonpunkte zu Anschlüssen nach allen Richtungen gewonnen.

Unbenützt geblieben sind bei unserer Behandlung die Richtungsanschlüsse zwischen den fernen Zielpunkten und den Polygonpunkten selbst, weil auch bei guter Centrierung auf so kurze Entfernungen, die Polygonrichtungen unbedingt ungenauer sind als die Netzrichtungen.

Auch kann man noch fragen, ob durch die Ausgleichung das Polygon nicht eine *Drehung* erfahren habe, welche die konstante Coordinatenverschiebung unrichtig machen würde. Nähere Nachrechnung, welche wir hier nicht mehr vorführen, zeigt, dass auch die Verdrehung unschädlich geblieben ist.

§ 143. Genauigkeitsangaben von Stadt-Triangulierungen.

Die Ausgleichungs-Statistik von S. 400—401 zu der Triangulierung der Stadt Hannover, mit dem Netzbilde S. 408—409, welche sich auf die Messungen und Berechnungen bis 1893 bezieht, hat 1894 noch eine Fortsetzung erfahren mit 24 Punkten, welche mit zusammen 23 äusseren und 180 inneren Richtungen ebenso ausgeglichen sind, wie die früheren 114 Punkte (Formular S. 343 und S. 351). Wir haben also nun:

von 1891 bis 1893	114	Punkte	mit	437 + 497 =	934	Richtungen
„ 1894	24	„	„	23 + 180 =	203	„
Summe 1891 bis 1894	138	Punkte	mit	460 + 677 =	1137	Richtungen

Im Mittel hat 1 Punkt 8,2 Richtungen.

Wenn wir noch die 20 Punkte von Linden (links der Ihme S. 408) dazu zählen, so haben wir 158 Punkte mit rund 1300 Richtungen, welche teils vorwärts, teils rückwärts, zum Teil auch vorwärts *und* rückwärts eingeschnitten, und sämtlich nach den Formularen S. 343 und S. 351 ausgeglichen sind.

Als mittleren Richtungsfehler können wir nach S. 403 annehmen rund $m = \pm 5''$ und als Durchschnittswert der in den Ausgleichungen berechneten mittleren Coordinatenfehler war nach S. 404, für m_y und für m_x rund $= \pm 18^{mm}$. Dieser aus Durchschnittsberechnung erhaltene Wert ist auf S. 404 in den *mittleren* Fehler $\pm 22{,}5^{mm}$ näherungsweise umgesetzt worden, indessen zur Vergleichung mit den *nach*folgenden Angaben scheint sich jener Durchschnittswert $\pm 18^{mm}$ mehr zu eignen, oder der entsprechende mittlere Punktfehler $\sqrt{18^2 + 18^2} = \pm 25^{mm}$.

Aus den letzten Jahren haben wir in der „Zeitschr. f. Verm." mehrere ähnliche Mitteilungen, nämlich:

Berlin, „Zeitschr. f. Verm. 1891", S. 393—394, Mitteilung von v. Höegh, dazu auch Netz I. Ordnung, „Zeitschr. f. Verm. 1881", S. 12.

Strassburg, „Zeitschr. f. Verm. 1893", S. 131, Mitteilungen von Rodenbusch.

Leipzig, „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 108, Mitteilung von Händel.

Aus all diesen Angaben haben wir folgende Übersichtstabelle gebildet:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Stadt	Ordnung	Zahl der Punkte	mittlere Zahl der Strahlen für 1 Punkt	mittlere Länge eines Strahls	mittlerer Fehler einer Richtung	mittlerer Punkt-Fehler
Hannover 1891—1893	III	114	8	1,6km	± 5″	± 25mm
Berlin	II	40	22	3,4km	± 3,5″	± 24mm
	III	304	8	1,8	4,8	25
	IV	211	6	0,9	6,1	15
Strassburg	II	12	10	7,5km	± 1,0″	± 23mm
	III	57	8	2,6	2,5	20
	IV	250	—	0,7	6,3	16
Leipzig	II	37	5	4,4km	± 0,6″	± 11mm
	III	179	9	1,4	2,5	7
	IV	298	6	1,0	2,3	10
	V	243	6	0,9	4,2	9
Summe		1745	88	26,2	34,3	185
Mittel			9	2,4km	± 3″	± 17mm

Alle diese Unternehmungen, welche gegenseitig von einander nichts wussten, sind nahezu auf dieselben Schlussergebnisse herausgekommen, wozu auch die an den angegebenen Stellen nachgewiesenen Instrumenten- u. s. w. Verhältnisse zu berücksichtigen sind.

Was die Ausgleichungsformen betrifft, so sind wohl Berlin und Strassburg nach den Formularen der Preuss. Anweisung IX gemacht. Leipzig hatte Anwendung der Rechenmaschine mit entsprechenden Formularen. Hannover ist nach S. 343 und S. 351 mit Anwendung des Rechenschiebers behandelt.

§ 144. Rechenproben zu den Einschneide-Ausgleichungen.

Zu den Ausgleichungen für Vorwärts- und Rückwärts-Einschneiden, deren Formulare auf S. 343 und S. 351 gegeben sind, haben wir nachträglich noch eine kleine Hilfstafel zur Kontrollierung von $a^2 + b^2$ berechnet, welche im Anhang Seite [18] enthalten ist.

Wenn a und b die Richtungs-Coefficienten von § 89. sind, so haben wir für δ_x und δ_y in Decimetern, nach (18) S. 329:

$$a = -\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s}\sin\varphi \qquad b = +\frac{1}{10}\frac{\varrho}{s}\cos\varphi \tag{1}$$

also

$$a^2 + b^2 = \frac{\varrho^2}{100\,s^2} \tag{2}$$

Es wird also $a^2 + b^2$ unabhängig von dem Richtungswinkel φ, und bleibt nur eine Funktion der Strahlenlänge s, weshalb ein kleines Hilfstäfelchen, Seite [18] des

Anhangs, sich leicht anlegen lässt, dessen Gebrauch im Anschluss an das Zahlenbeispiel S. 343 sich so zeigt:

Berechnung nach S. 343.				Hilfstafel der S. [18] des Anhangs
s	a^2	b^2	a^2+b^2	a^2+b^2
4,91km	18	1	19	18
2,04	52	52	104	102
2,35	10	67	77	77
2,20	23	64	87	88

Die Proben stimmen genügend, obgleich die Coefficienten a und b auf S. 353 selbst nur sehr abgerundet richtig sind, denn die genauere Ausrechnung mit 4stelligen Logarithmen, wie in der letzten Spalte von S. 338 giebt für S. 343:

a	b	a^2	b^2	a^2+b^2
+4,13	−0,78	17,06	0,61	17,67
+7,16	+7,17	51,27	51,41	102,68
−3,09	+8,20	9,55	67,24	76,79
−4,81	−8,03	23,14	64,48	87,62

Innerhalb der erstrebten Genauigkeit ist die Rechnung von S. 343 genügend richtig.

Wenn man auch für Rückwärts-Einschneiden die Probe mit dem Hilfstäfelchen S. [18] des Anhangs machen will, so ist es nötig, die Elimination von z nicht durch Mittelbildung aus den Fehlergleichungen zu bewirken, wie S. 351 geschehen ist, sondern das andere Verfahren auf S. 352 anzuwenden, welches übrigens auch an sich schon vorzuziehen ist, namentlich wenn Hin- und Hermessung auf demselben Strahl in einer Ausgleichung vorkommt.

Einschneide-Ausgleichungen in neuer Teilung.

Wenn Richtungsmessungen in *neuer* Winkelteilung vorliegen, so werden die Coefficienten a , b und auch die Absolutglieder l ungefähr 3mal grösser als für alte Teilung, nämlich im Verhältnis $1 : 0{,}324 = 3{,}0864$, welches im Quadrat giebt $1 : 0{,}324^2 = 1 : 0{,}1050^2 = 9{,}526$, so dass die a^2 , ab u. s. w. fast 10mal grösser werden als bei alter Teilung.

Es entstehen daher verschiedene Fragen, betreffs der bequemsten Wahl von Recheneinheiten, an welche wir herantreten wollen durch Umwandlung des früheren Beispiels von S. 343 in neue Teilung, jedoch sofort mit der kleinen Änderung, dass von vornherein die Winkel auf 1^{cc} abgerundet werden, also $0{,}1^{cc}$ nicht mehr mit genommen werden soll. So erhalten wir von S. 343:

α	(φ)	$(\varphi)-\alpha=l$	l^2
288g 04c 17cc	288g 04c 16cc	− 1cc	1
350 04 71	350 04 66	− 5	25
22 90 43	22 90 33	− 10	100
165 63 34	165 63 40	+ 6	36
165	155	− 10	162

Dann mittelst der Hilfstafel S. [16]—[17] des Anhangs:

(φ)	ξ	η	s	a	b	ab	a^2	b^2	a^2+b^2
288,0	+ 62,5	− 11,9	4,91^{km}	+ 12,7	− 2,4	− 30	161	6	167
350,0	+ 45,0	+ 45,0	2,04	+ 22,0	+ 22,0	+ 484	484	484	968
22,9	− 22,4	+ 59,6	2,35	− 9,5	+ 25,3	− 240	90	640	730
165,6	− 32,7	− 54,6	2,20	− 14,8	− 24,8	+ 367	219	615	834
						+ 581	954	1745	2699

Die $a^2 + b^2$ können wir kontrollieren, indem wir die Angaben der Hilfstafel S. [18] des Anhangs, die für alte Teilung gilt, mit 9,526 multiplizieren, (besser wäre es, auch für neue Teilung eine solche Tafel wie S. [18] zu berechnen).

Indem wir dann auch noch die al und bl ausrechnen, (welche wir hier nicht einzeln hersetzen), erhalten wir die Elimination, entsprechend S. 343 (oder nach der allgemeinen Anweisung von S. 63):

a	b	l	b	a	l	
+ 954	+ 581	− 116	+ 1745	+ 581	− 509	
	+ 1745	− 509		+ 954	− 116	
	− 354	+ 71		− 193	+ 170	
		+ 162			+ 162	
		− 14			− 148	
$\delta y = + 0{,}31^{dm}$	+ 1391	− 438		+ 761	+ 54	$\delta x = - 0{,}07^{dm}$
$= + 0{,}031^{m}$		+ 148			+ 14	$= - 0{,}007^{m}$
		− 138			− 4	
	$[ll.2] = +$ 10			$[ll.2] = +$ 10		

$$m = \sqrt{\frac{10}{2}} = \pm 2{,}2^{cc}$$

Die so erhaltenen δy und δx sind innerhalb 1^{mm} übereinstimmend mit den früheren von S. 343 und auch alles übrige stimmt innerhalb der eingehaltenen Abrundungsgrenzen.

Indessen sind die Coefficienten im Vorstehenden immer noch unnötig gross; wir wollen sie noch dadurch verkleinern, dass wir bei den Winkeln statt 1^{cc} als Einheit nun 10^{cc} als Einheit annehmen; dadurch werden auch die a und b entsprechend kleiner, und die Elimination gestaltet sich so:

a	b	l	b	a	l	
+ 9,5	+ 5,8	− 1,16	+ 17,5	+ 5,8	− 5,09	
	+ 17,5	− 5,09		+ 9,5	− 1,16	
	− 3,5	+ 0,71		− 1,9	+ 1,69	
		+ 1,62			+ 1,62	
		− 0,14			− 1,48	
$\delta y = + 0{,}31^{dm}$	+ 14,0	− 4,38		+ 7,6	+ 0,53	$\delta x = - 0{,}07^{dm}$
		+ 1,48			+ 0,14	
		− 1,37			− 0,04	
	$[ll.2] = +$ 0,11			$[ll.2] = +$ 0,10		

$$m = \sqrt{\frac{0{,}11}{2}} = \pm 0{,}23 \text{ Einheiten von } 10^{cc} = \pm 2{,}3^{cc}.$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Solche Versuchs- und Vergleichs-Rechnungen sind zu machen, wenn man die bequemsten Einheiten für solche kleine Ausgleichungen bestimmen will. Zufällig ist übrigens vorstehendes Beispiel nicht günstig als Musterbeispiel, weil das Restglied $[ll.2]$ sehr klein wird.

Während bei Rechnungen in *alter* Teilung für III. bis IV. Ordnung, d. h. mit Strahlenlängen etwa $1-5^{km}$, aus unseren Rechenerfahrungen sich $1''$ und 1^{dm} als beste Masseinheiten ergeben haben (Formulare S. 343 und S. 351) stellt sich bei Rechnungen in *neuer* Teilung die Sache jedenfalls etwas anders; wir würden hier 10^{cc} und 1^{dm} für angemessen halten, können aber hier nicht aus langer Erfahrung reden. Die Württembergischen neuen „Vorschriften, betreffend die Erhaltung und Fortführung des Katasters", von 1895 enthalten Rechenformulare, welche in alter und neuer Teilung für 1^{dm}, bzw. $1''$ und 1^{cc} als Einheiten gelten (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1895", S. 284).

Wer mit dem Rechenschieber einige Übung hat, kommt mit den Rechenproben von S. 343 und S. 351 oder S. 352 aus; sollte das nicht genügen, so könnte man die a und b nach S. 338 einmal logarithmisch rechnen und dann nach dem Verfahren von S. 343 kontrollieren; die Probe mit a^2+b^2 nach der Hilfstafel S. [18] des Anhangs kann man immer nebenbei anwenden, ohne dafür eine besondere Spalte in den Formularen anzulegen.

Wie schon in § 105. S. 397—398 bemerkt wurde, können solche Kleinigkeitsfragen nur den berufsmässigen „Trigonometer" interessieren, welcher namentlich sein Augenmerk auf die Anordnung der verschiedenen Rechenproben richten muss, von denen z. B. die auf S. 398 mit Σ bezeichneten Proben nicht zweckmässig angeordnet sind. —

§ 145. Günstigste Winkelgleichungen im Viereck.

Die Theorie der günstigsten Seitengleichung im Viereck, welche in § 84.—85. behandelt worden ist, mit den Flächenmassen als Entscheidungsgrössen für die Günstigkeit (Fig. 6. S. 305), hat auch ein Analogon für die Auswahl der *Winkel*gleichungen im Viereck, womit wir uns auch noch beschäftigen wollen.

Schon in § 57. S. 165 haben wir gesehen, dass die 4 Dreiecksschlüsse, welche man zu einem Viereck mit zwei Diagonalen bilden kann, unter sich nicht unabhängig sind, und dass auch die Viereckssumme 360° als Bedingung eingeführt werden kann, etwa mit noch zwei Dreiecksschlüssen 180°, welche selbst wieder verschieden ausgewählt werden können. Bei solcher Willkür in mathematischen Fragen ist es nun sehr oft am besten, *keinen* der verschiedenen Wege, die sich gleichberechtigt zur Auswahl anbieten, zu betreten, sondern einen neuen, gegen die früheren Wege symmetrisch liegenden Weg einzuschlagen.

In diesem Sinne wollen wir *drei* Viereckgleichungen aufsuchen, nämlich erstens Winkelgleichung für das gewöhnliche Gesamtviereck mit 360° und dann noch zwei Gleichungen für zwei sogenannte „verschränkte" Vierecke mit der Winkelsumme 0°, d. h. für das Viereck Fig. 3. S. 169 wollen wir bilden:

Volles Viereck	$ABCDA$	(1)
Verschränktes „	$ACBDA$	(2)
Verschränktes „	$ABDCA$	(3)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Oder wenn man alles in Richtungsverbesserungen der 12 Richtungen von Fig. 3. S. 169 ausdrückt, hat man:

$$\text{I. } ABCDA \quad -v_1+v_3-v_4+v_6-v_7+v_9-v_{10}+v_{12}+w' = 0 \qquad (4)$$

$$\text{II. } ACBDA \quad -v_1+v_2+v_5-v_6+v_7-v_8-v_{11}+v_{12}+w'' = 0 \qquad (5)$$

$$\text{III. } ABDCA \quad -v_2+v_3-v_4+v_5+v_8-v_9+v_{10}-v_{11}+w''' = 0 \qquad (6)$$

Wir haben diese drei Gleichungen nach geometrischer Anschauung der Fig. 3. S. 169 angeschrieben, und da sie unabhängig sind, ist kein Zweifel, dass sie als die drei Winkelgleichungen, welche man haben muss, einer Ausgleichung zu Grunde gelegt werden können.

Wenn man die drei Gleichungen (4) (5) (6) nach den Nummern $v_1\, v_2\, v_3 \ldots v_{12}$ ordnet, namentlich wenn man dazu eine Tabelle schreibt ähnlich wie in (12) S. 182 für b, c, d, so wird man alsbald sehen, dass die zugehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{array}{llll} 8k_1 & .. & .. & +w' = 0 \\ .. & 8k_2 & .. & +w'' = 0 \\ .. & .. & 8k_3 & +w''' = 0 \end{array}\right\} \qquad (7)$$

Die nicht quadratischen Glieder in diesen Normalgleichungen werden gleich Null, und die Correlaten werden:

$$k_1 = -\frac{w'}{8} \qquad k_2 = -\frac{w''}{8} \qquad k_3 = -\frac{w'''}{8} \qquad (8)$$

auch kann man sofort die 12 Richtungsverbesserungen v angeben; indem man eine Tabelle von der Form. (15) S. 182 bildet:

$$\left.\begin{array}{|l|l|l|l|} \hline 8v_1 = -w' - w''' & 8v_4 = -w' - w'' & 8v_7 = -w' + w''' & 8v_{10} = -w' + w'' \\ 8v_2 = -w'' + w''' & 8v_5 = +w'' + w''' & 8v_8 = +w'' - w''' & 8v_{11} = -w'' - w''' \\ 8v_3 = +w' + w'' & 8v_6 = +w' - w''' & 8v_9 = +w' - w'' & 8v_{12} = +w' + w''' \\ \hline \text{Summe} = 0 & \text{Summe} = 0 & \text{Summe} = 0 & \text{Summe} = 0 \\ \hline \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Die Gleichungen (7), (8), (9) zeigen schon durch ihre Einfachheit und Symmetrie die Vorteile des neuen Verfahrens, indem z. B. bei den Normalgleichungen (7) das Geschäft des Eliminierens fortfällt, und in Hinsicht auf die Schärfe der Rechnung haben die Viereckssschlussglieder w', w'', w''' den Vorteil, dass sie im Allgemeinen grösser sind als die Dreiecksschlussglieder, und dass sie damit schärfere Rechnung geben.

Zur Gesamtausgleichung kommt noch die Seitengleichung hinzu, welche wir dann konsequenterweise auch möglichst scharf, d. h. nach der Form M in (29) S. 305 bilden werden; in den Normalgleichungen (7) treten dann noch 4 Glieder für k_4 hinzu, aber die in (7) durch .. angedeuteten Glieder bleiben gleich Null.

Zu einem Zahlenbeispiele wollen wir die Winkelwerte von § 57. S. 166—167 nehmen, dieselben aber in Form von Richtungen nach Fig. 3. S. 169 bringen.

Dabei ist ein Versehen auf S. 166—167 zu berichtigen, der Winkel (8) ist nämlich dort unten auf S. 166 das einemal (8) = 66° 40′ 24″ und das anderemal (8) = 66° 40′ 27″ angesetzt, was auch auf S. 167 sich fortsetzt. Halten wir (8) = 66° 40′ 24″ fest, so wird auf S. 166 rechts unten $w = -2''$ und auf S. 167 in (18) wird $log\ sin$ (8) = 9.9629627 und dann $w = -40$. Der Fehler konnte auf S. 166—167 unterlaufen, weil dort die Rechnung nicht weitergeführt ist, also auch keine Probe entstand, und für die Zwecke von S. 167—168 der Fehler weiter nichts schadet.

Zu dem Viereck Fig. 3. S. 169 wollen wir folgende 12 Richtungen als gemessen annehmen:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\left.\begin{array}{llll} D & 10. = & 0^\circ\ 0'\ 0'' & \\ & 11. = & 46\ 1\ 27 & (66^\circ\ 40'\ 24'') \\ & 12. = & 112\ 41\ 51 & \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{llll} C & 7. = & 0^\circ\ 0'\ 0'' & \\ & 8. = & 48\ 9\ 2 & (29^\circ\ 51'\ 26'') \\ & 9. = & 78\ 0\ 28 & \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{llll} A & 1. = & 0^\circ\ 0'\ 0'' & \\ & 2. = & 37\ 26\ 41 & (34^\circ\ 35'\ 25'') \\ & 3. = & 72\ 2\ 6 & \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{llll} B & 4. = & 0^\circ\ 0'\ 0'' & \\ & 5. = & 41\ 17\ 34 & (55^\circ\ 58'\ 2'') \\ & 6. = & 97\ 15\ 36 & \end{array}\right\} \quad (10)$$

Wenn man hieraus die 4 Dreiecke zusammenstellt, so bekommt man:

$$\left.\begin{array}{rcl} A = (1,3) & = & 72^\circ\ 2'\ 6'' \\ B = (4,5) & = & 41\ 17\ 34 \\ D = (11,12) & = & 66\ 40\ 24 \\ \hline & & 180\ 0\ 04 \\ & & w_1 = +4'' \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rcl} A = (2,3) & = & 34^\circ\ 35'\ 25'' \\ B = (4,6) & = & 97\ 15\ 36 \\ C = (7,8) & = & 48\ 9\ 2 \\ \hline & & 180\ 0\ 03 \\ & & w_3 = +3'' \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} B = (5,6) & = & 55^\circ\ 58'\ 2'' \\ C = (7,9) & = & 78\ 0\ 28 \\ D = (10,11) & = & 46\ 1\ 27 \\ \hline & & 179\ 59\ 57 \\ & & w_2 = -3'' \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{rcl} A = (1,2) & = & 37^\circ\ 26'\ 41'' \\ D = (10,12) & = & 112\ 41\ 51 \\ C = (8,9) & = & 29\ 51\ 26 \\ \hline & & 179\ 59\ 58 \\ & & w_4 = -2'' \end{array}\right\} \quad (11$$

Dieses sind dieselben 4 Dreiecksschlüsse für Richtungen, welche auf S. 166 für Winkel gegeben sind, (nachdem auf S. 166 rechts unten der bemerkte Fehler 27″ in 24″ bei (8) verbessert ist).

Zu den vorstehenden 4 Dreiecksschlüssen gehören folgende 4 Bedingungsgleichungen für Richtungen:

$$\left.\begin{array}{l|l} w_1 & -v_1 \ldots +v_3 - v_4 + v_5 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots - v_{11} + v_{12} + 4'' = 0 \\ w_2 & \ldots \ldots \ldots \ldots - v_5 + v_6 - v_7 \ldots + v_9 - v_{10} + v_{11} \ldots - 3'' = 0 \\ w_3 & \ldots - v_2 + v_3 - v_4 \ldots + v_6 - v_7 + v_8 \ldots \ldots \ldots \ldots + 3'' = 0 \\ w_4 & -v_1 + v_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots - v_8 + v_9 - v_{10} \ldots + v_{12} - 2'' = 0 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Hieraus kann man bilden:

$$+w_1 + w_2 \text{ oder } + w_3 + w_4 \mid -v_1 + v_3 - v_4 + v_6 - v_7 + v_9 - v_{10} + v_{12} + 1'' = 0 \quad (13)$$

$$+w_1 - w_3 \text{ „ } - w_2 + w_4 \mid -v_1 + v_2 + v_5 - v_6 + v_7 - v_8 - v_{11} + v_{12} + 1'' = 0 \quad (14)$$

$$+w_1 - w_4 \text{ „ } - w_2 + w_3 \mid -v_2 + v_3 - v_4 + v_5 + v_8 - v_9 + v_{10} - v_{11} + 6'' = 0 \quad (15)$$

Diese 3 Gleichungen stimmen wieder überein mit den ursprünglichen (4) (5) (6), womit gezeigt ist, dass jene kurz aus geometrischer Anschauung angeschriebenen (4) (5) (6) auch als einfache algebraische Folgen der vier gewöhnlichen Dreiecksschlüsse (12) hervorgehen.

Nun wollen wir auch die günstigste Seitengleichung bilden, in der Form M in (29) S. 305, ganz ähnlich wie wir auch schon auf S. 306 eine solche 8gliedrige Seitengleichung gebildet haben. Diese Gleichung für die in der Gruppe (10) gegebenen Winkel, gehörig zu dem Viereck S. 169, giebt nach logarithmischer Ausrechnung in Einheiten der 6. Logarithmenstelle:

$$\left.\begin{array}{l} +3{,}06\,(v_3 - v_2) + 1{,}42\,(v_6 - v_5) + 3{,}67\,(v_9 - v_8) + 0{,}90\,(v_{12} - v_{11}) \\ +2{,}75\,(v_1 - v_2) + 2{,}40\,(v_4 - v_5) + 1{,}89\,(v_7 - v_8) + 2{,}03\,(v_{10} - v_{11}) - 7{,}2 = 0 \end{array}\right\} \quad (16)$$

Wenn man diese Gleichung nach $v_1\ v_2 \ldots$ ordnet, so erhält man in der nachstehenden Tabelle die 4te Linie, während die 3 ersten Linien den Gleichungen (13), (14), (15) entsprechen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Tabelle der Bedingungsgleichungen (13), (14), (15), (16).

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	w
-1	$+1$	..	..	$+1$	-1	$+1$	-1	..	..	-1	$+1$	$+1''$
..	-1	$+1$	-1	$+1$	..	..	$+1$	-1	$+1$	-1	..	$+6''$
-1	..	$+1$	-1	..	$+1$	-1	..	$+1$	-1	..	$+1$	$+1''$
$+2{,}75$	$-5{,}81$	$+3{,}06$	$+2{,}40$	$-3{,}82$	$+1{,}42$	$+1{,}89$	$-5{,}56$	$+3{,}67$	$+2{,}03$	$-2{,}93$	$+0{,}90$	$-7{,}2$

(17)

Die dazu gehörigen Normalgleichungen werden:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{8k_1} \;..\;\; .. \;\; -0{,}0025\,(8k_4) + 1{,}00 = 0 \\ .. \;+\underline{8k_2} \;..\; -0{,}3150\,(8k_4) + 1{,}00 = 0 \\ +\underline{8k_3} - 0{,}2025\,(8k_4) + 6{,}00 = 0 \\ +\underline{16{,}8152}\,(8k_4) - 7{,}20 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$8k_1 = -0{,}99916$ $\quad 8k_2 = -0{,}89294$ $\quad 8k_3 = -5{,}93117$ $\quad 8k_4 = +0{,}33988$

$k_1 = -0{,}125$ $\quad k_2 = -0{,}112$ $\quad k_3 = -0{,}741$ $\quad k_4 = +0{,}04248$

Weiter wollen wir dieses Zahlenbeispiel nicht führen, die Weiterrechnung ist die gewöhnliche, sie giebt mit einer Tabelle in der Anordnung wie (17) (vgl. z. B. S. 181 unten, und S. 194, II) die folgenden 12 Richtungsverbesserungen v (in der Ordnung wie oben bei (17):

$+0{,}35'' + 0{,}38'' - 0{,}74'' \mid +0{,}97'' - 1{,}01'' + 0{,}05'' \mid +0{,}09'' - 0{,}87'' + 0{,}77'' \mid -0{,}53'' + 0{,}73'' - 0{,}20''$

Wenn man diese v zu den 12 Richtungen hinzufügt, welche oben unter (10) gegeben waren, und die Summenproben u. s. w. bildet, so wird man alles stimmend finden.

Es kam uns hier nur darauf an, mit der Tabelle (17) und den Normalgleichungen (18) zu zeigen, dass die Bedingungsgleichungen (17) voller werden als bei der gewöhnlichen Behandlung (12) S. 182, dass aber dafür die Normalgleichungen (18) bequemer werden als (13) S. 182, indem bei der neuen Behandlung mehrere Glieder fortfallen; und die neue Behandlung hat den Vorzug der unbedingt grösseren Schärfe.

Den Vorteil der Rechenschärfe kann man allerdings bei einem solchen kleinen Beispiel von *einem* Viereck nicht zum Ausdruck bringen, wenn aber ein solches Viereck Bestandteil einer grösseren Netzausgleichung mit 30—40 Bedingungsgleichungen ist, dann ist es sehr wichtig, die Bedingungen von vorn herein so scharf als möglich einzuführen, um der lawinenartigen Fehlerhäufung der langen Elimination entgegen zu wirken. Die Tabelle (17) hat auch schon den formellen Vorteil, dass die Gruppierung ihrer Glieder leicht erkennbare Proben geben (z. B. $2{,}75 + 3{,}06 = 5{,}81$ u. s. w.), was bei der gewöhnlichen Behandlung S. 182 nicht der Fall ist.

§ 146. Theorie des Maximalfehlers.

Die Formeln von § 120. und § 121. (S. 462 unten und S. 467), welche dort empirisch-induktorisch gefunden wurden, sind auch einer allgemeineren Behandlung fähig.

Dazu kommt, dass in den Formeln (14) und (17) S. 462 eine Verwechslung von n und $n+1$ stattgefunden hat, was noch ein zweiter Grund ist, nochmals auf die Sache zurückzukommen:

Wir betrachten eine Fehlerfunktion $y = \varphi(\varepsilon)$, welche auf verschiedene Fälle $n = 1, 2 \ldots n$ angewendet, diese Form hat:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$y_n = \varphi(\varepsilon)_n = \frac{1}{2}\frac{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.4.6\ldots\quad 2n\quad (2n+2)}\frac{1}{M}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)^{n+1} \tag{1}$$

Diese Funktion stellt geometrisch eine Kurve vor, ungefähr von der Form Fig. 3. S. 461 oder Fig. 4. S. 462, und zwar mit Berührung n^{ter} Ordnung; z. B. mit $n = 1$ geht vorstehende Gleichung über in (8) S. 460, und mit $n = 2$ geht (1) über in (11) S. 462, wie sich unmittelbar einsehen lässt, und deswegen ist auch zunächst für $n = 1$ und $n = 2$:

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1 \tag{2}$$

Allgemeiner betrachtet giebt die Funktion (1) auch schon durch ihre Form zu erkennen, dass für $\varepsilon = \pm M$ sowohl die Funktion selbst als auch ihre n ersten Ableitungen sämtlich = Null werden, und auch das Integral der Funktion (1) giebt die Gleichung (2) allgemein erfüllt, für jeden Wert n.

Um dieses zu zeigen, bilden wir durch teilweises Integrieren folgende Rekursionsformeln:

$$\int(1-x^2)^n\, dx = x(1-x^2)^n + 2n\int x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx \tag{3}$$

$$\int x^2(1-x^2)^{n-1}\, dx = \frac{x^3}{3}(1-x^2)^{n-1} + \frac{2}{3}(n-1)\int x^4(1-x^2)^{n-2}\, dx \tag{4}$$

$$\int x^4(1-x^2)^{n-2}\, dx = \frac{x^5}{5}(1-x^2)^{n-2} + \frac{2}{5}(n-2)\int x^6(1-x^2)^{n-4}\, dx \tag{5}$$

. . . . . .

$$\int x^{2n}(1-x^2)^0\, dx = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \tag{6}$$

Wenn man die Grenzen $x = 0$ und $x = 1$ nimmt, so fallen alle Glieder $x(1-x^2)^n$ u. s. w. fort, und man bekommt:

$$\int_0^1(1-x^2)^n\, dx = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots\quad 2}{1\ .\ 3\ .\ 5\quad \ldots(2n-1)}\frac{1}{(2n+1)} \tag{7}$$

Wenn man im Zähler umgekehrt ordnet und zugleich die Gleichung auf $n+1$ anwendet, so bekommt man:

$$\int_0^1(1-x^2)^{n+1}\, dx = \frac{2.4.6\ldots\quad 2n\quad (2n+2)}{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)} \tag{8}$$

Zur Anwendung auf die Form (1) wollen wir noch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon}{M} = x, \text{ also } d\varepsilon = M\, dx \\ &\text{und für die Grenzen, } \varepsilon = M \text{ entspricht } x = 1 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Also nach (1):

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)_n\, d\varepsilon = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.4.6\ldots\quad 2n\quad (2n+2)}\int_0^1(1-x^2)^{n+1}\, dx$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn man dieses mit (8) vergleicht, so sieht man sofort:

$$2\int_0^M \varphi(\varepsilon)_n \, d\varepsilon = 1 \tag{10}$$

Die Funktion (1) erfüllt also allgemein alle die Bedingungen, von welchen wir in den besonderen Fällen von § 120. ausgegangen sind.

Weiter müssen wir nun auch für diese Funktion das mittlere Fehlerquadrat und das mittlere Fehlerbiquadrat bestimmen, nämlich ganz analog dem früheren in § 116. S. 445 oder § 120. S. 459—462, wenn nun p die Anzahl aller ε ist:

$$m_n^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{p} = 2\int_0^M \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)_n \, d\varepsilon \tag{11}$$

$$r_n^4 = \frac{[\varepsilon^4]}{p} = 2\int_0^M \varepsilon^4 \varphi(\varepsilon)_n \, d\varepsilon \tag{12}$$

oder mit (1) und (9)

$$m_n^2 = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.4.6\ldots\quad 2n\quad (2n+2)} M_n^2 \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} \, dx \tag{13}$$

$$r_n^4 = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)}{2.4.6\ldots\quad 2n\quad (2n+2)} M_n^4 \int_0^1 x^4 (1-x^2)^{n+1} \, dx \tag{14}$$

folglich auch:

$$r_{n-1}^4 = \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots\quad 2n} (M_{n-1})^4 \int_0^1 x^4 (1-x^2)^n \, dx \tag{15}$$

Durch teilweises Integrieren findet man:

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} \, dx = \frac{2}{3}(n+1) \int_0^1 x^4 (1-x^2)^n \, dx$$

also mit Anwendung auf (13) und (15):

$$\frac{m_n^2}{M_n^2} = \frac{r_{n-1}^4}{M_{n-1}^4} \frac{2n+3}{2n+2} \frac{2(n+1)}{3}$$

oder

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n = \left(\frac{r^4}{M^4}\right)_{n-1} \frac{2n+3}{3} \tag{16}$$

Aus den Rekursions-Integralen (4)—(6) bilden wir auch:

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n-1} \, dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{3.5.7\ldots(2n+1)}$$

also auch

$$\int_0^1 x^2 (1-x^2)^{n+1} \, dx = \frac{2.4.6\ldots(2n-2)\quad 2n\quad (2n+2)}{3.5.7\ldots(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \tag{17}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

folglich wegen (13):

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n = \frac{1}{2n+5} \tag{18}$$

Die zwei Gleichungen (16) und (18) enthalten nun schon das Wesentliche unserer Theorie, sie beziehen sich aber noch auf ungleiche Grade n und $n-1$ und deswegen müssen wir aus (18) zuerst bilden:

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1} = \frac{1}{2(n-1)+5} = \frac{1}{2n+3} \tag{19}$$

also nun aus (16), (18), (19):

$$\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n = \left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1} \frac{2n+3}{2n+5}$$

$$\left(\frac{r^4}{M^4}\right)_{n-1} = \frac{3}{2n+5}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1} = \frac{3}{2(n-1)+7}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_{n-1}$$

und nach demselben Gesetze:

$$\left(\frac{r^4}{M^4}\right)_n = \frac{3}{2n+7}\left(\frac{m^2}{M^2}\right)_n \tag{20}$$

und dann noch aus (18) und (20):

$$\left(\frac{r^4}{M^4}\right)_n = \frac{3}{(2n+5)(2n+7)} \tag{21}$$

Indem wir nun annehmen es handle sich stets um Werte M^2, m^2, r^4, welche zu *derselben* Gradzahl n gehören, brauchen wir die Indices n u. s. w. nicht mehr zu schreiben und haben daher aus (18) und (21):

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2n+5} \tag{22}$$

$$\frac{r^4}{M^4} = \frac{3}{(2n+5)(2n+7)} \tag{23}$$

$$\frac{r^4}{3m^4} = \frac{2n+5}{2n+7} \tag{24}$$

Aus (22) und (24) findet man auch:

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3m^4}{r^4} - 1\right) \text{ oder } = \frac{1}{2}\frac{3m^4 - r^4}{r^4} \tag{25}$$

Dieses sind dieselben Formeln, welche wir schon in (15) und (16) S. 462 und (12) S. 467 lediglich aus dem gesetzmässigen Verlaufe der Coefficienten in den Entwicklungen S. 459—462 hergeleitet hatten.

Man kann auch die Gradzahl n, oder $2n$ aus (22) nnd (24) bestimmen:

$$2n = \frac{M^2}{m^2} - 5 \tag{26}$$

$$2n = \frac{-15m^4 + 7r^4}{3m^4 - r^4} \tag{27}$$

Wenn $3m^4 = r^4$ ist, so wird $n = \infty$ und auch $M = \infty$, was daran erinnert, dass nach (15) S. 447 das Verhältnis $r^4 : m^4 = 3$ der asymptotischen Funktion von § 111. entspricht, nämlich nach (13) S. 430:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$y = \varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2} \tag{28}$$

oder nach der Exponentialreihe S. 434:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{h^2 \varepsilon^2}{1} + \frac{h^4 \varepsilon^4}{2} - \frac{h^6 \varepsilon^6}{6} + \dots\right) \tag{29}$$

Wir wollen noch zeigen, wie schon auf S. 462 unten bis 463 angedeutet ist, dass unsere Funktion (1) S. 566 für $n = \infty$ in diese Reihe (29) übergeht. Wenn man M aus (22) in m ausdrückt, so giebt (1):

$$y_n = \frac{1}{2} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \quad 2n \quad (2n+2)} \frac{1}{m\sqrt{2n+5}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{(2n+5)m^2}\right)^{n+1} \tag{30}$$

Dazu wegen (17) S. 432, $h^2 = \frac{1}{2m^2}$ giebt:

$$y_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \quad 2n \quad (2n+2)} \frac{h}{\sqrt{4n+10}} \left(1 - \frac{2h^2}{2n+5} \varepsilon^2\right)^{n+1} \tag{31}$$

Die Exponentialfunktion von (31) giebt:

$$1 - \frac{n+1}{2n+5} 2h^2 \varepsilon^2 + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \frac{4}{(2n+5)^2} h^4 \varepsilon^4 - \dots$$

für $n = \infty$ geht dieses in die Klammer von (29) über, und dass auch der Faktor vor der Klammer in (30) mit $\frac{h}{\sqrt{\pi}}$ in (29) übereinstimmend wird, haben wir auch schon auf S. 463 oben durch Citat des Wallis schen Ausdrucks für π gezeigt.

§ 147. Ausrechnung des Maximalfehlers.

Wie man aus einer Reihe wahrer Beobachtungsfehler ε den zugehörigen theoretischen Maximalfehler berechnen kann, haben wir bereits in § 121. an einem kleinen Beispiele (13)—(14) S. 467 gezeigt, und wir wollen noch den innern Sinn einer solchen Rechnung dahin zusammenfassen, dass wir von den unendlich vielen Fehlerfunktionen, welche in der Form (1) § 146. S. 566 enthalten sind, diejenige auswählen, welche einer Fehlerreihe ε_1 , ε_2 , $\varepsilon_3 \dots$ sich am besten anschmiegt, nach Massgabe der zwei Mittelwerte m^2 und r^4; und den zugehörigen Wert M betrachten wir als den theoretischen Maximalfehler jener Fehlergruppe ε_1 , ε_2 , $\varepsilon_3 \dots$, der aber nicht notwendig mit demjenigen Wert ε_m zusammenfallen muss, welcher unter allen ε der grösste ist, ebenso wenig, als der theoretische wahrscheinliche Fehler, den man aus (9) §. 113. S. 440 berechnet, mit dem durch Abzählen (nach S. 440 unten) erhaltenen Wert zusammenfallen muss.

Alles dieses bezieht sich aber auf *wahre* Fehler ε, welche im Allgemeinen nicht bekannt und durch die scheinbaren Fehler v der Ausgleichungen zu ersetzen sind, was wir hier nur wenigstens für *eine* Unbekannte, d. h. für das arithmetische Mittel, durchführen wollen. Es wird sich um eine Formel für das mittlere Fehlerbiquadrat r^4 handeln, welche der längst bekannten Formel für das mittlere Fehlerquadrat m^2 nach (10) S. 21 mit dem Nenner $n-1$ entspricht.

Dabei wollen wir wieder wie früher S. 21 mit n die Anzahl der Beobachtungen bezeichnen, was keine Verwechslung geben wird mit dem Zeichen n, welches im vorigen § 146. die *Grad*zahl der Kurvenberührung bedeutet hat.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wenn eine Anzahl n von gleichartigen Beobachtungen l vorliegt mit dem wahren Wert X der Unbekannten und dem arithmetischen Mittel x, so sind die wahren Fehler ε und die scheinbaren Fehler v, nach (7) § 7. S. 21 ausgedrückt durch:

$$\varepsilon = X - l \qquad v = x - l \qquad \varepsilon = v + (X - x) \tag{1}$$

also auch

$$v = \varepsilon - (X - x) \tag{2}$$

und die Summe

$$[v] = [\varepsilon] - n\,(X - x) \tag{3}$$

Da aber beim arithmetischen Mittel $[v] = 0$ ist (nach (3) S. 20), so hat man aus vorstehendem (3):

$$0 = [\varepsilon] - n\,(X - x) \quad \text{oder} \quad X - x = \frac{[\varepsilon]}{n}$$

oder wegen (2):

$$v = \varepsilon - \frac{[\varepsilon]}{n} \tag{5}$$

$$v^2 = \varepsilon^2 - 2\,\varepsilon\,\frac{[\varepsilon]}{n} + \frac{[\varepsilon]^2}{n^2} \tag{6}$$

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - 2\,\frac{[\varepsilon]\,[\varepsilon]}{n} + \frac{n\,[\varepsilon]^2}{n^2}$$

$$[v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} \tag{7}$$

Nebenbei bemerken wir, dass diese Gleichung (7) auch schon in (12) S. 86 enthalten ist, wenn man dort alle $a = 1$ und alle $b = 0$, $c = 0 \ldots$ setzt, (wie auch schon bei (3) § 118. S. 451 benützt worden ist).

Nach dieser Zwischenbemerkung zu unserer eigentlichen Aufgabe zurückkehrend, bilden wir durch Quadrieren von (6) ein einzelnes v^4:

$$v^4 = \varepsilon^4 - 4\,\varepsilon^3\,\frac{[\varepsilon]}{n} + 2\,\frac{\varepsilon^2\,[\varepsilon]^2}{n} + 4\,\varepsilon^2\,\frac{[\varepsilon]^2}{n^2} - 4\,\frac{\varepsilon\,[\varepsilon]^3}{n^3} + \frac{[\varepsilon]^4}{n^4}$$

und die Summe aller v^4:

$$\left.\begin{aligned}[v^4] = [\varepsilon^4] - 4\,[\varepsilon^3]\,\frac{[\varepsilon]}{n} + \frac{2\,[\varepsilon^2]\,[\varepsilon]^2}{n^2} \\ + 4\,[\varepsilon^2]\,\frac{[\varepsilon]^2}{n^2} - \frac{4\,[\varepsilon]\,[\varepsilon]^3}{n^3} \\ + \frac{n\,[\varepsilon]^4}{n^4}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hier sind von allen Gliedern die Mittelwerte zu bestimmen, und zuerst brauchen wir den Mittelwert von $[\varepsilon^3]\,[\varepsilon]$, welcher sich also giebt:

$$[\varepsilon^3]\,[\varepsilon] = (\varepsilon_1{}^3 + \varepsilon_2{}^3 + \varepsilon_3{}^3 + \ldots)\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots)$$
$$= \varepsilon_1{}^4 + \varepsilon_2{}^4 + \varepsilon_3{}^4 + \ldots + \varepsilon_1{}^3\,\varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_1\,\varepsilon_2{}^3 + \ldots$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die Mittelwerte der ungeraden Potenzen werden Null, und deshalb darf man schreiben $[\varepsilon^3][\varepsilon] = [\varepsilon^4]$, und damit wird (8):

$$[v^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4[\varepsilon^4]}{n} + \frac{6[\varepsilon^2][\varepsilon]^2}{n^2} - \frac{3[\varepsilon]^4}{n^3} \tag{9}$$

Die noch fehlenden Mittelwerte der beiden letzten Glieder haben wir schon früher in (10) und (11) § 118. S. 452 bestimmt, nämlich:

$$[\varepsilon^2][\varepsilon]^2 = (n^2 + 2n)\, m^4 \text{ und } [\varepsilon^4] = 3\, n^2\, m^4$$

und damit wird (9):

$$[v^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4[\varepsilon^4]}{n} + \frac{6}{n^2}(n^2 + 2n)\, m^4 - \frac{9}{n}\, m^4 \tag{10}$$

Um m^4 auf r^4 zu reduzieren, müssen wir nach (15) § 117. S. 447 annehmen $3\, m^4 = r^4$, was allerdings die Geltung des asymptotischen Fehlergesetzes von § 111. voraussetzt, welches wir gerade für die vorliegende Ausrechnung von r^4 *nicht* gelten lassen wollen; indessen als Näherung für eine Verbesserung zweiter Ordnung ist jenes $r^4 = 3\, m^4$ hier doch nicht zu entbehren, und damit giebt (10):

$$[v^4] = [\varepsilon^4] - \frac{4[\varepsilon^4]}{n} + 2\, r^4 \left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{3\, r^4}{n}$$

der strenge Wert von r^4 ist $= \frac{[\varepsilon^4]}{n}$ und damit giebt vorstehende Gleichung nach r^4 aufgelöst:

$$r^4 = [v^4]\frac{n}{(n-1)^2} \quad \text{oder} \quad r^4 = \frac{[v^4]}{n-1}\frac{n}{n-1} \tag{11}$$

Dieses ist eine Formel von demselben Charakter wie die früheren (10) §. 7. S. 21 und (9) § 115. S. 444.

Zu einer Anwendung wollen wir die 18 Bessel schen Winkelmessungen nehmen, welche wir schon früher in § 7. S. 23 benützt haben. Wenn man dort ausser den v^2 auch die v^4 ausrechnet, so bekommt man:

$$\begin{aligned} n = 18 \qquad & [v^2] = 46{,}97 && [v^4] = 549{,}93 \\ & m^2 = \frac{46{,}97}{17} = 2{,}763 && r^4 = \frac{549{,}93}{17}\frac{18}{17} = 34{,}25 \\ & m = 1{,}662\ ,\ m^4 = 7{,}634 && 3\, m^4 = 22{,}90 \end{aligned} \tag{12}$$

Hier wird $3\, m^4 - r^4 = -11{,}35$, d. h. *negativ*, und das Verhältnis $m : M$ in (25) § 146. S. 568 würde *imaginär*.

Dieses führt auf eine neue Anwendung unserer Theorie. Wenn nämlich $3\, m^4 - r^4$ negativ, also nach unseren Formeln M unmöglich wird, so deutet das darauf hin, dass in der Reihe der v ein *grober Fehler* enthalten ist, und in der That zeigt der Anblick der Tabelle von S. 23, dass die 6te Beobachtung $0{,}25''$ mit $v = +4{,}62$ und $v^2 = 21{,}34$ von allen anderen absticht, und noch viel mehr ist das zugehörige $v_6^4 = 455{,}40$ abnorm, nämlich fast 10mal so gross als das nächst kleinere $v_2^4 = 47{,}89$. Jenes v_6^4 beherrscht die ganze Reihe der v^4, alle anderen v^4 geben zusammen nur etwa $\frac{1}{4}$ jenes einzelnen v_6^4 und kommen dagegen fast gar nicht in Betracht.

Wir wollen deshalb einen Versuch machen mit Ausscheidung der 6ten Beobachtung und erhalten dann statt S. 23 das Folgende:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Num.	l	v	v^2	v^4	
1	6,25″	— 1,11″	1,232	1,518	$m^2 = \frac{24{,}430}{16} = 1{,}527$
2	7,50	— 2,36	5,570	31,025	
3	6,00	— 0,86	0,740	0,548	$m =$ 1,236
4	4,77	+ 0,37	0,137	0,019	$m^4 =$ 2,331
5	3,75	+ 1,39	1,932	3,733	$3\,m^4 =$ 6,993
6	3,70	+ 1,44	2,074	4,302	
7	6,14	— 1,00	1,000	1,000	
8	4,04	+ 1,10	1,210	1,464	
9	6,96	— 1,82	3,312	10,969	$r^4 = \frac{74{,}145}{16}\,\frac{17}{16} = 4{,}924$
10	3,16	+ 1,98	3,920	15,366	
11	4,57	+ 0,57	0,325	0,106	
12	4,75	+ 0,39	0,152	0,023	$3\,m^4 - r^4 = 2{,}069$
13	6,50	— 1,36	1,850	3,422	
14	5,00	+ 0,14	0,020	0,000	$\frac{3\,m^4 - r^4}{2\,r^4} = 0{,}2101$
15	4,75	+ 0,39	0,152	0,023	
16	4,25	+ 0,89	0,792	0,627	
17	5,25	— 0,11	0,012	0,000	
	87,34	+ 8,66 — 8,62	24,430	74,145	
	$x = 5{,}14$	+ 0,04			

Nach der Formel (25) § 146. S. 568 haben wir also:

$$\frac{m^2}{M^2} = 0{,}2101 \qquad \frac{m}{M} = 0{,}458 \qquad \frac{M}{m} = 2{,}182 \tag{13}$$

Da $m = 1{,}236$ bekannt ist, hat man auch $M = 2{,}182\,m = 2{,}70$, d. h. der theoretische Maximalfehler ist 2,70″, was mit dem grössten v, nämlich $v_2 = -2{,}36''$ immerhin genügend stimmt.

Da wir unsere Theorie in diesem Falle dazu benützt haben, eine Beobachtung auszuscheiden, wollen wir auch noch zusehen, was das für einen Einfluss ausgeübt hat auf das Dreieck Fig. 3. § 130. S. 500. in welchem der fragliche Winkel Trenk von S. 23 vorkommt. Durch die Ausscheidung der 6ten Beobachtung von S. 23 ist das Mittel von 83° 30′ 34,87″ auf 83° 30′ 35,14″ gewachsen, also um 0,27″ grösser geworden, und das Dreieck (Fig. 3. S. 500) wird dadurch in seinem Schlussfehler um ebensoviel 0,27″ schlechter. Dieses ist als Zufall zu betrachten. —

Wir wollen hiezu auch noch das Ergebnis einer weitläufigen Rechnung mit Differenzen vorführen, welche wir früher 1869 als Studien-Arbeit gemacht haben, wie am Schluss von § 11. S. 39—40 angegeben ist.

Wenn nämlich n gleichartige Beobachtungen vorliegen, so kann man daraus $n\frac{n-1}{2}$ Differenzen d bilden, welche den Charakter von wahren Fehlern haben. Diese Differenzen haben wir für die auf S. 23 stehenden 18 Besselschen Winkelmessungen in der Zahl von 153 wirklich ausgerechnet, und dieselben quadriert und biquadriert, woraus sich folgendes ergab:

$$[d^2] = 845{,}83 \qquad [d^4] = 16506$$

$$m'^2 = \frac{845{,}83}{153} = 5{,}528 \qquad r'^4 = \frac{16506}{153} = 107{,}88$$

$$m' = 2{,}351 \qquad 3\,m'^4 = 91{,}68$$

$$m'^4 = 30{,}56 \qquad 3\,m'^4 - r'^4 = -\ 16{,}20 \tag{14}$$

Die Differenz $3\,m'^4 - v'^4$ wird hier abermals negativ, d. h. wir haben ein zweites sehr deutliches Anzeichen für das Vorhandensein eines groben Fehlers. (Der hier entstehende Wert $m' = 2{,}351$ giebt $m = m' : \sqrt{2} = 1{,}663$, was mit $m = 1{,}66$ auf S. 23 oder mit $m = 1{,}662$ in (12) S. 571 stimmen muss.)

Indem wir hier die Theorie der Ausscheidung verdächtiger Beobachtungen mitbehandelt haben, wollen wir das Ergebnis zusammenfassen:

Wenn in einer Fehlerreihe stark abweichende Elemente mit dem Verdacht grober Fehler vorkommen, so rechne man aus allen zusammen die Mittelwerte m^2 und v^4 und dann $3\,m^4 - v^4$. Wird diese Differenz *negativ*, so hat man ein mathematisches Anzeichen für das Vorhandensein grober Fehler.

Zu einem zweiten Zahlenbeispiele wollen wir noch die Benzenberg'schen Fall-Versuche nehmen, welche in der bekannten Abhandlung von Encke „über die Methode der kleinsten Quadrate" in dem Berliner astronomischen Jahrbuche für 1834, S. 285 bis 287 mitgeteilt und als Zahlenbeispiel benützt sind. Es sind 29 Versuche, deren Abweichungen v vom arithmetischen Mittel, nach ihrer absoluten Grösse geordnet folgende Werte (in Pariser Linien) haben:

$$\left.\begin{array}{cccccccccc} -0{,}414 & -0{,}914 & -1{,}914 & -1{,}914 & +2{,}086 & -2{,}414 & -2{,}914 & +3{,}086 & +3{,}086 & -3{,}414 \\ -3{,}914 & -4{,}914 & -4{,}914 & -5{,}914 & -5{,}914 & -6{,}414 & -6{,}914 & -6{,}914 & +7{,}086 & +7{,}086 \\ -7{,}914 & +8{,}086 & -8{,}414 & +9{,}086 & +9{,}086 & +13{,}086 & +14{,}086 & -14{,}914 & +15{,}086 & \end{array}\right\} \quad (15)$$

Diese 29 Werte v geben:

$$[v^2] = 1612 \qquad [v^4] = 212526$$

$$m^2 = \frac{1612}{28} = 57{,}57 \qquad v^4 = \frac{212526}{28}\,\frac{29}{28}$$

$$m = 7{,}588 \qquad v^4 = 7861 \qquad (16)$$

$$m^4 = 3314{,}5$$

$$3\,m^4 = 9943{,}5 \qquad 3\,m^4 - v^4 = 2083$$

$$\frac{m^2}{M^2} = \frac{3\,m^4 - v^4}{2\,v^4} = 0{,}1325 \quad , \quad \frac{M^2}{m^2} = 7{,}548$$

$$\frac{m}{M} = 0{,}364 \quad , \quad \frac{M}{m} = 2{,}747 \qquad M = 2{,}747\,m = 20{,}84 \qquad (17)$$

Der theoretische Maximalfehler ist rund $= 21$, während das grösste v nur 15 beträgt, was immerhin noch genügend stimmt, da Benzenbergs Fallversuchs-Angaben vom Jahre 1804 wohl kaum reine Originalmessungen sind.

Auch für diese 29 Benzenberg'schen Fallversuche können wir noch die Rechnung mit den $\frac{29 \cdot 28}{2} = 406$ Differenzen d vorführen, es ist nämlich:

$$[d^2] = 46749 \qquad [d^4] = 13934400$$

$$m'^2 = \frac{46749}{406} = 115{,}14 \qquad v'^4 = \frac{13934400}{406} = 34321$$

$$m' = 10{,}730$$

$$m'^4 = 13257 \qquad 3\,m'^4 = 39771$$

$$3\,m'^4 - v'^4 = 5450$$

$$\frac{m'^2}{M'^2} = \frac{1}{2}\,\frac{5450}{34321} = 0{,}0794 \quad , \quad \frac{M'}{m'} = 3{,}55 \qquad (18)$$

$$M' = 3{,}55\,m' = 38$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Der wirkliche grösste Wert aller Differenzen d ist die Differenz der beiden letzten oben bei (15) aufgeführten scheinbaren v, nämlich $+ 15{,}086 - (- 14{,}914) = 30$, was mit dem theoretischen $M = 38$ wieder hinreichend stimmt. Der Wert $m' = 10{,}730$ giebt mit $\sqrt{2}$ dividiert wieder den Wert $m = 7{,}588''$ von (16), wie es als Rechenprobe sein muss.

Wenn eine grosse Zahl von Messungen der Praxis (Hunderte und Tausende) nach der vorstehenden Theorie der m^2 und r^4 behandelt würden, so könnte man daraus auch Mittelwerte $M : m$ für gewisse Beobachtungsklassen (Höhere Geodäsie, einfaches Feldmessen, Aichwesen u. s. w.) bilden, und bei Festsetzung amtlicher Fehlergrenzen benützen.

Unsere wenigen Versuche dieser Art deuten darauf hin, dass das Verhältnis $M : m$ sogar für gute Messungen kaum den Wert 3 erreicht (Berührung 2ter Ordnung S. 462) und meist zwischen 2 und 3 sich bewegen wird, (Berührung 1ter Ordnung S. 461), wie wir schon in der „Zeitschr. f. Verm. 1877“, S. 40 angenommen hatten aus Veranlassung einer ersten geometrischen Betrachtung, deren Weiterentwicklung die im Vorstehenden vorgetragene Theorie des Verhältnisses $3\,m^4 : r^4$ ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anhang.

Seite

Quadrat-Zahlen . . . . . [2]— [6]

Reciprok-Zahlen der Quadrate . . . . . [7]

Richtungs-Coefficienten für *alte* Teilung mit Intervall 1° . . . . . [8]— [9]

„ „ „ „ „ „ „ 10′ . . . . . [10]—[15]

„ „ „ *neue* „ „ „ 1 g . . . . . [16]—[17]

Hülfstafel für Richtungs-Coefficienten $(a^2 + b^2)$ . . . . . [18]

„ „ „ „ A, B . . . . . [19]

Fehlerwahrscheinlichkeit . . . . . [20]—[21]

I. Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
0,00	0,0000	1	0,50	0,2500	101	1,00	1,0000	201	1,50	2,2500	301
0,01	0,0001	3	0,51	0,2601	103	1,01	1,0201	203	1,51	2,2801	303
0,02	0,0004	5	0,52	0,2704	105	1,02	1,0404	205	1,52	2,3104	305
0,03	0,0009	7	0,53	0,2809	107	1,03	1,0609	207	1,53	2,3409	307
0,04	0,0016	9	0,54	0,2916	109	1,04	1,0816	209	1,54	2,3716	309
0,05	0,0025	11	0,55	0,3025	111	1,05	1,1025	211	1,55	2,4025	311
0,06	0,0036	13	0,56	0,3136	113	1,06	1,1236	213	1,56	2,4336	313
0,07	0,0049	15	0,57	0,3249	115	1,07	1,1449	215	1,57	2,4649	315
0,08	0,0064	17	0,58	0,3364	117	1,08	1,1664	217	1,58	2,4964	317
0,09	0,0081	19	0,59	0,3481	119	1,09	1,1881	219	1,59	2,5281	319
0,10	0,0100	21	0,60	0,3600	121	1,10	1,2100	221	1,60	2,5600	321
0,11	0,0121	23	0,61	0,3721	123	1,11	1,2321	223	1,61	2,5921	323
0,12	0,0144	25	0,62	0,3844	125	1,12	1,2544	225	1,62	2,6244	325
0,13	0,0169	27	0,63	0,3969	127	1,13	1,2769	227	1,63	2,6569	327
0,14	0,0196	29	0,64	0,4096	129	1,14	1,2996	229	1,64	2,6896	329
0,15	0,0225	31	0,65	0,4225	131	1,15	1,3225	231	1,65	2,7225	331
0,16	0,0256	33	0,66	0,4356	133	1,16	1,3456	233	1,66	2,7556	333
0,17	0,0289	35	0,67	0,4489	135	1,17	1,3689	235	1,67	2,7889	335
0,18	0,0324	37	0,68	0,4624	137	1,18	1,3924	237	1,68	2,8224	337
0,19	0,0361	39	0,69	0,4761	139	1,19	1,4161	239	1,69	2,8561	339
0,20	0,0400	41	0,70	0,4900	141	1,20	1,4400	241	1,70	2,8900	341
0,21	0,0441	43	0,71	0,5041	143	1,21	1,4641	243	1,71	2,9241	343
0,22	0,0484	45	0,72	0,5184	145	1,22	1,4884	245	1,72	2,9584	345
0,23	0,0529	47	0,73	0,5329	147	1,23	1,5129	247	1,73	2,9929	347
0,24	0,0576	49	0,74	0,5476	149	1,24	1,5376	249	1,74	3,0276	349
0,25	0,0625	51	0,75	0,5625	151	1,25	1,5625	251	1,75	3,0625	351
0,26	0,0676	53	0,76	0,5776	153	1,26	1,5876	253	1,76	3,0976	353
0,27	0,0729	55	0,77	0,5929	155	1,27	1,6129	255	1,77	3,1329	355
0,28	0,0784	57	0,78	0,6084	157	1,28	1,6384	257	1,78	3,1684	357
0,29	0,0841	59	0,79	0,6241	159	1,29	1,6641	259	1,79	3,2041	359
0,30	0,0900	61	0,80	0,6400	161	1,30	1,6900	261	1,80	3,2400	361
0,31	0,0961	63	0,81	0,6561	163	1,31	1,7161	263	1,81	3,2761	363
0,32	0,1024	65	0,82	0,6724	165	1,32	1,7424	265	1,82	3,3124	365
0,33	0,1089	67	0,83	0,6889	167	1,33	1,7689	267	1,83	3,3489	367
0,34	0,1156	69	0,84	0,7056	169	1.34	1,7956	269	1,84	3,3856	369
0,35	0,1225	71	0,85	0,7225	171	1,35	1,8225	271	1,85	3,4225	371
0,36	0,1296	73	0,86	0,7396	173	1,36	1,8496	273	1,86	3,4596	373
0,37	0,1369	75	0,87	0,7569	175	1,37	1,8769	275	1,87	3,4969	375
0,38	0,1444	77	0,88	0,7744	177	1,38	1,9044	277	1,88	3,5344	377
0,39	0,1521	79	0,89	0,7921	179	1,39	1,9321	279	1,89	3,5721	379
0,40	0,1600	81	0,90	0,8100	181	1,40	1,9600	281	1,90	3,6100	381
0,41	0,1681	83	0,91	0,8281	183	1,41	1,9881	283	1,91	3,6481	383
0,42	0,1764	85	0,92	0,8464	185	1,42	2,0164	285	1,92	3,6864	385
0,43	0,1849	87	0,93	0,8649	187	1,43	2,0449	287	1,93	3,7249	387
0,44	0,1936	89	0,94	0,8836	189	1,44	2,0736	289	1,94	3,7636	389
0,45	0,2025	91	0,95	0,9025	191	1,45	2,1025	291	1,95	3,8025	391
0,46	0,2116	93	0,96	0,9216	193	1,46	2,1316	293	1,96	3,8416	393
0,47	0,2209	95	0,97	0,9409	195	1,47	2,1609	295	1,97	3,8809	395
0,48	0,2304	97	0,98	0,9604	197	1,48	2,1904	297	1,98	3,9204	397
0,49	0,2401	99	0,99	0,9801	199	1,49	2,2201	299	1,99	3,9601	399
0,50	0,2500		1,00	1,0000		1,50	2,2500		2,00	4,0000	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
2,00	4,0000	401	2,50	6,2500	501	3,00	9,0000	601	3,50	12,2500	701
2,01	4,0401	403	2,51	6,3001	503	3,01	9,0601	603	3,51	12,3201	703
2,02	4,0804	405	2,52	6,3504	505	3,02	9,1204	605	3,52	12,3904	705
2,03	4,1209	407	2,53	6,4009	507	3,03	9,1809	607	3,53	12,4609	707
2,04	4,1616	409	2,54	6,4516	509	3,04	9,2416	609	3,54	12,5316	709
2,05	4,2025	411	2,55	6,5025	511	3,05	9,3025	611	3,55	12,6025	711
2,06	4,2436	413	2,56	6,5536	513	3,06	9,3636	613	3,56	12,6736	713
2,07	4,2849	415	2,57	6,6049	515	3,07	9,4249	615	3,57	12,7449	715
2,08	4,3264	417	2,58	6,6564	517	3,08	9,4864	617	3,58	12,8164	717
2,09	4,3681	419	2,59	6,7081	519	3,09	9,5481	619	3,59	12,8881	719
2,10	4,4100	421	2,60	6,7600	521	3,10	9,6100	621	3,60	12,9600	721
2,11	4,4521	423	2,61	6,8121	523	3,11	9,6721	623	3,61	13,0321	723
2,12	4,4944	425	2,62	6,8644	525	3,12	9,7344	625	3,62	13,1044	725
2,13	4,5369	427	2,63	6,9169	527	3,13	9,7969	627	3,63	13,1769	727
2,14	4,5796	429	2,64	6,9696	529	3,14	9,8596	629	3,64	13,2496	729
2,15	4,6225	431	2,65	7,0225	531	3,15	9,9225	631	3,65	13,3225	731
2,16	4,6656	433	2,66	7,0756	533	3,16	9,9856	633	3,66	13,3956	733
2,17	4,7089	435	2,67	7,1289	535	3,17	10,0489	635	3,67	13,4689	735
2,18	4,7524	437	2,68	7,1824	537	3,18	10,1124	637	3,68	13,5424	737
2,19	4,7961	439	2,69	7,2361	539	3,19	10,1761	639	3,69	13,6161	739
2,20	4,8400	441	2,70	7,2900	541	3,20	10,2400	641	3,70	13,6900	741
2,21	4,8841	443	2,71	7,3441	543	3,21	10,3041	643	3,71	13,7641	743
2,22	4,9284	445	2,72	7,3984	545	3,22	10,3684	645	3,72	13,8384	745
2,23	4,9729	447	2,73	7,4529	547	3,23	10,4329	647	3,73	13,9129	747
2,24	5,0176	449	2,74	7,5076	549	3,24	10,4976	649	3,74	13,9876	749
2,25	5,0625	451	2,75	7,5625	551	3,25	10,5625	651	3,75	14,0625	751
2,26	5,1076	453	2,76	7,6176	553	3,26	10,6276	653	3,76	14,1376	753
2,27	5,1529	455	2,77	7,6729	555	3,27	10,6929	655	3,77	14,2129	755
2,28	5,1984	457	2,78	7,7284	557	3,28	10,7584	657	3,78	14,2884	757
2,29	5,2441	459	2,79	7,7841	559	3,29	10,8241	659	3,79	14,3641	759
2,30	5,2900	461	2,80	7,8400	561	3,30	10,8900	661	3,80	14,4400	761
2,31	5,3361	463	2,81	7,8961	563	3,31	10,9561	663	3,81	14,5161	763
2,32	5,3824	465	2,82	7,9524	565	3,32	11,0224	665	3,82	14,5924	765
2,33	5,4289	467	2,83	8,0089	567	3,33	11,0889	667	3,83	14,6689	767
2,34	5,4756	469	2,84	8,0656	569	3,34	11,1556	669	3,84	14,7456	769
2,35	5,5225	471	2,85	8,1225	571	3,35	11,2225	671	3,85	14,8225	771
2,36	5,5696	473	2,86	8,1796	573	3,36	11,2896	673	3,86	14,8996	773
2,37	5,6169	475	2,87	8,2369	575	3,37	11,3569	675	3,87	14,9769	775
2,38	5,6644	477	2,88	8,2944	577	3,38	11,4244	677	3,88	15,0544	777
2,39	5,7121	479	2,89	8,3521	579	3,39	11,4921	679	3,89	15,1321	779
2,40	5,7600	481	2,90	8,4100	581	3,40	11,5600	681	3,90	15,2100	781
2,41	5,8081	483	2,91	8,4681	583	3,41	11,6281	683	3,91	15,2881	783
2,42	5,8564	485	2,92	8,5264	585	3,42	11,6964	685	3,92	15,3664	785
2,43	5,9049	487	2,93	8,5849	587	3,43	11,7649	687	3,93	15,4449	787
2,44	5,9536	489	2,94	8,6436	589	3,44	11,8336	689	3,94	15,5236	789
2,45	6,0025	491	2,95	8,7025	591	3,45	11,9025	691	3,95	15,6025	791
2,46	6,0516	493	2,96	8,7616	593	3,46	11,9716	693	3,96	15,6816	793
2,47	6,1009	495	2,97	8,8209	595	3,47	12,0409	695	3,97	15,7609	795
2,48	6,1504	497	2,98	8,8804	597	3,48	12,1104	697	3,98	15,8404	797
2,49	6,2001	499	2,99	8,9401	599	3,49	12,1801	699	3,99	15,9201	799
2,50	6,2500		3,00	9,0000		3,50	12,2500		4,00	16,0000	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
4,00	16,0000	801	4,50	20,2500	901	5,00	25,0000	1001	5,50	30,2500	1101
4,01	16,0801	803	4,51	20,3401	903	5,01	25,1001	1003	5,51	30,3601	1103
4,02	16,1604	805	4,52	20,4304	905	5,02	25,2004	1005	5,52	30,4704	1105
4,03	16,2409	807	4,53	20,5209	907	5,03	25,3009	1007	5,53	30,5809	1107
4,04	16,3216	809	4,54	20,6116	909	5,04	25,4016	1009	5,54	30,6916	1109
4,05	16,4025	811	4,55	20,7025	911	5,05	25,5025	1011	5,55	30,8025	1111
4,06	16,4836	813	4,56	20,7936	913	5,06	25,6036	1013	5,56	30,9136	1113
4,07	16,5649	815	4,57	20,8849	915	5,07	25,7049	1015	5,57	31,0249	1115
4,08	16,6464	817	4,58	20,9764	917	5,08	25,8064	1017	5,58	31,1364	1117
4,09	16,7281	819	4,59	21,0681	919	5,09	25,9081	1019	5,59	31,2481	1119
4,10	16,8100	821	4,60	21,1600	921	5,10	26,0100	1021	5,60	31,3600	1121
4,11	16,8921	823	4,61	21,2521	923	5,11	26,1121	1023	5,61	31,4721	1123
4,12	16,9744	825	4,62	21,3444	925	5,12	26,2144	1025	5,62	31,5844	1125
4,13	17,0569	827	4,63	21,4369	927	5,13	26,3169	1027	5,63	31,6969	1127
4,14	17,1396	829	4,64	21,5296	929	5,14	26,4196	1029	5,64	31,8096	1129
4,15	17,2225	831	4,65	21,6225	931	5,15	26,5225	1031	5,65	31,9225	1131
4,16	17,3056	833	4,66	21,7156	933	5,16	26,6256	1033	5,66	32,0356	1133
4,17	17,3889	835	4,67	21,8089	935	6,17	26,7289	1035	5,67	32,1489	1135
4,18	17,4724	837	4,68	21,9024	937	5,18	26,8324	1037	5,68	32,2624	1137
4,19	17,5561	839	4,69	21,9961	939	5,19	26,9361	1039	5,69	32,3761	1139
4,20	17,6400	841	4,70	22,0900	941	5,20	27,0400	1041	5,70	32,4900	1141
4,21	17,7241	843	4,71	22,1841	943	5,21	27,1441	1043	5,71	32,6041	1143
4,22	17,8084	845	4,72	22,2784	945	5,22	27,2484	1045	5,72	32,7184	1145
4,23	17,8929	847	4,73	22,3729	947	5,23	27,3529	1047	5,73	32,8329	1147
4,24	17,9776	849	4,74	22,4676	949	5,24	27,4576	1049	5,74	32,9476	1149
4,25	18,0625	851	4,75	22,5625	951	5,25	27,5625	1051	5,75	33,0625	1151
4,26	18,1476	853	4,76	22,6576	953	5,26	27,6676	1053	5,76	33,1776	1153
4,27	18,2329	855	4,77	22,7529	955	5,27	27,7729	1055	5,77	33,2929	1155
4,28	18,3184	857	4,78	22,8484	957	5,28	27,8784	1057	5,78	33,4084	1157
4,29	18,4041	859	4,79	22,9441	959	5,29	27,9841	1059	5,79	33,5241	1159
4,30	18,4900	861	4,80	23,0400	961	5,30	28,0900	1061	5,80	33,6400	1161
4,31	18,5761	863	4,81	23,1361	963	5,31	28,1961	1063	5,81	33,7561	1163
4,32	18,6624	865	4,82	23,2324	965	5,32	28,3024	1065	5,82	33,8724	1165
4,33	18,7489	867	4,83	23,3289	967	5,33	28,4089	1067	5,83	33,9889	1167
4,34	18,8356	869	4,84	23,4256	969	5,34	28,5156	1069	5,84	34,1056	1169
4,35	18,9225	871	4,85	23,5225	971	5,35	28,6225	1071	5,85	34,2225	1171
4,36	19,0096	873	4,86	23,6196	973	5,36	28,7296	1073	5,86	34,3396	1173
4,37	19,0969	875	4,87	23,7169	975	5,37	28,8369	1075	5,87	34,4569	1175
4,38	19,1844	877	4,88	23,8144	977	5,38	28,9444	1077	5,88	34,5744	1177
4,39	19,2721	879	4,89	23,9121	979	5,39	29,0521	1079	5,89	34,6921	1179
4,40	19,3600	881	4,90	24,0100	981	5,40	29,1600	1081	5,90	34,8100	1181
4,41	19,4481	883	4,91	24,1081	983	5,41	29,2681	1083	5,91	34,9281	1183
4,42	19,5364	885	4,92	24,2064	985	5,42	29,3764	1085	5,92	35,0464	1185
4,43	19,6249	887	4,93	24,3049	987	5,43	29,4849	1087	5,93	35,1649	1187
4,44	19,7136	889	4,94	24,4036	989	5,44	29,5936	1089	5,94	35,2836	1189
4,45	19,8025	891	4,95	24,5025	991	5,45	29,7025	1091	5,95	35,4025	1191
4,46	19,8916	893	4,96	24,6016	993	5,46	29,8116	1093	5,96	35,5216	1193
4,47	19,9809	895	4,97	24,7009	995	5,47	29,9209	1095	5,97	35,6409	1195
4,48	20,0704	897	4,98	24,8004	997	5,48	30,0304	1097	5,98	35,7604	1197
4,49	20,1601	899	4,99	24,9001	999	5,49	30,1401	1099	5,99	35,8801	1199
4,50	20,2500		5,00	25,0000		5,50	30,2500		6,00	36,0000	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
6,00	36,0000	1201	6,50	42,2500	1301	7,00	49,0000	1401	7,50	56,2500	1501
6,01	36,1201	1203	6,51	42,3801	1303	7,01	49,1401	1403	7,51	56,4001	1503
6,02	36,2404	1205	6,52	42,5104	1305	7,02	49,2804	1405	7,52	56,5504	1505
6,03	36,3609	1207	6,53	42,6409	1307	7,03	49,4209	1407	7,53	56,7009	1507
6,04	36,4816	1209	6,54	42,7716	1309	7,04	49,5616	1409	7,54	56,8516	1509
6,05	36,6025	1211	6,55	42,9025	1311	7,05	49,7025	1411	7,55	57,0025	1511
6,06	36,7236	1213	6,56	43,0336	1313	7,06	49,8436	1413	7,56	57,1536	1513
6,07	36,8449	1215	6,57	43,1649	1315	7,07	49,9849	1415	7,57	57,3049	1515
6,08	36,9664	1217	6,58	43,2964	1317	7,08	50,1264	1417	7,58	57,4564	1517
6,09	37,0881	1219	6,59	43,4281	1319	7,09	50,2681	1419	7,59	57,6081	1519
6,10	37,2100	1221	6,60	43,5600	1321	7,10	50,4100	1421	7,60	57,7600	1521
6,11	37,3321	1223	6,61	43,6921	1323	7,11	50,5521	1423	7,61	57,9121	1523
6,12	37,4544	1225	6,62	43,8244	1325	7,12	50,6944	1425	7,62	58,0644	1525
6,13	37,5769	1227	6,63	43,9569	1327	7,13	50,8369	1427	7,63	58,2169	1527
6,14	37,6996	1229	6,64	44,0896	1329	7,14	50,9796	1429	7,64	58,3696	1529
6,15	37,8225	1231	6,65	44,2225	1331	7,15	51,1225	1431	7,65	58,5225	1531
6,16	37,9456	1233	6,66	44,3556	1333	7,16	51,2656	1433	7,66	58,6756	1533
6,17	38,0689	1235	6,67	44,4889	1335	7,17	51,4089	1435	7,67	58,8289	1535
6,18	38,1924	1237	6,68	44,6224	1337	7,18	51,5524	1437	7,68	58,9824	1537
6,19	38,3161	1239	6,69	44,7561	1339	7,19	51,6961	1439	7,69	59,1361	1539
6,20	38,4400	1241	6,70	44,8900	1341	7,20	51,8400	1441	7,70	59,2900	1541
6,21	38,5641	1243	6,71	45,0241	1343	7,21	51,9841	1443	7,71	59,4441	1543
6,22	38,6884	1245	6,72	45,1584	1345	7,22	52,1284	1445	7,72	59,5984	1545
6,23	38,8129	1247	6,73	45,2929	1347	7,23	52,2729	1447	7,73	59,7529	1547
6,24	38,9376	1249	6,74	45,4276	1349	7,24	52,4176	1449	7,74	59,9076	1549
6,25	39,0625	1251	6,75	45,5625	1351	7,25	52,5625	1451	7,75	60,0625	1551
6,26	39,1876	1253	6,76	45,6976	1353	7,26	52,7076	1453	7,76	60,2176	1553
6,27	39,3129	1255	6,77	45,8329	1355	7,27	52,8529	1455	7,77	60,3729	1555
6,28	39,4384	1257	6,78	45,9684	1357	7,28	52,9984	1457	7,78	60,5284	1557
6,29	39,5641	1259	6,79	46,1041	1359	7,29	53,1441	1459	7,79	60,6841	1559
6,30	39,6900	1261	6,80	46,2400	1361	7,30	53,2900	1461	7,80	60,8400	1561
6,31	39,8161	1263	6,81	46,3761	1363	7,31	53,4361	1463	7,81	60,9961	1563
6,32	39,9424	1265	6,82	46,5124	1365	7,32	53,5824	1465	7,82	61,1524	1565
6,33	40,0689	1267	5,83	46,6489	1367	7,33	53,7289	1467	7,83	61,3089	1567
6,34	40,1956	1269	6,84	46,7856	1369	7,34	53,8756	1469	7,84	61,4656	1569
6,35	40,3225	1271	6,85	46,9225	1371	7,35	54,0225	1471	7,85	61,6225	1571
6,36	40,4496	1273	6,86	47,0596	1373	7,36	54,1696	1473	7,86	61,7796	1573
6,37	40,5769	1275	6,87	47,1969	1375	7,37	54,3169	1475	7,87	61,9369	1575
6,38	40,7044	1277	6,88	47,3344	1377	7,38	54,4644	1477	7,88	62,0944	1577
6,39	40,8321	1279	6,89	47,4721	1379	7,39	54,6121	1479	7,89	62,2521	1579
6,40	40,9600	1281	6,90	47,6100	1381	7,40	54,7600	1481	7,90	62,4100	1581
6,41	41,0881	1283	6,91	47,7481	1383	7,41	54,9081	1483	7,91	62,5681	1583
6,42	41,2164	1285	6,92	47,8864	1385	7,42	55,0564	1485	7,92	62,7264	1585
6,43	41,3449	1287	6,93	48,0249	1387	7,43	55,2049	1487	7,93	62,8849	1587
6,44	41,4736	1289	6,94	48,1636	1389	7,44	55,3536	1489	7,94	63,0436	1589
6,45	41,6025	1291	6,95	48,3025	1391	7,45	55,5025	1491	7,95	63,2025	1591
6,46	41,7316	1293	6,96	48,4416	1393	7,46	55,6516	1493	7,96	63,3616	1593
6,47	41,8609	1295	6,97	48,5809	1395	7,47	55,8009	1495	7,97	63,5209	1595
6,48	41,9904	1297	6,98	48,7204	1397	7,48	55,9504	1497	7,98	63,6804	1597
6,49	42,1201	1299	6,99	48,8601	1399	7,49	56,1001	1499	7,99	63,8401	1599
6,50	42.2500		7,00	49,0000		7,50	56,2500		8,00	64,0000	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Quadrat-Zahlen.

a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d	a	a^2	d
8,00	64,0000	1601	8,50	72,2500	1701	9,00	81,0000	1801	9,50	90,2500	1901
8,01	64,1601	1603	8,51	72,4201	1703	9,01	81,1801	1803	9,51	90,4401	1903
8,02	64,3204	1605	8,52	72,5904	1705	9,02	81,3604	1805	9,52	90,6304	1905
8,03	64,4809	1607	8,53	72,7609	1707	9,03	81,5409	1807	9,53	90,8209	1907
8,04	64,6416	1609	8,54	72,9316	1709	9,04	81,7216	1809	9,54	91,0116	1909
8,05	64,8025	1611	8,55	73,1025	1711	9,05	81,9025	1811	9,55	91,2025	1911
8,06	64,9636	1613	8,56	73,2736	1713	9,06	82,0836	1813	9,56	91,3936	1913
8,07	65,1249	1615	8,57	73,4449	1715	9,07	82,2649	1815	9,57	91,5849	1915
8,08	65,2864	1617	8,58	73,6164	1717	9,08	82,4464	1817	9,58	91,7764	1917
8,09	65,4481	1619	8,59	73,7881	1719	9,09	82,6281	1819	9,59	91,9681	1919
8,10	65,6100	1621	8,60	73,9600	1721	9,10	82,8100	1821	9,60	92,1600	1921
8,11	65,7721	1623	8,61	74,1321	1723	9,11	82,9921	1823	9,61	92,3521	1923
8,12	65,9344	1625	8,62	74,3044	1725	9,12	83,1744	1825	9,62	92,5444	1925
8,13	66,0969	1627	8,63	74,4769	1727	9,13	83,3569	1827	9,63	92,7369	1927
8,14	66,2596	1629	8,64	74,6496	1729	9,14	83,5396	1829	9,64	92,9296	1929
8,15	66,4225	1631	8,65	74,8225	1731	9,15	83,7225	1831	9,65	93,1225	1931
8,16	66,5856	1633	8,66	74,9956	1733	9,16	83,9056	1833	9,66	93,3156	1933
8,17	66,7489	1635	8,67	75,1689	1735	9,17	84,0889	1835	9,67	93,5089	1935
8,18	66,9124	1637	8,68	75,3424	1737	9,18	84,2724	1837	9,68	93,7024	1937
8,19	67,0761	1639	8,69	75,5161	1739	9,19	84,4561	1839	9,69	93,8961	1939
8,20	67,2400	1641	8,70	75,6900	1741	9,20	84,6400	1841	9,70	94,0900	1941
8,21	67,4041	1643	8,71	75,8641	1743	9,21	84,8241	1843	9,71	94,2841	1943
8,22	67,5684	1645	8,72	76,0384	1745	9,22	85,0084	1845	9,72	94,4784	1945
8,23	67,7329	1647	8,73	76,2129	1747	9,23	85,1929	1847	9,73	94,6729	1947
8,24	67,8976	1649	8,74	76,3876	1749	9,24	85,3776	1849	9,74	94,8676	1949
8,25	68,0625	1651	8,75	76,5625	1751	9,25	85,5625	1851	9,75	95,0625	1951
8,26	68,2276	1653	8,76	76,7376	1753	9,26	85,7476	1853	9,76	95,2576	1953
8,27	68,3929	1655	8,77	76,9129	1755	9,27	85,9329	1855	9,77	95,4529	1955
8,28	68,5584	1657	8,78	77,0884	1757	9,28	86,1184	1857	9,78	95,6484	1957
8,29	68,7241	1659	8,79	77,2641	1759	9,29	86,3041	1859	9,79	95,8441	1959
8,30	68,8900	1661	8,80	77,4400	1761	9,30	86,4900	1861	9,80	96,0400	1961
8,31	69,0561	1663	8,81	77,6161	1763	9,31	86,6761	1863	9,81	96,2361	1963
8,32	69,2224	1665	8,82	77,7924	1765	9,32	86,8624	1865	9,82	96,4324	1965
8,33	69,3889	1667	8,83	77,9689	1767	9,33	87,0489	1867	9,83	96,6289	1967
8,34	69,5556	1669	8,84	78,1456	1769	9,34	87,2356	1869	9,84	96,8256	1969
8,35	69,7225	1671	8,85	78,3225	1771	9,35	87,4225	1871	9,85	97,0225	1971
8,36	69,8896	1673	8,86	78,4996	1773	9,36	87,6096	1873	9,86	97,2196	1973
8,37	70,0569	1675	8,87	78,6769	1775	9,37	87,7969	1875	9,87	97,4169	1975
8,38	70,2244	1677	8,88	78,8544	1777	9,38	87,9844	1877	9,88	97,6144	1977
8,39	70,3921	1679	8,89	79,0321	1779	9,39	88,1721	1879	9,89	97,8121	1979
8,40	70,5600	1681	8,90	79,2100	1781	9,40	88,3600	1881	9,90	98,0100	1981
8,41	70,7281	1683	8,91	79,3881	1783	9,41	88,5481	1883	9,91	98,2081	1983
8,42	70,8964	1685	8,92	79,5664	1785	9,42	88,7364	1885	9,92	98,4064	1985
8,43	71,0649	1687	8,93	79,7449	1787	9,43	88,9249	1887	9,93	98,6049	1987
8,44	71,2336	1689	8,94	79,9236	1789	9,44	89,1136	1889	9,94	98,8036	1989
8,45	71,4025	1691	8,95	80,1025	1791	9,45	89,3025	1891	9,95	99,0025	1991
8,46	71,5716	1693	8,96	80,2816	1793	9,46	89,4916	1893	9,96	99,2016	1993
8,47	71,7409	1695	8,97	80,4609	1795	9,47	89,6809	1895	9,97	99,4009	1995
8,48	71,9104	1697	8,98	80,6404	1797	9,48	89,8704	1897	9,98	99,6004	1997
8,49	72,0801	1699	8,99	80,8201	1799	9,49	90,0601	1899	9,99	99,8001	1999
8,50	72,2500		9,00	81,0000		9,50	90,2500		10,00	100,0000	

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

II. Reciprok-Zahlen der Quadrate.

Gewichte $p = \frac{1}{m^2}$

m	p	m	p	m	p	m	p	m	p
0,0	∞	2,0	0,250	4,0	0,062	6,0	0,028	8,0	0,016
0,1	100,000	2,1	0,227	4,1	0,059	6,1	0,027	8,1	0,015
0,2	25,000	2,2	0,207	4,2	0,057	6,2	0,026	8,2	0,015
0,3	11,111	2,3	0,189	4,3	0,054	6,3	0,025	8,3	0,015
0,4	6,250	2,4	0,174	4,4	0,052	6,4	0,024	8,4	0,014
0,5	4,000	2,5	0,160	4,5	0,049	6,5	0,024	8,5	0,014
0,6	2,778	2,6	0,148	4,6	0,047	6,6	0,023	8,6	0,014
0,7	2,041	2,7	0,137	4,7	0,045	6,7	0,022	8,7	0,013
0,8	1,562	2,8	0,128	4,8	0,043	6,8	0,022	8,8	0,013
0,9	1,235	2,9	0,119	4,9	0,042	6,9	0,021	8,9	0,013
1,0	1,000	3,0	0,111	5,0	0,040	7,0	0,020	9,0	0,012
1,1	0,826	3,1	0,104	5,1	0,038	7,1	0,020	9,1	0,012
1,2	0,694	3,2	0,098	5,2	0,037	7,2	0,019	9,2	0,012
1,3	0,592	3,3	0,092	5,3	0,036	7,3	0,019	9,3	0,012
1,4	0,510	3,4	0,087	5,4	0,034	7,4	0,018	9,4	0,011
1,5	0,444	3,5	0,082	5,5	0,033	7,5	0,018	9,5	0,011
1,6	0,391	3,6	0,077	5,6	0,032	7,6	0,017	9,6	0,011
1,7	0,346	3,7	0,073	5,7	0,031	7,7	0,017	9,7	0,011
1,8	0,309	3,8	0,069	5,8	0,030	7,8	0,016	9,8	0,010
1,9	0,277	3,9	0,066	5,9	0,029	7,9	0,016	9,9	0,010

m	p	m	p	m	p	m	p	m	p
0,10	100,00	0,30	11,11	0,50	4,00	0,70	2,04	0,90	1,23
0,11	82,64	0,31	10,41	0,51	3,84	0,71	1,98	0,91	1,21
0,12	69,44	0,32	9,77	0,52	3,70	0,72	1,93	0,92	1,18
0,13	59,17	0,33	9,18	0,53	3,56	0,73	1,88	0,93	1,16
0,14	51,02	0,34	8,65	0,54	3,43	0,74	1,83	0,94	1,13
0,15	44,44	0,35	8,16	0,55	3,31	0,75	1,78	0,95	1,11
0,16	39,06	0,36	7,72	0,56	3,19	0,76	1,73	0,96	1,09
0,17	34,60	0,37	7,30	0,57	3,08	0,77	1,69	0,97	1,06
0,18	30,86	0,38	6,93	0,58	2,97	0,78	1,64	0,98	1,04
0,19	27,70	0,39	6,57	0,59	2,87	0,79	1,60	0,99	1,02
0,20	25,00	0,40	6,25	0,60	2,78	0,80	1,56	1,00	1,00
0,21	22,68	0,41	5,95	0,61	2,69	0,81	1,52	1,01	0,98
0,22	20,66	0,42	5,67	0,62	2,60	0,82	1,49	1,02	0,96
0,23	18,90	0,43	5,41	0,63	2,52	0,83	1,45	1,03	0,94
0,24	17,36	0,44	5,17	0,64	2,44	0,84	1,42	1,04	0,92
0,25	16,00	0,45	4,94	0,65	2,37	0,85	1,38	1,05	0,91
0,26	14,79	0,46	4,73	0,66	2,30	0,86	1,35	1,06	0,89
0,27	13,72	0,47	4,53	0,67	2,23	0,87	1,32	1,07	0,87
0,28	12,76	0,48	4,34	0,68	2,16	0,88	1,29	1,08	0,86
0,29	11,89	0,49	4,16	0,69	2,10	0,89	1,26	1,09	0,84

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

III. Richtungs-Coefficienten

φ	ξ		η		φ	ξ		η		φ	ξ		η		φ	ξ		η	
0°	− 0,00	36	+20,63	01	45°	−14,59	25	+14,59	26	90°	−20,63	01	− 0,00	36	135°	−14,59	26	−14,59	25
1	0,36	36	20,62	01	46	14,84	25	14,33	26	91	20,62	01	0,36	36	136	14,33	26	14,84	25
2	0,72	36	20,61	01	47	15,09	24	14,07	27	92	20,61	01	0,72	36	137	14,07	27	15,09	24
3	1,08	36	20,60	02	48	15,33	24	13,80	27	93	20,60	02	1,08	36	138	13,80	27	15,33	24
4	1,44	36	20,58	03	49	15,57	23	13,53	27	94	20,58	03	1,44	36	139	13,53	27	15,57	23
5°	− 1,80	36	+20,55	04	50°	−15,80	23	+13,26	28	95°	−20,55	04	− 1,80	36	140°	−13,26	28	−15,80	23
6	2,16	35	20,51	04	51	16,03	22	12,98	28	96	20,51	04	2,16	35	141	12,98	28	16,03	22
7	2,51	36	20,47	04	52	16,25	22	12,70	29	97	20,47	04	2,51	36	142	12,70	29	16,25	22
8	2,87	36	20,43	06	53	16,47	22	12,41	29	98	20,43	06	2,87	36	143	12,41	29	16,47	22
9	3,23	35	20,37	06	54	16,69	21	12,12	29	99	20,37	06	3,23	35	144	12,12	29	16,69	21
10°	− 3,58	36	+20,31	06	55°	−16,90	20	+11,83	30	100°	−20,31	06	− 3,58	36	145°	−11,83	30	−16,90	20
11	3,94	35	20,25	07	56	17,10	20	11,53	30	101	20,25	07	3,94	35	146	11,53	30	17,10	20
12	4,29	35	20,18	08	57	17,30	19	11,23	30	102	20,18	08	4,29	35	147	11,23	30	17,30	19
13	4,64	35	20,10	09	58	17,49	19	10,93	31	103	20,10	09	4,64	35	148	10,93	31	17,49	19
14	4,99	35	20,01	09	59	17,68	18	10,62	31	104	20,01	09	4,99	35	149	10,62	31	17,68	18
15°	− 5,34	35	+19,92	09	60°	−17,86	18	+10,31	31	105°	−19,92	09	− 5,34	35	150°	−10,31	31	−17,86	18
16	5,69	34	19,83	10	61	18,04	17	10,00	32	106	19,83	10	5,69	34	151	10,00	32	18,04	17
17	6,03	34	19,73	11	62	18,21	17	9,68	32	107	19,73	11	6,03	34	152	9,68	32	18,21	17
18	6,37	35	19,62	12	63	18,38	16	9,36	32	108	19,62	12	6,37	35	153	9,36	32	18,38	16
19	6,72	33	19,50	12	64	18,54	15	9,04	32	109	19,50	12	6,72	33	154	9,04	32	18,54	15
20°	− 7,05	34	+19,38	12	65°	−18,69	15	+ 8,72	33	110°	−19,38	12	− 7,05	34	155°	− 8,72	33	−18,69	15
21	7,39	34	19,26	14	66	18,84	15	8,39	33	111	19,26	14	7,39	34	156	8,39	33	18,84	15
22	7,73	33	19,12	13	67	18,99	13	8,06	33	112	19,12	13	7,73	33	157	8,06	33	18,99	13
23	8,06	33	18,99	15	68	19,12	14	7,73	34	113	18,99	15	8,06	33	158	7,73	34	19,12	14
24	8,39	33	18,84	15	69	19,26	12	7,39	34	114	18,84	15	8,39	33	159	7,39	34	19,26	12
25°	− 8,72	32	+18,69	15	70°	−19,38	12	+ 7,05	33	115°	−18,69	15	− 8,72	32	160°	− 7,05	33	−19,38	12
26	9,04	32	18,54	16	71	19,50	12	6,72	35	116	18,54	16	9,04	32	161	6,72	35	19,50	12
27	9,36	32	18,38	17	72	19,62	11	6,37	34	117	18,38	17	9,36	32	162	6,37	34	19,62	11
28	9,68	32	18,21	17	73	19,73	10	6,03	34	118	18,21	17	9,68	32	163	6,03	34	19,73	10
29	10,00	31	18,04	18	74	19,83	09	5,69	35	119	18,04	18	10,00	31	164	5,69	35	19,83	09
30°	−10,31	31	+17,86	18	75°	−19,92	09	+ 5,34	35	120°	−17,86	18	−10,31	31	165°	− 5,34	35	−19,92	09
31	10,62	31	17,68	19	76	20,01	09	4,99	35	121	17,68	19	10,62	31	166	4,99	35	20,01	09
32	10,93	30	17,49	19	77	20,10	08	4,64	35	122	17,49	19	10,93	30	167	4,64	35	20,10	08
33	11,23	30	17,30	20	78	20,18	07	4,29	35	123	17,30	20	11,23	30	168	4,29	35	20,18	07
34	11,53	30	17,10	20	79	20,25	06	3,94	36	124	17,10	20	11,53	30	169	3,94	36	20,25	06
35°	−11,83	29	+16,90	21	80°	−20,31	06	+ 3,58	35	125°	−16,90	21	−11,83	29	170°	− 3,58	35	−20,31	06
36	12,12	29	16,69	22	81	20,37	06	3,23	36	126	16,69	22	12,12	29	171	3,23	36	20,37	06
37	12,41	29	16,47	22	82	20,43	04	2,87	36	127	16,47	22	12,41	29	172	2,87	36	20,43	04
38	12,70	28	16,25	22	83	20,47	04	2,51	36	128	16,25	22	12,70	28	173	2,51	36	20,47	04
39	12,98	28	16,03	23	84	20,51	04	2,16	36	129	16,03	23	12,98	28	174	2,16	36	20,51	04
40°	−13,26	27	+15,80	23	85°	−20,55	03	+ 1,80	36	130°	−15,80	23	−13,26	27	175°	− 1,80	36	−20,55	03
41	13,53	27	15,57	24	86	20,58	02	1,44	36	131	15,57	24	13,53	27	176	1,44	36	20,58	02
42	13,80	27	15,33	24	87	20,60	01	1,08	36	132	15,33	24	13,80	27	177	1,08	36	20,60	01
43	14,07	26	15,09	25	88	20,61	01	0,72	36	133	15,09	25	14,07	26	178	0,72	36	20,61	01
44	14,33	26	14,84	25	89	20,62	01	0,36	36	134	14,84	25	14,33	26	179	0,36	36	20,62	01
45	14,59		14,59		90	20,63		0,00		135	14,59		14,59		180	0,00		20,63	

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\mathfrak{x} = -20{,}6265 \sin\varphi \;,\; \mathfrak{y} = +20{,}6265 \cos\varphi.$$

φ	ξ		η		φ	ξ		η		φ	ξ		η		φ	ξ		η	
180°	+ 0,00	36	−20,63	01	225°	+14,59	25	−14,59	26	270°	+20,63	01	+ 0,00	36	315°	+14,59	26	+14,59	25
181	0,36	36	20,62	01	226	14,84	25	14,33	26	271	20,62	01	0,36	36	316	14,33	26	14,84	25
182	0,72	36	20,61	01	227	15,09	24	14,07	27	272	20,61	01	0,72	36	317	14,07	27	14,09	24
183	1,08	36	20,60	01	228	15,33	24	13,80	27	273	20,60	02	1,08	36	318	13,80	27	15,33	24
184	1,44	36	20,58	02	229	15,57	23	13,53	27	274	20,58	03	1,44	36	319	13,53	27	15,57	23
185°	+ 1,80	36	−20,55	03	230°	+15,80	23	−13,26	28	275°	+20,55	04	+ 1,80	36	320°	+13,26	28	+15,80	23
186	2,16	35	20,51	04	231	16,03	22	12,98	28	276	20,51	04	2,16	35	321	12,98	28	16,03	22
187	2,51	36	20,47	04	232	16,25	22	12,70	29	277	20,47	04	2,51	36	322	12,70	29	16,25	22
188	2,87	36	20,43	06	233	16,47	22	12,41	29	278	20,43	06	2,87	36	323	12,41	29	16,47	22
189	3,23	35	20,37	06	234	16,69	21	12,12	29	279	20,37	06	3,23	35	324	12,12	29	16,69	21
190°	+ 3,58	36	−20,31	06	235°	+16,90	20	−11,83	30	280°	+20,31	06	+ 3,58	36	325°	+11,83	30	+16,90	20
191	3,94	35	20,25	07	236	17,10	20	11,53	30	281	20,25	07	3,94	35	326	11,53	30	17,10	20
192	4,29	35	20,18	08	237	17,30	19	11,23	30	282	20,18	08	4,29	35	327	11,23	30	17,30	19
193	4,64	35	20,10	09	238	17,49	19	10,93	31	283	20,10	09	4,64	35	328	10,93	31	17,49	19
194	4,99	35	20,01	09	239	17,68	18	10,62	31	284	20,01	09	4,99	35	329	10,62	31	17,68	18
195°	+ 5,34	35	−19,92	09	240°	+17,86	18	−10,31	31	285°	+19,92	09	+ 5,34	35	330°	+10,31	31	+17,86	18
196	5,69	34	19,83	10	241	18,04	17	10,00	32	286	19,83	10	5,69	34	331	10,00	32	18,04	17
197	6,03	34	19,73	11	242	18,21	17	9,68	32	287	19,73	11	6,03	34	332	9,68	32	18,21	17
198	6,37	35	19,62	12	243	18,38	16	9,36	32	288	19,62	12	6,37	35	333	9,36	32	18,38	16
199	6,72	33	19,50	12	244	18,54	15	9,04	32	289	19,50	12	6,72	33	334	9,04	32	18,54	15
200°	+ 7,05	34	−19,38	12	245°	+18,69	15	− 8,72	33	290°	+19,38	12	+ 7,05	34	335°	+ 8,72	33	+18,69	15
201	7,39	34	19,26	14	246	18,84	15	8,39	33	291	19,26	14	7,39	34	336	8,39	33	18,84	15
202	7,73	33	19,12	13	247	18,99	13	8,06	33	292	19,12	13	7,73	33	337	8,06	33	18,99	13
203	8,06	33	18,99	15	248	19,12	14	7,73	34	293	18,99	15	8,06	33	338	7,73	34	19,12	14
204	8,39	33	18,84	15	249	19,26	12	7,39	34	294	18,84	15	8,39	33	339	7,39	34	19,26	12
205°	+ 8,72	32	−18,69	15	250°	+19,38	12	− 7,05	33	295°	+18,69	15	+ 8,72	32	340°	+ 7,05	33	+19,38	12
206	9,04	32	18,54	16	251	19,50	12	6,72	35	296	18,54	16	9,04	32	341	6,72	35	19,50	12
207	9,36	32	18,38	17	252	19,62	11	6,37	34	297	18,38	17	9,36	32	342	6,37	34	19,62	11
208	9,68	32	18,21	17	253	19,73	10	6,03	34	298	18,21	17	9,68	32	343	6,03	34	19,73	10
209	10,00	31	18,04	18	254	19,83	09	5,69	35	299	18,04	18	10,00	31	344	5,69	35	19,83	09
210°	+10,31	31	−17,86	18	255°	+19,92	09	− 5,34	35	300°	+17,86	18	+10,31	31	345°	+ 5,34	35	+19,92	09
211	10,62	31	17,68	19	256	20,01	09	4,99	35	301	17,68	19	10,62	31	346	4,99	35	20,01	09
212	10,93	30	17,49	19	257	20,10	08	4,64	35	302	17,49	19	10,93	30	347	4,64	35	20,10	08
213	11,23	30	17,30	20	258	20,18	07	4,29	35	303	17,30	20	11,23	30	348	4,29	35	20,18	07
214	11,53	30	17,10	20	259	20,25	06	3,94	36	304	17,10	20	11,53	30	349	3,94	36	20,25	06
215°	+11,83	29	−16,90	21	260°	+20,31	06	− 3,58	35	305°	+16,90	21	+11,83	29	350°	+ 3,58	35	+20,31	06
216	12,12	29	16,69	22	261	20,37	06	3,23	36	306	16,69	22	12,12	29	351	3,23	36	20,37	06
217	12,41	29	16,47	22	262	20,43	04	2,87	36	307	16,47	22	12,41	29	352	2,87	36	20,43	04
218	12,70	28	16,25	22	263	20,47	04	2,51	36	308	16,25	22	12,70	28	353	2,51	35	20,47	04
219	12,98	28	16,03	23	264	20,51	04	2,16	35	309	16,03	23	12,98	28	354	2,16	36	20,51	03
220°	+13,26	27	−15,80	23	265°	+20,55	03	− 1,80	36	310°	+15,80	23	+13,26	27	355°	+ 1,80	36	+20,55	03
221	13,53	27	15,57	24	266	20,58	02	1,44	36	311	15,57	24	13,53	27	356	1,44	36	20,58	02
222	13,80	27	15,33	24	267	20,60	01	1,08	36	312	15,33	24	13,80	27	357	1,08	36	20,60	01
223	14,07	26	15,09	25	268	20,61	01	0,72	36	313	15,09	25	14,07	26	358	0,72	36	20,61	01
224	14,33	26	14,84	25	269	20,62	01	0,36	36	314	14,84	25	14,33	26	359	0,36	36	20,62	01
225	14,59		14,59		270	20,63		0,00		315	14,59		14,59		360	0,00		20,63	

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung.

φ		ξ	η
*180°	0° 0′	− 0,00	+ 20,63
	10	0,06	20,63
	20	0,12	20,63
	30	0,18	20,63
	40	0,24	20,63
	50	0,30	20,62
*181°	1° 0′	− 0,36	+ 20,62
	10	0,42	20,62
	20	0,48	20,62
	30	0,54	20,62
	40	0,60	20,62
	50	0,66	20,62
*182°	2° 0′	− 0,72	+ 20,61
	10	0,78	20,61
	20	0,84	20,61
	30	0,90	20,61
	40	0,96	20,60
	50	1,02	20,60
*183°	3° 0′	− 1,08	+ 20,60
	10	1,14	20,59
	20	1,20	20,59
	30	1,26	20,59
	40	1,32	20,58
	50	1,38	20,58
*184°	4° 0′	− 1,44	+ 20,58
	10	1,50	20,57
	20	1,56	20,57
	30	1,62	20,56
	40	1,68	20,56
	50	1,74	20,55
*185°	5° 0′	− 1,80	+ 20,55
	10	1,86	20,54
	20	1,92	20,54
	30	1,98	20,53
	40	2,04	20,53
	50	2,10	20,52
*186°	6° 0′	− 2,16	+ 20,51
	10	2,22	20,51
	20	2,28	20,50
	30	2,33	20,49
	40	2,39	20,49
	50	2,45	20,48
*187°	7° 0′	− 2,51	+ 20,47
	10	2,57	20,47
	20	2,63	20,46
	30	2,69	20,45
	40	2,75	20,44
	50	2,81	20,43
*188°	8° 0′	− 2,87	+ 20,43
	10	2,93	20,42
	20	2,99	20,41
	30	3,05	20,40
	40	3,11	20,39
	50	3,17	20,38
*189°	9° 0′	− 3,23	+ 20,37
	10	3,29	20,36
	20	3,35	20,35
	30	3,40	20,34
	40	3,46	20,33
	50	3,52	20,32
*190°	10° 0′	− 3,58	+ 20,31

φ		ξ	η
*190°	10° 0′	− 3,58	+ 20,31
	10	3,64	20,30
	20	3,70	20,29
	30	3,75	20,28
	40	3,82	20,27
	50	3,88	20,26
*191°	11° 0′	− 3,94	+ 20,25
	10	3,99	20,24
	20	4,05	20,22
	30	4,11	20,21
	40	4,17	20,20
	50	4,23	20,19
*192°	12° 0′	− 4,29	+ 20,18
	10	4,35	20,16
	20	4,41	20,15
	30	4,46	20,14
	40	4,52	20,12
	50	4,58	20,11
*193°	13° 0′	− 4,64	+ 20,10
	10	4,70	20,08
	20	4,76	20,07
	30	4,82	20,06
	40	4,87	20,04
	50	4,93	20,03
*194°	14° 0′	− 4,99	+ 20,01
	10	5,05	20,00
	20	5,11	19,98
	30	5,16	19,97
	40	5,22	19,95
	50	5,28	19,94
*195°	15° 0′	− 5,34	+ 19,92
	10	5,40	19,91
	20	5,45	19,89
	30	5,51	19,88
	40	5,57	19,86
	50	5,63	19,84
*196°	16° 0′	− 5,69	+ 19,83
	10	5,74	19,81
	20	5,80	19,79
	30	5,86	19,78
	40	5,92	19,76
	50	5,97	19,74
*197°	17° 0′	− 6,03	+ 19,73
	10	6,09	19,71
	20	6,15	19,69
	30	6,20	19,67
	40	6,26	19,65
	50	6,32	19,64
*198°	18° 0′	− 6,37	+ 19,62
	10	6,43	19,60
	20	6,49	19,58
	30	6,54	19,56
	40	6,60	19,54
	50	6,66	19,52
*199°	19° 0′	− 6,72	+ 19,50
	10	6,77	19,48
	20	6,83	19,46
	30	6,89	19,44
	40	6,94	19,42
	50	7,00	19,40
*200°	20° 0′	− 7,05	+ 19,38

φ		ξ	η
*200°	20° 0′	− 7,05	+ 19,38
	10	7,11	19,36
	20	7,17	19,34
	30	7,22	19,32
	40	7,28	19,30
	50	7,34	19,28
*201°	21° 0′	− 7,39	+ 19,26
	10	7,45	19,23
	20	7,50	19,21
	30	7,56	19,19
	40	7,62	19,17
	50	7,67	19,15
*202°	22° 0′	− 7,73	+ 19,12
	10	7,78	19,10
	20	7,84	19,08
	30	7,89	19,06
	40	7,95	19,03
	50	8,00	19,01
*203°	23° 0′	− 8,06	+ 18,99
	10	8,11	18,96
	20	8,17	18,94
	30	8,22	18,92
	40	8,28	18,89
	50	8,33	18,87
*204°	24° 0′	− 8,39	+ 18,84
	10	8,44	18,82
	20	8,50	18,79
	30	8,55	18,77
	40	8,61	18,74
	50	8,66	18,72
*205°	25° 0′	− 8,72	+ 18,69
	10	8,77	18,67
	20	8,83	18,64
	30	8,88	18,62
	40	8,93	18,59
	50	8,99	18,57
*206°	26° 0′	− 9,04	+ 18,54
	10	9,10	18,51
	20	9,15	18,49
	30	9,20	18,46
	40	9,26	18,43
	50	9,31	18,41
*207°	27° 0′	− 9,36	+ 18,38
	10	9,42	18,35
	20	9,47	18,32
	30	9,52	18,30
	40	9,58	18,27
	50	9,63	18,24
*208°	28° 0′	− 9,68	+ 18,21
	10	9,74	18,18
	20	9,79	18,16
	30	9,84	18,13
	40	9,89	18,10
	50	9,95	18,07
*209°	29° 0′	−10,00	+ 18,04
	10	10,05	18,01
	20	10,10	17,98
	30	10,16	17,95
	40	10,21	17,92
	50	10,26	17,89
*210°	30° 0′	−10,31	+ 17,86

*) Für die mit * bezeichneten Werte φ sind ξ und η mit umgekehrten Vorzeichen zu nehmen.

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung.

φ		ξ	η
*210°	30° 0′	− 10,31	+ 17,86
	10	10,37	17,83
	20	10,42	17,80
	30	10,47	17,77
	40	10,52	17,74
	50	10,57	17,71
*211°	31° 0′	− 10,62	+ 17,68
	10	10,67	17,65
	20	10,73	17,62
	30	10,78	17,59
	40	10,83	17,56
	50	10,88	17,52
*212°	32° 0′	− 10,93	+ 17,49
	10	10,98	17,46
	20	11,03	17,43
	30	11,08	17,40
	40	11,13	17,37
	50	11,18	17,33
*213°	33° 0′	− 11,23	+ 17,30
	10	11,28	17,27
	20	11,33	17,23
	30	11,38	17,20
	40	11,43	17,17
	50	11,48	17,13
*214°	34° 0′	− 11,53	+ 17,10
	10	11,58	17,07
	20	11,63	17,03
	30	11,68	17,00
	40	11,73	16,96
	50	11,78	16,93
*215°	35° 0′	− 11,83	+ 16,90
	10	11,88	16,86
	20	11,93	16,83
	30	11,98	16,79
	40	12,03	16,76
	50	12,08	16,72
*216°	36° 0′	− 12,12	+ 16,69
	10	12,17	16,65
	20	12,22	16,62
	30	12,27	16,58
	40	12,32	16,54
	50	12,37	16,51
*217°	37° 0′	− 12,41	+ 16,47
	10	12,46	16,44
	20	12,51	16,40
	30	12,56	16,36
	40	12,60	16,33
	50	12,65	16,29
*218°	38° 0′	− 12,70	+ 16,25
	10	12,75	16,22
	20	12,79	16,18
	30	12,84	16,14
	40	12,89	16,10
	50	12,93	16,07
*219°	39° 0′	− 12,98	+ 16,03
	10	13,03	15,99
	20	13,07	15,95
	30	13,12	15,92
	40	13,17	15,88
	50	13,21	15,84
*220°	40° 0′	− 13,26	+ 15,80

φ		ξ	η
*220°	40° 0′	− 13,26	+ 15,80
	10	13,30	15,76
	20	13,35	15,72
	30	13,40	15,68
	40	13,44	15,65
	50	13,49	15,61
*221°	41° 0′	− 13,53	+ 15,57
	10	13,58	15,53
	20	13,62	15,49
	30	13,67	15,45
	40	13,71	15,41
	50	13,76	15,37
*222°	42° 0′	− 13,80	+ 15,33
	10	13,85	15,29
	20	13,89	15,25
	30	13,94	15,21
	40	13,98	15,17
	50	14,02	15,13
*223°	43° 0′	− 14,07	+ 15,09
	10	14,11	15,04
	20	14,15	15,00
	30	14,20	14,96
	40	14,24	14,92
	50	14,28	14,88
*224°	44° 0′	− 14,33	+ 14,84
	10	14,37	14,80
	20	14,41	14,75
	30	14,46	14,71
	40	14,50	14,67
	50	14,54	14,63
*225°	45° 0′	− 14,59	+ 14,59
	10	14,63	14,54
	20	14,67	14,50
	30	14,71	14,46
	40	14,75	14,41
	50	14,80	14,37
*226°	46° 0′	− 14,84	+ 14,33
	10	14,88	14,28
	20	14,92	14,24
	30	14,96	14,20
	40	15,00	14,15
	50	15,04	14,11
*227°	47° 0′	− 15,09	+ 14,07
	10	15,13	14,02
	20	15,17	13,98
	30	15,21	13,94
	40	15,25	13,89
	50	15,29	13,85
*228°	48° 0′	− 15,33	+ 13,80
	10	15,37	13,76
	20	15,41	13,71
	30	15,45	13,67
	40	15,49	13,62
	50	15,53	13,58
*229°	49° 0′	− 15,57	+ 13,53
	10	15,61	13,49
	20	15,65	13,44
	30	15,68	13,40
	40	15,72	13,35
	50	15,76	13,30
*230°	50° 0′	− 15,80	+ 13,26

φ		ξ	η
*230°	50° 0′	− 15,80	+ 13,26
	10	15,84	13,21
	20	15,88	13,17
	30	15,92	13,12
	40	15,95	13,07
	50	15,99	13,03
*231°	51° 0′	− 16,03	+ 12,98
	10	16,07	12,93
	20	16,10	12,89
	30	16,14	12,84
	40	16,18	12,79
	50	16,22	12,75
*232°	52° 0′	− 16,25	+ 12,70
	10	16,29	12,65
	20	16,33	12,60
	30	16,36	12,56
	40	16,40	12,51
	50	16,44	12,46
*233°	53° 0′	− 16,47	+ 12,41
	10	16,51	12,37
	20	16,54	12,32
	30	16,58	12,27
	40	16,62	12,22
	50	16,65	12,17
*234°	54° 0′	− 16,69	+ 12,12
	10	16,72	12,08
	20	16,76	12,03
	30	16,79	11,98
	40	16,83	11,93
	50	16,86	11,88
*235°	55° 0,	− 16,90	+ 11,83
	10	16,93	11,78
	20	16,96	11,73
	30	17,00	11,68
	40	17,03	11,63
	50	17,07	11,58
*236°	56° 0′	− 17,10	+ 11,53
	10	17,13	11,48
	20	17,17	11,43
	30	17,20	11,38
	40	17,23	11,33
	50	17,27	11,28
*237°	57° 0′	− 17,30	+ 11,23
	10	17,33	11,18
	20	17,37	11,13
	30	17,40	11,08
	40	17,43	11,03
	50	17,46	10,98
*238°	58° 0′	− 17,49	+ 10,93
	10	17,52	10,88
	20	17,56	10,83
	30	17,59	10,78
	40	17,62	10,73
	50	17,65	10,67
*239°	59° 0′	− 17,68	+ 10,62
	10	17,71	10,57
	20	17,74	10,52
	30	17,77	10,47
	40	17,80	10,42
	50	17,83	10,37
*240°	60° 0′	− 17,86	+ 10,31

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung.

φ		ξ	η
*240°	60° 0′	−17,86	+10,31
	10	17,89	10,26
	20	17,92	10,21
	30	17,95	10,16
	40	17,98	10,10
	50	18,01	10,05
*241°	61° 0′	−18,04	+10,00
	10	18,07	9,95
	20	18,10	9,89
	30	18,13	9,84
	40	18,16	9,79
	50	18,18	9,74
*242°	62° 0′	−18,21	+9,68
	10	18,24	9,63
	20	18,27	9,58
	30	18,30	9,52
	40	18,32	9,47
	50	18,35	9,42
*243°	63° 0′	−18,38	+9,36
	10	18,41	9,31
	20	18,43	9,26
	30	18,46	9,20
	40	18,49	9,15
	50	18,51	9,10
*244°	64° 0′	−18,54	+9,04
	10	18,57	8,99
	20	18,59	8,93
	30	18,62	8,88
	40	18,64	8,83
	50	18,67	8,77
*245°	65° 0′	−18,69	+8,72
	10	18,72	8,66
	20	18,74	8,61
	30	18,77	8,55
	40	18,79	8,50
	50	18,82	8,44
*246°	66° 0′	−18,84	+8,39
	10	18,87	8,33
	20	18,89	8,28
	30	18,92	8,22
	40	18,94	8,17
	50	18,96	8,11
*247°	67° 0′	−18,99	+8,06
	10	19,01	8,00
	20	19,03	7,95
	30	19,06	7,89
	40	19,08	7,84
	50	19,10	7,78
*248°	68° 0′	−19,12	+7,73
	10	19,15	7,67
	20	19,17	7,62
	30	19,19	7,56
	40	19,21	7,50
	50	19,23	7,45
*249°	69° 0′	−19,26	+7,39
	10	19,28	7,34
	20	19,30	7,28
	30	19,32	7,22
	40	19,34	7,17
	50	19,36	7,11
*250°	70° 0′	−19,38	+7,05

φ		ξ	η
*250°	70° 0′	−19,38	+7,05
	10	19,40	7,00
	20	19,42	6,94
	30	19,44	6,89
	40	19,46	6,83
	50	19,48	6,77
*251°	71° 0′	−19,50	+6,72
	10	19,52	6,66
	20	19,54	6,60
	30	19,56	6,54
	40	19,58	6,49
	50	19,60	6,43
*252°	72° 0′	−19,62	+6,37
	10	19,64	6,32
	20	19,65	6,26
	30	19,67	6,20
	40	19,69	6,15
	50	19,71	6,09
*253°	73° 0′	−19,73	+6,03
	10	19,74	5,97
	20	19,76	5,92
	30	19,78	5,86
	40	19,79	5,80
	50	19,81	5,74
*254°	74° 0′	−19,83	+5,69
	10	19,84	5,63
	20	19,86	5,57
	30	19,88	5,51
	40	19,89	5,45
	50	19,91	5,40
*255°	75° 0′	−19,92	+5,34
	10	19,94	5,28
	20	19,95	5,22
	30	19,97	5,16
	40	19,98	5,11
	50	20,00	5,05
*256°	76° 0′	−20,01	+4,99
	10	20,03	4,93
	20	20,04	4,87
	30	20,06	4,82
	40	20,07	4,76
	50	20,08	4,70
*257°	77° 0′	−20,10	+4,64
	10	20,11	4,58
	20	20,12	4,52
	30	20,14	4,46
	40	20,15	4,41
	50	20,16	4,35
*258°	78° 0′	−20,18	+4,29
	10	20,19	4,23
	20	20,20	4,17
	30	20,21	4,11
	40	20,22	4,05
	50	20,24	3,99
*259°	79° 0′	−20,25	+3,94
	10	20,26	3,88
	20	20,27	3,82
	30	20,28	3,75
	40	20,29	3,70
	50	20,30	3,64
*260°	80° 0′	−20,31	+3,58

φ		ξ	η
*260°	80° 0′	−20,31	+3,58
	10	20,32	3,52
	20	20,33	3,46
	30	20,34	3,40
	40	20,35	3,35
	50	20,36	3,29
*261°	81° 0′	−20,37	+3,23
	10	20,38	3,17
	20	20,39	3,11
	30	20,40	3,05
	40	20,41	2,99
	50	20,42	2,93
*262°	82° 0′	−20,43	+2,87
	10	20,43	2,81
	20	20,44	2,75
	30	20,45	2,69
	40	20,46	2,63
	50	20,47	2,57
*263°	83° 0′	−20,47	+2,51
	10	20,48	2,45
	20	20,49	2,39
	30	20,49	2,33
	40	20,50	2,28
	50	20,51	2,22
*264°	84° 0′	−20,51	+2,16
	10	20,52	2,10
	20	20,53	2,04
	30	20,53	1,98
	40	20,54	1,92
	50	20,54	1,86
*265°	85° 0′	−20,55	+1,80
	10	20,55	1,74
	20	20,56	1,68
	30	20,56	1,62
	40	20,57	1,56
	50	20,57	1,50
*266°	86° 0′	−20,58	+1,44
	10	20,58	1,38
	20	20,58	1,32
	30	20,59	1,26
	40	20,59	1,20
	50	20,59	1,14
*267°	87° 0′	−20,60	+1,08
	10	20,60	1,02
	20	20,60	0,96
	30	20,61	0,90
	40	20,61	0,84
	50	20,61	0,78
*268°	88° 0′	−20,61	+0,72
	10	20,62	0,66
	20	20,62	0,60
	30	20,62	0,54
	40	20,62	0,48
	50	20,62	0,42
*269°	89° 0′	−20,62	+0,36
	10	20,62	0,30
	20	20,63	0,24
	30	20,63	0,18
	40	20,63	0,12
	50	20,63	0,06
*270°	90° 0′	−20,63	+0,00

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung.

φ		ξ	η
*270°	90° 0′	— 20,63	— 0,00
	10	20,63	0,06
	20	20,63	0,12
	30	20,63	0,18
	40	20,63	0,24
	50	20,62	0,30
*271°	91° 0′	— 20,62	— 0,36
	10	20,62	0,42
	20	20,62	0,48
	30	20,62	0,54
	40	20,62	0,60
	50	20,62	0,66
*272°	92° 0′	— 20,61	— 0,72
	10	20,61	0,78
	20	20,61	0,84
	30	20,61	0,90
	40	20,60	0,96
	50	20,60	1,02
*273°	93° 0′	— 20,60	— 1,08
	10	20,59	1,14
	20	20,59	1,20
	30	20,59	1,26
	40	20,58	1,32
	50	20,58	1,38
*274°	94° 0′	— 20,58	— 1,44
	10	20,57	1,50
	20	20,57	1,56
	30	20,56	1,62
	40	20,56	1,68
	50	20,55	1,74
*275°	95° 0′	— 20,55	— 1,80
	10	20,54	1,86
	20	20,54	1,92
	30	20,53	1,98
	40	20,53	2,04
	50	20,52	2,10
*276°	96° 0′	— 20,51	— 2,16
	10	20,51	2,22
	20	20,50	2,28
	30	20,49	2,33
	40	20,49	2,39
	50	20,48	2,45
*277°	97° 0′	— 20,47	— 2,51
	10	20,47	2,57
	20	20,46	2,63
	30	20,45	2,69
	40	20,44	2,75
	50	20,43	2,81
*278°	98° 0′	— 20,43	— 2,87
	10	20,42	2,93
	20	20,41	2,99
	30	20,40	3,05
	40	20,39	3,11
	50	20,38	3,17
*279°	99° 0′	— 20,37	— 3,23
	10	20,36	3,29
	20	20,35	3,35
	30	20,34	3,40
	40	20,33	3,46
	50	20,32	3,52
*280°	100° 0′	— 20,31	— 3,58

φ		ξ	η
*280°	100° 0′	— 20,31	— 3,58
	10	20,30	3,64
	20	20,29	3,70
	30	20,28	3,76
	40	20,27	3,82
	50	20,26	3,88
*281°	101° 0′	— 20,25	— 3,94
	10	20,24	3,99
	20	20,22	4,05
	30	20,21	4,11
	40	20,20	4,17
	50	20,19	4,23
*282°	102° 0′	— 20,18	— 4,29
	10	20,16	4,35
	20	20,15	4,41
	30	20,14	4,46
	40	20,12	4,52
	50	20,11	4,58
*283°	103° 0′	— 20,10	— 4,64
	10	20,08	4,70
	20	20,07	4,76
	30	20,06	4,82
	40	20,04	4,87
	50	20,03	4,93
*284°	104° 0′	— 20,01	— 4,99
	10	20,00	5,05
	20	19,98	5,11
	30	19,97	5,16
	40	19,95	5,22
	50	19,94	5,28
*285°	105° 0′	— 19,92	— 5,34
	10	19,91	5,40
	20	19,89	5,45
	30	19,88	5,51
	40	19,86	5,57
	50	19,84	5,63
*286°	106° 0′	— 19,83	— 5,69
	10	19,81	5,74
	20	19,79	5,80
	30	19,78	5,86
	40	19,76	5,92
	50	19,74	5,97
*287°	107° 0′	— 19,73	— 6,03
	10	19,71	6,09
	20	19,69	6,15
	30	19,67	6,20
	40	19,65	6,26
	50	19,64	6,32
*288°	108° 0′	— 19,62	— 6,37
	10	19,60	6,43
	20	19,58	6,49
	30	19,56	6,54
	40	19,54	6,60
	50	19,52	6,66
*289°	109° 0′	— 19,50	— 6,72
	10	19,48	6,77
	20	19,46	6,83
	30	19,44	6,89
	40	19,42	6,94
	50	19,40	7,00
*290°	110° 0′	— 19,38	— 7,05

φ		ξ	η
*290°	110° 0′	— 19,38	— 7,05
	10	19,36	7,11
	20	19,34	7,17
	30	19,32	7,22
	40	19,30	7,28
	50	19,28	7,34
*291°	111° 0′	— 19,26	— 7,39
	10	19,23	7,45
	20	19,21	7,50
	30	19,19	7,56
	40	19,17	7,62
	50	19,15	7,67
*292°	112° 0′	— 19,12	— 7,73
	10	19,10	7,78
	20	19,08	7,84
	30	19,06	7,89
	40	19,03	7,95
	50	19,01	8,00
*293°	113° 0′	— 18,99	— 8,06
	10	18,96	8,11
	20	18,94	8,17
	30	18,92	8,22
	40	18,89	8,28
	50	18,87	8,33
*294°	114° 0′	— 18,84	— 8,39
	10	18,82	8,44
	20	18,79	8,50
	30	18,77	8,55
	40	18,74	8,61
	50	18,72	8,66
*295°	115° 0′	— 18,69	— 8,72
	10	18,67	8,77
	20	18,64	8,83
	30	18,62	8,88
	40	18,59	8,93
	50	18,57	8,99
*296°	116° 0′	— 18,54	— 9,04
	10	18,51	9,10
	20	18,49	9,15
	30	18,46	9,20
	40	18,43	9,26
	50	18,41	9,31
*297°	117° 0′	— 18,38	— 9,36
	10	18,35	9,42
	20	18,32	9,47
	30	18,30	9,52
	40	18,27	9,58
	50	18,24	9,63
*298°	118° 0′	— 18,21	— 9,68
	10	18,18	9,74
	20	18,16	9,79
	30	18,13	9,84
	40	18,10	9,89
	50	18,07	9,95
*299°	119° 0′	— 18,04	— 10,00
	10	18,01	10,05
	20	17,98	10,10
	30	17,95	10,16
	40	17,92	10,21
	50	17,89	10,25
*300°	120° 0′	— 17,86	— 10,31

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung.

φ		ξ	η
*300°	120° 0′	— 17,86	— 10,31
	10	17,83	10,37
	20	17,80	10,42
	30	17,77	10,47
	40	17,74	10,52
	50	17,71	10,57
*301°	121° 0′	— 17,68	— 10,62
	10	17,65	10,67
	20	17,62	10,73
	30	17,59	10,78
	40	17,56	10,83
	50	17,52	10,88
*302°	122° 0′	— 17,49	— 10,93
	10	17,46	10,98
	20	17,43	11,03
	30	17,40	11,08
	40	17,37	11,13
	50	17,33	11,18
*303°	123° 0′	— 17,30	— 11,23
	10	17,27	11,28
	20	17,23	11,33
	30	17,20	11,38
	40	17,17	11,43
	50	17,13	11,48
*304°	124° 0′	— 17,10	— 11,53
	10	17,07	11,58
	20	17,03	11,63
	30	17,00	11,68
	40	16,96	11,73
	50	16,93	11,78
*305°	125° 0′	— 16,90	— 11,83
	10	16,86	11,88
	20	16,83	11,93
	30	16,79	11,98
	40	16,76	12,03
	50	16,72	12,08
*306°	126° 0′	— 16,69	— 12,12
	10	16,65	12,17
	20	16,62	12,22
	30	16,58	12,27
	40	16,54	12,32
	50	16,51	12,37
*307°	127° 0′	— 16,47	— 12,41
	10	16,44	12.46
	20	16,40	12,51
	30	16,36	12,56
	40	16,33	12,60
	50	16,29	12,65
*308°	128° 0′	— 16,25	— 12,70
	10	16,22	12,75
	20	16,18	12,79
	30	16,14	12,84
	40	16,10	12,89
	50	16,07	12,93
*309°	129° 0′	— 16,03	— 12,98
	10	15,99	13,03
	20	15,95	13,07
	30	15,92	13,12
	40	15,88	13,17
	50	15,84	13,21
*310°	130° 0′	— 15,80	— 13,26

φ		ξ	η
*310°	130° 0′	— 15,80	— 13,26
	10	15,76	13,30
	20	15,72	13,35
	30	15,68	13,40
	40	15,65	13,44
	50	15,61	13,49
*311°	131° 0′	— 15,57	— 13,53
	10	15,53	13,58
	20	15,49	13,62
	30	15,45	13,67
	40	15,41	13,71
	50	15,37	13,76
*312°	132° 0′	— 15,33	— 13,80
	10	15,29	13,85
	20	15,25	13,89
	30	15,21	13,94
	40	15,17	13,98
	50	15,13	14,02
*313°	133° 0′	— 15,09	— 14,07
	10	15.04	14,11
	20	15,00	14,15
	30	14,96	14,20
	40	14,92	14,24
	50	14,88	14,28
*314°	134° 0′	— 14,84	— 14,33
	10	14,80	14,37
	20	14,75	14,41
	30	14,71	14,46
	40	44,67	14,50
	50	14,63	14,54
*315°	135° 0′	— 14,59	— 14,59
	10	14,54	14,63
	20	14,50	14,67
	30	14,46	14,71
	40	14,41	14.75
	50	14,37	14,80
*316°	136° 0′	— 14,33	— 14,84
	10	14,28	14,88
	20	14,24	14,92
	30	14,20	14,96
	40	14,15	15,00
	50	14,11	15,04
*317°	137° 0′	— 14,07	— 15,09
	10	14,02	15,13
	20	13,98	15,17
	30	13,94	15,21
	40	13,89	15,25
	50	13,85	15,29
*318°	138° 0′	— 13,80	— 15,33
	10	13,76	15,37
	20	13,71	15,41
	30	13,67	15,45
	40	13,62	15,49
	50	13,58	15,53
*319°	139° 0′	— 13,53	— 15,57
	10	13,49	15,61
	20	13,44	15,65
	30	13,40	15,68
	40	13,35	15,72
	50	13,30	15,76
*320°	140° 0′	— 13,26	— 15,80

φ		ξ	η
*320°	140° 0′	— 13,26	— 15,80
	10	13,21	15,84
	20	13,17	15,88
	30	13,12	15,92
	40	13,07	15,95
	50	13,03	15,99
*321°	141° 0′	— 12,98	— 16,03
	10	12,93	16,07
	20	12,89	16,10
	30	12,84	16,14
	40	12,79	16,18
	50	12,75	16,22
*322°	142° 0′	— 12,70	— 16,25
	10	12,65	16,29
	20	12,60	16,33
	30	12,56	16,36
	40	12,51	16,40
	50	12,46	16,44
*323°	143° 0′	— 12,41	— 16,47
	10	12,37	16,51
	20	12,32	16,54
	30	12,27	16,58
	40	12,22	16,62
	50	12,17	16,65
*324°	144° 0′	— 12,12	— 16,69
	10	12,08	16,72
	20	12,03	16,76
	30	11,98	16,79
	40	11,93	16,83
	50	11,88	16,86
*325°	145° 0′	— 11,83	— 16,90
	10	11,78	16,93
	20	11,73	16,96
	30	11,68	17,00
	40	11,63	17,03
	50	11,58	17,07
*326°	146° 0′	— 11,53	— 17,10
	10	11,48	17,13
	20	11,43	17,17
	30	11,38	17,20
	40	11,33	17,23
	50	11,28	17,27
*327°	147° 0′	— 11,23	— 17,30
	10	11,18	17,33
	20	11,13	17,37
	30	11,08	17,40
	40	11,03	17,43
	50	10,98	17,46
*328°	148° 0′	— 10,93	— 17,49
	10	10,88	17,52
	20	10,83	17,56
	30	10,78	17,59
	40	10,73	17,62
	50	10,67	17,65
*329°	149° 0′	— 10,62	— 17,68
	10	10,57	17,71
	20	10,52	17,74
	30	10,47	17,77
	40	10,42	17,80
	50	10,37	17,83
*330°	150° 0′	— 10,31	— 17,86

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung.

φ		ξ	η
*330°	150° 0′	— 10,31	— 17,86
	10	10,26	17,89
	20	10,21	17,92
	30	10,16	17,95
	40	10,10	17,98
	50	10,05	18,01
*331°	151° 0′	— 10,00	— 18,04
	10	9,95	18,07
	20	9,89	18,10
	30	9,84	18,13
	40	9,79	18,16
	50	9,74	18,18
*332°	152° 0′	— 9,68	— 18,21
	10	9,63	18,24
	20	9,58	18,27
	30	9,52	18,30
	40	9,47	18,32
	50	9,42	18,35
*333°	153° 0′	— 9,36	— 18,38
	10	9,31	18,41
	20	9,26	18,43
	30	9,20	18,46
	40	9,15	18,49
	50	9,10	18,51
*334°	154° 0′	— 9,04	— 18,54
	10	8,99	18,57
	20	8,93	18,59
	30	8,88	18,62
	40	8,83	18,64
	50	8,77	18,67
*335°	155° 0′	— 8,72	— 18,69
	10	8,66	18,72
	20	8,61	18,74
	30	8,55	18,77
	40	8,50	18,79
	50	8,44	18,82
*336°	156° 0′	— 8,39	— 18,84
	10	8,33	18,87
	20	8,28	18,89
	30	8,22	18,92
	40	8,17	18,94
	50	8,11	18,96
*337°	157° 0′	— 8,06	— 18,99
	10	8,00	19,01
	20	7,95	19,03
	30	7,89	19,06
	40	7,84	19,08
	50	7,78	19,10
*338°	158° 0′	— 7,73	— 19,12
	10	7,67	19,15
	20	7,62	19,17
	30	7,56	19,19
	40	7,50	19,21
	50	7,45	19,23
*339°	159° 0′	— 7,39	— 19,26
	10	7,34	19,28
	20	7,28	19,30
	30	7,22	19,32
	40	7,17	19,34
	50	7,11	19,36
*340°	160° 0′	— 7,05	— 19,38

φ		ξ	η
*340°	160° 0′	— 7,05	— 19,38
	10	7,00	19,40
	20	6,94	19,42
	30	6,89	19,44
	40	6,83	19,46
	50	6,77	19,48
*341°	161° 0′	— 6,72	— 19,50
	10	6,66	19,52
	20	6,60	19,54
	30	6,54	19,56
	40	6,49	19,58
	50	6,43	19,60
*342°	162° 0′	— 6,37	— 19,62
	10	6,32	19,64
	20	6,26	19,65
	30	6,20	19,67
	40	6,15	19,69
	50	6,09	19,71
*343°	163° 0′	— 6,03	— 19,73
	10	5,97	19,74
	20	5,92	19,76
	30	5,86	19,78
	40	5,80	19,79
	50	5,74	19,81
*344°	164° 0′	— 5,69	— 19,83
	10	5,63	19,84
	20	5,57	19,86
	30	5,51	19,88
	40	5,45	19,89
	50	5,40	19,91
*345°	165° 0′	— 5,34	— 19,92
	10	5,28	19,94
	20	5,22	19,95
	30	5,16	19,97
	40	5,11	19,98
	50	5,05	20,00
*346°	166° 0′	— 4,99	— 20,01
	10	4,93	20,03
	20	4,87	20,04
	30	4,82	20,06
	40	4,76	20,07
	50	4,70	20,08
*347°	167° 0′	— 4,64	— 20,10
	10	4,58	20,11
	20	4,52	20,12
	30	4,46	20,14
	40	4,41	20,15
	50	4,35	20,16
*348°	168° 0′	— 4,29	— 20,18
	10	4,23	20,19
	20	4,17	20,20
	30	4,11	20,21
	40	4,05	20,22
	50	3,99	20,24
*349°	169° 0′	— 3,94	— 20,25
	10	3,88	20,26
	20	3,82	20,27
	30	3,76	20,28
	40	3,70	20,29
	50	3,64	20,30
*350°	170° 0′	— 3,58	— 20,31

φ		ξ	η
*350°	170° 0′	— 3,58	— 20,31
	10	3,52	20,32
	20	3,46	20,33
	30	3,40	20,34
	40	3,35	20,35
	50	3,29	20,36
*351°	171° 0′	— 3,23	— 20,37
	10	3,17	20,38
	20	3,11	20,39
	30	3,05	20,40
	40	2,99	20,41
	50	2,93	20,42
*352°	172° 0′	— 2,87	— 20,43
	10	2,81	20,43
	20	2,75	20,44
	30	2,69	20,45
	40	2,63	20,46
	50	2,57	20,47
*353°	173° 0′	— 2,51	— 20,47
	10	2,45	20,48
	20	2,39	20,49
	30	2,33	20,49
	40	2,28	20,50
	50	2,22	20,51
*354°	174° 0′	— 2,16	— 20,51
	10	2,10	20,52
	20	2,04	20,53
	30	1,98	20,53
	40	1,92	20,54
	50	1,86	20,54
*355°	175° 0′	— 1,80	— 20,55
	10	1,74	20,55
	20	1,68	20,56
	30	1,62	20,56
	40	1,56	20,57
	50	1,50	20,57
*356°	176° 0′	— 1,44	— 20,58
	10	1,38	20,58
	20	1,32	20,58
	30	1,26	20,59
	40	1,20	20,59
	50	1,14	20,59
*357°	177° 0′	— 1,08	— 20,60
	10	1,02	20,60
	20	0,96	20,60
	30	0,90	20,61
	40	0,84	20,61
	50	0,78	20,61
*358°	178° 0′	— 0,72	— 20,61
	10	0,66	20,62
	20	0,60	20,62
	30	0,54	20,62
	40	0,48	20,62
	50	0,42	20,62
*359°	179° 0′	— 0,36	— 20,62
	10	0,30	20,62
	20	0,24	20,63
	30	0,18	20,63
	40	0,12	20,63
	50	0,06	20,63
*360°	180° 0′	— 0,00	— 20,63

(vgl. S. 331, 343, 351.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Richtungs-Coefficienten für 1 Kilometer Entfernung

für neue Kreisteilung.

φ		ξ		η	
*200 g	0 g	— 0,00	1,00	+ 63,66	0,01
201	1	1,00	1,00	63,65	0,02
202	2	2,00	1,00	63,63	0,04
203	3	3,00	1,00	63,59	0,05
204	4	4,00	0,99	63,54	0,07
*205 g	5 g	— 4,99	1,00	+ 63,47	0,09
206	6	5,99	1,00	63,38	0,10
207	7	6,99	0,99	63,28	0,12
208	8	7,98	0,99	63,16	0,13
209	9	8,97	0,99	63,03	0,15
*210 g	10 g	— 9,96	0,99	+ 62,88	0,17
211	11	10,95	0,98	62,71	0,18
212	12	11,93	0,98	62,53	0,19
213	13	12,91	0,98	62,34	0,21
214	14	13,89	0,97	62,13	0,23
*215 g	15 g	— 14,86	0,97	+ 61,90	0,24
216	16	15,83	0,97	61,66	0,25
217	17	16,80	0,96	61,41	0,28
218	18	17,76	0,96	61,13	0,28
219	19	18,72	0,95	60,85	0,30
*220 g	20 g	— 19,67	0,95	+ 60,55	0,32
221	21	20,62	0,94	60,23	0,33
222	22	21,56	0,94	59,90	0,35
223	23	22,50	0,94	59,55	0,36
224	24	23,44	0,92	59,19	0,37
*225 g	25 g	— 24,36	0,92	+ 58,82	0,39
226	26	25,28	0,92	58,43	0,41
227	27	26,20	0,91	58,02	0,42
228	28	27,11	0,90	57,60	0,43
229	29	28,01	0,89	57,17	0,45
*230 g	30 g	— 28,90	0,89	+ 56,72	0,46
231	31	29,79	0,88	56,26	0,47
232	32	30,67	0,87	55,79	0,49
233	33	31,54	0,87	55,30	0,50
234	34	32,41	0,85	54,80	0,52
*235 g	35 g	— 33,26	0,85	+ 54,28	0,53
236	36	34,11	0,84	53,75	0,54
237	37	34,95	0,83	53,21	0,56
238	38	35,78	0,83	52,65	0,56
239	39	36,61	0,81	52,09	0,59
*240 g	40 g	— 37,42	0,80	+ 51,50	0,59
241	41	38,22	0,80	50,91	0,61
242	42	39,02	0,78	50,30	0,62
243	43	39,80	0,78	49,68	0,63
244	44	40,58	0,76	49,05	0,64
*245 g	45 g	— 41,34	0,76	+ 48,41	0,66
246	46	42,10	0,75	47,75	0,66
247	47	42,85	0,73	47,09	0,68
248	48	43,58	0,72	46,41	0,69
249	49	44,30	0,72	45,72	0,70
*250 g	50 g	— 45,02		+ 45,02	

φ		ξ		η	
*250 g	50 g	— 45,02	0,60	+ 45,02	0,72
251	51	45,72	0,69	44,30	0,72
252	52	46,41	0,68	43,58	0,73
253	53	47,09	0,66	42,85	0,75
254	54	47,75	0,66	42,10	0,76
*255 g	55 g	— 48,41	0,64	+ 41,34	0,76
256	56	49,05	0,63	40,58	0,78
257	57	49,68	0,62	39,80	0,78
258	58	50,30	0,61	39,02	0,80
259	59	50,91	0,59	38,22	0,80
*260 g	60 g	— 51,50	0,59	+ 37,42	0,81
261	61	52,09	0,56	36,61	0,83
262	62	52,65	0,56	35,78	0,83
263	63	53,21	0,54	34,95	0,84
264	64	53,75	0,53	34,11	0,85
*265 g	65 g	— 54,28	0,52	+ 33,26	0,85
266	66	54,80	0,50	32,41	0,87
267	67	55,30	0,49	31,54	0,87
268	68	55,79	0,47	30,67	0,88
269	69	56,26	0,46	29,79	0,89
*270 g	70 g	— 56,72	0,45	+ 28,90	0,89
271	71	57,17	0,43	28,01	0,90
272	72	57,60	0,42	27,11	0,91
273	73	58,02	0,41	26,20	0,92
274	74	58,43	0,39	25,28	0,92
*275 g	75 g	— 58,82	0,37	+ 24,36	0,92
276	76	59,19	0,36	23,44	0,94
277	77	59,55	0,35	22,50	0,94
278	78	59,90	0,33	21,56	0,94
279	79	60,23	0,32	20,62	0,95
*280 g	80 g	— 60,55	0,30	+ 19,67	0,95
281	81	60,85	0,28	18,72	0,96
282	82	61,13	0,28	17,76	0,96
283	83	61,41	0,25	16,80	0,97
284	84	61,66	0,24	15,83	0,97
*285 g	85 g	— 61,90	0,23	+ 14,86	0,97
286	86	62,13	0,21	13,89	0,98
287	87	62,34	0,19	12,91	0,98
288	88	62,53	0,18	11,93	0,98
289	89	62,71	0,17	10,95	0,99
*290 g	90 g	— 62,88	0,15	+ 9,96	0,99
291	91	63,03	0,13	8,97	0,99
292	92	63,16	0,12	7,98	0,99
293	93	63,28	0,10	6,99	1,00
294	94	63,38	0,09	5,99	1,00
*295 g	95 g	— 63,47	0,07	+ 4,99	0,99
296	96	63,54	0,05	4,00	1,00
297	97	63,59	0,04	3,00	1,00
298	98	63,63	0,02	2,00	1,00
299	99	63,65	0,01	1,00	1,00
*300 g	100 g	— 63,66		+ 0,00	

*) Für die mit * bezeichneten Werte φ sind ξ und η mit umgekehrten Vorzeichen zu nehmen.

(vgl. S. 331.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$\xi = -63{,}6620 \sin\varphi \ , \ \eta = +63{,}6620 \cos\varphi.$$

für neue Kreisteilung.

φ		ξ		η	
* 300 g	100 g	— 63,66	0,01	— 0,00	1,00
301	101	63,65	0,02	1,00	1,00
302	102	63,63	0,04	2,00	1,00
303	103	63,59	0,05	3,00	1,00
304	104	63,54		4,00	
			0 07		0,99
* 305 g	105 g	— 63,47	0,09	— 4,99	1,00
306	106	63,38	0,10	5,99	1,00
307	107	63,28	0,12	6,99	0,99
308	108	63,16	0,13	7,98	0,99
309	109	63,03		8,97	
			0,15		0,99
* 310 g	110 g	— 62,88	0,17	— 9,96	0,99
311	111	62,71	0,18	10,95	0,98
312	112	62,53	0,19	11,93	0,98
313	113	62,34	0,21	12,91	0,98
314	114	62,13		13,89	
			0,23		0,97
* 315 g	115 g	— 61,90	0,24	— 14,86	0,97
316	116	61,66	0,25	15,83	0,97
317	117	61,41	0,28	16,80	0,96
318	118	61,13	0,28	17,76	0,96
319	119	60,85		18,72	
			0,30		0,95
* 320 g	120 g	— 60,55	0,32	— 19,67	0,95
321	121	60,23	0,33	20,62	0,94
322	122	59,90	0,35	21,56	0,94
323	123	59,55	0,36	22,50	0,94
324	124	59,19		23,44	
			0,37		0,92
* 325 g	125 g	— 58,82	0,39	— 24,36	0,92
326	126	58,43	0,41	25,28	0,92
327	127	58,02	0,42	26,20	0,91
328	128	57,60	0,43	27,11	0,90
329	129	57,17		28,01	
			0,45		0,89
* 330 g	130 g	— 56,72	0,46	— 28,90	0,89
331	131	56,26	0,47	29,79	0,88
332	132	55,79	0,49	30,67	0,87
333	133	55,30	0,50	31,54	0,87
334	134	54,80		32,41	
			0,52		0,85
* 335 g	135 g	— 54,28	0,53	— 33,26	0,85
336	136	53,75	0,54	34,11	0,84
337	137	53,21	0,56	34,95	0,83
338	138	52,65	0,56	35,78	0,83
339	139	52,09		36,61	
			0,59		0,81
* 340 g	140 g	— 51,50	0,59	— 37,42	0,80
341	141	50,91	0,61	38,22	0,80
342	142	50,30	0,62	39,02	0,78
343	143	49,68	0,63	39,80	0,78
344	144	49,05		40,58	
			0,64		0,76
* 345 g	145 g	— 48,41	0,66	— 41,34	0,76
346	146	47,75	0,66	42,10	0,75
347	147	47,09	0,68	42,85	0,73
348	148	46,41	0,69	43,58	0,72
349	149	45,72	0,70	44,30	0,72
* 350 g	150 g	— 45,02		— 45,02	

φ		ξ		η	
* 350 g	150 g	— 45,02	0,72	— 45,02	0,70
351	151	44,30	0,72	45,72	0,69
352	152	43,58	0,73	46,41	0,68
353	153	42,85	0,75	47,09	0,66
354	154	42,10		47,75	
			0,76		0,66
* 355 g	155 g	— 41,34	0,76	— 48,41	0,64
356	156	40,58	0,78	49,05	0,63
357	157	39,80	0,78	49,68	0,62
358	158	39,02	0,80	50,30	0,61
359	159	38,22		50,91	
			0,80		0,59
* 360 g	160 g	— 37,42	0,81	— 51,50	0,59
361	161	36,61	0,83	52,09	0,56
362	162	35,78	0,83	52,65	0,56
363	163	34,95	0,84	53,21	0,54
364	164	34,11		53,75	
			0,85		0,53
* 365 g	165 g	— 33,26	0,85	— 54,28	0,52
366	166	32,41	0,87	54,80	0,50
367	167	31,54	0,87	55,30	0,49
368	168	30,67	0,88	55,79	0,47
369	169	29,79		56,26	
			0,89		0,46
* 370 g	170 g	— 28,90	0,89	— 56,72	0,45
371	171	28,01	0,90	57,17	0,43
372	172	27,11	0,91	57,60	0,42
373	173	26,20	0,92	58,02	0,41
374	174	25,28		58,43	
			0,92		0,39
* 375 g	175 g	— 24,36	0,92	— 58,82	0,37
376	176	23,44	0,94	59,19	0,36
377	177	22,50	0,94	59,55	0,35
378	178	21,56	0,94	59,90	0,33
379	179	20,62		60,23	
			0,95		0,32
* 380 g	180 g	— 19,67	0,95	— 60,55	0,30
381	181	18,72	0,96	60,85	0,28
382	182	17,76	0,96	61,13	0,28
383	183	16,80	0,97	61,41	0,25
384	184	15,83		61,66	
			0,97		0,24
* 385 g	185 g	— 14,86	0,97	— 61,90	0,23
386	186	13,89	0,98	62,13	0,21
387	187	12,91	0,98	62,34	0,19
388	188	11,93	0,98	62,53	0,18
389	189	10,95		62,71	
			0,99		0,17
* 390 g	190 g	— 9,96	0,99	— 62,88	0,15
391	191	8,97	0,99	63,03	0,13
392	192	7,98	0,99	63,16	0,12
393	193	6,99	1,00	63,28	0,10
394	194	5,99		63,38	
			1,00		0,09
* 395 g	195 g	— 4,99	0,99	— 63,47	0,07
396	196	4,00	1,00	63,54	0,05
397	197	3,00	1,00	63,59	0,04
398	198	2,00	1,00	63,63	0,02
399	199	1,00	1,00	63,65	0,01
* 400 g	200 g	— 0,00		— 63,66	

(vgl. S. 331.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$a^2 + b^2 = \frac{\varrho^2}{100\, s^2} \qquad (\text{für } a = \frac{\varrho}{10\, s} \sin\varphi \quad b = \frac{\varrho}{10\, s} \cos\varphi)$$

s	00^m	10^m	20^m	30^m	40^m	50^m	60^m	70^m	80^m	90^m
0,1 km	42545	35161	29545	25174	21706	18909	16619	14722	13131	11785
0,2	10635	9648	8790	8043	7386	6807	6294	5836	5427	5059
0,3	4727	4427	4155	3907	3680	3473	3283	3108	2946	2797
0,4	2659	2531	2412	2301	2198	2101	2011	1926	1847	1772
0,5	1702	1636	1573	1515	1459	1406	1357	1309	1265	1222
0,6	1182	1143	1108	1072	1039	1007	977	927	920	894
0,7	868	844	821	798	777	756	737	718	699	682
0,8	665	648	633	618	603	589	575	562	549	537
0,9	525	514	503	492	481	471	462	452	443	434
1,0	425	417	409	401	393	386	379	372	365	358
1,1	352	345	339	333	327	322	316	311	306	300
1,2	295	291	286	281	277	272	268	264	260	256
1,3	252	248	244	241	237	233	230	227	223	220
1,4	217	214	211	208	205	202	200	196	194	192
1,5	189	187	184	182	179	177	175	173	170	168
1,6	166	164	162	160	158	156	154	153	151	149
1,7	147	145	144	142	141	139	137	136	134	133
1,8	131	130	128	127	126	124	123	122	120	119
1,9	118	117	115	114	113	112	111	110	109	107
2,0	106	105	104	103	102	101	100	99	98	97
2,1	96	96	95	94	93	92	91	90	89	89
2,2	88	87	86	86	85	84	83	83	82	81
2,3	80	80	79	78	78	77	76	76	75	74
2,4	74	73	73	72	72	71	70	70	69	69
2,5	68,1	67,5	67,0	66,5	66,0	65,4	65,0	64,4	63,9	63,4
2,6	62,9	62,5	62,0	61,5	61,0	60,6	60,1	59,7	59,2	58,8
2,7	58,4	57,9	57,5	57,1	56,7	56,3	55,8	55,4	55,0	54,6
2,8	54,3	53,9	53,5	53,1	52,7	52,4	52,0	51,7	51,3	50,9
2,9	50,6	50,3	49,9	49,6	49,2	48,9	48,6	48,2	47,9	47,6
3,0	47,3	47,0	46,6	46,3	46,0	45,7	45,4	45,1	44,9	44,6
3,1	44,3	44,0	43,7	43,4	43,2	42,9	42,6	42,3	42,1	41,8
3,2	41,5	41,3	41,0	40,8	40,5	40,3	40,0	39,8	39,5	39,3
3,3	39,1	38,8	38,6	38,4	38,1	37,9	37,7	37,5	37,2	37,0
3,4	36,8	36,6	36,4	36,2	36,0	35,7	35,5	35,3	35,1	34,9
3,5	34,7	34,5	34,3	34,1	33,9	33,8	33,6	33,4	33,2	33,0
3,6	32,8	32,6	32,5	32,3	32,1	31,9	31,7	31,6	31,4	31,2
3,7	31,1	30,9	30,7	30,6	30,4	30,3	30,1	29,9	29,8	29,6
3,8	29,5	29,3	29,2	29,0	28,9	28,7	28,6	28,4	28,3	28,1
3,9	28,0	27,8	27,7	27,5	27,4	27,3	27,1	27,0	26,9	26,7
4,0	26,6	26,5	26,3	26,2	26,1	25,9	25,8	25,7	25,6	25,4
4,1	25,3	25,2	25,1	24,9	24,8	24,7	24,6	24,5	24,3	24,2
4,2	24,1	24,0	23,9	23,8	23,7	23,6	23,4	23,3	23,2	23,1
4,3	23,0	22,9	22,8	22,7	22,6	22,5	22,4	22,3	22,2	22,1
4,4	22,0	21,9	21,8	21,7	21,6	21,5	21,4	21,3	21,2	21,1
4,5	21,0	20,9	20,8	20,7	20,6	20,6	20,5	20,4	20,3	20,2
4,6	20,1	20,0	19,9	19,8	19,8	19,7	19,6	19,5	19,4	19,3
4,7	19,3	19,2	19,1	19,0	18,9	18,9	18,8	18,7	18,6	18,5
4,8	18,5	18,4	18,3	18,2	18,2	18,1	18,0	17,9	17,9	17,8
4,9	17,7	17,6	17,6	17,5	17,4	17,4	17,3	17,2	17,2	17,1
5,0	17,0	17,0	16,9	16,9	16,8	16,7	16,7	16,6	16,5	16,4

(vgl. S. 559.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

$$A = \frac{\varrho}{10} \sin\varphi \cos\varphi \qquad B = \frac{\varrho^2}{100} \sin\varphi \cos\varphi$$

φ				$\log A$	$\log B$	φ			
270°	180°	90°	0°	$-\infty$	$-\infty$	90°	180°	270°	360°
271	181	91	1	2.5562	6.8706	89	179	268	359
272	182	92	2	2.8570	7.1714	88	178	268	358
273	183	93	3	3.0326	7.3471	87	177	267	357
274	184	94	4	3.1570	7.4714	86	176	266	356
275°	185°	95°	5°	3.2531	7.5675	85°	175°	265°	355°
276	186	96	6	3.3313	7.6457	84	174	264	354
277	187	97	7	3.3971	7.7115	83	173	263	353
278	188	98	8	3.4537	7.7682	82	172	262	352
279	189	99	9	3.5034	7.8178	81	171	261	351
280°	190°	100°	10°	3.5474	7.8619	80°	170°	260°	350°
281	191	101	11	3.5870	7.9014	79	169	259	349
282	192	102	12	3.6227	7.9371	78	168	258	348
283	193	103	13	3.6552	7.9697	77	167	257	347
284	194	104	14	3.6850	7.9994	76	166	256	346
285°	195°	105°	15°	3.7124	8.0268	75°	165°	255°	355°
286	196	106	16	3.7376	8.0520	74	164	254	344
287	197	107	17	3.7610	8.0754	73	163	253	343
288	198	108	18	3.7826	8.0970	72	162	252	342
289	199	109	19	3.8027	8.1172	71	161	251	341
290°	200°	110°	20°	3.8215	8.1359	70°	160°	250°	340°
291	201	111	21	3.8389	8.1533	69	159	249	339
292	202	112	22	3.8552	8.1696	68	158	248	338
293	203	113	23	3.8703	8.1848	67	157	247	337
294	204	114	24	3.8845	8.1989	66	156	246	336
295°	205°	115°	25°	3.8976	8.2121	65°	155°	245°	335°
296	206	116	26	3.9099	8.2244	64	154	244	334
297	207	117	27	3.9214	8.2358	63	153	243	333
298	208	118	28	3.9320	8.2464	62	152	242	332
299	209	119	29	3.9418	8.2562	61	151	241	331
300°	210°	120°	30°	3.9509	8.2654	60°	150°	240°	330°
301	211	121	31	3.9593	8.2738	59	149	239	329
302	212	122	32	3.9671	8.2815	58	148	238	328
303	213	123	33	3.9741	8.2886	57	147	237	327
304	214	124	34	3.9806	8.2950	56	146	236	326
305°	215°	125°	35°	3.9864	8.3018	55°	145°	235°	325°
306	216	126	36	3.9916	8.3060	54	144	234	324
307	217	127	37	3.9962	8.3107	53	143	233	323
308	218	128	38	4.0003	8.3147	52	142	232	322
309	219	129	39	4.0038	8.3182	51	141	231	321
310°	220°	130°	40°	4.0067	8.3212	50°	140°	230°	320°
311	221	131	41	4.0091	8.3236	49	139	229	319
312	222	132	42	4.0110	8.3254	48	138	228	318
313	223	133	43	4.0123	8.3268	47	137	227	317
314	224	134	44	4.0131	8.3276	46	136	226	316
315	225	135	45	4.0134	8.3278	45	135	225	315

$$a = -\frac{A}{\Delta x} \quad , \quad b = +\frac{A}{\Delta y} \quad , \quad a\,b = -\frac{B}{s^2}$$ (vgl. S. 333.)

(vgl. S. 333.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n fachen *wahrscheinlichen* Fehler.

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	diff.
0,0	0,0000	0,0054	0,0108	0,0161	0,0215	0,0269	0,0323	0,0377	0,0430	0,0484	54
0,1	0538	0591	0645	0699	0752	0806	0859	0913	0966	1020	53
0,2	1073	1126	1180	1233	1286	1339	1392	1445	1498	1551	52
0,3	1603	1656	1709	1761	1814	1866	1918	1971	2023	2075	52
0,4	2127	2179	2230	2282	2334	2385	2436	2488	2539	2590	51
0,5	0,2641	0,2691	0,2742	0,2793	0,2843	0,2893	0,2944	0,2994	0,3043	0,3093	50
0,6	3143	3192	3242	3291	3340	3389	3438	3487	3535	3583	49
0,7	3632	3680	3728	3775	3823	3870	3918	3965	4012	4059	46
0,8	4105	4152	4198	4244	4290	4336	4381	4427	4472	4517	45
0,9	4562	4606	4651	4695	4739	4783	4827	4860	4914	4957	43
1,0	0,5000	0,5043	0,5085	0,5128	0,5170	0,5212	0,5254	0,5295	0,5337	0,5378	41
1,1	5419	5460	5500	5540	5581	5620	5660	5700	5739	5778	39
1,2	5817	5856	5894	5932	5970	6008	6046	6083	6120	6157	37
1,3	6194	6231	6267	6303	6339	6375	6410	6445	6480	6515	35
1,4	6550	6584	6618	6652	6686	6719	6753	6786	6818	6851	32
1,5	0,6883	0,6915	0,6947	0,6979	0,7011	0,7042	0,7073	0,7104	0,7134	0,7165	30
1,6	7195	7225	7255	7284	7313	7342	7371	7400	7428	7457	28
1,7	7485	7512	7540	7567	7594	7621	7648	7675	7701	7727	26
1,8	7753	7778	7804	7829	7854	7879	7904	7928	7952	7976	24
1,9	8000	8023	8047	8070	8093	8116	8138	8161	8183	8205	22
2,0	0,8227	0,8248	0,8270	0,8291	0,8312	0,8332	0,8353	0,8373	0,8394	0,8414	19
2,1	8433	8453	8473	8492	8511	8530	8549	8567	8585	8604	18
2,2	8622	8639	8657	8674	8692	8709	8726	8742	8759	8775	17
2,3	8792	8808	8824	8840	8855	8870	8886	8901	8916	8930	15
2,4	8945	8960	8974	8988	9002	9016	9029	9043	9056	9069	13
2,5	0,9082	0,9095	0,9108	0,9121	0,9133	0,9146	0,9158	0,9170	0,9182	0,9193	12
2,6	9205	9217	9228	9239	9250	9261	9272	9283	9293	9304	10
2,7	9314	9324	9334	9344	9354	9364	9373	9383	9392	9401	9
2,8	9410	9419	9428	9437	9446	9454	9463	9471	9479	9487	8
2,9	9495	9503	9511	9519	9526	9534	9541	9548	9556	9563	7
3,0	0,9570	0,9577	0,9583	0,9590	0,9597	0,9603	0,9610	0,9616	0,9622	0,9629	6
3,1	9635	9641	9647	9652	9658	9664	9669	9675	9680	9686	5
3,2	9691	9696	9701	9706	9711	9716	9721	9726	9731	9735	5
3,3	9740	9744	9749	9753	9757	9761	9766	9770	9774	9778	4
3,4	9782	9786	9789	9793	9797	9800	9804	9807	9811	9814	4
3,5	0,9818	0,9821	0,9824	0,9827	0,9830	0,9833	0,9837	0,9840	0,9842	0,9845	3
3,6	9848	9851	9854	9856	9859	9862	9864	9867	9869	9872	2
3,7	9874	9877	9879	9881	9884	9886	9888	9890	9892	9894	2
3,8	9896	9898	9900	9902	9904	9906	9908	9909	9911	9913	2
3,9	9915	9916	9918	9920	9921	9923	9924	9926	9927	9929	1
4,0	9930	9932	9933	9934	9936	9937	9938	9939	9941	9942	1
4,1	9943	9944	9945	9947	9948	9949	9950	9951	9952	9953	1
$n=$	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	
$W=$	0,9943	0,9954	0,9963	0,9970	0,9976	0,9981	0,9985	0,9988	0,9991	0,9993	

(vgl. S. 440.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Wahrscheinlichkeit für das Fallen eines Fehlers zwischen die Grenzen Null und den n fachen *mittleren* Fehler.

n	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09	Diff.
0,0	0,0000	0,0080	0,0159	0,0239	0,0319	0,0399	0,0478	0,0558	0,0637	0,0717	80
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507	78
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282	76
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035	73
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759	70
0,5	0,3829	0,3900	0,3969	0,4039	0,4108	0,4177	0,4245	0,4313	0,4381	0,4448	67
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4908	4971	5035	5098	63
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5746	5705	58
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6090	6157	6211	6265	54
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6680	6729	6778	49
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7016	0,7063	0,7109	0,7154	0,7198	0,7243	44
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7498	7539	7580	7620	7660	39
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8030	34
1,3	8064	8098	8132	8165	8197	8229	8262	8293	8324	8355	30
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638	26
1,5	0,8664	0,8689	0,8715	0,8740	0,8764	0,8789	0,8812	0,8836	0,8859	0,8882	22
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090	19
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9266	15
1,8	9281	9297	9312	9328	9342	9357	9371	9385	9399	9412	14
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9518	9533	9534	11
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634	9
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715	7
2,2	9722	9729	9736	9742	9749	9756	9762	9768	9774	9780	5
2,3	9785	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832	4
2,4	9836	9840	9845	9849	9853	9867	9861	9865	9869	9872	4
2,5	0,9876	0,9879	0,9883	0,9886	0,9889	0,9892	0,9895	0,9898	0,9901	0,9904	3
2,6	9907	9909	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928	3
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947	2
2,8	9949	9950	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961	2
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	1
$n=$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	
$W=$	0,9973	0,9981	0,9986	0,9990	0,9993	0,9995	0,9997	0,9998	0,9999	0,9999	
										$n=\infty$	
$n=$	4,0	4,1								$W=1$	
$W=$	0,9999	1,0000									

(vgl. S. 435.)

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

K.F.K. B.S.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

GHP: 03 M22955

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

P
03

Jordan

Vermessungs-kunde

1

993
B VII
M
22 955