Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

Kapitel I. Allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme.

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Hansen vor 25 Jahren glaubte, bei Triangulierungen brauche man nun fast keine Rücksicht auf schiefe Dreiecke und spitze Winkel zu nehmen, wenn man nur genügend viele Kontrollen hat, deren Gesamtausgleichung alle Schäden heilen sollte.

Andererseits ist es eine Frucht des dritten, reifen, Stadiums, dass die Fehlerwirkung der Messungs-Elemente schon vor Beginn der Messungen selbst erwogen und die Gesamt-Anlage und Auswahl der Messungen darnach getroffen wird.

Zur richtigen Auswahl gehören aber namentlich die schon oben erwähnten mannigfaltigen Fehlergesetze.

Die Theorie der Beobachtungsfehler ist fast der einzig *deductive* Teil unserer sonst wesentlich nur *empirisch-inductiven* Feld- und Landmessung, welche in vielen Beziehungen erst durch Einführung jener Theorie zu dem Range einer Wissenschaft erhoben worden ist.

Versuchen wir zum Schlusse die Entwickelung und die heutige Stellung der M. d. kl. Q. in der Feld- und Landmessung durch wenige zusammenfassende Worte zu charakterisieren, so können wir sagen: Diese Methode hat unserem Fache die wichtigsten Dienste teils auf unmittelbarem, teils auf mittelbarem Wege geleistet, unmittelbar in der Klarstellung und Sicherung der Fehlerausgleichungen und der Genauigkeitsbestimmungen, mittelbar als wichtigster Hebel zur Hebung unseres Faches und Gleichstellung desselben mit den übrigen technischen Wissenschaften.

Kapitel I.

Allgemeine Theorie der kleinsten Fehlerquadratsumme.

In diesem ersten Kapitel werden wir die allgemeine Theorie der Methode der kleinsten Quadrate nach der Definition des mittleren Fehlers und nach dem Princip der kleinsten Fehlerquadratsumme in einem Zuge behandeln, und nur so viel von Anwendungen und Beispielen aufnehmen als zur Erläuterung der Theorien nöthig ist. Die eigentlichen Anwendungen, namentlich geodätischer Natur, werden in den nachfolgenden Kapiteln besonders behandelt werden.

§ 2. Erklärungen.

Wer sich mit Messungen irgend welcher Art beschäftigt, macht dabei die Erfahrung, dass diese Messungen Fehlern ausgesetzt sind.

Man hat hauptsächlich zwei Mittel, die Richtigkeit von Messungen zu prüfen, entweder wiederholt man eine Messung unmittelbar und sieht zu, ob man das Ergebnis der ersten Messung wieder erhält, oder man misst verschiedene Grössen, welche unter sich in einer bekannten Beziehung stehen, je einmal, und untersucht, ob die Messungsergebnisse die erwähnte Beziehung zeigen; z. B. man misst die drei Winkel eines ebenen Dreiecks und vergleicht deren Summe mit 180°. Wenn man bei jeder Messung sich eine derartige Probe verschafft, und dieselbe in aller Strenge verfolgt, so wird man zu dem Schluss geführt, dass keine Messung vollkommen fehlerfrei ist.

Damit ist natürlich nicht gesagt, dass es nicht möglich ist, eine Messung so auszuführen, dass der noch zu fürchtende Fehler so klein ist, dass er für gewisse Zwecke unschädlich bleibt.

Trotz der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen können doch die Fehler gewisse Grenzen nicht übersteigen, sofern der Beobachter die nötige Sorgfalt anwendet. Ist letzteres nicht der Fall, so treten „grobe Fehler“ auf (z. B. falsches Zählen der ganzen Lattenlagen bei Längenmessungen u. A.). Solche grobe Fehler sollen von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen sein.

Gewisse Messungsfehler wirken immer in demselben Sinn, z. B. das Ausweichen der Messlatten aus der zu messenden Geraden führt immer auf ein zu grosses Messungsergebnis. Obgleich die Theorie der Beobachtungsfehler sich auch mit solchen „regelmässigen“ oder „einseitig wirkenden“ Beobachtungsfehlern zu befassen hat, werden wir doch im folgenden, sofern nicht das Gegenteil bemerkt ist, die Annahme machen, dass einseitig wirkende Fehler nicht zu befürchten sind, sondern nur unvermeidliche, unregelmässige Beobachtungsfehler, welche gleichwahrscheinlich positiv oder negativ sind.

Sobald man erkannt hat, dass die *wahren* Werte der beobachteten Grössen in aller Strenge zu bestimmen unmöglich ist, hat man sich ein weniger hohes Ziel zu stecken, nämlich nur die Erreichung der unter gegebenen Umständen *wahrscheinlichsten* Werte der Unbekannten, welche sich der Gesamtheit aller Messungen am besten anpassen. Je nach der Art der Beobachtung und der Anzahl der angewendeten Probemessungen wird man den wahren Werten der Unbekannten mehr oder weniger nahe kommen; man kann deswegen nach Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte noch die Frage aufwerfen, welche Genauigkeit erzielt worden ist.

Es ist hiernach die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus Beobachtungen, welche infolge der unvermeidlichen ihnen anhaftenden Beobachtungsfehler auf Widersprüche führen, diejenigen Ergebnisse zu ziehen, welche sich den Messungen am besten anpassen (oder die geringsten Fehler fürchten lassen); ferner diejenigen Beträge anzugeben, um welche mutmasslich die gefundenen Ergebnisse von der Wahrheit noch abweichen.

Oder mit anderen Worten:

Die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt sich mit der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern und mit der Bestimmung von mittleren zu fürchtenden Fehlern.

§ 3. Der durchschnittliche Fehler.

Die ersten Fehlerbetrachtungen führen immer auf eine Durchschnittsberechnung, welche zwar in der heutigen Fehlertheorie eine nur untergeordnete Rolle spielt, welche aber zur Einführung in das Verständnis der Sache hier zuerst mitgeteilt werden muss.

Wenn die Fehler mehrerer gleichartiger Beobachtungen bekannt sind, so kann man aus diesen Fehlern (absolut genommen, d. h. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) einen Durchschnittswert bilden, welcher „*durchschnittlicher Fehler*“ heisst. Allerdings kennt man die wahren Beobachtungsfehler im allgemeinen ebensowenig als die wahren Werte der beobachteten Grössen, doch hindert dieses nicht, den strengen Begriff des durchschnittlichen Fehlers zu bilden, d. h. wenn $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ eine Anzahl wahrer Beobachtungsfehler von gleicher Art sind, so ist der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} \tag{1}$$

wobei das Zeichen $[\pm\,\varepsilon]$ die absolute Summe der ε im Gegensatz zu der algebraischen Summe andeuten soll, indem die eckige Klammer als Summenzeichen dient.

Als Beispiel für die Berechnung des Durchschnittswertes wahrer Fehler nehmen wir folgendes:

Bei der „Gradmessung in Ostpreussen" wurden in 22 Dreiecken alle Winkel α, β, γ, gemessen und die Winkelsummen mit den theoretischen Summen $180° +$ sphär. Excess verglichen. Dabei ergaben sich folgende 22 Widersprüche:

$$\alpha + \beta + \gamma - (180° + \text{sphär. Excess}) = \varepsilon$$

Num.	Fehler ε	Num.	Fehler ε	Num.	Fehler ε
1.	$+0{,}36''$	9.	$+0{,}56''$	17.	$+1{,}62''$
2.	$+0{,}93$	10.	$0{,}00$	18.	$+1{,}62$
3.	$-0{,}51$	11.	$-0{,}59$	19.	$+1{,}67$
4.	$-1{,}46$	12.	$0{,}00$	20.	$-0{,}72$
5.	$-0{,}95$	13.	$-1{,}36$	21.	$-1{,}35$
6.	$-1{,}40$	14.	$+1{,}86$	22.	$-0{,}98$
7.	$+1{,}76$	15.	$-0{,}42$		7,96
8.	$+0{,}92$	16.	$+1{,}68$		6,47
	8,29		6,47		8,29
				Summe	$22{,}72'' = [\pm\,\varepsilon]$

$$\text{Durchschnitt} = \frac{[\pm\,\varepsilon]}{n} = \frac{22{,}72''}{22} = \pm\,1{,}03''.$$

Betrachtet man nun die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines Dreiecks als Messungsgrösse, so hat man den durchschnittlichen Fehler derselben hiemit bestimmt $= \pm\,1{,}03''$, und dieser Wert als durchschnittlicher Dreiecksfehler hat immer ein gewisses Interesse (dagegen wurde der durchschnittliche Fehler eines einzelnen Dreieckswinkels hiebei nicht gefunden).

Ebenso wie diese Dreiecksschlussfehler haben auch die Differenzen, welche man bei Messungswiederholungen findet, den Charakter *wahrer* Beobachtungsfehler ε.

Im Gegensatz zu diesen *wahren* Beobachtungsfehlern stehen die *scheinbaren* Fehler, welche man z. B. findet, wenn man das arithmetische Mittel mehrerer Beobachtungen mit den einzelnen Beobachtungen vergleicht.

Dieses giebt folgende Formeln:

Beobachtungen: $l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad \ldots l_n$

$$\text{Arithmetisches Mittel:} \quad x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} \tag{2}$$

oder mit Annahme der eckigen Klammer als Zeichen für algebraische Summierung

$$x = \frac{[l]}{n} \tag{3}$$

Man bildet die scheinbaren Fehler, d. h. die Differenzen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots v_n = x - l_n$$

dabei bemerkt man, dass die algebraische Summe dieser Differenzen $= 0$ ist, nämlich

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = n\,x - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots)$$
$$[v] = n\,x - [l] = 0 \text{ wegen (2) oder (3)}$$
$$[v] = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung (4) kann als Rechenprobe dienen.

Diese scheinbaren Fehler v behandelt man näherungsweise wie wahre Beobachtungsfehler ε, d. h. man berechnet nach Anleitung der Gleichung (1) den durchschnittlichen Fehler:

$$t = \frac{[\pm v]}{n}$$

Beispiel. Ein Winkel ist 5mal unabhängig gemessen worden:

Beobachtungen l	Differenzen v	Probe
35° 26′ 16″	+ 2,8″	
20″	— 1,2	
18″	+ 0,8	$[+v] = +7,4$
25″	— 6,2	$[-v] = -7,4$
15″	+ 3,8	$[v] = 0$
Summen: 94″	14,8″	

Mittel $x = 35° \, 26' \, 18{,}8''$ $\qquad t = \frac{14{,}8}{5} = 2{,}96''$.

Damit hat man ein Mass für die mutmassliche Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung. Nun wäre es weiter von Wichtigkeit, zu wissen, wie sich die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zur Genauigkeit des arithmetischen Mittels verhält, allein diese und andere hier sich anschliessende Fragen lassen sich auf Grundlage des durchschnittlichen Fehlers und der vorstehenden einfachen Betrachtungen *nicht* lösen.

Aus diesem Grunde lassen wir jetzt den durchschnittlichen Fehler fallen und gehen zu einem anderen Genauigkeitsmass, dem *mittleren* Fehler über.

§ 4. Der mittlere Fehler.

Nachdem der durchschnittliche Fehler sich als ungeeignet zur Behandlung weiterer Aufgaben der Ausgleichungsrechnung erwiesen hat, machen wir einen Versuch mit einem anderen Mittelwert der Fehler. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ vorliegt, so bilden wir daraus einen Mittelwert m nach der Gleichung:

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \tag{1}$$

Man nennt diesen Mittelwert den „mittleren Fehler“ oder „mittleren zu fürchtenden Fehler“. (error medius metuendus).

Der mittlere Fehler bietet gegenüber dem durchschnittlichen Fehler den Vorteil, dass bei der Summierung $[\varepsilon^2]$, da alle Quadrate positiv sind, keine Unterscheidung der Vorzeichen nötig ist, sowie dass das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt $\pm$ aus der Rechnung hervorgeht. Abgesehen von diesen äusserlichen Unterschieden ist aber der mittlere Fehler ein besseres Genauigkeitsmass als der durchschnittliche Fehler, weil in den Quadraten die grossen Fehler mehr ins Gewicht fallen.

Der mittlere Fehler ist im allgemeinen grösser als der durchschnittliche Fehler und nur, wenn alle Einzelfehler ε gleich sind, so werden auch der durchschnittliche und der mittlere Fehler einander gleich; dieses lässt sich zunächst für zwei Elemente leicht einsehen; hat man nämlich zwei wahre Fehler ε_1 und ε_2, so ist:

der durchschnittliche Fehler — der mittlere Fehler

$$t = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \qquad m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}}$$

$$t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{4} \qquad m^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2} = \frac{2\,\varepsilon_1^2 + 2\,\varepsilon_2^2}{4}$$

Um zu untersuchen, welches von beiden der grössere Wert ist, behandeln wir die Differenz beider:

$$m^2 - t^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2}{4} \text{ also } = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} \tag{2}$$

Als Quadrat ist dieses stets positiv, es ist also stets m^2 grösser als t^2 (ausgenommen den besonderen Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, in welchem m und t gleich werden).

Dieser Beweis (2) lässt sich leicht auch auf beliebig viele Elemente $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ ausdehnen.

Zur weiteren Vergleichung zwischen dem durchschnittlichen Fehler und dem mittleren Fehler betrachten wir folgende zwei Fehler-Reihen:

											Summe	Quadratsumme
I.	5	6	2	7	3	8	10	9	3	5	58	402
II.	14	3	0	0	6	20	2	2	1	10	58	750

Der durchschnittliche Fehler wird in beiden Fällen gleich, nämlich = 5,8, der mittlere Fehler dagegen wird:

$$m_{\mathrm{I}} = \sqrt{\frac{402}{10}} = \pm 6{,}34, \qquad m_{\mathrm{II}} = \sqrt{\frac{750}{10}} = \pm 8{,}66$$

Der mittlere Fehler lässt die erste Reihe besser erscheinen als die zweite Reihe, und in der That ist eine ziemlich gleiche Fehlerverteilung bis zur Grenze 10 günstiger als das zweimalige Überschreiten dieser Grenze mit 14 und sogar 20, bei II, was durch das zweimalige Vorkommen von 0 nicht aufgewogen wird.

Obgleich man auf diese oder ähnliche Art die Einführung des „mittleren Fehlers“ wohl als zweckmässig darstellen kann, gelingt es doch nicht, diese Wahl eines Genauigkeitsmasses als *notwendig* nachzuweisen. Die beste Rechtfertigung des „mittleren Fehlers“ liegt aber darin, dass sich auf ihn eine allseitig befriedigende und nun schon seit nahezu 100 Jahren anerkannte Fehlertheorie gründen lässt.

Indem wir hiernach die Definition des mittleren Fehlers nach der Gleichung (1) festhalten, wenden wir diese Gleichung auf das frühere kleine Beispiel § 3. S. 13 an, zunächst mit der Annahme, als ob die scheinbaren Fehler v wie wahre Beobachtungsfehler ε behandelt werden dürften.

	Beobachtungen	v	v^2
	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
	20	— 1,2	1,44
	18	+ 0,8	0,64
	25	— 6,2	38,44
	15	+ 3,8	14,44
Summe	94	$[v] = 0{,}0$	$[v] = 62{,}80$
Mittel	35° 26′ 18,8″		

$$m = \sqrt{\frac{62{,}80}{5}} = \pm 3{,}54'' \quad (?) \tag{3}$$

Dieser Berechnung (3) haben wir ein Fragezeichen (?) zugesetzt, weil es fraglich ist, ob die zunächst gemachte Annahme der v als wahrer Fehler zulässig ist? Die Antwort hierauf wird in unserem spätern § 7. gegeben werden. Inzwischen müssen wir uns einer anderen Betrachtung zuwenden.

Der *mittlere Fehler* nach der im Vorstehenden gegebenen Definition ist der Grundbegriff der Genauigkeitsuntersuchungen; neben diesem mittleren Fehler hat der durchschnittliche Fehler, der sich zuerst in § 3. dargeboten hat, eine nur sehr untergeordnete Bedeutung.

Es bestehen noch zwei andere Fehlermasse, welche wir hier vorläufig erwähnen wollen, nämlich der *wahrscheinliche Fehler* und der *Grenzfehler*.

Diese beiden Fehler werden jedoch erst in einem späteren Kapitel zu behandeln sein.

§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Es handelt sich um die Frage, in welcher Weise sich die mittleren Fehler gemessener Grössen auf die hieraus durch Rechnung abgeleiteten Grössen übertragen. Diese wichtige Frage muss erledigt sein, ehe weitere Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gelöst werden können. Wir behandeln zuerst einzelne besondere Fälle dieser Frage, nämlich Multiplikation und Addition gemessener Grössen.

I. Multiplikation. Eine gemessene Grösse l wird mit einer gegebenen Zahl a multipliziert, man hat also ein Produkt

$$x = a\,l \tag{1}$$

Hier ist a als gegebene Zahl fehlerfrei, dagegen l als gemessene Grösse soll mit einem mittleren Fehler m behaftet sein, und es fragt sich, welches der mittlere Fehler M des Produktes x wird?

Durch die Multiplikation a werden auch die der Grösse l anhaftenden Fehler betroffen, man kann also rasch überblicken, dass das Ergebnis sein wird:

$$M = a\,m \tag{2}$$

Zur Veranschaulichung mag das Messen einer Geraden mit unsicheren Latten dienen. Wenn eine Messlatte l an sich um den Betrag $\pm m$ unsicher ist, d. h. wenn sie ungenau mit dem Normalmass verglichen ist und wenn die Handhabung der Messung selbst ganz fehlerfrei ist (d. h. wenn von den Messungsfehlern selbst hier gar nicht die Rede sein soll), so wird bei $a$maligem Anlegen der fehlerhaften Latte offenbar ein Fehler $M = a\,m$ erzeugt, und zwar $\pm M$, wenn $\pm m$ im Vorzeichen unbestimmt ist.

II. Addition. Es werden zwei Grössen l und l' unabhängig von einander gemessen und dann addiert, man hat also eine Summe:

$$x = l + l' \tag{3}$$

die l und l' seien mit mittleren Fehlern $\pm m$ und $\pm m'$ behaftet und es fragt sich nun, was der mittlere Fehler M der Summe x ist?

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob einfach zu setzen wäre:

$$M = m + m' \quad (?), \tag{3 a}$$

allein sobald man die Sache näher betrachtet, so bemerkt man, dass dieses nur dem äussersten Fall der *Häufung* der Fehler m und m' entspricht, während bei unregelmässigen Vorzeichen $\pm m$ und $\pm m'$ auch der Fall der gegenseitigen *Tilgung* $m - m'$

berücksichtigt werden muss. Zudem muss man beachten, dass der Fehler von l und l' durchaus nicht gerade m und m' selbst sind, sondern dass diese m und m' nur die *Mittel*werte der den l und l' anhaftenden Fehler vorstellen, dass also von einer so einfachen Lösung wie (3a) nicht die Rede sein kann.

Um zur richtigen Lösung der vorliegenden sehr wichtigen Aufgabe zu gelangen, müssen wir den Grundbegriff des mittleren Fehlers anwenden, und dazu denken wir uns die Addition $l + l' = x$ nicht nur *ein*mal, sondern wiederholt (etwa n mal) vorgenommen, und wir ziehen *alle* Fehler ε, ε' u. s. w. in Betracht, welche bei allen diesen Fällen auftreten. Im ersten Falle habe man l behaftet mit dem Fehler ε, und l' behaftet mit ε', dann ist zweifellos der Fehler von x im ersten Falle gleich $\varepsilon + \varepsilon'$, was mit δ bezeichnet werden soll. Dieses n mal angewendet giebt:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_1' \\ \delta_2 &= \varepsilon_2 + \varepsilon_2' \\ \delta_3 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_3' \\ &\cdots \\ \delta_n &= \varepsilon_n + \varepsilon_n'\end{aligned}$$

Um zu mittleren Fehlern überzugehen, müssen wir quadrieren:

$$\begin{aligned}\delta_1^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1' \\ \delta_2^2 &= \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2' \\ \delta_3^2 &= \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3'^2 + 2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3' \\ &\cdots \\ \delta_n^2 &= \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2\,\varepsilon_n\,\varepsilon_n'\end{aligned}$$

Quadratsumme $\quad [\delta^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] + 2\,[\varepsilon\,\varepsilon']$

Quadrat-Mittel $\quad \frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + 2\,\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n} \quad (4)$

Hier ist zufolge der Grunderklärung des mittleren Fehlers:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2, \quad \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2, \quad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2 \tag{5}$$

und es fragt sich noch, was $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n}$ ist?

Dieses ist der Durchschnittswert aller Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2'$ u. s. w. und da alle ε gleich wahrscheinlich positiv oder negativ sein sollen, also auch kein Grund vorhanden ist, warum in der Reihe der Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2' \ldots$ die positiven oder negativen Beträge überwiegen sollten, so ist der Durchschnittswert des letzten Gliedes in (4) gleich *Null* zu setzen. (Genauer gesagt, der Grenzwert, gegen welchen bei wachsender Anzahl n jenes Glied konvergiert, ist gleich Null.)

Damit und wegen (5) giebt nun (4):

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= m^2 + m'^2 \\ \text{oder } M &= \sqrt{m^2 + m'^2}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dieses ist der wichtigste Satz der ganzen Ausgleichungs-Rechnung, er ist gleichlautend mit dem pythagoräischen Satz der Geometrie, indem M als Hypotenuse zu den Katheten m und m' gehört.

Der wichtige pythagoräische Lehrsatz der Ausgleichungs-Rechnung heisst also: Wenn eine Messung mit dem mittleren Fehler $\pm m$ addiert wird zu einer zweiten Messung mit dem mittleren Fehler $\pm m'$, so entsteht eine Summe, deren mittlerer

Fehler $\pm M$ die Quadratwurzel aus der Quadratsumme von m und m' ist, oder es ist der Summenfehler M die Hypotenuse zu den Teilfehlern m und m' als Katheten.

Derselbe Satz gilt wie für Summen, so auch für Differenzen, d. h. wenn aus den Messungen $l \pm m$ und $l' \pm m'$ die Differenz $D = (l \pm m) - (l' \pm m')$ gebildet wird, so haftet an dieser Differenz *derselbe* mittlere Fehler $M = \sqrt{m^2 + m'^2}$ wie an der Summe $l + l'$. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man die vorstehende Entwicklung nochmals durchgeht, denn es wird sich mit $l - l'$ statt $l + l'$ nichts ändern als dass in (4) das letzte Glied negativ wird, da aber dieses letzte Glied in (4) gleich Null wird, bleibt alles bestehen.

Der Satz (6) lässt sich auch auf mehr als zwei Messungen leicht ausdehnen. Hat man

$$x = (l \pm m) + (l' \pm m') + (l'' \pm m'')$$

so kann man zuerst die zwei ersten Elemente nach dem Satze (6) zusammenfassen und dann das dritte hinzunehmen, d. h. man hat für drei Elemente:

$$M^2 = (m^2 + m'^2) + m''^2$$

So kann man beliebig fortfahren, wodurch man erhält:

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 + m'''^2 + \dots \tag{7}$$

Sind hiebei alle Einzelfehler $m\ m'\ m'' \dots$ einander *gleich*, was als besonderer Fall vorkommen kann, so wird bei n Fehlern:

$$M^2 = m^2 + m^2 + m^2 \dots = n\, m^2$$

$$M = m\sqrt{n} \tag{8}$$

Zur Veranschaulichung mag wieder das Beispiel der Lattenmessung dienen; jedoch soll nun im Gegensatz zu dem früheren Falle bei (2) angenommen werden, dass die Latten an sich fehlerfrei seien, dass aber bei jeder Lattenanlage l ein aus der Handhabung entspringender Fehler begangen werde, dessen Mittelwert gleich $\pm m$ sei, wobei das Überwiegen positiver oder negativer Fehler ausgeschlossen sein soll. (Letzteres ist bekanntlich nicht wirklich der Fall, doch sei davon jetzt nicht die Rede.)

Unter diesen Voraussetzungen haben wir die Gleichung (8) giltig für n maliges Lattenanlegen mit $\pm m$ als mittlerem Fehler einer Anlage, und hiernach ist der mittlere Lattenmessungsfehler proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl n der Lattenanlagen, d. h. auch proportional der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge L (weil L proportional n).

III. Lineare Funktion. Durch Verbindung der beiden Sätze I für Multiplikation und II für Addition bzw. Subtraktion, erhalten wir den allgemeinen Satz für Bestimmung des mittleren Fehlers einer linearen Funktion gemessener Grössen:

Wenn $l, l', l'' \dots$ gemessene Grössen und $m, m', m'' \dots$ deren bekannte mittlere Fehler sind, so handelt es sich um die lineare Funktion

$$x = a\, l + a'\, l' + a''\, l'' + \dots \tag{9}$$

deren mittlerer Fehler M sich nach dem Vorhergehenden leicht ergiebt:

$$M = \sqrt{(a\, m)^2 + (a'\, m')^2 + (a''\, m'')^2 + \dots} \tag{10}$$

Wenn dabei $m' = m'' = m''' \dots = m$ ist, so wird

$$M = m\sqrt{[a\, a]} \tag{11}$$

IV. Allgemeine Funktion. Mit den vorstehenden Sätzen I, II, III ist das wichtige Fehlerfortpflanzungsgesetz an sich erledigt; mehr als eine lineare Funktion (9) lässt sich in diesem Sinne nicht allgemein behandeln; man kann aber jede beliebige andere Funktion wenigstens näherungsweise auf eine lineare Funktion zurückführen durch Differentiieren nach dem Taylor schen Satze, mit der Annahme, dass die Fehler verhältnismässig *kleine* Grössen seien. Obgleich die darauf gegründete Verallgemeinerung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu unserem nächsten Gang der Theorie in § 6.—§ 11. nicht gebraucht wird (also auch zunächst übergangen werden kann), wollen wir dieselbe doch hier einschalten und durch ein kleines geodätisches Beispiel erläutern.

Man habe irgend eine Funktion gemessener Grössen:

$$X = f(l_1\, l_2\, l_3 \ldots) \tag{12}$$

Bezeichnet man jetzt mit $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ die wahren Werte der gemessenen Grössen, mit $m_1\, m_2\, m_3 \ldots$ deren mittlere Fehler, und mit $\varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \ldots$ bestimmte denselben anhaftende Fehler, so kann man unter der Voraussetzung, dass diese Fehler so klein sind, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können, mit Hilfe des Taylor schen Satzes den entsprechenden Fehler ε von x bestimmen, nämlich:

$$\varepsilon = f(l_1 + \varepsilon_1\,,\ l_2 + \varepsilon_2\,,\ l_3 + \varepsilon_3 \ldots) - f(l_1\,,\ l_2\,,\ l_3 \ldots)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\varepsilon_3 + \ldots$$

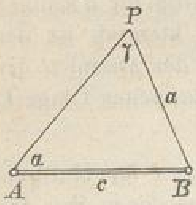
Durch ähnliche Schlüsse wie die bei I. und II. angewendeten kommt man zu dem Ergebnis:

$$M = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_3} m_3)^2 + \ldots} \tag{13}$$

wobei die Differentialquotienten mit Hilfe von Näherungswerten der $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ berechnet werden.

Ein einfaches Beispiel zur Anwendung dieses Satzes (13) ist folgendes (Fig. 1.):

Fig. 1.
Mittlerer Fehler der Seite a.



Ein Punkt P wird gegen eine feste Basis $AB = c$ festgelegt durch Messung der zwei Winkel α und γ, wodurch die Seite $BP = a$ bestimmt wird:

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha \tag{14}$$

dabei sind α und γ mit mittleren Fehlern $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ behaftet; es fragt sich, was der mittlere Fehler M der Seite a ist. Die Basis c wird dabei als fehlerfrei betrachtet.

Man bildet das totale Differential von (14):

$$d\,a = \frac{\partial a}{\partial \alpha} d\,\alpha + \frac{\partial a}{\partial \gamma} d\,\gamma$$

$$d\,a = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \alpha\, d\,\alpha - c \sin \alpha \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} d\,\gamma$$

Wegen (14) kann man dieses auch so schreiben:

$$d\,a = a \operatorname{cotg} \alpha\, d\,\alpha - a \operatorname{cotg} \gamma\, d\,\gamma$$

Nun setzt man an Stelle der Differentiale $d\,\alpha$ und $d\,\gamma$ die mittleren Fehler $\pm\,\delta\,\alpha$ und $\pm\,\delta\,\gamma$, und hat damit den mittleren Fehler M zunächst in unbestimmter Form:

$$\pm\, M = a \operatorname{cotg} \alpha\, \delta\,\alpha \pm a \operatorname{cotg} \gamma\, \delta\gamma;$$

endlich nach der Regel von (13):

$$M = a \sqrt{cotg^2 \alpha \, (\delta\alpha)^2 + cotg^2 \gamma \, (\delta\gamma)^2} \tag{15}$$

Wenn beide Winkel α und γ gleich genau gemessen sind, so sei $\delta\alpha = \delta\gamma = \delta$, damit wird:

$$M = a \, \delta \sqrt{cotg^2 \alpha + cotg^2 \gamma}$$

Hiebei ist δ in analytischem Masse verstanden; wenn δ'' der Winkelfehler in Sekunden ist, so wird:

$$\frac{M}{a} = \frac{\delta''}{\varrho''} \sqrt{cotg^2 \alpha + cotg^2 \gamma}$$

Wir nehmen beispielshalber $\alpha = \gamma = 60°$ und $\delta = 10''$, das giebt

$$\frac{M}{a} = \pm 0{,}0000\,396$$

oder es ist der Fehler M etwa $= 0{,}004\,\%$ von a.

Nehmen wir dabei $a = 1000^m$, so ist also $M = 0{,}04^m$.

Wenn etwa in dem Dreieck (Fig. 1.) der dritte Winkel bei B auch gemessen ist, dann lässt sich die Berechnung des mittleren Fehlers der Seite a nicht mehr in so einfacher Weise machen; wie dann zu verfahren ist, wird erst später bei der Theorie der bedingten Beobachtungen gezeigt werden.

§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass keine konstanten oder einseitig wirkenden Fehler vorhanden sind, indessen gilt der Hauptsatz II. des vorigen § 5. über Fehlerfortpflanzung auch dann noch, wenn es sich um Kombination eines unregelmässigen mit einem regelmässigen oder mit einem konstanten Fehler handelt, denn der Mittelwert $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n}$, auf welchen es bei dem Falle II. S. 16 hauptsächlich ankommt, konvergiert auch dann noch gegen Null, wenn nur ε *oder* ε' gleichwahrscheinlich positiv und negativ ist.

Als Beispiel hiefür nehmen wir wieder wie im vorigen § 5. S. 15 die Längenmessung mit Messlatten. Eine solche Messung ist nämlich nicht nur mit unregelmässigen Fehlern, sondern auch mit regelmässigen Fehlern behaftet. Solche regelmässige Fehler sind z. B. das Ausweichen aus der Geraden nach links oder rechts, nach oben oder unten. Diese Ausweichungen heben sich durchaus nicht gegenseitig auf, sondern sie geben lauter positive Fehler, d. h. Fehler, welche die Länge zu gross erscheinen lassen.

Bei n maliger Lattenanlage wird man die einseitig wirkenden Fehlerteile $= A\,n$ und die unregelmässig wirkenden Teile $= B\sqrt{n}$ annehmen können, dann ist der mittlere Gesamtfehler:

$$M = \sqrt{(A\,n)^2 + (B\sqrt{n})^2} = \sqrt{A^2 n^2 + B^2 n}.$$

Der Begriff des mittleren Fehlers ist also nicht an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden; man kann den mittleren Fehler auch als Genauigkeitsmass für solche Messungen benützen, bei welchen einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein mittlerer Fehler, welcher konstante Teile enthält, im allgemeinen nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.

Es ist ein oft gehörter Einwurf gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf gewisse Messungen, dass diese Messungen einseitige Fehler enthalten, und dass deswegen die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen überhaupt nicht anzuwenden sei.

Dem ist entgegenzuhalten, dass gerade die Methode der kleinsten Quadrate die feinsten Mittel darbietet, um einseitig wirkende oder unbekannte Fehler aufzufinden, und dann die Ausgleichung mit Rücksicht auf solche Fehlerquellen zu behandeln.

§ 7. Das einfache arithmetische Mittel.

Wenn eine Messung mehrfach gleichartig und unabhängig wiederholt worden ist mit den Ergebnissen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, so nimmt man als bestanschliessenden Wert das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \tag{1}$$

Die Abweichungen der Einzelmessungen von dem Mittel x, d. h. die scheinbaren Fehler sind:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ v_3 = x - l_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = x - l_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

deren Summe wegen (1) gleich Null ist, d. h.:

$$[v] = 0. \tag{3}$$

Durch Quadrierung der scheinbaren Fehler v findet man den mittleren Fehler einer Beobachtung zunächst näherungsweise durch die Formel:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\ (?) \tag{4}$$

Es handelt sich nun um Bestimmung des mittleren Fehlers M des arithmetischen Mittels selbst, wozu die Anleitung des Satzes über Fehlerfortpflanzung (10) und (11) § 5. S. 17 dient, denn vermöge (1) ist x eine lineare Funktion der beobachteten Grössen l, denen sämtlich der mittlere Fehler m zukommt, wie sich noch deutlicher zeigt, wenn man die Gleichung (1) auseinanderzieht und so schreibt:

$$x = \frac{1}{n}\,l_1 + \frac{1}{n}\,l_2 + \frac{1}{n}\,l_3 + \ldots \frac{1}{n}\,l_n \tag{5}$$

Dieses entspricht der Gleichung (9) § 5. S. 17, nämlich

$$x + a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{5 a}$$

und dazu gehört die Anwendung (10) § 5. S. 17, nämlich

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m')^2 + (a''\,m'')^2 + \ldots} \tag{5 b}$$

Es treten also die $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ von (5) an Stelle der früheren $l\ l'\ l'' \ldots$ in (5 a) und die dort mit $a\ a'\ a'' \ldots$ bezeichneten Coefficienten sind in unserem Falle (5) sämtlich $= \frac{1}{n}$; die mittleren Fehler $m\ m'\ m'' \ldots$ sind in unserem Fall alle einander gleich, nämlich alle $= m$, also giebt die Anwendung von (5 b) nun:

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m)^2 + (a''\,m)^2 + \ldots} = m\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

dabei ist $a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots = n\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$

also
$$M = m\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{oder} \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

d. h. der mittlere Fehler M des arithmetischen Mittels x wird erhalten aus dem mittleren Fehler m einer Einzelbeobachtung durch Division mit der Quadratwurzel $\sqrt{n}$ aus der Anzahl n der Beobachtungen. Wir werden diesen wichtigen und interessanten Satz nachher mit Fig. S. 23 noch etwas näher betrachten, zuvor aber müssen wir uns nochmals der Gleichung (4) zuwenden, um die daselbst noch offen gelassene Frage zu behandeln, inwiefern die scheinbaren Fehler v zur Vertretung der wahren Fehler ε geeignet sind.

Diese wahren Fehler ε bleiben ewig unbekannt, aber dennoch kann man die Abweichungen zwischen den v und den ε näherungsweise berücksichtigen in folgender Weise:

Im Gegensatz zu dem arithmetischen Mittel x bezeichnen wir mit X den wahren Wert der Unbekannten, und mit ε die wahren Beobachtungsfehler im Gegensatz zu den scheinbaren Beobachtungsfehlern v; dann haben wir die Gleichungen:

$$\varepsilon = X - l \quad , \quad v = x - l \quad , \quad \text{also } \varepsilon = v + (X - x) \tag{7}$$

Wenn man dieses auf n Fälle anwendet und die $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ quadriert, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= v_1^2 + (X-x)^2 + 2\,v_1\,(X-x) \\
\varepsilon_2^2 &= v_2^2 + (X-x)^2 + 2\,v_2\,(X-x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_n^2 &= v_n^2 + (X-x)^2 + 2\,v_n\,(X-x) \\
\hline
\text{Summe } [\varepsilon^2] &= [v^2] + n\,(X-x)^2 + 2\,(v_1 + v_2 + \ldots v_n)\,(X-x)
\end{aligned}$$

Nun ist aber $v_1 + v_2 + \ldots v_n = [v] = 0$ nach (3), also

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n\,(X-x)^2 \tag{8}$$

Der Wert $X - x$, d. h. die Abweichung des arithmetischen Mittels x von dem wahren Wert X der Unbekannten ist in aller Strenge niemals zu bestimmen, allein man kann wenigstens für $X - x$ einen guten Näherungswert einführen, indem man dafür den mittleren Fehler M des arithmetischen Mittels selbst setzt, d. h. nach (6)

$$X - x = M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad , \quad (X-x)^2 = \frac{m^2}{n}$$

Damit giebt (8):

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + m^2 \tag{9}$$

Es ist nun in aller Strenge:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2$$

denn die wahren Fehler ε müssen den streng richtigen mittleren Fehler bestimmen. Damit wird (9):

$$n\,m^2 = [v^2] + m^2$$

Diese Gleichung kann nach m^2 aufgelöst werden und giebt:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{10}$$

Das ist die gesuchte richtige Formel, welche an Stelle der genäherten Formel (4) tritt, die Formel (10) kann man auch wieder in (6) einsetzen, womit man hat:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} \tag{11}$$

Die neue Formel (10) erscheint auch ohne die mathematische Herleitung, nach dem blossen Anblick besser als die frühere Formel (4); insbesondere in dem besonderen Fall mit $n = 1$. Hiefür würde (4) geben $[v^2] = 0$ also $m = 0$. Dagegen (10) giebt zwar auch $[v^2] = 0$, aber auch im Nenner $n - 1 = 0$, also im ganzen $m = \sqrt{\frac{0}{0}}$, d. h. unbestimmt, und in der That muss beim Vorhandensein von nur *einer* Beobachtung die Genauigkeit unentschieden bleiben. (Als letzten extremen Fall kann man auch noch $n = 0$ setzen, d. h. nach der Genauigkeit einer Beobachtung fragen, welche gar nicht gemacht worden ist; auch hiefür giebt (10) die richtige Antwort, indem wegen $n - 1 = 0 - 1 = -1$ der mittlere Fehler m imaginär wird.)

Zur Anwendung der in Vorstehendem entwickelten Theorie des einfachen arithmetischen Mittels nehmen wir nochmals das kleine Zahlenbeispiel am Schlusse des § 3. S. 13:

Beobachtungen l		v	v^2
1.	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
2.	20	— 1,2	1,44
3.	18	+ 0,8	0,64
4.	25	— 6,2	38,44
5.	15	+ 3,8	14,44
Summe	= 94	0,0	62,80 = $[v^2]$

Mittel = 35° 26′ 18,8″.

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{62{,}80}{4}} = \pm\, 3{,}96''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} = \frac{3{,}96}{\sqrt{5}} = \pm\, 1{,}77''$$

Im ganzen schreibt man nun abgerundet:

$$x = 35^\circ\, 26'\, 18{,}8'' \pm 1{,}8''.$$

Zweites, grösseres Zahlenbeispiel.

In der „Gradmessung in Ostpreussen“ (S. 78) giebt *Bessel* 18 unabhängige Messungen für den Winkel Mednicken-Fuchsberg auf der Station Trenk, wie folgende Zusammenstellung zeigt, welche zugleich die Fehlerberechnung enthält.

Nr.	Beobachtung l	v	v^2
1	83° 30′ 36,25″	− 1,38″	1,90
2	7,50	− 2,63	6,92
3	6,00	− 1,13	1,28
4	4,77	+ 0,10	0,01
5	3,75	+ 1,12	1,25
6	0,25	+ 4,62	21,34
7	3,70	+ 1,17	1,37
8	6,14	− 1,27	1,61
9	4,04	+ 0,83	0,69
10	6,96	− 2,09	4,37
11	3,16	+ 1,71	2,92
12	4,57	+ 0,30	0,09
13	4,75	+ 0,12	0,01
14	6,50	− 1,63	2,66
15	5,00	− 0,13	0,02
16	4,75	+ 0,12	0,01
17	4,25	+ 0,62	0,38
18	5,25	− 0,38	0,14
Summe	87,59	+ 10,71	46,97
Mittel	83° 30′ 34,87″	− 10,64	$= [v^2]$

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{46,97}{17}} = \pm 1,66''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1,66}{\sqrt{18}} = \pm 0,39''$$

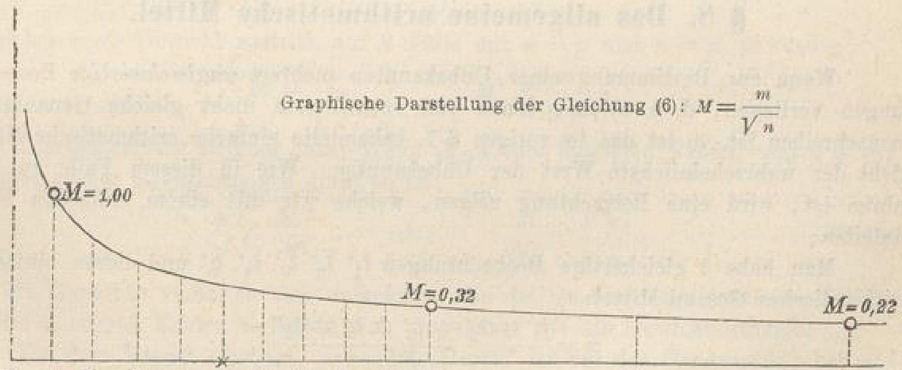
Haupt-Ergebnis = 83° 30′ 34,87″ ± 0,39″.

Graphische Darstellung der Gleichung (6).

Die oben S. 21 gefundene Gleichung (6) ist in mehr als einer Hinsicht sehr wichtig, sie sagt in Worten, dass der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels sich im Verhältnis der *Quadratwurzel* der Anzahl der Messungen verkleinert. Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes kann man M als Ordinate zur Abscisse n auftragen, wobei man eine hyperbelartige Kurve dritten Grades erhält, welche in der nachfolgenden Figur dargestellt ist. Die Zahlenwerte hiefür sind:

$$\left.\begin{array}{lcccccccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 20 & 50 & 100 \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} & = & 1,00 & 0,71 & 0,58 & 0,50 & 0,45 & 0,41 & 0,35 & 0,32 & 0,22 & 0,14 & 0,10 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Graphische Darstellung der Gleichung (6): $M = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$



Die Kurve läuft asymptotisch aus, d. h. der mittlere Fehler M nähert sich unbegrenzt der Null, ohne den Wert Null selbst je zu erreichen. Die ersten 5—10 Wiederholungen geben rasch eine Abnahme von M, d. h. eine Genauigkeitssteigerung; dann aber hat weiteres Wiederholen wenig Erfolg, und um den mittleren Fehler *einer* ersten Messung auf ein Zehntel seines Wertes herunter zu bringen, müsste man 100 Wiederholungen machen.

Das thut man aber gewöhnlich nicht; eine und dieselbe Messung pflegt man höchstens 5—10 mal zu wiederholen, und zwar nicht bloss deswegen, weil von da an der Wert M nur noch langsam abnimmt, sondern aus einem noch viel wichtigeren Grund: die Gleichung (6) und die darnach berechneten Zahlenwerte (12), nebst der dazu gehörigen Kurve, setzen nämlich voraus, dass die Messungen *nur* mit unregelmässigen, positiv oder negativ gleich wahrscheinlichen Fehlern behaftet seien, und dieses ist in Wirklichkeit fast nie der Fall. Im Gegenteil, je feiner die Messungen werden und je öfter man sie wiederholt, desto mehr kommt man zu der Überzeugung, dass fast überall konstante Fehlerquellen einwirken. Man soll daher bei Wiederholungen auch die Nebenumstände möglichst abändern, z. B. bei Winkelmessungen nach und nach verschiedene Striche der Kreisteilung benützen u. s. w.

Einführung des Gewichtes.

Zur späteren Anwendung (z. B. im folgenden § 8.) betrachten wir nochmals die wichtige Gleichung (6) in anderer Hinsicht:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{oder} \qquad M^2 = \frac{m^2}{n} \tag{13}$$

Es folgt hieraus, dass man das arithmetische Mittel als Ergebnis *einer* Beobachtung betrachten kann, deren mittlerer Fehler M ist; es ist also das Genauigkeitsverhältnis dieser fingierten Beobachtung und einer ursprünglichen Beobachtung durch die Werte M und m festgestellt.

Dieses führt zu dem Begriff des *Gewichtes.*

Das Verhältnis von m^2 zu M^2 ist bestimmt durch die Zahl n, welche angiebt, wie viele Beobachtungen der einen Art in ein arithmetisches Mittel vereinigt werden müssen, damit dieses die Genauigkeit einer Beobachtung der anderen Art hat. n heisst in diesem Falle das *Gewicht* der letzteren Beobachtung (wobei man das Gewicht einer Beobachtung der ersteren Art $= 1$ setzt).

§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel.

Wenn zur Bestimmung einer Unbekannten mehrere *ungleichwertige* Beobachtungen vorliegen, d. h. solche, denen von vorn herein nicht gleiche Genauigkeit zuzuschreiben ist, so ist das im vorigen § 7. behandelte einfache arithmetische Mittel nicht der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten. Wie in diesem Falle zu verfahren ist, wird eine Betrachtung zeigen, welche wir mit einem einfachen Falle einleiten:

Man habe 5 gleichartige Beobachtungen $l_1'\ l_2'\ l_3'\ l_4'\ l_5'$ und deren einfaches arithmetisches Gesamt-Mittel:

$$x = \frac{l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5'}{5} \tag{1}$$

Ausserdem betrachten wir zwei Partial-Mittel aus 2 und 3 Beobachtungen:

$$l_1 = \frac{l_1' + l_2'}{2} \qquad l_2 = \frac{l_3' + l_4' + l_5'}{3} \tag{2}$$

dann ist leicht einzusehen, dass man aus den Partial-Mitteln l_1 und l_2 wieder das Gesamtmittel x herstellen kann, ohne Zurückgreifen auf die ursprünglichen Beobachtungen l'; es ergiebt sich nämlich aus (1) und (2):

$$x = \frac{2\, l_1 + 3\, l_2}{2 + 3} \tag{3}$$

der an diesem einfachen Falle mit $2 + 3 = 5$ Beobachtungen gezeigte Grundgedanke lässt sich leicht auch allgemeiner durchführen; wir wollen Gruppenmittel $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ aus $p_1\, p_2\, p_3 \ldots$ ursprünglichen gleich genauen Beobachtungen annehmen, und daraus nach Analogie von (3) das Gesamtmittel berechnen

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 \ldots} = \frac{[p\, l]}{[p]} \tag{4}$$

Die Zahlen p haben hier die Bedeutung von Gewichten nach der Erklärung am Schlusse des vorigen § 7., d. h. die p sind dasselbe was die dort mit n bezeichneten Wiederholungszahlen, zu welchen die Partial-Mittel $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gehören.

Wir gehen einen Schritt weiter, indem wir annehmen, dass diese $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ nicht Partial-Mittel, sondern selbst *unmittelbare* Beobachtungen von verschiedener Genauigkeit seien; dann müsste man ebenso verfahren wie im vorigen Falle nach Gleichung (4), nachdem man zuvor diejenigen Zahlen p ermittelt hätte, welche den einzelnen Genauigkeiten entsprechen, und dieses wird erreicht, wenn man für p die Gewichte nach der am Ende des vorigen § 7. S. 24 gegebenen Definition nimmt.

Da übrigens der Wert von x in (4) nicht verändert wird, wenn man alle Gewichte p mit einer beliebigen Zahl multipliziert, so folgt, dass es zur Lösung der Aufgabe genügt, wenn solche Gewichte p benützt werden, welche den früher als Gewichte definierten Zahlen *proportional* sind, und wir werden deswegen künftig allgemein die Gewichte nur als Verhältniszahlen auffassen.

Es lässt sich weiter leicht zeigen, dass die Gewichte p umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler sein müssen, weil nach (6) § 7. S. 21 der mittlere Fehler umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl der Wiederholungen d. h. aus der Gewichtszahl p ist. Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die erwähnte Gleichung (6) § 7. S. 21, nämlich

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

in welcher n als Gewicht auftritt, auf 2 Fälle mit $n = p$ und $n = p'$ anwenden:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p}} \qquad M' = \frac{m}{\sqrt{p'}}.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz: Wenn $M\, M'$ die mittleren Fehler, und $p\, p'$ die Gewichte zweier Beobachtungen sind, so ist:

$$\frac{p}{p'} = \frac{M'^2}{M^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{M}{M'} = \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}} \tag{5}$$

d. h. die Gewichte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der mittleren Fehler, oder die mittleren Fehler verhalten sich umgekehrt wie die Gewichtswurzeln.

Ein dem Begriff Gewicht verwandter Begriff ist der der *Genauigkeit;* bei abnehmendem mittlerem Fehler wächst sowohl das Gewicht als die Genauigkeit, jedoch in verschiedenem Mass. Während das Gewicht umgekehrt proportional dem *Quadrat* des mittleren Fehlers ist, verstehen wir unter Genauigkeit eine Grösse, welche nur umgekehrt proportional dem mittleren Fehler selbst ist. Übrigens ist kein Bedürfnis vorhanden, besondere Genauigkeitszahlen in unsern Rechnungen einzuführen.

In welcher Weise die Gewichte ermittelt werden, lässt sich nicht allgemein angeben. Am einfachsten ist die Bestimmung der Gewichte, wenn man es nicht mit unmittelbaren Beobachtungen, sondern, entsprechend der Untersuchung am Anfang dieses §, mit Partial-Mitteln aus einzelnen Beobachtungsgruppen zu thun hat, was zuweilen vorkommt.

Nachdem die Bedeutung der Gewichte p erklärt ist, giebt sich alles Weitere, ähnlich wie beim einfachen arithmetischen Mittel. Wir haben bis jetzt folgendes:

Gegeben die Beobachtungen: $l_1 \; l_2 \; l_3 \; . \; . \; . \; l_n$
mit den Gewichten: $p_1 \, p_2 \, p_3 \cdot \cdot \cdot p_n$

Der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten ist das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + p_n l_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n} = \frac{[p\,l]}{[p]} \tag{6}$$

Man bildet wie früher die scheinbaren Fehler:

$$\left.\begin{array}{llr} v_1 = x - l_1 & \text{mit dem Gewicht} & p_1 \\ v_2 = x - l_2 & \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} \quad\;\; \text{„} & p_2 \\ v_3 = x - l_3 & \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} \quad\;\; \text{„} & p_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ v_n = x = l_n & \;\;\text{„} \quad\;\; \text{„} \quad\;\; \text{„} & p_n \end{array}\right\} \tag{7}$$

Wenn man diese v bezw. mit ihren p multipliziert und sie dann addiert, so erhält man wegen (6):

$$[p\,v] = 0 \tag{8}$$

Wir betrachten nun denjenigen mittleren Fehler m, welcher zu einem Gewichte $p = 1$ gehört; ob unter der Reihe der $p_1 \, p_2 \, p_3 \ldots$ wirklich ein Wert $p = 1$ vorkommt, ist dabei gleichgültig, jedenfalls kann man sich einen solchen Wert $p = 1$ denken und den ihm entsprechenden mittleren Fehler m betrachten, welchen man auch kurz *Gewichtseinheitsfehler* nennt. Hieraus und aus den Gewichten $p_1 \, p_2 \, p_3 \ldots$ folgen auch nach den Verhältnissen (5) die mittleren Fehler der $l_1 \; l_2 \; l_3 \ldots$ nämlich bezw.

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_2}} \qquad \frac{m}{\sqrt{p_3}} \qquad \cdots\cdot \qquad \frac{m}{\sqrt{p_n}} \tag{9}$$

Um nun das Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden, schreiben wir zuerst (6) in der auseinandergezogenen Form:

$$x = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \frac{p_3}{[p]} l_3 + \ldots \frac{p_n}{[p]} l_n \tag{10}$$

Dieses (10) entspricht wieder der linearen Funktion (9) des allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetzes in § 5. S. 17, nämlich

$$x = a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{10 a}$$

die a , a' , ... sind in (10) vertreten durch $\frac{p_1}{[p]}$, $\frac{p_2}{[p]} \ldots$ und da wir auch die mittleren Fehler der einzelnen Summanden in (9) haben, giebt die Anwendung von (10a):

$$M^2 = \left(\frac{p_1}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2 + \left(\frac{p_3}{[p]}\frac{m}{\sqrt{p_3}}\right)^2 + \cdots$$

$$M^2 = \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \left((\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + (\sqrt{p_3})^2 + \ldots\right)$$

$$M^2 = m^2 \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots}{[p]^2} = m^2 \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \tag{11}$$

Wir gehen über zur Bestimmung des mittleren Fehlers m einer Beobachtung vom Gewicht 1, (Gewichtseinheitsfehlers). Wenn die Gewichte p alle $= 1$ wären, so würde man aus den scheinbaren Fehlern v in (7) höchst einfach einen Mittelwert bilden wie beim einfachen arithmetischen Mittel in § 7. und obgleich dieses nicht der Fall ist, können wir doch die zu ungleichen Gewichten gehörigen v reduzieren auf gleiches Gewicht $p = 1$, nämlich nach den Proportionen (5) muss sein:

Gewicht	Fehler	Gewicht	Fehler
p_1	v_1	1	$v_1 \sqrt{p_1}$ reduziert
p_2	v_2	1	$v_2 \sqrt{p_2}$ „
p_3	v_3	1	$v_3 \sqrt{p_3}$ „
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

Dabei ist angenommen, dass die scheinbaren Fehler v den Gesetzen der wahren mittleren Fehler folgen, was zulässig ist. Man berechnet nun aus den auf das Gewicht 1 reduzierten Fehlerbeträgen den mittleren Gewichtseinheitsfehler nach der früheren Formel (10) § 7. S. 21, nämlich:

$$m^2 = \frac{(v_1 \sqrt{p_1})^2 + (v_2 \sqrt{p_2})^2 + (v_3 \sqrt{p_3})^2 + \ldots}{n-1} = \frac{[p\,v^2]}{n-1}$$

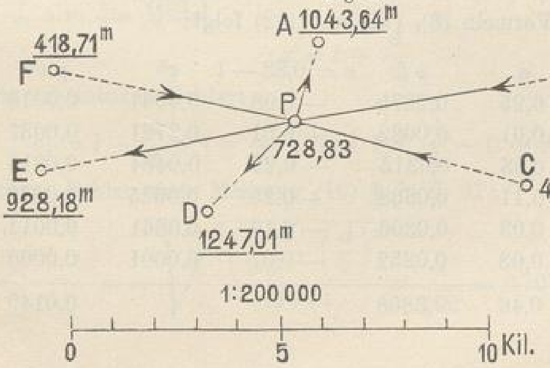
$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} \tag{12}$$

Nun hat man in den beiden Gleichungen (11) und (12) die ganze Fehlertheorie des allgemeinen arithmetischen Mittels; man kann auch aus (11) und (12) zusammen noch bilden:

$$M = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{[p]\,(n-1)}} \tag{13}$$

Zu einem Zahlenbeispiel wollen wir mit der nachfolgenden Fig. 1. eine Höhenberechnung nehmen, bei welcher die Gewichte nicht etwa durch ungleichartige Messungswiederholungen bestimmt sind, sondern aus der Natur der Aufgabe sich selbst ergeben.

Fig. 1.



Es seien nämlich $A\ B\ C\ D\ E\ F$ Höhenpunkte der Landesaufnahme, deren Höhen über $N.\ N.$ unabänderlich gegeben sind, z. B. A hat die Höhe 1043,64^m über $N.\ N.$ u. s. w. Wir nehmen auch an, diese 6 Höhenangaben seien fehlerfrei, oder es sollen ihre Fehler nicht in Betracht kommen neben den Fehlern der 6fachen Höhenbestimmung von einem Punkte P aus, in welchem die Höhenwinkel nach A, B u. s. w. gemessen und mit den bekannten Entfernungen PA, PB u. s. w. zu Höhenberechnungen benützt worden sind. Auf diese Weise ist folgendes erhalten worden:

Zielweite s	Gegebene Höhen über $N.\ N.$	Gemessene Höhenunterschiede	Berechnete Höhen von P	
$AP = 2010^m$	A 1043,64^m	$h_1 = -314{,}73^m$	728,91^m	
$BP = 8903$	B 619,02	$h_2 = +109{,}20$	728,22	
$CP = 5820$	C 480,81	$h_3 = +248{,}24$	729,05	(14)
$DP = 3002$	D 1247,01	$h_4 = -518{,}43$	728,58	
$EP = 6197$	E 928,18	$h_5 = -199{,}16$	729,02	
$FP = 5800$	F 418,71	$h_6 = +310{,}13$	728,84	
		(Einfaches Mittel = 728,77^m)		

Das einfache arithmetische Mittel der 6 Höhenbestimmungen für den Punkt wäre 728,77^m; dieses einfache Mittel dürfen wir aber nicht als Resultat annehmen, weil bei der Ungleichheit der Entfernungen s die 6 Bestimmungen nicht gleichwertig sind. Aus der Theorie der trigonometrischen Höhenmessung weiss man, dass die Fehler der Höhenunterschiede h (nahezu) proportional den Zielweiten s sind, und folglich müssen die Gewichte p umgekehrt proportional den Quadraten der Zielweiten s sein, oder $p = \frac{1}{s^2}$.

Die Masseinheit ist hiebei beliebig, wir nehmen s in Kilometern, und zwar abgerundet nach (14):

$$s = 2{,}0 \quad 8{,}9 \quad 5{,}8 \quad 3{,}0 \quad 6{,}2 \quad 5{,}8 \text{ km}$$

Hieraus wird berechnet

$$p = \frac{1}{s^2} = 0{,}25 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}11 \quad 0{,}03 \quad 0{,}03 \tag{15}$$

Wir haben absichtlich ziemlich stark abgerundet, weil es keinen praktischen Wert hat, in solchen Fällen, wo die Gewichtsbemessung selbst auf gewissen, nicht strengen Annahmen beruht, mit vielen Dezimalen zu rechnen.

Mit den Höhen von (14) und den Gewichten (15) erhalten wir nun folgende Berechnung, welche den Formeln (6), (11) und (12) folgt:

l	p	$p\,l$	$v = 0{,}83 - l$	v^2	$p\,v^2$
728 + 0,91	0,25	0,2275	− 0,08	0,0064	0,0016
+ 0,22	0,01	0,0022	+ 0,61	0,3721	0,0037
+ 1,05	0,03	0,0315	− 0,22	0,0484	0,0015
+ 0,58	0,11	0,0638	+ 0,25	0,0625	0,0070
+ 1,02	0,03	0,0306	− 0,19	0,0361	0,0011
+ 0,84	0,03	0,0252	− 0,01	0,0001	0,0000
Summen	0,46	0,3808			0,0149

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]} = \frac{0{,}3808}{0{,}46} = 0{,}83$$

$$m = \sqrt{\frac{[p\,v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{0{,}0149}{5}} = \pm\,0{,}055^{\mathrm{m}} \tag{16}$$

$$M = \frac{m}{\sqrt{[p]}} = \frac{0{,}055}{\sqrt{0{,}46}} = \pm\,0{,}080^{\mathrm{m}}$$

Also im ganzen: $H = 728^{\mathrm{m}} + x = 728{,}83^{\mathrm{m}}$
mit dem mittleren Fehler: $\pm\,0{,}08^{\mathrm{m}}$.

Anmerkung zu § 8.

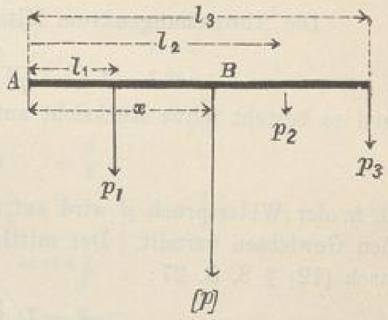
Die im Vorstehenden behandelten Formeln gestatten zum Teil einfache mechanische Deutungen.

Denkt man sich nach Fig. 2. verschiedene Gewichte $p_1\,p_2\,p_3\ldots$ an einer Drehaxe A mit Hebelsarmen $l_1\,l_2\,l_3\ldots$ wirkend, so sind die statischen Momente dieser Gewichte bezw. $p_1\,l_1\;\;p_2\,l_2\;\;p_3\,l_3\ldots$, und die Gleichung

$$x = \frac{[p\,l]}{[p]}$$

liefert denjenigen Hebelsarm x, welcher, mit der Summe aller Gewichte $[p]$ belastet, dasselbe statische Moment giebt, wie die Summe der Einzelmomente.

Fig. 2.



Denkt man sich nun die Drehaxe von A um den Betrag x nach B verschoben, dann haben die Gewichte $p_1\,p_2\,p_3$ in Bezug auf die neue Axe B die Hebelsarme $v_1\,v_2\,v_3$, wobei

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3$$

und es ist:

$$p_1\,v_1 + p_2\,v_2 + p_3\,v_3 = [p\,v] = 0$$

oder es ist B der Schwerpunkt eines den Gewichten $p_1\,p_2\,p_3$ entsprechenden Massensystems.

Auch die Summe $[p\,v^2]$ hat eine mechanische Deutung; es ist dieses das Trägheitsmoment des soeben erwähnten Massensystems in Bezug auf die Axe B, und die Bedingung $[p\,v^2] =$ Minimum, welche den Mittelwert x im Sinne der Ausgleichungsrechnung bestimmt, heisst im Sinne der Meckanik, es soll B eine Axe kleinsten Trägheitsmomentes sein.

§ 9. Besonderer Fall zweier Beobachtungen.

Zur Übung der Theorie vom arithmetischen Mittel nehmen wir den Fall zweier Beobachtungen, welcher ausserdem in manchen Beziehungen wichtig ist.

Wenn zwei gleich genaue Beobachtungen vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, so mag die erste Beobachtung l sein und die zweite Beobachtung $l + d$, also das Mittel

$$x = l + \frac{d}{2}$$

dann sind die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = l + \frac{d}{2} - l = +\frac{d}{2} \text{ und } l + \frac{d}{2} - (l + d) = -\frac{d}{2}$$

also der mittlere Fehler einer Messung (10) § 7. S. 21:

$$m = \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,d \tag{1}$$

und der mittlere Fehler des Mittels selbst, nach (11) § 7. S. 22:

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2} = 0{,}5\,d \tag{2}$$

Dieser Fall war sehr einfach und wird in § 11. uns nochmals in weiterem Sinne beschäftigen.

Wir gehen auch noch über zu dem Falle zweier ungleich genauer Messungen derselben Grösse.

Wenn zwei ungleichartige Beobachtungen mit den Gewichten p und q vorliegen, welche um den Betrag d von einander abweichen, indem etwa die erste den Wert l und die zweite den Wert $l + d$ geliefert hat, so wird das Mittel:

$$x = \frac{p\,l + q\,(l + d)}{p + q} = l + \frac{q}{p + q}\,d \tag{3}$$

Die Abweichungen vom Mittel, d. h. die scheinbaren Fehler werden:

$$v_1 = + \frac{q}{p + q}\,d \qquad v_2 = - \frac{p}{p + q}\,d \tag{4}$$

und es besteht (ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) das Verhältnis:

$$v_1 : v_2 = \frac{1}{p} : \frac{1}{q} \tag{5}$$

d. h. der Widerspruch d wird auf die beiden Beobachtungen umgekehrt proportional den Gewichten verteilt. Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird nach (12) § 8. S. 27:

$$m = \sqrt{\frac{p\,v_1^2 + q\,v_2^2}{2 - 1}} = d \sqrt{\frac{p\,q}{p + q}} \tag{6}$$

und der mittlere Fehler des Mittels selbst nach (13) § 8. S. 27:

$$M = \frac{m}{\sqrt{p + q}} = \frac{d}{p + q} \sqrt{p\,q} \tag{7}$$

Die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2 der beiden Beobachtungen *vor* der Ausgleichung sind:

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p}} \quad , \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{q}} \tag{8}$$

Es besteht also das Verhältnis:

$$m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{p}} : \frac{1}{\sqrt{q}} \tag{9}$$

Wir wollen hieran einige Betrachtungen anknüpfen, welche zur Vermeidung von Missverständnissen nützlich sind:

Bei einer ersten Betrachtung scheint die Gleichung (9) und die Gleichung (5) nicht gut vereinbar. Die Verbesserungen v_1 und v_2, welche man schliesslich den Messungen zuteilt, haben ein anderes Verhältnis als die mittleren zu fürchtenden Fehler m_1 und m_2, welche man den Messungen von vornherein zugeschrieben hat. Man hat sich hier zu erinnern, dass der Widerspruch d entstanden ist als die Differenz zweier Beobachtungen, deren *mittlere* zu fürchtende Fehler $\pm m_1$ und $\pm m_2$ sind, dass man also im Mittel nicht annehmen darf

$$m_1 + m_2 = d$$

sondern:

$$\pm m_1 \pm m_2 = d$$

also nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz (6) § 5. S. 16

$$m_1^2 + m_2^2 = d^2$$

und diese Beziehung wird durch die Werte m_1 und m_2 von (8) und (6) in der That erfüllt. Dagegen sind v_1 und v_2 die *bestimmten* Korrektionen, welche man den Beobachtungen zuteilt, und welche deshalb die Beziehung erfüllen müssen:

$$v_1 - v_2 = d$$

Diese v sind übrigens durchaus nicht untrüglich, im Gegenteil, es haftet ihnen der mittlere Fehler M des Mittels selbst an, und man muss deswegen annehmen, dass v_1 einschliesslich seiner Unsicherheit M, dem a priori zu fürchtenden Fehler m_1 gleich ist, d. h.

$$v_1 \pm M = \pm m_1$$

also nach (4), (7), (8) und (6):

$$\frac{q}{p+q} d \pm \frac{d}{p+q} \sqrt{p\,q} = d \sqrt{\frac{q}{p+q}}$$

und in der That giebt die Quadrierung mit Weglassung des mit $\pm$ behafteten Doppelproduktes eine identische Gleichung:

$$\frac{q^2 + p\,q}{(p+q)^2} = \frac{q}{p+q}$$

Zur weiteren Veranschaulichung behandeln wir noch den einfachen Fall $p = 1$, $q = 2$, d. h. es ist eine Unbekannte zweimal beobachtet worden, und zwar das erstemal mit dem Gewicht 1, das zweitemal mit dem Gewichte 2. Die Beobachtungen haben die Differenz d gegeben. Entsprechend vorstehenden Gleichungen erhält man:

	Beobachtung 1.	Beobachtung 2.	
Beobachtungsresultate	l	$l + d$	
Gewichte	$p = 1$	$q = 2$	
Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 = m$	$m_2 = \frac{m}{\sqrt{2}}$	
Mittel, wahrscheinlichster Wert	$l + \frac{2}{3} d$		
Wahrscheinlichste Verbesserungen	$v_1 = + \frac{2}{3} d$	$v_2 = - \frac{1}{3} d$	$(v_1 - v_2 = d)$
Mittlerer Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1	$m = d \sqrt{\frac{2}{3}}$		
Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels . . .	$M = \frac{d}{3} \sqrt{2}$		

Es bestehen die Verhältnisse:

Mittlere Fehler vor der Ausgleichung	$m_1 : m_2 = \sqrt{2} : 1{,}414 : 1$
Genauigkeiten	$\frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2} = 1 : 1{,}414$
Verbesserungen	$v_1 : v_2 = 2 : 1.$

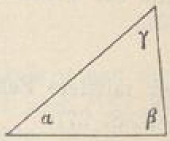
Wenn dagegen zwei Beobachtungen vorlägen, deren Genauigkeiten a priori sich wie 1 : 2 verhielten, so müsste man den Widerspruch im Verhältnis 4 : 1 verteilen.

§ 10. Winkelausgleichung in einem Dreieck.

Eine einfache Aufgabe, welche zunächst nicht als Mittelbildung mit Gewichten erscheint, welche aber hierauf zurückgeführt werden kann, ist die Ausgleichung der 3 Winkel in einem Dreieck.

Wenn in einem ebenen Dreieck (Fig. 1.) die drei Winkel mit gleicher Genauigkeit gemessen werden, mit den Ergebnissen α, β, γ, so wird wegen der Messungsfehler ein Widerspruch der Summe $\alpha + \beta + \gamma$ gegen 180° auftreten, welchen man auf die drei gemessenen Winkel zu gleichen Teilen verteilt. Um dieses bekannte Verfahren durch das Prinzip des arithmetischen Mittels zu begründen, betrachten wir zunächst nur *einen* der drei Winkel als Unbekannte.

Fig. 1.
$\alpha + \beta + \gamma - 180° = w.$



Für den ersten Winkel sind zwei unabhängige Beobachtungsergebnisse vorhanden:

erstens $x_1 = \alpha$ mit dem Gewicht $= p_1 = 1$ (1)

zweitens $x_2 = 180° - (\beta + \gamma)$ mit dem Gewicht $= p_2 = \frac{1}{2}$ (2)

Das zweite Gewicht ist $= \frac{1}{2}$, weil in x_2 die Fehler von β *und* von γ, d. h. der $\sqrt{2}$fache Wert eines mittleren Winkelfehlers, zusammenwirken, was nach den Proportionen (5) § 8. S. 25 das Gewicht $= \frac{1}{2}$ liefert, oder ausführlicher:

mittlerer Fehler von x_1 ist $m_1 = \pm m$

" " " x_2 " $m_2 = + m \pm m = m\sqrt{2}$

also $m_1 : m_2 = 1 : \sqrt{2}$

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{{m_1}^2} : \frac{1}{{m_2}^2} = \frac{1}{2}$$

Der Mittelwert aus (1) und (2) ist also mit Rücksicht auf diese Gewichte:

$$x = \frac{1 \times \alpha + \frac{1}{2} \times [180° - (\beta + \gamma)]}{1 + \frac{1}{2}} \tag{3}$$

Wenn man hierin den Dreiecks-Widerspruch w einführt:

$$\alpha + \beta + \gamma - 180° = w \tag{4}$$

$$\text{also } 180° - (\beta + \gamma) = \alpha - w$$

so giebt die Einsetzung in (3):

$$x = \frac{2\,\alpha + (\alpha - w)}{3} = \alpha - \frac{w}{3} \tag{5}$$

Dasselbe gilt auch für die beiden anderen Winkel des Dreiecks, welche mit y und z bezeichnet sein mögen, d. h.:

$$x = \alpha - \frac{w}{3}$$

$$y = \beta - \frac{w}{3}$$

$$z = \gamma - \frac{w}{3}$$

$$\text{Summe: } x + y + z = \alpha + \beta + \gamma - w$$

d. h. der Widerspruch w wird auf die drei Winkel gleich verteilt.

Wenn wir auch noch die mittleren Fehler berechnen wollen, so müssen wir festhalten, dass bei der gewählten Behandlungsweise wir in (1) und (2) es mit *zwei* Beobachtungen einer Unbekannten x zu thun haben.

Die Verbesserung v_1 der ersten Beobachtung x_1 nach (1) ist:

$$v_1 = -\frac{w}{3} \tag{6}$$

und die Verbesserung v_2 der zweiten Beobachtung x_2 nach (2) ist:

$$v_2 = + \frac{w}{3} + \frac{w}{3} = \frac{2w}{3} \tag{7}$$

der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1 wird (nach der Formel (12) § 8. S. 27):

$$m = \pm \sqrt{\frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{2 - 1}} = \pm \sqrt{\left(\frac{w}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2\,w}{3}\right)^2} = \pm \frac{w}{\sqrt{3}} \tag{8}$$

Da dem Winkel α vor der Ausgleichung das Gewicht 1 zugeteilt war, (ebenso wie auch den Winkeln β und γ), so ist dieser Wert m zugleich der mittlere Fehler eines Winkels *vor* der Ausgleichung. *Nach* der Ausgleichung erhält der verbesserte Winkelwert x (ebenso wie auch y und z) ein grösseres Gewicht, nämlich die Summe $p_1 + p_2 = \frac{3}{2}$, und damit wird der mittlere zu fürchtende Fehler des Winkels x (oder auch y oder z) *nach* der Ausgleichung (nach der Formel (11) § 8. S. 27):

$$M = \pm \frac{m}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{w}{3}\sqrt{2} \tag{9}$$

Der mittlere Fehler nach (8), $m = \pm \frac{w}{\sqrt{3}}$, lässt sich sehr anschaulich unmittelbar deuten: der Schlussfehler w ist nämlich die unregelmässige Zusammenwirkung dreier Fehler $\pm m$, also:

$$\pm m \pm m \pm m = \pm w$$

woraus:

$$m^2 + m^2 + m^2 = w^2$$

was mit (8) übereinstimmt.

Der mittlere Fehler m vor der Ausgleichung und der mittlere Fehler M nach der Ausgleichung veranschaulichen durch ihr Verhältnis den durch die Ausgleichung erzielten Genauigkeitsgewinn. Nach (8) und (9) ist:

$$M : m = \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 = 0{,}816 : 1 \tag{10}$$

Der mittlere Fehler hat infolge der Ausgleichung im Verhältnis rund 0,8 : 1 abgenommen, also die Genauigkeit hat in dem Verhältnis 1 : 0,8 zugenommen.

Oder man kann auch sagen: durch die Ausgleichung der drei Winkel in einem Dreieck ist eine Genauigkeitssteigerung von 20 % für den einzelnen Winkel erreicht worden.

Das vorstehende Beispiel, welches zur Einführung in die Theorie der Gewichte sich gut eignet, kann auch noch so ausgedehnt werden, dass die drei gemessenen Winkel nicht wie vorher gleichgewichtig, sondern selbst mit ungleichen Gewichten beobachtet sind.

Wir wollen diesen Fall auch noch durchführen:

Es seien gemessen die 3 Winkel $\alpha \quad \beta \quad \gamma$ (11)

mit den Gewichten $p_\alpha \quad p_\beta \quad p_\gamma$ (12)

der Dreieckswiderspruch ist $\alpha + \beta + \gamma - 180° = w$ (13)

Ist m der mittlere Gewichtseinheitsfehler, so sind die mittleren Winkelfehler, entsprechend den Gewichten (12) vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} \qquad m_\beta = \frac{m}{\sqrt{p_\beta}} \qquad m_\gamma = \frac{m}{\sqrt{p_\gamma}} \tag{14}$$

also:

$$m_\alpha^2 = m^2\left(\frac{1}{p_\alpha}\right) \qquad m_\beta^2 + m_\gamma^2 = m^2\left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right) \tag{15}$$

Bezeichnet man nun mit p_1 das Gewicht des gemessenen Winkels α und mit p_2 das Gewicht der Summe der zwei anderen Winkel $\beta + \gamma$, so wird nach (15), da die Gewichte umgekehrt proportional den Quadraten der mittleren Fehler sind:

$$p_1 = p_\alpha = \frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}} \qquad p_2 = \frac{1}{\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}} \tag{16}$$

Zur Abkürzung setzen wir die Summe

$$\frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma} = \left[\frac{1}{p}\right], \text{ und damit giebt (16):}$$

$$p_1 + p_2 = \frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}\right)} \tag{17}$$

Nach diesen Vorbereitungen in Bezug auf die Gewichte haben wir nun ähnlich wie bei (3):

$$x = \frac{p_1\,\alpha + p_2\,[180^\circ - (\beta + \gamma)]}{p_1 + p_2} = \frac{p_1\,\alpha + p_2\,(\alpha - w)}{p_1 + p_2}$$

$$x = \alpha - \frac{p_2}{p_1 + p_2}\,w$$

Setzt man hier (16) und (17) ein, so wird:

$$x = \alpha - \frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,w \tag{18}$$

Da für die beiden anderen Winkel ähnliche Gleichungen gelten, hat man den Satz, dass der Widerspruch w auf die drei Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma$ umgekehrt proportional den Gewichten oder proportional den Quadraten der mittleren Fehler verteilt wird.

Man kann nun auch ähnliche Formeln wie (8) und (9), welche bei gleichen Gewichten gelten, für ungleiche Gewichte entwickeln. Indem wir diese Entwicklung als Übungsbeispiel anheim geben, schreiben wir davon nur die Ergebnisse:

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler $m = \dfrac{w}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}$ (19)

Mittlerer Fehler des Winkels α vor der Ausgleichung:

$$m_\alpha = \frac{m}{\sqrt{p_\alpha}} = w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}} \tag{20}$$

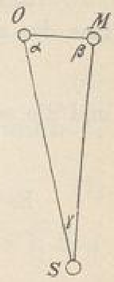
Mittlerer Fehler des Winkels α bezw. x nach der Ausgleichung:

$$M_\alpha = w\,\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta} + \frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} \tag{21}$$

Auch ein Zahlenbeispiel für ein Dreieck mit drei ungleichgewichtigen Winkeln möge hier eine Stelle finden, welches wir in den „Astr. Nachr., 75. Band 1870" S. 293 aus Badischen und Hessischen Winkeln verschiedenster Herkunft zusammengebracht haben, mit der Bemerkung, dass solche Gewichtsunterscheidungen praktisch immer misslich sind, während für ein formelles Rechenbeispiel sich das vorgeführte wohl eignet.

In dem Dreieck Oggersheim—Mannheim—Speyer, welches in Fig. 2. dargestellt ist, hat man

Fig. 2.



$$\begin{array}{lll}
 & \text{Gemessene Winkel} & \text{Gewichte} \\
 & \alpha = 72^\circ\ 16'\ 44{,}86'' & p\alpha = 27 \\
 & \beta = 90\ \ \ 1\ \ 56{,}46 & p\beta = 42 \\
 & \gamma = 17\ \ 41\ \ 17{,}43 & p\gamma = 65 \\
\text{Summe:} & \alpha + \beta + \gamma = 179^\circ\ 59'\ 58{,}75'' & \\
\text{soll} & 180^\circ\ \ 0'\ \ 0{,}29'' & \\
\text{Widerspruch:} & w = \ \ -1{,}54'' &
\end{array}$$

$$\text{Gewichts-Reciproken: } \frac{1}{p_\alpha} = 0{,}037 \ , \quad \frac{1}{p_\beta} = 0{,}024 \ , \quad \frac{1}{p_\gamma} = 0{,}015$$

$$\left[\frac{1}{p}\right] = 0{,}076$$

$$\text{Winkelverbesserungen: } v_\alpha = \frac{0{,}037}{0{,}076}\, 1{,}54'' = +0{,}75'' \qquad v_\beta = +0{,}49'' \qquad v_\gamma = +0{,}30''$$

Gemessen	Verbesserungen	Ausgeglichen
72° 16′ 44,86″	+ 0,75″	72° 16′ 45,61″
90 1 56,46	+ 0,49	90 1 56,95
17 41 17,43	+ 0,30	17 41 17,73
179° 59′ 58,75″	+ 1,54″	180° 0′ 0,29″

Nach (19) bestimmt man den mittleren Fehler für die Gewichtseinheit:

$$m = \pm 5{,}59''$$

und nach (21) berechnet man die mittleren Fehler der ausgeglichenen Winkel, und hat damit das Schlussergebnis:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 72^\circ\ 16'\ 45{,}61'' \pm 0{,}77'' \\
\beta &= 90^\circ\ \ 1'\ 56{,}95'' \pm 0{,}72'' \\
\gamma &= 17^\circ\ 41'\ 17{,}73'' \pm 0{,}61''
\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise, wie hier mit der Aufgabe der Dreieckswinkelausgleichung geschehen ist, können noch manche andere Aufgaben, welche beim ersten Anblick eine Ausgleichung mit mehreren Unbekannten zu verlangen scheinen, auf die Bestimmung *einer* Unbekannten durch das arithmetische Mittel zurückgeführt werden, jedenfalls kann eine Ausgleichung mit *einer* Summenprobe für mehrere unmittelbar gemessene Grössen ganz nach dem vorhergehenden Muster einer Summenprobe für drei Elemente behandelt werden.

In ähnlicher Weise kann auch jede Ausgleichung mit *einer* streng zu erfüllenden Bedingungsgleichung, auf den Fall des arithmetischen Mittels zurückgeführt werden.

§ 11. Beobachtungs-Differenzen.

Wenn man eine Messung zweifach macht, z. B. eine Gerade hin und her misst, oder eine Nivellierung hin und her macht u. s. w., so kann man auf je zwei solcher Messungen die Sätze vom arithmetischen Mittel anwenden, wie wir schon in § 9. S. 29 gethan haben; und man kann immer, wenn von Beobachtungs-Differenzen die Rede ist, die beiden in Betracht kommenden Messungen selbständig vorführen; indessen gestatten die Beobachtungs-Differenzen auch eine sehr nützliche allgemeinere Betrachtung, zu deren Einleitung jedoch nochmals an das arithmetische Mittel angebunden werden soll:

Sind l_1 und l_2 beide Messungsergebnisse mit der Differenz $l_1 - l_2 = d$, so hat man das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

und die scheinbaren Fehler:

$$v_1 = x - l_1 = -\frac{d}{2} \quad \text{und} \quad v_2 = x - l_2 = +\frac{d}{2}$$

Es ist also der mittlere Fehler einer Messung nach (10) § 7. S. 21 mit $n = 2$:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4}} = \frac{d}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

und der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels nach (11) § 7. S. 22.

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{d}{2} \tag{2}$$

Wir merken uns hievon insbesondere die Gleichung (1), nämlich $d = m\sqrt{2}$, d. h. die zu erwartende Differenz zweier Messungen ist gleich dem $\sqrt{2}$fachen des mittleren Fehlers einer Messung.

Nach Klarstellung dieser sehr einfachen Verhältnisse gehen wir einen Schritt weiter, indem wir mehrere solcher Wiederholungsmessungen zusammen nehmen. Man habe z. B. verschiedene Linien, jede hin und her, oder verschiedene Nivellierungsstrecken, jede für sich hin und her, gemessen und in jedem dieser Fälle eine Differenz d erhalten. Wir wollen aber dabei zunächst annehmen, die verschiedenen Längen oder Nivellementsstrecken u. s. w. seien nahezu *gleich* lang, oder allgemeiner, die Differenzen d gehören zu Messungen von lauter gleichen Gewichten, dann kann man aus einer Anzahl r solcher Differenzen eine *mittlere Differenz* berechnen nach der Formel:

$$D^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots d_r^2}{r}$$

$$\text{oder} \quad D^2 = \frac{[d^2]}{r} \quad , \quad D = \sqrt{\frac{[d^2]}{r}} \tag{3}$$

Der Nenner r ist hier streng richtig und nicht etwa durch $r - 1$ zu ersetzen, wie bei (10) § 7., denn die Differenzen d haben den Charakter *wahrer* Fehler und nicht bloss scheinbarer Fehler.

Aus (1), (2) und (3) zusammen folgt nun auch, indem man die mittlere Differenz D an Stelle der einzelnen Differenz d von (1) und (2) setzt:

Mittlerer Fehler einer Messung $$m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2r}} \tag{4}$$

Mittlerer Fehler einer Doppel-Messung $$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[d^2]}{r}} \tag{5}$$

Wenn nun aber Differenzen $d_1\, d_2 \ldots d_3$ vorliegen, welche zu *ungleich*gewichtigen Messungen gehören, z. B. wenn d_1 zu einem Hin- und Her-Nivellement der Strecke s_1, dagegen d_2 zu s_2 u. s. w. gehört, allgemein wenn d_1 zu einer Doppelmessung vom Gewichte p_1, dagegen d_2 zu einer Doppelmessung vom Gewichte p_2

u. s. w. gehört, so darf man auch die mittlere Differenz D nicht mehr nach (3) berechnen, sondern man hat dann die mittlere Differenz D für das Gewicht 1 nach Analogie von (12) § 8. S. 27 zu berechnen, jedoch mit dem Nenner r wie in (3):

$$D^2 = \frac{p_1\,d_1^2 + p_2\,d_2^2 + \ldots p_n\,d_r^2}{r}$$

$$D^2 = \frac{[p\,d^2]}{r}\ , \qquad D = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{r}} \tag{6}$$

Also ist auch der mittlere Fehler m einer einzelnen Messung vom Gewichte 1:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[p\,d^2]}{2\,r}} \tag{7}$$

und der mittlere Fehler m eines Mittels aus zwei Messungen vom Gewichte 1, oder der mittlere Fehler einer Doppelmessung vom Gewichte 1:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{[p\,d^2]}{r}} \tag{8}$$

Als eine der wichtigsten Anwendungen dieser letzteren Formeln wollen wir Wiederholungsmessungen von Längen, oder Hin- und Her-Nivellierungen nehmen. Alle diese Messungen haben mittlere Fehler, welche mit den Quadratwurzeln der Entfernungen s wachsen, folglich sind die Gewichte umgekehrt proportional den $(\sqrt{s}\,)^2$, d. h. umgekehrt proportional den s zu setzen, und damit werden (6), (7) und (8):

$$D^2 = \frac{1}{r}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2} + \ldots \frac{d_n^2}{s_n}\right) = \frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]$$

$$m = \sqrt{\frac{1}{2\,r}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \tag{9}$$

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]} \tag{10}$$

Als Beispiel hiezu nehmen wir einen Teil eines Eisenbahn-Nivellements (das in unserm Band II. 1893, S. 442 näher beschrieben ist).

Punkt	Nivellierung I	Nivellierung II	I—II $= d$	d^2	Entfernung s	$\frac{d^2}{s}$
(1)						
(2)	$-0{,}1853^m$	$-0{,}1859^m$	$+0{,}6^{mm}$	0,36	$0{,}72^{km}$	0,50
(3)	$+1{,}6258$	$+1{,}6262$	$-0{,}4$	0,16	0,42	0,38
(4)	$+1{,}4329$	$+1{,}4323$	$+0{,}6$	0,36	0,47	0,77
(5)	$+0{,}5106$	$+0{,}5094$	$+1{,}2$	1,44	0,48	3,00
(6)	$-0{,}0073$	$-0{,}0049$	$-2{,}4$	5,76	0,51	11,30
$r = 5$	$+3{,}5693$	$+3{,}5679$	$+2{,}4$		2,60	15,95
	$-0{,}1926$	$-0{,}1908$	$-2{,}8$			
	$+3{,}3767$	$+3{,}3771$	$-0{,}4$			

Hieraus hat man den mittleren Fehler eines Doppelnivellements von 1 Kilometer:

$$M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15{,}95}{5}} = \pm\,1{,}79^{mm} \tag{11}$$

und den mittleren Fehler eines einfachen Nivellements von 1 Kilometer:

$$m = M\sqrt{2} = \pm\,2{,}53^{mm} \tag{12}$$

Eine solche Genauigkeitsbestimmung ist mehr oder weniger zuverlässig, je nachdem man mehr oder weniger Vergleichsstrecken zur Verfügung hat, dagegen auf die Längen der Strecken kommt es dabei nicht an, sondern nur auf deren Anzahl. (Allerdings *ganz kleine* Strecken, z. B. unter 100^m, werden aus mancherlei Gründen nicht vollberechtigt mitzählen.)

Wir wollen die Formeln (9) und (10) auch noch auf eine Längenmessung anwenden und zwar auf das klassische Beispiel der Bessel schen Gradmessung in Ostpreussen, welches an sich schon interessant ist, uns auch noch Veranlassung zu einer Bemerkung über die Entstehung der Differenzenrechnung geben wird.

Bessel hat bei seiner Gradmessung in Ostpreussen eine Basis in zwei Teilen je zweifach gemessen, nämlich:

	1. Teil:	2. Teil:	Gesamtmittel	
1. Messung	$441{,}1852^m$	$1381{,}1571^m$	$1822{,}3447^m$	(13)
2. Messung	$441{,}1839^m$	$1381{,}1632^m$		
Differenzen	$d_1 = +1{,}3^{mm}$	$d_2 = -6{,}1^{mm}$		

Indem man nun die Differenzen d in Millimetern, die Entfernungen in Kilometern zählt, also $s_1 = 0{,}441$ und $s_2 = 1{,}381$, wobei $r = 2$ ist, hat man nach (9) das mittlere Fehlerquadrat einer Messung der Längeneinheit:

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right) \tag{14}$$

$$m^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}3^2}{0{,}441} + \frac{6{,}1^2}{1{,}381}\right) = 7{,}70 \qquad m = \pm 2{,}78^{mm} \text{ für 1 Kilom.} \tag{14a}$$

Dieses ist der mittlere Fehler *einer* Messung der Längeneinheit von 1 Kilometer. Der mittlere Fehler eines Mittels aus je *zwei* zusammengehörigen (Hin- und Her)-Messungen einer Länge von 1 Kilometer d. h. der mittlere Fehler einer Doppelmessung von 1^{km} wird nach (10):

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{2{,}78}{\sqrt{2}} = \pm 1{,}96^{mm} \text{ (für 1 Kilom.)} \tag{15}$$

Endlich kann man aber auch den mittleren Fehler des Gesamtmittels $s_1 + s_2 = 1822{,}3447^m$ rechnen; es ist nämlich dessen Quadrat:

$$\left.\begin{aligned} M'^2 &= M^2(s_1+s_2) = \frac{1}{8}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right)(s_1+s_2) \\ \text{oder } M' &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2 + \frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

während in der Gradmessung in Ostpreussen S. 55 statt dessen angegeben ist:

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2 + \frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2} \tag{15a}$$

(Vergleiche hiezu die kleingedruckten Anmerkungen im Nachfolgenden S. 40.)

Die Ausrechnung nach (15) giebt:

$$M' = M\sqrt{s_1+s_2} = 1{,}96\sqrt{1{,}822} = \pm 2{,}65^{mm} \tag{15b}$$

Man wird also nun aus (13) und (15b) das Schlussergebnis bilden:

$$\text{Basislänge} = 1822{,}3447^m \pm 0{,}0027^m \tag{16}$$

Endlich bietet die Differenzentheorie noch die Möglichkeit eines zweiten sehr anschaulichen Beweises des Satzes, dass man bei der Genauigkeitsberechnung aus dem arithmetischen Mittel die Quadratsumme $[v^2]$ nicht durch n, sondern durch $n-1$ dividieren muss, d. h. des Satzes (10) §. 7. S. 21.

Wenn eine Unbekannte n mal beobachtet ist, so kann man zur Gewinnung eines Urteils über die Genauigkeit der einzelnen Beobachtung die einzelnen Ergebnisse *unter sich* vergleichen, und zwar kann man die n Beobachtungen zu $n\frac{n-1}{2}$ verschiedenen Differenzen kombinieren. Bedeuten l_1 und l_2 die zwei ersten Beobachtungen, so ist deren Differenz $d = l_2 - l_1$, oder wenn man die scheinbaren Fehler $v_1 = x - l_1$ und $v_2 = x - l_2$ vorführt, so ist auch $d = (x - v_2) - (x - v_1) = v_1 - v_2$.

Die sämtlichen so zu bildenden $n\frac{n-1}{2}$ Differenzen sind folgende:

$$\begin{array}{llll}
v_1 - v_2 & & & \\
v_1 - v_3 & v_2 - v_3 & & \\
v_1 - v_4 & v_2 - v_4 & v_3 - v_4 & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\
v_1 - v_n & v_2 - v_n & v_3 - v_n \;.\;.\;.\;. & v_{n-1} - v_n
\end{array}$$

Diese Differenzen sind nun allerdings nicht unabhängig, und man hat deswegen nicht das Recht, sie wie unabhängige Beobachtungsfehler zu behandeln, allein sie sind wenigstens gleichartig und gestatten deswegen die Bildung eines Mittelwertes. Ihre Quadratsumme wird, da jedes einzelne v^2 sich $(n-1)$ mal findet:

$$[d^2] = (n-1)\,[v^2] - 2\,[v_i\,v_k] \tag{17}$$

wenn $[v_i\,v_k]$ die Summe aller bei der Quadrierung der Differenzen auftretenden Produkte bedeutet.

Um diese unbekannte Summe $[v_i\,v_k]$ wieder zu eliminieren, benützt man die identische Gleichung:

$$(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots v_n)^2 = [v]^2 = [v^2] + 2\,[v_i\,v_k]. \tag{18}$$

(17) und (18) geben zusammen:

$$[d^2] = (n-1)\,[v^2] + [v^2] - [v]^2$$

Die scheinbaren Fehler v geben aber die algebraische Summe $[v] = 0$

$$\text{also} \qquad [d^2] = n\,[v^2] \tag{19}$$

Die Anzahl der Differenzen d ist $= \frac{n-1}{2}$, also die mittlere Differenz D (je zweier Messungen):

$$D = \sqrt{\frac{2\,[d^2]}{n\,(n-1)}} = \sqrt{\frac{2\,[v^2]}{n-1}} \tag{20}$$

und der mittlere Fehler einer Messung:

$$m = \frac{D}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{21}$$

dieses ist in Übereinstimmung mit (10) § 7. S. 21.

Über die Entstehung der Rechnung mit Beobachtungs-Differenzen schreibt *Czuber* in „Theorie der Beobachtungsfehler, Leipzig 1891", S. 174: „Der Gedanke, zur Beurteilung der Genauigkeit einer Beobachtungsreihe statt der Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom arithmetischen Mittel, ihre Abweichungen unter einander, mit anderen Worten, statt der scheinbaren Fehler die Beobachtungs-*Differenzen* zu verwenden, ist von *Jordan* 1869 ausgegangen, und von *Andrae* und *Helmert* weiter ausgebildet worden. Wohl unabhängig von Jordan hat *Bréger* 1881 die Anwendung der Beobachtungs-Differenzen zur Bestimmung der Präcision einer Beobachtungsreihe vorgeschlagen, (Comptes rendus 93, 1881, S. 1119—1121, sur les différences successives des observations) und die Richtigkeit der Grundgleichung (4) (s. oben S. 36) auch experimentell geprüft."

Zu diesem Berichte von Czuber wollen wir noch einige Erläuterungen aus eigenen Erfahrungen geben: Die Differenzenrechnung entstand als Vorbereitung der längeren Erörterungen, welche in den zwei ersten Bänden der „Zeitschrift für Vermessungswesen, 1872—1873" geführt worden sind. Es handelte sich um Berechnung mittlerer Längenmessungsfehler aus Reihen von Doppelmessungen. Es ist nämlich die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Messung der Längeneinheit aus den Differenzen einer Anzahl von Doppelmessungen verschiedener Längen früher grossenteils nicht richtig ausgeführt worden, und es hatte zuerst *Dienger* in „Grunerts Archiv 31. Teil, 1858", S. 225, auf den allgemein hier begangenen Fehler aufmerksam gemacht (vgl. „Zeitschr. f. Verm. 1872", S. 19).

Auf eine Unrichtigkeit, welche sogar *Bessel* in der „Gradmessung in Ostpreussen", S. 54—55 bei der Berechnung des mittleren Fehlers seiner Basismessung dadurch beging, dass er die Quadratsumme zweier Differenzen nicht mit 2, sondern mit $2-1=1$ dividierte, war ich 1869 aufmerksam geworden und legte mir die Sache am besten zurecht durch Einführung der Beobachtungs-*Differenzen* als selbständiger Fehler-Elemente, was dann weiter ausgeführt wurde in einer Abhandlung „Über die Genauigkeit mehrfach wiederholter Beobachtungen einer Unbekannten" in „Astr. Nachr., 74. Band 1869", S. 209—226, wo auf S. 226 der erwähnte Fehler, $2-1$ statt 2, in der Gradmessung in Ostpreussen S. 54 betrachtet und richtig gestellt wird. Bessel rechnet nämlich nicht so wie wir im vorstehenden (14)—(16) S. 38 richtig angaben, sondern er rechnet $m^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d_1^2}{s_1} + \frac{d_2^2}{s_2}\right)$ u. s. w., wodurch m und alles folgende zu gross erhalten wird, nämlich $\sqrt{2}$ mal so gross, als der richtige Wert, wie wir schon oben bei (15) und (15 a) S. 38 bemerkt haben.

Gleich darauf kam Andrae auf S. 283—284 der „Astr. Nachrichten" 74. Band mit einer kurzen dänisch geschriebenen Entgegnung auf meine Formeln von S. 209—226, darauf bezüglich, dass die einfache Beziehung zwischen der Quadratsumme $[d^2]$ aller Differenzen und der Quadratsumme $[v^2]$ der scheinbaren Fehler, nämlich $[d^2] = n\,[v^2]$ mir entgangen war, d. h. die Andrae sche dänische Entwicklung giebt das, was wir im vorstehenden in (17)—(21) S. 39 mitgeteilt haben. Weiter folgte in dieser Sache „Astr. Nachr., 79. Band, 1872", S. 219—222 und S. 257—272.

Im Anschluss an das Vorhergehende wurden auch noch veröffentlicht in den Astr. Nachr., 80. Band (1872), S. 67—70, Zachariae, 80. Band, S. 189—190 Jordan, dann 81. Band, 1873, S. 49—52 Helmert, S. 51—56 Jordan, S. 225—267 Zachariae und 88. Band 1876, S. 127—131; Helmert.

Da es den Fernerstehenden schwer ist, aus all' jenen Controversen den wirklichen Gang heute noch herauszufinden, wollen wir jenen Gang kurz so angeben: Meine erste Abhandlung von 1869 hatte nur den Mangel, dass die einfache Beziehung $[d^2] = n\,[v^2]$ nicht gefunden war, was alsbald Andrae verbessernd nachholte. Dann brachte aber Zachariae 1872 eine *andere* Streitfrage herein, indem er („Astr. Nachr., 80. Band", S. 68) nach der dänischen Gradmessung den Differenzen bei Längenmessungen verschiedene Gewichte bei der Fehlerberechnung zuteilte, je nachdem die Differenzen zu langen oder kurzen Strecken s gehören, d. h. nicht bloss insofern die $\frac{d^2}{s}$ auf die Einheit s zu reducieren sind, sondern er giebt einen $\frac{d^2}{s}$ selbst wieder nachher das Gewicht s von der Annahme ausgehend, dass eine Differenz d aus langen Strecken mehr zur Genauigkeitsermittlung beitrage als ein d aus kurzen Strecken; das mittlere Differenzquadrat für die Längeneinheit wäre hiernach:

$$D^2 = \frac{s_1 \frac{d_1^2}{s_1} + s_2 \frac{d_2^2}{s_2}}{s_1 + s_2} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{s_1 + s_2}$$

Diese Anschauung hat etwas Verführerisches, allein sie ist doch nicht die richtige, wie Helmert in „Astr. Nachr., 81. Band", S. 49—52 zuerst scharf bewiesen hat. (Darauf bezieht sich die Bemerkung, welche wir oben bei (12) S. 38 über die Längen der Nivellierstrecken gemacht haben.)

Wenn also nun heute jeder Landmesser oder Wasser-Nivelleur seine Nivellements nach der Formel (10) S. 37, nämlich $M = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{r}\left[\frac{d^2}{s}\right]}$, in Hinsicht auf mittlere Fehler berechnet, so wird er dieselbe wohl als selbstverständlich hinnehmen, während doch diese Formel den langen und polemischen Weg von 1869—1873 durchlaufen musste, welchen wir in den vorstehenden Citaten geschildert haben. —

§ 12. Allgemeines Ausgleichungsprinzip.

Das arithmetische Mittel genügt nur zur Ausgleichung von Beobachtungen *einer* Unbekannten. Wenn zur Bestimmung *mehrerer* Unbekannter Beobachtungen in überschüssiger Zahl vorhanden sind, so muss ein allgemeineres Ausgleichungsprinzip gesucht werden. Alle Ausgleichungsaufgaben werden sich auf eine Grundaufgabe zurückführen lassen, nämlich:

Es liegen folgende n Gleichungen vor:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} 0 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + l_1 \\ 0 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + l_2 \\ 0 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + l_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 = a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} = u} \right\} \tag{1}$$

Die Grössen $l_1 \, l_2 \, l_3 \ldots l_n$ sind durch Beobachtungen erhalten worden, $x \, y \, z \ldots$ sind Unbekannte, welche mit den Beobachtungen l in Beziehungen stehen. Die Coefficienten $a \, b \, c \ldots$ der diese Beziehungen ausdrückenden Gleichungen (1) sind fehlerfrei gegeben.

Die Anzahl n der Beobachtungen und der Gleichungen (1) soll immer grösser sein als die Anzahl u der darin vorkommenden Unbekannten, d. h.:

$$n > u \tag{2}$$

Es wird daher im allgemeinen nicht möglich sein, ein System von Unbekannten $x \, y \, z$ zu finden, welches *allen* Gleichungen (1) Genüge leistet. In diesen Gleichungen werden Widersprüche auftreten, welche wir mit $v_1 \, v_2 \, v_3 \ldots v_n$ bezeichnen; und damit gehen die Gleichungen (1) über in die folgenden neuen Gleichungen, denen wir den Namen Fehlergleichungen geben:

Fehlergleichungen

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots \quad + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots \quad + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots \quad + l_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_n = a_n x + b_n y \pm c_n z + \ldots \quad + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} = u} \right\} \tag{3}$$

Man kann nur verlangen, dass von den n Widersprüchen v eine Anzahl u verschwindet, man muss also notgedrungen auf die Bedingung, dass *alle* v gleich Null werden, verzichten, und sich mit einem System $x \, y \, z \ldots$ begnügen, für welches die v im allgemeinen *nicht* gleich Null werden.

Die Aufgabe, ein solches System zu finden, ist ohne weitere Bedingung eine unbestimmte; eine solche weitere Bedingung ist insofern vorhanden, als die Widersprüche v in ihrer Gesamtheit möglichst klein sein sollen, so dass den Gleichungen (1) möglichst wenig Zwang angethan wird.

Die allseitig befriedigende mathematische Formulierung dieser Bedingung des möglichst Anpassens, oder des kleinsten Zwangs lautet:

Es soll die **Quadrat-Summe** der Widersprüche v möglichst klein sein, oder in einer Formel:

$$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = \text{Minimum} \tag{4}$$

Diese einfache Bedingung gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungen l, zu welchen die Verbesserungen v gehören, a priori *gleich* genau zu achten sind. Ist dieses nicht der Fall, und kommen den Beobachtungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$ a priori die mittleren zu fürchtenden Fehler $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ zu, so gilt statt (4) die geänderte Bedingung:

$$\left[\frac{v^2}{m_2}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \left(\frac{v_3}{m_3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \tag{5}$$

Oder indem man unter Gewichten $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$ solche Zahlen versteht, welche den Quadraten $m_1^2\, m_2^2\, m_3^2 \ldots m_n^2$ umgekehrt proportional sind, kann man statt (5) auch schreiben:

$$[p\, v^2] = p_1\, v_1^2 + p_2\, v_2^2 + p_3\, v_3^2 + \ldots p_n\, v_n^2 = \text{Minimum} \tag{5a}$$

Dieses Prinzip der kleinsten Quadratsumme $[v^2]$ bezw. $[p\, v^2]$ ist ebenso willkürlich wie der Begriff des mittleren Fehlers selbst, wie wir schon beim mittleren Fehler § 4. S. 14 bemerkt haben. Die Nützlichkeit des Quadratsummenprinzips erweist sich aber am besten aus seinen Folgerungen, indem auf dieses Prinzip die ganze heutige Methode der kleinsten Quadrate gegründet werden konnte.

Ehe wir weiteren Gebrauch von dem Prinzip der Gleichung (4), bzw. (5) oder (5a) machen, überzeugen wir uns, dass dieses Prinzip im Einklang mit dem schon früher behandelten arithmetischen Mittel ist.

Man habe eine Grösse x wiederholt beobachtet

mit den Ergebnissen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots l_n$
und mit den Gewichten $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_n$

Der Hypothese, es sei x der wahrscheinlichste Wert, entsprechen die wahrscheinlichsten Verbesserungen v der Beobachtungen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots \qquad v_n = x - l_n$$

Nach (5a) soll sein:

$$p_1\,(x - l_1)^2 + p_2\,(x - l_2)^2 + p_3\,(x - l_3)^2 + \ldots = \text{Minimum}$$

woraus durch Differentiieren nach der Veränderlichen x erhalten wird:

$$2\,p_1\,(x - l_1) + 2\,p_2\,(x - l_2) + 2\,p_3\,(x - l_3) + \ldots = 0$$

also mit Auflösung nach x:

$$x = \frac{p_1\, l_1 + p_2\, l_2 + p_3\, l_3 + \ldots}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots} = \frac{[p\, l]}{[p]}$$

in Übereinstimmung mit (4) § 8. S. 25

Man kann auch noch in anderer Weise das arithmetische Mittel als besonderen Fall unserer allgemeineren Ausgleichungsaufgabe nachweisen:

Zur Bestimmung der unbekannten Grösse x sollen die Beobachtungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ gemacht werden, wobei die Beziehnungen bestehen:

$$\left.\begin{array}{r} a_1\, x + l_1 = 0 \\ a_2\, x + l_2 = 0 \\ a_3\, x + l_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{6}$$

Es ist also x niemals unmittelbar beobachtet, man kann aber x in den Beobachtungen l mehrfach ausdrücken, nämlich:

$$1)\ x = -\frac{l_1}{a_1} \qquad 2)\ x = -\frac{l_2}{a_2} \qquad 3)\ x = -\frac{l_3}{a_3} \text{ u. s. w.} \tag{7}$$

Es sollen nun die Gewichte der ursprünglichen Beobachtungen $l_1\, l_2\, l_3 \ldots$ alle gleich, nämlich $= 1$ sein, und m sei der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewicht 1, dann sind die mittleren Fehler der verschiedenen in (7) enthaltenen Bestimmungen von x bzw.:

$$\frac{m}{a_1} \qquad \frac{m}{a_2} \qquad \frac{m}{a_3} \ldots \tag{8}$$

folglich die Gewichte der Werte x umgekehrt proportional den Quadraten hievon, d. h.:

$$\text{Gewichte:} \quad a_1^2 \qquad a_2^2 \qquad a_3^2 \ldots \tag{9}$$

Nachdem die Gewichte (9) ermittelt sind, erhält man den wahrscheinlichsten Wert von x aus (7) und (9), nach dem Prinzip der Gleichung (4) § 8. S. 25:

$$x = \frac{-a_1^2 \dfrac{l_1}{a_1} - a_2^2 \dfrac{l_2}{a_2} - a_3^2 \dfrac{l_3}{a_3} - \ldots}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots}$$

$$x = -\frac{a_1\, l_1 + a_2\, l_2 + a_3\, l_3 + \ldots}{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots}$$

$$x = -\frac{[a\, l]}{[a\, a]} \tag{10}$$

Diese Gleichung wird im folgenden § 13. bestätigt werden, indem die erste Gleichung (3) S. 45 daselbst mit $y = 0$ geben wird:

$$[a\, a]\, x + [a\, l] = 0$$

Nachdem hiernach das allgemeine Ausgleichungsprinzip $[v^2] =$ Minimum in Übereinstimmung mit dem arithmetischen Mittel befindlich, und dadurch um so mehr Vertrauen verdienend erkannt worden ist, wollen wir die Sache hier noch so weit verfolgen, dass die Ermittlung der Unbekannten $x, y, z \ldots$ klargestellt wird.

Angenommen man habe nur *drei* Elemente x, y, z mit mehr als drei Fehlergleichungen, alle mit gleichen Gewichten, so heisse eine einzelne dieser Fehlergleichungen:

$$v = a\, x + b\, y + c\, z + l \tag{11}$$

Also ist das zugehörige Quadrat:

$$\left.\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2\, a\, b\, x\, y + 2\, a\, c\, x\, z + 2\, a\, l\, x \\ &+ b^2 y^2 \quad + 2\, b\, c\, y\, z + 2\, b\, l\, y \\ &\qquad + c^2 z^2 \quad + 2\, c\, l\, z \\ &\qquad\qquad + l^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die entsprechende Quadratsumme wird, wenn wie üblich, $a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + \ldots = [aa]$, und $a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \ldots = [a\, b]$ u. s. w. bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a\, a]\, x^2 &+ 2\, [a\, b]\, x\, y + 2\, [a\, c]\, x\, z + 2\, [a\, l]\, x \\ &+ \quad [b\, b]\, y^2 \quad + 2\, [b\, c]\, y\, z + 2\, [b\, l]\, y \\ &\qquad + \quad [c\, c]\, z^2 \quad + 2\, [c\, l]\, z \\ &\qquad\qquad + \quad [l\, l] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Nach dem Quadratsummen-Minimums-Prinzip muss werden:

$$\frac{\partial\,[v^2]}{\partial\,x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v^2]}{\partial\,y} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v^2]}{\partial\,z} = 0$$

Dieses ausgeführt giebt:

$$\begin{aligned} 2\,[a\,a]\,x + 2\,[a\,b]\,y + 2\,[a\,c]\,z + 2\,[a\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,b]\,x + 2\,[b\,b]\,y + 2\,[b\,c]\,z + 2\,[b\,l] &= 0 \\ 2\,[a\,c]\,x + 2\,[b\,c]\,y + 2\,[c\,c]\,z + 2\,[c\,l] &= 0 \end{aligned}$$

Da der Faktor 2 überall weggelassen werden kann, erhalten wir daraus 3 Gleichungen, welche Normalgleichungen heissen.

Normalgleichungen.

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Die ursprünglich gegebenen Fehlergleichungen (3) und die Normalgleichungen (14) stellen das ganze Ausgleichungsverfahren vor. Man hat offenbar ebensoviele Normalgleichungen als Unbekannte. Im besonderen Falle (14) hat man 3 Unbekannte x, y, z und 3 Normalgleichungen; bei u Unbekannten wie in (3) angedeutet ist, wird man auch u Normalgleichungen bekommen, die linear sind, also durch Auflösung, nach irgend welchem Verfahren, zur Auffindung der n Unbekannten führen müssen.

Die im Vorstehenden (11)—(14) behandelte Aufgabe führt (nach Gerling) den Namen *Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen*, indem die Beobachtungen l angestellt sind als Vermittlung, um zu den Unbekannten x, y, z zu gelangen.

Anmerkungen.

Die Quadratsumme $[v^2]$ wird häufig $[vv]$ geschrieben und dann auch $[p\,v^2] = [p\,v\,v]$, was offenbar gleich berechtigt ist, ebenso wie $a^2 = a\,a$ u. s. w. Wegen des Anschlusses an $[a\,b]$, $[a\,c]$ u. s. w. passt es sich natürlich auch $[a\,a]$ und nicht $[a^2]$ zu schreiben, sowie $[v\,v]$, während das einzeln stehende $[v^2]$ natürlicher ist.

Die Benennung „Fehlergleichung“ für eine Gleichung von der Art (3) S. 41 oder (11) S. 43 rührt von Helmert in dessen „Ausgleichungsrechnung“ her. Die rechte Seite unserer Fehlergleichung (11) S. 43, d. h. der Ausdruck $a\,x + b\,y + c\,z + l$ kann, nach Schreiber, „*Fehlerausdruck*“ genannt werden.

Auch zur Buchstabenbezeichnung wollen wir einige Bemerkungen machen: Die übrig bleibenden (scheinbaren) Fehler der Ausgleichungen mit v zu bezeichnen, ist seit Gauss, Gerling und Encke allgemein gebräuchlich und bei der Preussischen Landesaufnahme und im Geodätischen Institute beibehalten. Statt v findet man häufig auch das Zeichen δ, welches wir in den beiden ersten Auflagen dieses Werkes (bzw. „Taschenbuch der praktischen Geometrie“) anwandten, aber dann fallen liessen zu Gunsten des am meisten gebräuchlichen v.

Die Fehlergleichung $v = a\,x + b\,y + c\,z + l$ kommt in dieser Form schon in Art. 20 der „theoria combinationis“ vor. Dagegen Encke schreibt stets $v = a\,x + b\,y + c\,z + n$, bezeichnet also das Absolutglied mit n, was uns aber nicht passt, weil n neuerdings mehr als Zeichen für eine Anzahl gebraucht wird (bei (3) bedeutet n die Anzahl der Fehlergleichungen).

Das Absolutglied l einer Fehlergleichung hat den Charakter einer Beobachtung, welche aber hier *negativ* auftritt, wie schon aus (7) zu ersehen ist, und später bei Betrachtung von Näherungswerten (in § 14.) noch deutlicher sich zeigen wird. Schreiben wir eine Fehlergleichung in die Form:

$$(-l + v) = a\,x + b\,y + c\,z$$

so erscheint $a\,x + b\,y + c\,z$ als Funktion der Unbekannten x, y, z, dann $-l$ als Beobachtungsergebnis für diese Funktion und v als Verbesserung der Beobachtung $(-l)$. Der Umstand, dass in der althergebrachten Form $v = a\,x + b\,y + c\,z + l$ das Absolutglied l eine *negative* Beobachtung vorstellt, scheint Veranlassung gewesen zu sein, das Absolutglied selbst negativ zu schreiben. So hat Helmert in seiner „Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate, Leipzig 1872" für die Fehlergleichungen die Form:

$$\lambda = -l + a x + b y + c z$$

also wie erwähnt $-l$ statt $+l$ und dazu λ statt v. Auch die Bezeichnung f für das Absolutglied der Fehlergleichung kommt vor, und führt dann zu der Benennung Fehlerglied. Man könnte dasselbe einen Näherungswert für den scheinbaren Fehler v nennen, nach seiner innersten Bedeutung hat aber das Absolutglied, mag man es mit l oder mit f bezeichnen, den Charakter einer Beobachtung und nicht eines Fehlers. In unserem System bezieht sich f stets auf eine Funktion von Messungen oder ausgeglichenen Elementen, und die linearen Fehlergleichungen schreiben wir stets in der zuerst 1821 von Gauss angewendeten, jetzt am weitesten verbreiteten Form:

$$v = a x + b y + c z + l.$$

§ 13. Vermittelnde Beobachtungen mit zwei Unbekannten.

Wir beginnen mit dem besonderen Falle von nur *zwei* Unbekannten und haben für dieses langsame Vorgehen zwei Gründe: Erstens gestalten sich bei nur zwei Unbekannten alle Entwicklungen viel einfacher und übersichtlicher als wenn man gleich mit beliebig vielen Unbekannten beginnt und zweitens kommt der besondere Fall zweier Unbekannter x und y so oft vor, namentlich bei Ausgleichungen mit Coordinaten x, y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu behandeln.

Die Anzahl der Beobachtungen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$ sei $= n$ und man habe folgende n Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 &= a_3 x + b_3 y + l_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= a_n x + b_n y + l_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ein einzelnes v giebt quadriert:

$$\begin{aligned} v^2 = a^2 x^2 &+ 2 a b x y + 2 a l x \\ &+ \quad b^2 y^2 \quad + 2 b l y \\ &\qquad\qquad\qquad + l^2 \end{aligned}$$

Denkt man sich alle einzelnen v so quadriert und addiert, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} [v^2] = [a a]\, x^2 &+ 2 [a b]\, x y + 2 [a l]\, x \\ &+ \quad [b b]\, y^2 \quad + 2 [b l]\, y \\ &\qquad\qquad\qquad + [l l] \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Unser Quadrat-Minimums-Prinzip verlangt:

$$\frac{\partial\,[v v]}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial\,[v v]}{\partial y} = 0$$

Dieses giebt:

$$\begin{aligned} 2 [a a]\, x + 2 [a b]\, y + 2 [a l] &= 0 \\ 2 [a b]\, x + 2 [b b]\, y + 2 [b l] &= 0 \end{aligned}$$

oder mit Weglassung des gemeinsamen Faktors 2 hat man die zwei

Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} [a a]\, x + [a b]\, y + [a l] &= 0 \\ [a b]\, x + [b b]\, y + [b l] &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Diese Normalgleichungen löst man nach x und y auf, was bei nur *zwei* Unbekannten keinerlei Schwierigkeiten bereiten kann. Man findet:

$$x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) oder (4) enthalten die vollständige Ausgleichungsvorschrift für die vorgelegten Fehlergleichungen (1). In Worten hat man hiernach folgende Anweisung:

Wenn die Coefficienten a, b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen (1) gegeben sind, so bildet man daraus alle Quadrate und Produkte und deren Summen:

$$\begin{array}{l} a_1^2 \quad + a_2^2 \quad + a_3^2 \quad + \ldots + a_n^2 = [a\,a] \\ a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3 + \ldots\, a_n\,b_n = [a\,b] \\ b_1^2 \quad + b_2^2 \quad + b_3^2 \quad + \ldots + b_n^2 = [b\,b] \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Aus diesen Summen-Coefficienten bildet man die Normalgleichungen (3) oder sofort deren Auflösungen (4).

Man kann die Normalgleichungen (3) auch in dieser abgekürzten Form schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,v] = 0 \\ [b\,v] = 0 \end{array}\right\} \tag{3a}$$

denn es ist nach (1):

$$[a\,v] = a_1\,v_1 + a_2\,v_2 + a_3\,v_3 + \ldots$$

was in weiterer Ausführung giebt:

$$[a\,v] = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l]$$

Diese Formen (3 a) entsprechen der Gleichung $[v] = 0$ beim arithmetischen Mittel. S. 20.

Wir nehmen hiezu sofort ein Zahlenbeispiel:

In den „Württembergischen Naturwissenschaftlichen Jahresheften" Jahrgang XXIV. (1868) S. 260 sind von Professor *Schoder* die Meereshöhen h und die 12jährigen Barometermittel B von 9 meteorologischen Stationen mitgeteilt, nämlich:

	h	B	
	m	mm	
1. Bruchsal	120,2	751,18	
2. Cannstatt	225,1	742,37	
3. Stuttgart	270,6	738,50	
4. Calw	347,6	731,27	
5. Friedrichshafen . .	406,7	726,99	(5)
6. Heidenheim . . .	492,4	718,16	
7. Isny	708,1	700,48	
8. Freudenstadt . . .	733,5	697,64	
9. Schopfloch . . .	768,9	695,23	

Wir wollen annehmen, die Theorie der barometrischen Höhenmessung sei uns ganz unbekannt, wir bemerken aber, dass bei wachsenden Höhen h die Barometerstände B ziemlich gesetzmässig abnehmen; und um das Gesetz dieser Abnahme zu untersuchen, beginnen wir damit, die Barometerstände B als Funktion der Höhen h graphisch darzustellen, wie Fig. 1. zeigt (S. 47).

Für viele Zwecke wird es nun genügen, durch die erhaltenen Punkte eine Gerade oder eine stetige Kurve möglichst anschliessend durchzulegen, und die Ordinaten der Ausgleichungs-Kurve als ausgeglichene Werte anzunehmen.

Auch wenn man eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate vornehmen will, ist ein solches Auftragen vor Beginn der Rechnung immer rätlich, ganz besonders, wenn die Beziehung der Veränderlichen theoretisch unklar ist; die

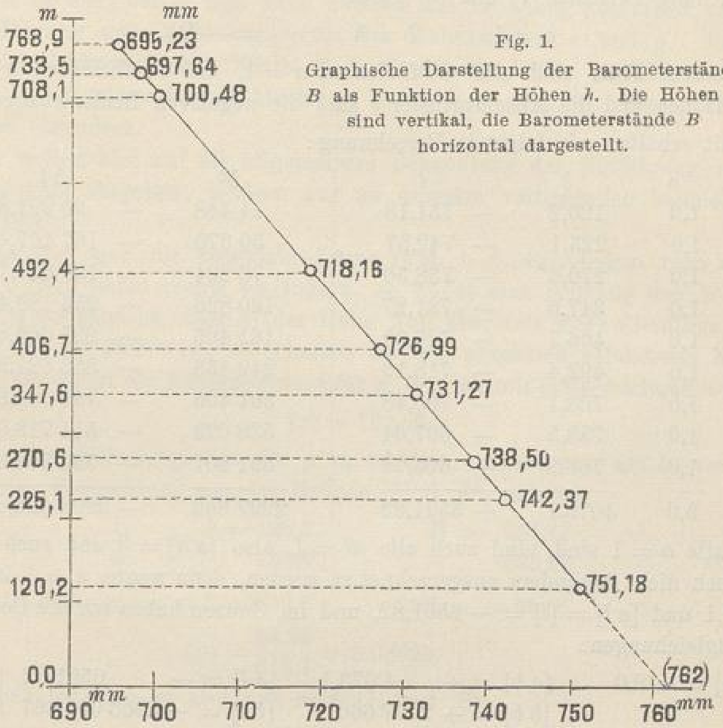


Fig. 1.
Graphische Darstellung der Barometerstände B als Funktion der Höhen h. Die Höhen h sind vertikal, die Barometerstände B horizontal dargestellt.

graphische Darstellung hat den Zweck, die Art der Abhängigkeit zu veranschaulichen, unter Umständen die Form der Ausgleichungs-Funktion festzustellen, grobe Beobachtungsfehler aufzufinden und Näherungswerte der Unbekannten zu ermitteln.

Der Anblick unserer Figur lässt eine lineare Funktion zwischen h und B annehmbar erscheinen, d. h. wir setzen:

$$B = x + h\,y \tag{6}$$

Irgend 2 von den 9 Beobachtungen (5) würden hinreichen, die 2 Unbekannten x und y der Funktion (6) zu bestimmen. Um aber allen 9 Beobachtungen möglichst gerecht zu werden, müssen wir nach den oben entwickelten Gleichungen (1)—(4) verfahren, und haben zuerst die Fehlergleichungen zu bilden. Hiebei sollen die unter (5) gegebenen Höhen h als fehlerfrei anzunehmen sein, dagegen die Barometerstände B als fehlerhaft beobachtet, so dass alle auftretenden Widersprüche den Fehlern der B zur Last zu legen sind.

Jede der 9 Beobachtungen giebt eine Gleichung von der Form (6); die entsprechenden 9 Gleichungen werden aber im allgemeinen nicht stimmen, weshalb jedem B eine Verbesserung v zugeteilt werden muss, also statt (6) wird werden

$$B + v = x + h\,y$$

$$\text{oder} \quad v = x + h\,y - B \tag{7}$$

Dieses (7) ist bereits die Form der Fehlergleichungen in unserem besonderen Fall, und zur Vergleichung haben wir die allgemeine Fehlergleichungsform (1):

$$v = a\,x + b\,y + l \tag{8}$$

Die Vergleichung zwischen (7) und (8) giebt

$$a = 1 \qquad b = h \qquad l = -B \tag{9}$$

d. h. in unserem Falle sind alle Coefficienten $a = 1$, die Coefficienten b sind die gegebenen Höhen und die Absolutglieder l sind die negativen Beobachtungen B.

Damit erhalten wir folgende Berechnung:

Num.	a	b	l	b^2	$b\,l$
1.	1,0	120,2	— 751,18	14 448	— 90 291,836
2.	1,0	225,1	— 742,37	50 670	— 167 107,487
3.	1,0	270,6	— 738,50	73 224	— 199 838,100
4.	1,0	347,6	— 731,27	120 826	— 254 189,452
5.	1,0	406,7	— 726,99	165 405	— 295 666,833
6.	1,0	492,4	— 718,16	242 458	— 353 621,984
7.	1,0	708,1	— 700,48	501 406	— 496 009,888
8.	1,0	733,5	— 697,64	538 022	— 511 718,940
9.	1,0	768,9	— 695,23	591 207	— 534 562,347
	9,0	4073,1	— 6501,82	2297 666	— 2903 006,867

Da alle $a = 1$ sind, sind auch alle $a^2 = 1$, also $[a\,a] = 9$ und auch $[a\,b]$ und $[a\,l]$ brauchen nicht besonders ausgerechnet zu werden, denn wegen $a = 1$ ist $[a\,b] = [b] = 4073{,}1$ und $[a\,l] = [l] = -6501{,}82$, und im Ganzen haben wir die Coefficienten der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{lll} [a\,a] = +9{,}0 & [a\,b] = +\ 4\,073{,}1 & [a\,l] = -\ 6501{,}82 \\ & [b\,b] = +2297\,666 & [b\,l] = -2903\,006{,}867 \end{array}\right\} \tag{10}$$

Setzt man diese Coefficienten in (4), so giebt die Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} [a\,a]\,[b\,b] = +\ 20678\ 994{,}00 \\ [a\,b]\,[a\,b] = +\ 16590\ 143{,}61 \\ \hline [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] = +\ \ 4088\ 850{,}39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} [b\,b]\,[a\,l] = -\ 14\,939\,010\,752{,}12 \\ [a\,b]\,[b\,l] = -\ 11\,824\,237\,811{,}70 \\ \hline [b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l] = -\ \ 3\,114\,772\,940{,}42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} [a\,a]\,[b\,l] = -\ 26\,127\,061{,}803 \\ [a\,b]\,[a\,l] = -\ 26\,482\,563{,}042 \\ \hline [a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l] = +\ \ 355\,501{,}239 \end{array}$$

Die Unbekannten selbst werden:

$$x = -\frac{-\ 3\,114\,772\,940}{+\ \ 4\,088\,850} = +\ 761{,}77$$

$$y = -\frac{+\ \ \ 355\,501}{+\ \ 4\,088\,850} = -\ 0{,}08695$$

Die Ausgleichungsfunktion (6) heisst also:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \tag{11}$$

oder nach h aufgelöst:

$$h = 11{,}50\,(761{,}77 - B)$$

§ 14. Einführung von Näherungswerten bei zwei Unbekannten.

Wir haben die Ausrechnung des Zahlenbeispiels in vorstehendem § 13., welche sich zuerst dargeboten hat, nicht zur Nachahmung, sondern sozusagen als abschreckendes Beispiel hierhergesetzt; man kann nämlich die Rechnung wesentlich vereinfachen durch Einführung von *Näherungswerten* der Unbekannten x und y. Ebenso wie man bei dem arithmetischen Mittel § 7. S. 22 die Grade und Minuten (35° 26′) nicht mit in die Summierung hineinzog, kann man auch in unserem Falle erste Näherungen absondern.

Wir wollen hier auf die allgemeinere Behandlung der Einführung von Näherungswerten nicht eingehen, sondern nur an unserem vorliegenden besonderen Falle die Sache zeigen:

Betrachtet man die Barometer-Kurve (Fig. 1. S. 47), indem man sie bis zur Höhe $h = 0$ nach unten rechts verlängert, so findet man beiläufig den Wert 762^{mm}, und da es ja bekannt ist, dass in der Höhe Null über dem Meer allerdings der Barometerstand etwa = 760^{mm} ist, so behalten wir den graphisch gefundenen Näherungswert 762. Dieses ist ein Näherungswert für x, den wir mit (x) bezeichnen wollen, also

$$(x) = 762{,}00 \tag{1}$$

Um auch einen Näherungswert für y zu erhalten, nimmt man am besten die erste und die letzte Beobachtung aus der Gruppe (5) S. 46, nämlich

1.	$h = 120{,}2$	$B = 751{,}18$
9.	$768{,}9$	$695{,}23$
Differenzen:	$\varDelta h = 648{,}7$	$\varDelta B = -55{,}95$

$$(y) = \frac{55{,}95}{648{,}7} = 0{,}08625 \tag{2}$$

Die Näherungsfunktion ist also nun nach (1) und (2):

$$\text{Näherung} \qquad B = 762{,}00 - 0{,}08625\,h \tag{3}$$

Gelegentlich ist hiezu zu bemerken: Auf welchem Wege man die ersten Näherungen herbekommt, ist gleichgültig, sehr oft hat man sie von anderwärts, von früheren vorläufigen Berechnungen u. s. w. Unter allen Umständen kann man sich dadurch brauchbare Näherungen verschaffen, dass man, bei 2 Unbekannten, 2 möglichst verschiedene Beobachtungen auswählt und die ihnen entsprechenden Fehlergleichungen mit $v = 0$ auflöst.

Die Näherungen (x) und (y) müssen nun noch verbessert werden, was durch Zufügen von Verbesserungen geschehen soll, welche bzw. δx und $\delta y'$ heissen sollen, wir schreiben dabei nicht δy sondern $\delta y'$, weil δy für eine andere Sache (nachher bei (7) S. 50) noch vorbehalten bleibt. Also

$$x = (x) + \delta x \qquad\qquad y = (y) + \delta y' \tag{4}$$

Dem entspricht in Zahlen:

$$\text{Es } \textit{soll} \text{ sein:} \quad B = (762 + \delta x) - (0{,}08625 + \delta y')\,h \tag{5}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind die Gleichungen (5) im allgemeinen nicht erfüllt, weil die B beobachtete Werte vorstellen. Es muss jedem B eine Verbesserung v zugeteilt werden, d. h. im Gegensatz zu (5) hat man:

$$\text{Es } \textit{ist}: \qquad B + v = (762 + \delta x) - (0{,}08625 + \delta y')\,h$$

Das giebt die Fehlergleichung: $v = \delta x - h\,\delta y' + (762 - 0{,}08625\,h) - B \qquad (6)$

Indessen kommt noch eine Kleinigkeit in Betracht: Bei der Annahme (6) werden die Coefficienten von δx und $\delta y'$ sehr *ungleich.* Die Coefficienten von δx sind nämlich alle $= 1$ und die Coefficienten von $\delta y'$ sind $= h$, von 120 bis 769, d. h. viel grösser als die Coefficienten von δx. Eine solche Ungleichheit ist aber formell sehr störend, wie jeder Rechenversuch sofort zeigen wird; man kann aber immer die Coefficienten nahezu gleich machen durch Einführung neuer Unbekannten, nämlich statt (6):

$$v = \delta x - \frac{h}{100}(100\,\delta y') + (762 - 0{,}08625\,h) - B$$

oder zur Abkürzung $$100\,\delta y' = \delta y \tag{7}$$

giebt: $$v = \delta x - \frac{h}{100}\,\delta y + (762 - 0{,}08625\,h) - B \tag{8}$$

Das ist eine nun genügend zugerichtete Fehlergleichung von der allgemeinen Form

$$\left.\begin{array}{l} v = a\,\delta x + b\,\delta y + l \\ \text{wobei} \quad a = 1 \quad b = -\dfrac{h}{100} \\ l = (762 - 0{,}08625\,h) - B \end{array}\right\} \tag{9}$$

Zur Veranschaulichung der Bedeutung von l wollen wir noch ein neues Zeichen (B) einführen, nämlich:

$$l = (B) - B \qquad (B) = 762 - 0{,}08625\,h \tag{10}$$

(B) ist nämlich derjenige Wert der Beobachtungsgrösse B, welchen B annehmen würde, wenn die Näherungswerte 762 und 0,08625 streng gälten. In Hinsicht auf das Vorzeichen merken wir ein- für allemal:

$$l = (B) - B = \text{Näherung} - \text{Beobachtung} \tag{11}$$

Nach den Formeln (11), (10) und (9) wird folgendes berechnet:

h	(B)	B	l	a	b	b^2	l^2	bl
120,2	751,63	751,18	+ 0,45	+ 1,0	— 1,20	1,44	0,20	— 0,54
225,1	742,59	742,37	+ 0,22	+ 1,0	— 2,25	5,06	0,05	— 0,50
270,6	738,66	738,50	+ 0,16	+ 1,0	— 2,71	7,34	0,03	— 0,43
347,6	732,02	731,27	+ 0,75	+ 1,0	— 3,48	12,11	0,56	— 2,61
406,7	726,92	726,99	— 0,07	+ 1,0	— 4,07	16,56	0,00	+ 0,28
492,4	719,53	718,16	+ 1,37	+ 1,0	— 4,92	24,21	1,88	— 6,74
708,1	700,93	700,48	+ 0,45	+ 1,0	— 7,08	50,13	0,20	— 3,19
733,5	698,74	697,64	+ 1,10	+ 1,0	— 7,34	53,88	1,21	— 8,07
768,9	695,68	695,23	+ 0,45	+ 1,0	— 7,69	59,14	0,20	— 3,46
			+ 4,88	+ 9,0	— 40,74	229,87	4,33	— 25,26

$$\left.\begin{array}{lll} [a\,a] = +\,9{,}00 & [a\,b] = -\;40{,}74 & [a\,l] = +\;4{,}88 \\ & [b\,b] = +\,229{,}87 & [b\,l] = -\,25{,}26 \\ & & [l\,l] = +\;4{,}33 \end{array}\right\} \tag{12}$$

Die Summe $[l\,l]$ haben wir hier gelegentlich mitberechnet, obgleich sie nach der bisherigen Entwicklung noch nicht nötig erscheint.

Nun rechnet man wieder wie früher:

$$\delta x = -\frac{[b\,b]\,[a\,l] - [a\,b]\,[b\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} = -\frac{1121{,}7 - 1029{,}1}{2068{,}8 - 1659{,}7} = -\frac{92{,}6}{409{,}1} = -\,0{,}226$$

$$\delta y = -\frac{[a\,a]\,[b\,l] - [a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} = -\frac{-\,227{,}34 + 198{,}81}{2068{,}8 - 1659{,}7} = +\frac{28{,}53}{409{,}1} = +\,0{,}06974$$

Das so gefundene δy ist nur eine Hilfs-Unbekannte, die eigentliche Verbesserung $\delta y'$ ist nach (7) gleich dem hundertsten Teile von δy, d. h.

$$\delta y' = \frac{\delta y}{100} = +0{,}000697$$

Nun hat man nach (1) und (2) die Näherungen, und soeben berechnet die Verbesserungen, also zusammen:

Näherungen	$(x) = 762{,}00$	$(y) = 0{,}086\,250$	
Verbesserungen	$\delta x = -0{,}23$	$\delta y' = +0{,}000\,697$	
Auflösungen	$x = 761{,}77$	$y = 0{,}086\,947$	(13)

Damit ist die ausgeglichene Funktion:

$$B = x - y\,h = 761{,}77 - 0{,}086\,947\,h \tag{14}$$

Dieses stimmt hinreichend überein mit dem früheren (11) § 13. S. 48. Wir haben also auf einem zweiten bequemeren Wege das Ergebnis des vorigen § 13 wieder erhalten, und wenn eine kleine Abweichung in y zu Tage tritt, indem der neue Coefficient $y = 0{,}086947$ giebt gegen 0,08695 der früheren Rechnung, so werden wir, ohne im einzelnen weiter nachzuforschen, dem neuen Ergebnis 0,086947 den Vorzug geben weil es, trotz geringerer Ziffermenge in der Rechnung, schärfer erhalten werden muss.

Wenn man nach (14) für die gegebenen Höhen h die einzelnen B ausrechnet, und sie mit den beobachteten B vergleicht, so erhält man folgendes:

	h	B beobachtet	B nach (14) ausgeglichen	v	v^2
1.	120,2^{m}	751,18^{mm}	751,32^{mm}	+ 0,14^{mm}	0,0196
2.	225,1	742,37	742,20	− 0,17	0,0289
3.	270,6	738,50	738,24	− 0,26	0,0676
4.	347,6	731,27	731,55	+ 0,28	0,0784
5.	406,7	726,99	726,41	− 0,58	0,3364
6.	492,4	718,16	718,96	+ 0,80	0,6400
7.	708,1	700,48	700,21	− 0,27	0,0729
8.	733,5	697,64	598,00	+ 0,36	0,1296
9.	768,9	695,23	594,92	− 0,31	0,0961
					$1{,}4695 = [v^2]$ (15)

Diese Summe $[v^2]$ wird zur Berechnung des mittleren Fehlers gebraucht.

Wenn die v wahre Fehler wären, so würde man einfach rechnen:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n}} = \sqrt{\frac{1{,}4695}{9}} = \pm 0{,}404^{mm} \; (?) \tag{16}$$

Dieses ist aber aus demselben Grunde nicht richtig, aus welchem auch die erste Berechnung (3) S. 15 nicht richtig war, nämlich weil die v nicht wahre Fehler, sondern nur scheinbare Fehler sind. Die schärfere Berechnung des mittleren Fehlers m wird in dem späteren § 18. gelehrt werden.

§ 15. *Gauss* sche Elimination und Fehlerquadratsumme für zwei Unbekannte.

Statt der unmittelbaren Auflösung der Normalgleichungen, welche in (4) § 13. S. 46 angegeben ist, empfiehlt sich in den meisten Fällen die von *Gauss* angegebene allmähliche Eliminierung mit einer eigentümlichen übersichtlichen Bezeichnungsart.

Wir nehmen die Normalgleichungen (3) § 13. S. 45 nochmals vor:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \qquad (1)$$

$$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0 \qquad (2)$$

Wir multiplizieren die erste Normalgleichung (1) mit $-\dfrac{[a\,b]}{[a\,a]}$ und addieren sie zur zweiten, wodurch x wegfällt, und folgende Gleichung übrig bleibt:

$$\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) y + \left([b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\right) = 0 \qquad (3)$$

Dieses giebt Veranlassung, abgekürzte Bezeichnungen einzuführen, nämlich:

$$[b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \qquad [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] = [b\,l\,.\,1] \qquad (4)$$

damit wird (3):

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1] = 0 \qquad y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (5)$$

Macht man die Elimination in umgekehrter Folge, so hat man:

$$[a\,a] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[a\,b] = [a\,a\,.\,1] \qquad [a\,l] - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}[b\,l] = [a\,l\,.\,1] \qquad (6)$$

$$[a\,a\,.\,1]\,x + [a\,l\,.\,1] = 0 \qquad x = -\frac{[a\,l\,.\,1]}{[a\,a\,.\,1]} \qquad (7)$$

Die Klammern $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,l\,.\,1]$ u. s. w. sind symbolische Bezeichnungen von ähnlicher Art, wie auch z. B. die Determinanten-Bezeichnung.

Um sich den Bau unserer Klammer-Coefficienten einzuprägen, merke man sich zunächst, dass jeder solche Wert = Null wird, sobald man die symbolische Bezeichnung algebraisch auffasst, z. B.

$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = b\,b - \frac{a\,b}{a\,a}\,a\,b = b\,b - \frac{b}{a}\,a\,b = b\,b - b\,b = 0 \qquad (8)$$

Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler.

Auch die Quadratsumme $[v\,v]$ der übrig bleibenden (scheinbaren) Fehler v kann man durch einen ähnlichen gebauten Ausdruck darstellen wie $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w.

Nach (2) § 13. S. 45 ist diese Summe zunächst:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,l]\,x \\ + [b\,b]\,y^2 + 2\,[b\,l]\,y \\ + [l\,l]\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Hiemit lässt sich die Normalgleichung (1) in innige Beziehung bringen, es ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l])^2 = [a\,a]^2\,x^2 + 2\,[a\,a]\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,a]\,[a\,l]\,x \\ + \;[a\,b]^2\,y^2 \quad + 2\,[a\,b]\,[a\,l]\,y \\ + \;[a\,l]^2\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

und wenn man allerseits mit $[a\,a]$ dividiert:

$$\left.\begin{aligned}\frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y \quad &+ 2\,[a\,l]\,x \\ + \frac{[a\,b]\,[a\,b]}{[a\,a]}\,y^2 + 2\,&\frac{[a\,b]\,[a\,l]}{[a\,a]}\,y \\ + \,&\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Wenn man dieses von (9) abzieht, so erhält man:

$$\begin{aligned}[v\,v] - \frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} = \left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]\right) y^2 + 2\left([b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right) y \\ + \left([l\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\right)\end{aligned}$$

In der neuen Schreibweise mit $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. giebt dieses:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v] - \frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} = [b\,b\,.\,1]\,y^2 + 2\,[b\,l\,.\,1]\,y \\ + [l\,l\,.\,1]\end{aligned}\right| \qquad (12)$$

Eine Umformung von gleicher Art kann man nochmals machen, nämlich wegen (5)

$$\begin{aligned}([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1])^2 = [b\,b\,.\,1]^2 y^2 + 2\,[b\,b\,.\,1]\,[b\,l\,.\,1]\,y \\ + [b\,l\,.\,1]^2\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]} = [b\,b\,.\,1]\,y^2 + 2\,[b\,l\,.\,1]\,y \\ + \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Dieses (13) wieder gliederweise von (12) abgezogen giebt:

$$[v\,v] - \frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} - \frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]} = [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1] \qquad (14)$$

Schreibt man vollends $[l\,l\,.\,2]$ für die letzten Teile von (14), so ist nun das ursprüngliche $[v\,v]$ von (9) auf folgende Form gebracht:

$$[v\,v] = \frac{([a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,l])^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,y+[b\,l\,.\,1])^2}{[b\,b\,.\,1]} + [l\,l\,.\,2] \qquad (15)$$

Nach (1) und (5) sind aber die beiden quadratischen Glieder = Null, es bleibt also übrig:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] \qquad (16)$$

Die neu eingeführten Glieder $[l\,l\,.\,1]$ und $[l\,l\,.\,2]$, welche zur Elimination selbst nicht nötig waren, berechnet man im Anschluss an die Elimination.

Wir wollen den geschlossenen Ausdruck $[l\,l\,.\,2]$ auch nochmals auseinander ziehen, nämlich:

$$[l\,l\,.\,2] = [l\,l\,.\,1] - \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]$$

und $\qquad [l\,l\,.\,1] = [l\,l] \quad - \quad \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$

Dann wird (16):

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} \quad - \quad \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (17)$$

Die abgekürzten Bezeichnungen $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1]$, $[l\,l\,.\,1]$ u. s. w. mit der entsprechenden Elimination, sind zuerst von Gauss eingeführt worden im Jahre 1810 durch die Abhandlung „*Dis-*

quisitio de elementis ellipticis Palladis etc." Die Zeichen sind daselbst geschrieben $[b\,b\,,1]$ $[b\,c\,,1]$ u. s. w., während jetzt gewöhnlich $[b\,b\,.\,1]$ geschrieben wird, von manchen auch $[b\,b,_1]$. Abgesehen von diesen kleinen Abänderungen haben sich diese classischen Bezeichnungen seit 80 Jahren in allen namhaften Schriften über Methode der kleinsten Quadrate eingebürgert und werden als sozusagen geheiligte Bezeichnungen festgehalten. Der Versuch, diese glücklicherweise nun feststehenden Zeichen durch andere zu ersetzen, wäre als unglücklich und auf die Dauer nicht haltbar zu bezeichnen.

§ 16. Mittlerer Gewichts-Einheits-Fehler bei zwei Unbekannten.

Aus der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$, mit welcher wir uns soeben beschäftigt haben, kann man auch den mittleren Fehler einer Beobachtung berechnen (bzw. den mittleren Fehler einer Beobachtung vom Gewichten $= 1$). In erster Näherung kann man schreiben:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\,(?) \tag{1}$$

Indessen ist diese Formel deswegen nicht genügend, weil die v nicht wahre Fehler, sondern nur scheinbare Fehler sind, wie schon am Schluss von § 14. S. 51 betrachtet worden ist.

Wir müssen die Formel (1) in ähnlicher Weise abändern, wie schon beim arithmetischen Mittel bei (10) § 7. S. 21 geschehen ist, wo der Nenner n in $n - 1$ (für *eine* Unbekannte x) umgewandelt wurde.

Wir werden wieder zu unterscheiden haben:

Ausgleichungs-Ergebnisse	$x\ y$,	Wahre Unbekannte	$X\ Y$
scheinbare Fehler	$v_1\,v_2\,v_3\ldots$.	Wahre Fehler	$\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\ldots$

Dann bestehen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v &= a\,x + b\,y + l \\ \varepsilon &= a\,X + b\,Y + l \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\text{Also Differenz:}\quad v - \varepsilon = a\,(x - X) + b\,(y - Y)$$

$$\text{oder}\quad v = a\,(x - X) + b\,(y - Y) + \varepsilon \tag{3}$$

Dieses hat wieder dieselbe Form wie die früheren Fehlergleichungen $v = a\,x + b\,y + l$, und wegen $[a\,v] = 0$ und $[b\,v] = 0$ kann man daraus auch eine Art von Normalgleichungen bilden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} [a\,v] &= [a\,a]\,(x - X) + [a\,b]\,(y - Y) + [a\,\varepsilon] = 0 \\ [b\,v] &= [a\,b]\,(x - X) + [b\,b]\,(y - Y) + [b\,\varepsilon] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Auch die Summe $[v\,v]$ kann man in ähnlicher Form wie früher bilden, nämlich:

$$\begin{aligned} [v\,v] = [a\,a]\,(x - X)^2 &+ 2\,[a\,b]\,(x - X)\,(y - Y) + 2\,[a\,\varepsilon]\,(x - X) \\ &+ [b\,b]\,(y - Y)^2 \qquad\quad + 2\,[b\,\varepsilon]\,(y - Y) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + [\varepsilon\,\varepsilon] \end{aligned}$$

und damit lässt sich auch dieselbe Umformung machen wie bei dem früheren $[v\,v]$ in (17) § 15. S. 53, nämlich:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{5}$$

Man sieht hieraus, dass $[v\,v]$ kleiner als $[\varepsilon\,\varepsilon]$ ist, und es handelt sich darum, die Differenz zwischen $[v\,v]$ und $[\varepsilon\,\varepsilon]$, d. h. die zwei Schlussglieder von (5), so genau zu bestimmen, als es bei der Unbekanntheit der wahren Fehler ε möglich ist, d. h.

wir gehen darauf aus, die *Mittel*werte der zwei letzten Glieder in (5) zu bestimmen. Zunächst haben wir:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + a_3\,\varepsilon_3 + \ldots)^2$$
$$= a_1{}^2\,\varepsilon_1{}^2 + a_2{}^2\,\varepsilon_2{}^2 + a_3{}^2\,\varepsilon_3{}^2 + \ldots \quad + 2\,a_1\,a_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \ldots \tag{6}$$

An Stelle der Quadrate $\varepsilon_1{}^2$, $\varepsilon_2{}^2 \ldots$ setzen wir deren gemeinsamen Mittelwert m^2, und die Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ u. s. w. müssen wegen des unregelmässigen Zeichenwechsels $\pm\,\varepsilon$ im Mittel verschwinden, folglich giebt (6):

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots)\,m^2 + 0$$

$$[a\,\varepsilon]^2 = [a\,a]\,m^2 \text{ und } \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = m^2 \tag{7}$$

In gleicher Weise können wir auch das letzte Glied von (5) behandeln, nämlich:

$$[b\,\varepsilon\,.\,1] = [b\,\varepsilon] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,\varepsilon]$$
$$= (b_1\,\varepsilon_1 + b_2\,\varepsilon_2 + \ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + \ldots)$$
$$= \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right)\varepsilon_1 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right)\varepsilon_2 + \ldots$$
$$[b\,\varepsilon\,.\,1]^2 = \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right)^2\varepsilon_1{}^2 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right)^2\varepsilon_2{}^2 + \ldots$$
$$+ 2\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right)\left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right)\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \ldots$$

Hievon soll der Mittelwert mit Rücksicht auf die verschiedenen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots$ gebildet werden, und dabei macht man wieder dieselben Überlegungen, wie bei (6), dass nämlich der Mittelwert der verschiedenen *Quadrate* $\varepsilon_1{}^2$, $\varepsilon_2{}^2 \ldots$ allgemein $= m^2$ zu setzen ist und dass der Mittelwert der *Produkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ verschwindet wegen der unregelmässig schwankenden Vorzeichen $\pm$ der einzelnen ε. Man findet also aus dem vorhergehenden:

$$[b\,\varepsilon\,.\,1]^2 = \left((b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1)^2 + (b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2)^2 + \ldots\right)m^2$$

$$\frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{m^2} = \left(b_1{}^2 - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_1{}^2 - 2\,a_1\,b_1\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right) + \left(b_2{}^2 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_2{}^2 - 2\,a_2\,b_2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\right) + \ldots$$
$$= (b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots) + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots) - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots)$$
$$= [b\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}[a\,a] - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$$

$$\frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{m^2} = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \tag{8}$$

Setzt man dieses (8) nebst (7) in (5), so erhält man:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - m^2 - m^2$$
$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - 2\,m^2$$

Nun ist $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} = m^2$ die wahre Bestimmung von m^2, was mit dem vorhergehenden zusammengenommen giebt:

$$[v\,v] = n\,m^2 - 2\,m^2$$

also:
$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-2} \qquad m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} \tag{9}$$

Dieses ist die richtige Formel statt der zweifelhaften Formel (1). Die Formel (9) erinnert in ihrem Bau an die frühere Formel (10) § 7. S. 21 für das arithmetische Mittel. Ebenso wie für *eine* Unbekannte beim arithmetischen Mittel der Nenner n in $n-1$ überging, muss nun bei *zwei* Unbekannten x und y der Nenner $n-2$ werden.

Man kann wohl vermuten, dass das nun so weiter gehen wird, dass bei 3 Unbekannten x, y, z der Nenner $n-3$ und allgemein bei u Unbekannten der Nenner $n-n$ entstehen wird; aber ehe wir dieses bewiesen haben werden, ist es noch nicht gültig.

Die Unterscheidung wahrer Fehler ε und scheinbarer Fehler v bei der Berechnung des mittleren Fehlers ist eine der feinsten Betrachtungen der M. d. kl. Q., eine echte Blüte des Gaussschen Ingeniums, während manch Anderer als Gauss sich wohl dabei beruhigt hätte, dass die v immerhin Näherungswerte der ε sind. Der allgemeine Satz, dessen besonderen Fall für zwei Unbekannte wir soeben behandelt haben, wurde zuerst von Gauss in art. 38 der „theoria combinationis" (vom Jahre 1823) entwickelt. In einem Lehrbuche diese Sache anschaulich vorzutragen und zu beweisen ist nicht leicht. Schon Gerling begnügte sich in seiner „Ausgleichungs-Rechnung der praktischen Geometrie", Hamburg 1843, S. 39 und S. 132 mit einer allgemeinen Plausibelmachung. Neuere Verfasser von Lehrbüchern haben häufig den Satz wenigstens für $n-1$ bewiesen, und haben dann nach Analogie summarisch weiter geschlossen, dass für zwei Unbekannte $n-2$, für drei Unbekannte $n-3$ u. s. w. zu setzen sei. — Ganz unzulässig aber ist es, wie in neuester Zeit geschehen, den Satz $m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u}$ als „nicht streng zu beweisender *Grundsatz*" an die Spitzen der Betrachtungen zu stellen. Mit demselben Rechte könnte man den Pythagoräischen Fehlerfortpflanzungssatz (6) S. 16 als unbewiesenen Grundsatz an die Spitze stellen, und durch solches Verfahren der M. d. kl. Q. den mathematischen Boden entziehen. —

§ 17. Mittlerer Fehler der ausgeglichenen x und y.

Mit dem, was wir in § 13.—16. gelehrt haben, kann man bereits kleine Ausgleichungen machen, und in vielen Fällen geschieht nichts weiteres, (und im Sinne allmählicher Erlernung der ganzen Theorie möchte es sich auch empfehlen, unn sofort das Zahlenbeispiel von § 14. nochmals vorzunehmen, und entsprechend § 15. und § 16. weiter zu führen).

Indessen ebenso wie beim arithmetischen Mittel der mittlere Fehler des Mittels selbst, d. h. des ausgeglichenen x bestimmt werden musste, verlangt nun auch die Weiterführung unserer Ausgleichung mit zwei Unbekannten noch die Berechnung der mittleren Fehler der ausgeglichenen x und y.

Um dazu zu gelangen, nehmen wir wieder unser allgemeines Fehlerfortpflanzungsgesetz (10) § 5. S. 17 vor, und nehmen an, es hängen x und y mit gemessenen Grössen l durch folgende lineare Gleichungen zusammen:

$$x = \alpha_1\, l_1 + \alpha_2\, l_2 + \alpha_3\, l_3 + \ldots \quad + \alpha_n\, l_n \tag{1}$$
$$y = \beta_1\, l_1 + \beta_2\, l_2 + \beta_3\, l_3 + \ldots \quad + \beta_n\, l_n \tag{2}$$

Wenn dabei m der mittlere Fehler eines einzelnen l ist, so sind nach dem citierten Fehlerfortpflanzungsgesetze die mittleren Fehlerquadrate von x und y:

$$m_x^2 = \alpha_1^2\, m^2 + \alpha_2^2\, m^2 + \ldots \quad = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots)\, m^2 = [\alpha\,\alpha]\, m^2 \tag{3}$$
$$m_y^2 = \beta_1^2\, m^2 + \beta_2^2\, m^2 + \ldots \quad = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots)\, m^2 = [\beta\,\beta]\, m^2 \tag{4}$$

oder in Gewichtsform, wenn zu dem mittleren Fehler m das Gewicht 1 gehört:

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\,\alpha]} \qquad\qquad p_y = \frac{1}{[\beta\,\beta]} \tag{5}$$

Dieses gilt zunächst für beliebige Werte α und β; wir wollen nun aber unter y die Unbekannte verstehen, welche aus der Auflösung unserer Normalgleichungen hervorgeht, nämlich nach (5) § 15. S. 52:

$$y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} \tag{6}$$

Um diese Gleichung (6) mit (2) in Übereinstimmung zu bringen, müssen wir den Zähler von (6) so auflösen, bis alle darin vorkommenden $l_1\, l_2 \ldots$ einzeln dastehen; wir entwickeln daher:

$$\begin{aligned}[b\,l\,.\,1] &= [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \\ &= (b_1\, l_1 + b_2\, l_2 \ldots) - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}(a_1\, l_1 + a_2\, l_2 + \ldots) \\ &= \left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\right) l_1 + \left(b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2\right) l_2 + \ldots\end{aligned}$$

Dieses in (6) berücksichtigt giebt:

$$y = -\frac{b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1}{[b\,b\,.\,1]}\, l_1 - \frac{b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2}{[b\,b\,.\,1]}\, l_2 - \ldots$$

Die Vergleichung mit (2) zeigt, dass die β folgende Bedeutungen haben:

$$\beta_1 = -\frac{b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1}{[b\,b\,.\,1]} \quad , \quad \beta_2 = -\frac{b_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_2}{[b\,b\,.\,1]} \ldots \tag{7}$$

also: $$\beta_1^2 = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left(b_1^2 - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\, b_1 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_1^2\right)$$

ebenso auch: $$\beta_2^2 = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left(b_2^2 - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}a_1\, b_2 + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}a_2^2\right)$$

. . . .

Summe $$[\beta^2] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b^2] - 2\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}[a^2]\right)$$

oder mit $[b^2] = [b\,b]$, $[a^2] = [a\,a]$ u. s. w.:

$$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}\left([b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\right) = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]^2}[b\,b\,.\,1]$$

also $$[\beta\beta] = \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} \text{ oder } p_y = [b\,b\,.\,1] \tag{8}$$

Dieses gilt für die Unbekannte y und entsprechend hat man für x, indem man nur überall b und a vertauscht:

$$[\alpha\,\alpha] = \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} \qquad p_x = [a\,a\,.\,1] \tag{9}$$

Die Quadratsummen $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$ nennt man Gewichts-Coefficienten. Damit hat man auch die mittleren Fehler von y und von x, für den Gewichtseinheitsfehler m:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{m}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}} \tag{10}$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{m}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}} \tag{11}$$

m selbst wird hiezu nach (9) § 16. S. 75 und (16) § 15. S. 53 bestimmt, nämlich:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} = \sqrt{\frac{[l\,l\,.\,2]}{n-2}} \tag{12}$$

Coefficienten-Determinante. Wenn man die Determinante der Normalgleichungs-Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. einführt, nämlich:

$$[a\,a]\ [b\,b] - [a\,b]\ [a\,b] = D \tag{13}$$

so kann man, wie sich durch Auflösen sofort zeigt, auch folgende Formen herstellen:

$$[b\,b\,.\,1] = \frac{D}{[a\,a]} \quad , \quad [a\,a\,.\,1] = \frac{D}{[b\,b]} \tag{14}$$

Damit ist alles zur Fehlerbestimmung von x und y selbst nötige gefunden. Wir werden aber später finden, dass es auch noch eine Aufgabe giebt, welche im bisherigen nicht inbegriffen ist, nämlich Bestimmung des mittleren Fehlers einer Funktion der ausgeglichenen x und y.

Es ist nicht rätlich, sich damit zu beschäftigen, ehe die mittleren Fehler von x und y selbst nach den vorstehenden Formeln (9) und (10) völlig verstanden und auch durch Zahlenbeispiele eingeübt sind, jedoch des Zusammenhangs wegen wollen wir doch noch die Formeln für $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. angeben. Man braucht nämlich später (in § 24.) nicht nur die Quadratsummen $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, sondern auch die Produktsumme $[\alpha\,\beta]$ der Coefficienten α und β von (1) und (2).

Ein einzelner Wert β_1 oder α_1 giebt sich nach (7), mit Anwendung von D nach (14):

$$\beta_1 = -\frac{[a\,a]}{D}\left(b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1\right) \qquad \alpha_1 = -\frac{[b\,b]}{D}\left(a_1 - \frac{[a\,b]}{[b\,b]}\,b_1\right)$$

$$\alpha_1\,\beta_1 = +\frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,b_1 - [a\,b]\,a_1\right)\left([b\,b]\,a_1 - [a\,b]\,b_1\right)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,[b\,b]\,a_1\,b_1 - [a\,a]\,[a\,b]\,b_1\,b_1 - [a\,b]\,[b\,b]\,a_1\,a_1 + [a\,b]\,[a\,b]\,a_1\,b_1\right)$$

dann die Summe aller solcher Produkte:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{1}{D^2}\left([a\,a]\,[b\,b]\,[a\,b] - [a\,a]\,[a\,b]\,[b\,b] - [a\,b]\,[b\,b]\,[a\,a] + [a\,b]\,[a\,b]\,[a\,b]\right)$$

Die 2 ersten Glieder heben sich auf, und wenn man wieder die Bedeutung von D berücksichtigt, so erhält man:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{-[a\,b]}{D} = \frac{-[a\,b]}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{15}$$

und wegen der Analogie mit $[b\,b\,.\,1]$ wollen wir noch einführen:

$$[a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}\,[b\,b] = [a\,b\,.\,1] \tag{16}$$

wodurch wird:

$$[\alpha\,\beta] = \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} \tag{17}$$

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned} [\alpha\,\alpha] &= \frac{1}{[a\,a\,.\,1]} = \frac{[b\,b]}{D} = \frac{1}{p_x} \qquad [\alpha\,\beta] = \frac{1}{[a\,b\,.\,1]} = \frac{-[a\,b]}{D} \\ [\beta\,\beta] &= \frac{1}{[b\,b\,.\,1]} = \frac{[a\,a]}{D} = \frac{1}{p_y} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$(m_x)^2 = \frac{m^2}{p_x} = [\alpha\,\alpha]\,m^2 = \frac{[b\,b]}{D}\,m^2 \qquad (m_y)^2 = \frac{m^2}{p_y} = [\beta\,\beta]\,m^2 = \frac{[a\,a]}{D}\,m^2 \tag{19}$$

$$D = [a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b] \qquad (20)$$

Dieser Coefficienten-Determinante D entspricht auch eine Gewichts-Coefficienten-Determinante: $\Delta = [\alpha\,\alpha]\,[\beta\,\beta] - [\alpha\,\beta]\,[\alpha\,\beta]$ (21)

und es besteht zwischen beiden die Beziehung:

$$D\,\Delta = 1 \qquad (22)$$

Wir wiederholen hiezu aber die Bemerkung, dass man all das letzte, von (13) bis (22) für die nächsten Aufgaben *nicht* braucht.

§ 18. Coefficienten-Berechnung und Summen-Proben.

Obgleich durch die vorhergehenden § 13.—17. die Ausgleichung mit zwei Unbekannten x und y vollständig klargelegt ist, wollen wir doch vor Beginn eines Zahlenbeispiels noch einige Bemerkungen machen über die Ausrechnung und Versicherung der Quadratsummen und Produktsummen $[a\,a]$, $[a\,b]$ u. s. w.

Die Ausrechnung der Quadrate $a\,a$ und der Produkte $a\,b$ u. s. w. kann, je nachdem die Zahlen einfach oder mit vielen Stellen angegeben sind, verschieden geschehen. Es sind hiezu die mechanischen Rechenhilfsmittel zu erwähnen, welche wir in unserem II. Bande, 4. Aufl., S. 118—134 beschrieben haben: Rechenschieber, Rechenscheibe, Rechenmaschinen u. s. w.

Die Quadrate bildet man jedenfalls mit einer Quadrattafel, wie eine solche z. B. auf S. [2]—[6] unseres Anhangs mit 3stelligem Argument gegeben ist. Für grössere Genauigkeit (welche aber bei guter Vorbereitung der Rechenform selten nötig ist) hat man ausführlichere Quadrattafeln als Beigaben zahlreicher Logarithmentafeln und anderer Tabellenwerke.

Die Produkte $a\,b$ u. s. w. kann man direkt ausmultiplizieren, wie in den Beispielen S. 48 und S. 50 mit $[b\,l]$ geschehen ist. Bei mehrstelligen Zahlen kann man sich einer Produktentafel bedienen, deren zur Zeit zwei vorhanden sind, nämlich:

Dr. *A. L. Crelle*s Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, mit einem Vorworte von Bremiker. 5. Ausgabe, Berlin 1880.

Rechentafel nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte, entworfen und bearbeitet von Dr. *H. Zimmermann*, Regierungsrat. Berlin 1889.

Crelle giebt alle Produkte von 3- und 3stelligen Faktoren, Zimmermann giebt die Produkte aus 3- und 2stelligen Faktoren.

Es giebt aber auch ein sehr gutes Verfahren, die Produkte mit der Quadrattafel zu bestimmen. Es ist nämlich:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b \text{ oder } a\,b = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2}$$

woraus man findet:

$$[a\,b] = \frac{[(a+b)^2] - ([a\,a] + [b\,b])}{2} \qquad (1)$$

und da man $[a\,a]$ sowie $[b\,b]$ ohnehin braucht, so ist nur noch $[(a+b)^2]$ d. h. die Summe der Quadrate $(a+b)^2$ auszurechnen.

Statt $(a+b)^2$ kann man auch $(a-b)^2$ benützen in dieser Weise:

$$[a\,b] = \frac{[(a-b)^2] + [a\,a] + [b\,b]}{2} \qquad (2)$$

Wir wollen dieses Verfahren an einem Beispiele zeigen, welches zu § 14. und § 19. gehört:

b	l	$b\,l$		b^2	l^2	$(b+l)$	$(b+l)^2$
1,20	0,45	+ 0,54		1,44	0,20	1,65	2,72
2,25	0,22	0,50		5,06	0,05	2,47	6,10
2,71	0,16	0,43		7,34	0,03	2,87	8,24
3,48	0,75	2,61		12,11	0,56	4,23	17,89
4,07	— 0,07		— 0,28	16,56	0,00	4,00	16,00
4,92	1,37	6,74		24,21	1,88	6,29	39,56
7,08	0,45	3,19		50,13	0,20	7,53	56,70
7,34	1,10	8,07		53,88	1,21	8,44	71,23
7,69	0,45	3,46		59,14	0,20	8,14	66,26
40,74	4,88	+25,54	— 0,28	229,87	4,33	45,62	284,70
45,62		+ 25,26		= [$b\,b$]	= [$l\,l$]		— 234,20
		= [$b\,l$]		[bb]+[ll]=234,20			2 [bl] = + 50,50
							[bl] = + 25,25

Wir haben also [$b\,l$] unmittelbar = + 25,26 und auf dem Wege über $(b+l)^2$ und [$b\,b$] und [$l\,l$] mittelbar [$b\,l$] = + 25,25 gefunden, was hinreichend zusammen stimmt. Damit ist nicht nur [$b\,l$] selbst, sondern es sind auch [$b\,b$] und [$l\,l$] versichert

Man kann solche Proben in den verschiedensten Verbindungen machen; man kann z. B. [$a\,a$] und [$b\,b$] nebst [$a\,b$] durch [$(a+b)^2$] kontrollieren und dann noch die Produktsumme der $(a+b)\,l$ bilden, wodurch auch noch [$a\,l$] und [$b\,l$] versichert sind.

Man kann auch noch in anderer Weise ein Produkt durch Quadrate bestimmen, nach der Gleichung

$$a\,b = \frac{1}{4}\,(a+b)^2 + \frac{1}{4}\,(a-b)^2$$

Hiernach ist berechnet: Tafel der Viertel-Quadrate aller ganzen Zahlen von 1 bis 200 000 u. s. w. von *Joseph Plater*, Wien 1887, besprochen von Hammer in der Zeitschr. f. Verm. 1888, S. 485—486. Für Multiplikation vielstelliger Zahlen kann diese Tafel von Nutzen sein (nachdem man sich in der Anordnung mit den 3 *letzten* Stellen als Überschrift zurecht gefunden hat), für Produkte kleiner Faktoren, wie sie in der M. d. kl. Q. meist vorkommen, lohnt sich die Tafel der Viertelquadrate kaum.

Summenproben. Man kann die Berechnung der Coefficienten [$a\,a$] , [$a\,b$] u. s. w. auch durch Summen kontrollieren, welche immer über die ganze Reihe a , b , l sich erstrecken.

Bei nur *zwei* Elementen x , y, bzw. a , b tritt der grosse Vorteil solcher Summenproben noch nicht so deutlich hervor, wie bei vielen Unbekannten, wo die Probesummen durch die ganze Rechnung, namentlich auch in der Elimination von Linie zu Linie wirksam, ausgezeichnete Dienste leisten. Indessen müssen wir, um das Verfahren allmählich einzuüben, auch schon bei zwei Unbekannten den ganzen Probesummenapparat kennen lernen. Dabei ist es bequem, nicht die Summen selbst sondern die *negativen* Summen in Rechnung zu nehmen, so dass immer alles auf Null ausgehen muss, d. h. wir setzen:

$$a_1 + b_1 + l_1 + s_1 = 0$$
$$a_2 + b_2 + l_2 + s_2 = 0 \text{ u. s. w.}$$

dann ist auch:

$$\begin{aligned}
[a\,a]+[a\,b]+[a\,l]+[a\,s]&=0\\
[a\,b]+[b\,b]+[b\,l]+[b\,s]&=0\\
[a\,l]+[b\,l]+[l\,l]+[l\,s]&=0\\
[a\,s]+[b\,s]+[l\,s]+[s\,s]&=0
\end{aligned}$$

Dieses wollen wir durch Linien in folgender Weise andeuten:

$$\begin{array}{l|l|l|l}
\underline{[a\,a]} & \underline{[a\,b]} & \underline{[a\,l]} & \underline{[a\,s]}\\
 & \underline{[b\,b]} & \underline{[b\,l]} & \underline{[b\,s]}\\
 & & \underline{[l\,l]} & \underline{[l\,s]}\\
 & & & [s\,s]
\end{array}$$

Man bekommt also ein Coefficienten-System, wie wenn statt 2 Unbekannten deren 3 vorhanden wären. Dem entsprechend rechnet man auch weiter nicht nur $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,l\,.\,1]$, sondern auch $[b\,s\,.\,1]$, $[l\,s\,.\,1]$ u. s. w, d. h.:

$$[b\,b\,.\,1]=[b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] \quad\Bigg|\quad [b\,l\,.\,1]=[b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l] \quad\Bigg|\quad [b\,s\,.\,1]=[b\,s]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s]$$

$$[l\,l\,.\,1]=[l\,l]-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l] \quad\Bigg|\quad [l\,s\,.\,1]=[l\,s]-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s]$$

$$[s\,s\,.\,1]=[s\,s]-\frac{[a\,s]}{[a\,a]}[a\,s]$$

Hiemit hat man wieder Proben, nämlich:

$$\begin{array}{l|l|l}
\underline{[b\,b\,.\,1]} & \underline{[b\,l\,.\,1]} & \underline{[b\,s\,.\,1]}\\
 & \underline{[l\,l\,.\,1]} & \underline{[l\,s\,.\,1]}\\
 & & [s\,s\,.\,1]
\end{array}$$

Die Richtigkeit der hierdurch angedeuteten Probegleichungen lässt sich leicht einsehen, z. B.:

$$\begin{aligned}
[b\,b\,.\,1]&=[b\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]\\
[b\,l\,.\,1]&=[b\,l]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]\\
0&=[a\,b]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,a]
\end{aligned}$$

$$[b\,b\,.\,1]+[b\,l\,.\,1]=-[b\,s]-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}(-[a\,s])=-[b\,s\,.\,1]$$

$$[b\,b\,.\,1]+[b\,l\,.\,1]+[b\,s\,.\,1]=0$$

und ebenso: $[b\,l\,.\,1]+[l\,l\,.\,1]+[l\,s\,.\,1]=0$

" " $[b\,s\,.\,1]+[l\,s\,.\,1]+[s\,s\,.\,1]=0$

So geht es auch noch weiter:

$$[l\,l\,.\,2]=[l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \quad\Bigg|\quad [l\,s\,.\,2]=[l\,s\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1]$$

$$[s\,s\,.\,2]=[s\,s\,.\,1]-\frac{[b\,s\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,s\,.\,1]$$

Die hiebei giltigen Proben sind angedeutet durch:

$$\begin{array}{l|l}
\underline{[l\,l\,.\,2]} & \underline{[l\,s\,.\,2]}\\
 & [s\,s\,.\,2]
\end{array}$$

d. h. diese 3 letzten Glieder müssen einander gleich werden, wie sich in ähnlicher Weise, wie oben bei den Coefficienten $[\ldots 1]$, leicht nachweisen lässt.

Nun kommt noch die wichtige Probe, dass $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$ werden muss, indem $[v\,v]$ durch Quadrieren der einzelnen auszurechnenden v bestimmt wird.

Die mitgeteilten sehr zahlreichen Proben sind bei einiger Übung, wenn nur 2 Unbekannte vorhanden sind, teilweise überflüssig, und man kann sich hier, so weit die Elimination in Frage kommt, wohl mit der Probe begnügen, dass $[l\,l\,.\,2]$, dessen Bestimmung bei y *und* bei x vorkommt, hiebei übereinstimmend erhalten werden muss. Oft wird man die *quadratischen* Schlussglieder $[s\,s]$, $[s\,s\,.\,1]$, $[s\,s\,.\,2]$ weglassen können; wir haben diese letzten Probeglieder mehr der Symmetrie der Formeln wegen als wegen des praktischen Bedürfnisses aufgenommen.

Andererseits kann wohl auch ein Rechner, der seiner Sache sonst sicher ist, sich mit der *einen* Probe begnügen:

$$\begin{aligned}[s\,s] = [a\,a] &+ 2\,[a\,b] + 2\,[a\,l] \\ &+ [b\,b] + 2\,[b\,l] \\ &+ [l\,l]\end{aligned} \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned}&= [a\,a] + [a\,b] + [a\,l] \\ &+ [a\,b] + [b\,b] + [b\,l] \\ &+ [a\,l] + [b\,l] + [l\,l]\end{aligned}$$

Wenn alle diese Proben stimmen, so kann man mit einer an absolute Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit die Fehlerlosigkeit der Rechnung behaupten.

Unsere Zahlenbeispiele von § 13. und § 14. hatten die Eigentümlichkeit, dass alle Coefficienten $a = 1$ sind. Dieser Fall kommt häufig vor und erleichtert die Ausrechnung der Summen-Coefficienten sehr, denn es ist dann, bei n Beobachtungen,

$$[a\,a] = n \qquad [a\,b] = [b] \qquad [a\,l] = [l]$$

und nur $[b\,b]$, $[b\,l]$ und $[l\,l]$ müssen besonders berechnet werden, wozu dann kaum Summenglieder s zu nehmen sind, während die Elimination wohl mit Summengliedern gemacht werden kann.

§ 19. Eliminations-Beispiel mit 2 Unbekannten.

Wir nehmen das Beispiel von § 14., welches wir dort nach gewöhnlichen algebraischen Methoden behandelt haben, nochmals vor.

Das Coefficienten-System von S. 50 nebst Summengliedern ist:

$$\begin{array}{c|rrrr} & a & b & l & s \\ a & +9{,}00 & -40{,}74 & +4{,}88 & +26{,}86 \\ b & & +229{,}87 & -25{,}26 & -163{,}87 \\ l & & & +4{,}33 & +16{,}05 \end{array} \qquad (1)$$

Indem wir vorerst unentschieden lassen, ob man die Werte $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$ u. s. w. unmittelbar oder mit dem Rechenschieber oder mit Logarithmen oder sonst wie ausrechnen will, erhalten wir die folgende Anordnung, wobei man vorerst annehmen mag, dass die *klein gedruckten Zahlen* nötigenfalls auf einem Nebenblatt berechnet worden sind.

				Probe
$[a\,a]=+9{,}00$	$[a\,b]=-\ 40{,}74$	$[a\,l]=+\ 4{,}88$	$[a\,s]=+\ 26{,}86$	0,00
	$[b\,b]=+229{,}87$	$[b\,l]=-25{,}26$	$[b\,s]=-163{,}87$	0,00
	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]=-\ 184{,}42$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]=+\ 22{,}09$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,s]=+\ 121{,}58$	
		$[l\,l]=+\ 4{,}33$	$[l\,s]=+\ 16{,}05$	0,00
		$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,l]=-\ 2{,}65$	$-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}[a\,s]=-\ 14{,}56$	
	$[b\,b\,.\,1]=+\ 45{,}45$	$[b\,l\,.\,1]=-\ 3{,}17$	$[b\,s\,.\,1]=-\ 42{,}29$	−0,01
		$[l\,l\,.\,1]=+\ 1{,}68$	$[l\,s\,.\,1]=+\ 1{,}49$	0,00
		$-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]=-\ 0{,}22$	$-\frac{[b\,l.1]}{[bb.1]}[bs.1]=-\ 2{,}95$	
		$[l\,l\,.\,2]=+\ 1{,}46$	$[l\,s\,.\,2]=-\ 1{,}46$	0,00

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{-\ 3{,}17}{+\ 45{,}45} = +\ 0{,}06975 \\ p_y &= 45{,}45 \qquad [v\,v] = 1{,}46 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Für die umgekehrte Rechnung, nämlich Elimination von y und Bestimmung von x nebst p_x, schreiben wir nur noch die Zahlen, und zwar mit einer Stelle weniger als vorher:

b	a	l	s	Probe
+ 229,9	− 40,7	− 25,3	− 163,9	0,0
	+ 9,0	+ 4,9	+ 26,8	0,0
	− 7,2	− 4,5	− 29,0	
		+ 4,3	+ 16,1	0,0
		− 2,8	− 18,0	
	+ 1,8	+ 0,4	− 2,2	0,0
		+ 1,5	− 1,9	0,0
		− 0,1	+ 0,5	
		+ 1,4	− 1,4	0,0

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{+\ 0{,}4}{+\ 1{,}8} = -\ 0{,}22 \quad (\text{genauer} = -\ 0{,}226) \\ p_x &= 1{,}8 \qquad [v\,v] = 1{,}4 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Wenn es sich um eine Rechnung mit so wenigen Stellen wie hier handelt, so macht man die Rechnung am besten mit dem *Rechenschieber*. Man stellt für die erste Linie den Quotienten $\frac{40{,}7}{229{,}9}$ ein, und multipliziert damit der Reihe nach:

40,7 25,3 163,9, d. h. man liest mit *einer* Einstellung die drei Produkte ab:

$$\frac{40{,}7}{229{,}9}\,40{,}7 = 7{,}2 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,25{,}3 = 4{,}5 \qquad \frac{40{,}7}{229{,}9}\,163{,}9 = 29{,}0$$

Um die Vorzeichen − oder + der Grössen $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w. richtig anzusetzen, kann man in jedem einzelnen Falle die verschiedenen einwirkenden + und − abzählen; man gelangt aber bald zu einer übersichtlichen mechanischen Regel, die wir an der Hand des vorstehenden Beispiels bilden wollen:

$a)$	+	−	+	+
$b)$		+	−	−
		$b\,.\,1)$ −	+	+
$l)$			+	+
			$l\,.\,1)$ −	−

1) Die Vorzeichen einer Linie $b.1)$ oder $l.1)$ haben jedenfalls dieselbe Folge wie die darüberstehenden Vorzeichen der ersten Linie a).

2) Die Vorzeichen einer Linie $b.1)$ oder $l.1)$ beginnen immer mit —, daraus folgt:

3) Wenn über $b.1)$ in der Linie a) das Zeichen — steht, so gehen die Vorzeichen von a) unmittelbar nach $b.1)$ über; wenn dagegen über $b.1)$ in der Linie a) das Zeichen + steht, so gehen die Vorzeichen von a) sämtlich umgekehrt nach $b.1)$ über.

Wir wollen diese Regel an einem Beispiel mit 5 Elementen weiter veranschaulichen:

+	+	—	+	—	
	+	—	—	+	}
	—	+	—	+	}
		+	—	—	}
		—	+	—	}
			+	—	}
			—	+	}

Um nun alles zusammenzustellen, was die Elimination S. 63 für den Endzweck geliefert hat, nehmen wir aus (2) und (3):

$$\left.\begin{array}{llll} y = +0{,}06975 & & x = -0{,}22 & \text{genauer} = -0{,}226 \\ p_y = 45{,}45 & & p_x = 1{,}8 & \text{genauer} = 1{,}78 \\ [l\,l\,.\,2] = [v\,v] = 1{,}46 & & [l\,l\,.\,2] = [v\,v] = 1{,}4 & \end{array}\right\} \quad (4)$$

Das hier angegebene $x = -0{,}22$ und $p_x = 1{,}8$ sind mit dem Rechenschieber und bei Beschränkung auf die allermindeste Stellenzahl erhalten; rechnet man ein klein wenig schärfer, so erhält man $x = -0{,}226$ und $p = 1{,}78$, womit wir weiter rechnen wollen.

Die Schlusssumme $[l\,l\,.\,2] = 1{,}46$ muss mit der unmittelbaren Ausrechnung der v und der v^2 nach (15) § 14. S. 51 stimmen, was mit $[v^2] = 1{,}4695$ genügend der Fall ist; und nachdem diese wichtige Probe stimmt, hat man den mittleren Gewichtseinheitsfehler:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-2}} = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \sqrt{\frac{1{,}47}{7}} = \pm\, 0{,}46^{\text{mm}} \qquad (5)$$

Dann:

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \frac{0{,}46}{\sqrt{45{,}45}} = \pm\, 0{,}06797 \quad , \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \frac{0{,}46}{\sqrt{1{,}78}} = \pm\, 0{,}34 \qquad (6)$$

also $\quad y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797 \qquad x = -0{,}23 \pm 0{,}34$

$$\frac{y}{100} = +0{,}000697 \pm 0{,}000680$$

Diese $\dfrac{y}{100}$ und x haben diesesmal dieselbe Bedeutung, wie früher δ_y und δ_x in (13) § 14. S. 51 und wir haben daher nun wie dort:

$$\begin{array}{ll} \text{Näherung} & (y) = 0{,}086\,250 \\ \text{Verbesserung} & \underline{+\,0{,}000\,697 \pm 0{,}000\,680} \\ \text{Ausgeglichen} & 0{,}086\,947 \pm 0{,}000\,680 \end{array} \qquad (7)$$

Ebenso auch

$$\begin{array}{ll} \text{Näherung} & (x) = 762{,}00^{\text{mm}} \\ \text{Verbesserung} & \underline{-\;0{,}23\;\;\pm 0{,}34^{\text{mm}}} \\ \text{Ausgeglichen} & 761{,}77^{\text{mm}} \pm 0{,}34^{\text{mm}} \end{array} \qquad (8)$$

Die ausgeglichene Funktion ist also nun:

$$\left.\begin{array}{l} B = 761{,}77^{mm} - 0{,}086\,947\,h \\ \pm\, 0{,}34^{mm} \pm 0{,}000\,680 \\ \text{mit } m = \pm\, 0{,}46^{mm} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Man hat also wieder dieselbe Ausgleichungsfunktion wie früher (14) § 14. S. 51, jedoch hat die neue Rechnung den Vorzug, dass sie die Unsicherheit der erlangten Formel zu schätzen gestattet. Z. B. ist 761,77 für $h = 0$ der für jene Gegend (Württemberg) giltige mittlere Jahresbarometerstand auf den Meeresspiegel reduziert, und dieser Wert wurde mit einem mittleren Fehler von $\pm\, 0{,}34^{mm}$ erhalten. Ähnlich wissen wir nun von dem Coefficienten 0,086 947, dass er auf etwa 1 : 128 oder rund 1 % seines Wertes annähernd bestimmt wurde.

§ 20. Eliminations-Rechnung mit Logarithmen.

Bei nur zwei Unbekannten x und y reicht die Elimination mit dem Rechenschieber fast immer aus, indessen, wenn die Coefficienten mehrstellig sind, überhaupt wenn man genauer zu rechnen veranlasst ist, wird man zur logarithmischen Rechnung

Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen mit Schiebe-Zettel.

	$a]$	$b]$	$l]$	$s]$	Proben.
$[a$	+ 9,00	— 40,74	+ 4,88	+ 26,86	0,00
$log\,[a$	0.95424	1.61002	0.68842	1.42911	
$log\left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)[a$		2.26580	1.34420	2.08489	
$log\left(\frac{[al]}{[aa]}\right)[a$			0.42260	1.16329	
$[b$		+ 229,87	— 25,26	— 163,87	0,00
$-\left(\frac{[ab]}{[aa]}\right)[a$		— 184,42	+ 22,09	+ 121,58	
$[l$			+ 4,33	+ 16,05	0,00
$-\left(\frac{[al]}{[aa]}\right)[a$			— 2,65	— 14,56	
		$b.1]$	$l.1]$	$s.1]$	
$y = -\frac{-3{,}17}{+45{,}45}$	$[b$	+ 45,45	— 3,17	— 42,29	— 0,01
$= + 0{,}06975$	$log\,[b$	1.65753	0.50106	1.62624	
	$log\left(\frac{[bl.1]}{[bb.1]}\right)[b$		9.34459	0.46977	
	$[l$		+ 1,68	+ 1,49	0,00
	$-\left(\frac{[bl.1]}{[bb.1]}\right)[b$		— 0,22	— 2,95	
			$l.2]$	$s.2]$	
		$[l$	+ 1,46	— 1,46	0,00
Zettel a.	$log\frac{1}{[aa]}$ 9.04576	$log\frac{[ab]}{[aa]}$ 0.65578	$log\frac{[al]}{[aa]}$ 9.73418		
Zettel b.		$log\frac{1}{[bb.1]}$ 8.34246	$log\frac{[bl.1]}{[bb.1]}$ 8.84353		

$$8{,}84353 = log\,y$$
$$0{,}06975 = y$$

übergehen, welche bei nur zwei Unbekannten auch wohl selbstverständlich ist, indem man eben den Formeln von § 15. S. 52 schlechthin folgt, z. B. $[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, wozu man $\log \frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ zuerst bestimmt, das man mehrfach braucht, u. s. w.

Indessen wenn man einmal sich entschliesst, logarithmisch zu rechnen, so empfiehlt es sich, ein festes liniertes Schema anzulegen und dabei kann man die fortgesetzten Additionen der Logarithmen mit *Schiebe-Zetteln* machen und dadurch viele Schreibereien ersparen, wie aus vorstehender Tabelle zu ersehen ist.

Die Rechnung nach diesem Schema S. 65 nimmt folgenden Verlauf:

Die vorher berechneten Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. werden an die durch die Zeilen- und Spaltenbezeichnung bestimmten Stellen geschrieben, z. B. die Zeile $[b$ und die Spalte $l]$ bestimmen durch ihr Zusammentreffen die Stelle für $[b\,l] = -25{,}26$.

Nach diesem werden die 4 Logarithmen in eine Linie gesetzt:

$\log [a\,a] = 0.95424$ $\log [a\,b] = 1.61002$ $\log [a\,l] = 0.68842$ $\log [a\,s] = 1.42911$

Die weitere logarithmische Rechnung geschieht mit Hilfe von *Zetteln* (Papierstreifen), welche unten auf S. 65 angegeben sind. Man kann das, was die *zwei* Zettel *a.* und *b.* enthalten, natürlich praktisch wohl auch auf *einen* Papierstreifen schreiben, in der Beschreibung reden wir jedoch von *zwei* getrennten Zetteln.

Zettel *a.* wird so erhalten: Man legt einen Papierstreifen über die Linie $\log [a$ und schreibt über 0.95424 die dekadische Ergänzung 9.04576. Dieses ist $\log \frac{1}{[a\,a]}$ und wird zur Berechnung von $\log \frac{[a\,b]}{[a\,a]}$ und von $\log \frac{[a\,l]}{[a\,a]}$ gebraucht. Hiezu schiebt man den Zettel um eine Spalte nach rechts, so dass 9.04576 über 1.61002 kommt, die Summe beider 0.65578 schreibt man auf den Zettel rechts. Der Zettel wird abermals um eine Spalte nach rechts geschoben und giebt 9.04576 über 0.68842, zusammen 9.73418.

Damit ist der Zettel *a.* an sich fertig, und kann zur Berechnung von $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$ u. s. w. gebraucht werden. Zu diesem Zweck kommt der Zettel wieder in die Normallage und liefert durch allmähliches Schieben nach rechts, indem 0.65578 nach abwärts addiert wird, folgendes:

(Zettel)	0.65578	0.65578	0.65578
	1.61002	0.68842	1.42911
	2.26580	1.34420	2.08489

in ähnlicher Weise wird auch vollends erhalten:

(Zettel)	9.73418	9.73418
	0.68842	1.42911
	0.42260	1.16329

Zu den so erhaltenen 5 Logarithmen schlägt man die Nummeri auf, und setzt dieselben in die vorbereiteten Stellen darunter:

$-$ 184,42	$+$ 22,09	$+$ 121,58
	$-$ 2,65	$-$ 14,56

Die Vorzeichen — oder + bestimmt man hiebei nach der auf S. 63—64 bereits angegebenen Regel.

Addiert man diese Beträge algebraisch zu den darüberstehenden Coefficienten $[b\,b] = +229{,}87$ u. s. w., so erhält man:

$$[b\,b\,.\,1] = +45{,}45 \qquad [b\,l\,.\,1] = -3{,}17 \qquad [b\,s\,.\,1] = -42{,}29$$
$$[l\,l\,.\,1] = +1{,}68 \qquad [l\,s\,.\,1] = +1{,}49$$

Zu diesem erstmals reduzierten System gehört nun der zweite Zettel b.

Verfährt man mit diesem ebenso wie vorher mit dem Zettel a., so ist die Elimination vollendet, und auf dem Zettel b. selbst hat man:

$$log \frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = log\, y \text{ (abgesehen vom Vorzeichen).}$$

Um auch x zu erhalten, kann man zwar in gewöhnlicher Weise das erhaltene y in eine der Normalgleichungen

$$+\ 9{,}00\,x - 40{,}74\,y + 4{,}88 = 0$$
$$-40{,}74\,x + 229{,}87\,y - 25{,}26 = 0$$

einsetzen, und erhält damit $x = -0{,}226$. Wenn man aber auch das Gewicht von x haben will, so stellt man die ganze Elimination um, so dass y die erste und x die zweite Unbekannte wird, wie schon auf S. 63 angegeben ist. Auf diese Weise erhält man:

$$\left.\begin{array}{lll} x = -0{,}226 & [l\,l\,.\,2] = 1{,}46 & y = +0{,}06975 \\ [a\,a\,.\,1] = +1{,}78 & & [b\,b\,.\,1] = +45{,}45 \end{array}\right\} \quad (5)$$

$[l\,l\,.\,2] = 1{,}46$ stimmt genügend mit dem schon früher (am Schluss von § 14. (13) S. 51) berechneten $[v\,v] = 1{,}4695$, man hat also jetzt den mittleren Gewichtseinheitsfehler

$$m = \sqrt{\frac{1{,}47}{9-2}} = \pm\,0{,}46^{mm} \quad (6)$$

und damit auch die mittleren Fehler von x und y:

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{1{,}78}} = \pm\,0{,}34^{mm} \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{45{,}45}} = \pm\,0{,}06797$$
$$x = -0{,}23^{mm} \pm 0{,}34^{mm} \qquad y = +0{,}06975 \pm 0{,}06797$$

Dieses ist also das Ergebnis der reinen Elimination; die Weiterverwertung der gewonnenen y und x ist dann ebenso wie schon am Schluss des vorigen § 19. S. 64—65 gezeigt worden ist.

§ 21. Ungleiche Gewichte.

Bisher wurde angenommen, dass alle Beobachtungen l von vornherein gleich genau seien. Wenn dieses nicht der Fall ist, haben die einzelnen l verschiedene Gewichte. Wir wollen annehmen:

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{Beobachtungen} & l_1 & l_2 & l_3 \ldots l_n \\ \text{mit Gewichten} & p_1 & p_2 & p_3 \ldots p_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die Fehlergleichungen seien dieselben wie früher:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + l_2 & = p_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + l_3 & = p_3 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + l_n & = p_n \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dann hat man nicht mehr $[v\,v]$ zu einem Minimum zu machen, sondern:

$$[p\,v\,v] = \text{Minimum} \quad (3)$$

Dieses giebt die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}[p\,a\,a]\,x+[p\,a\,b]\,y+[p\,a\,l]=0\\ [p\,a\,b]\,x+[p\,b\,b]\,y+[p\,b\,l]=0\end{array}\right\}\qquad(4)$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von (3) § 13. S. 45 nur dadurch, dass in jeder Klammer p zugesetzt ist; eine weitere Änderung gegen früher tritt nicht ein. Auch bei der Elimination tritt z. B. $[p\,b\,b\,.\,1]$ an die Stelle von $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird:

$$m=\sqrt{\frac{[p\,v\,v]}{n-2}}\quad\text{oder}\quad=\sqrt{\frac{[p\,l\,l\,.\,2]}{n-2}}\qquad(5)$$

Dieser Fehler m gehört im allgemeinen zu keiner wirklichen Beobachtung, sondern zu einer fingierten Beobachtung, welche das Gewicht $p=1$ hat.

Wenn die Gewichtswurzeln $\sqrt{p}$ bequeme Zahlen sind, so ist es oft nützlich, statt geradezu $[p\,a\,a]$, $[p\,a\,b]$ u. s. w. auszurechnen, so zu verfahren:

Man multipliziert alle Coefficienten a, b und die Absolutglieder l der Fehlergleichungen mit $\sqrt{p}$, und denkt sich die Fehlergleichungen (2) nun so geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l}v_1\sqrt{p_1}=a_1\sqrt{p_1}+b_1\sqrt{p_1}+l_1\sqrt{p_1}\\ v_2\sqrt{p_2}=a_2\sqrt{p_2}+b_2\sqrt{p_2}+l_2\sqrt{p_2}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\qquad(6)$$

dann giebt die Quadrierung von selbst die Summe $[p\,v\,v]$ nach (3) und die Normalgleichungen (4).

Man kann diese Sache auch so auffassen: Mögen die Summen direkt nach (4) oder nach (6) entstanden sein; man kann immer dem *Zeichen* $[a\,a]$ die Bedeutung unterlegen:

$$p_1\,a_1^2+p_2\,a_2^2+p_3\,a_3^2+\ldots\qquad=[a\,a]\qquad\text{u. s. w.}\qquad(7)$$

und damit gelten alle bisherigen Formeln auch für ungleiche Gewichte.

Die Coefficienten α, β in § 17. erhalten hiebei auch veränderte Bedeutungen, nämlich entsprechend (1) S. 56 haben wir nun:

$$x=\frac{\alpha_1}{\sqrt{p_1}}(l_1\sqrt{p_1})+\frac{\alpha_2}{\sqrt{p_2}}(l_2\sqrt{p_2})+\cdots\qquad(8)$$

$$\frac{1}{p_x}=\left[\frac{\alpha\,\alpha}{p}\right]\quad,\quad\frac{1}{p_y}=\left[\frac{\beta\,\beta}{p}\right]\qquad(9)$$

Die Weiterrechnung nach § 17. führt aber abermals auf die Formel:

$$p_y=[p\,b\,b\,.\,1],\qquad(10)$$

so dass man also überall sich nicht weiter um die Gewichte zu kümmern hat, sobald die Summen-Coefficienten entweder nach (4) unmittelbar oder nach (6) berechnet vorliegen.

Damit ist bereits alles zur Ausgleichung mit ungleichen Gewichten Erforderliche behandelt, wir wollen aber noch einige Bemerkungen zufügen (welche zunächst auch übergangen werden können).

Mittlere Fehler a priori angenommen.

Wenn die Genauigkeitsverhältnisse der Beobachtungen und der Fehlergleichungen geradezu durch mittlere Fehler (nach Schätzung a priori oder sonst wie) angenommen sind, so sind die Gewichte p den Quadraten dieser mittleren Fehler umgekehrt proportional zu nehmen, und die Rechnung ist nach den Formeln (1) bis (5), oder (6) bis (10) zu führen; indessen kann man die Formeln auch so schreiben, dass nicht von Gewichten p, sondern nur von mittleren Fehlern m die Rede ist, und diese mehr anschauliche Form empfiehlt sich in vielen Fällen. Wir haben so:

Fehlergleichungen: | Mittlere Fehler der l *vor* der Ausgleichung:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & \pm m_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & \pm m_2 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n & \pm m_n \end{array}\right\} \tag{11}$$

Ausgleichungsprinzip:

$$\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right] = \left(\frac{v_1}{m_1}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{m_2}\right)^2 + \ldots \left(\frac{v_n}{m_n}\right)^2 = \text{Minimum} \tag{12}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{a\,a}{m\,m}\right] x + \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{a\,l}{m\,m}\right] = 0 \\ \left[\frac{a\,b}{m\,m}\right] x + \left[\frac{b\,b}{m\,m}\right] y + \left[\frac{b\,l}{m\,m}\right] = 0 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Mittlerer Gewichtseinheitsfehler *nach* der Ausgleichung:

$$m = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{v\,v}{m\,m}\right]} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{\frac{1}{n-2}\left[\frac{l\,l}{m\,m}\,.\,2\right]} \tag{14}$$

Die mittleren Fehler der Werte von l *nach* der Ausgleichung sind bzw.:

$$m_1' = \frac{m}{1} m_1 \;,\;\; m_2' = \frac{m}{1} m_2 \ldots m_n' = \frac{m}{1} m_n \tag{15}$$

Wenn die $m_1\ m_2 \ldots m_n$ schon *vor* der Ausgleichung richtig bemessen waren, so wird $\quad m = 1$ und $m_1' = m_1 \quad m_2' = m_2$ u. s. w.

Um zu einer weiteren Betrachtung in Bezug auf Gewichte zu gelangen, gehen wir von dem einfachen Fall aus, dass eine Fehlergleichung das Gewicht 2 und alle anderen das Gewicht 1 haben, also etwa:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & p = 1 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 & p = 2 \end{array}\right\} \tag{16}$$

dann ist die erste Normalgleichung:

$$(a_1^2 + a_2^2 + 2a_3^2)\,x + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + 2\,a_3 b_3)\,y + (a_1 l_1 + a_2 l_2 + 2\,a_3 l_3) = 0$$

Dasselbe würde man auch erhalten, wenn man die dritte Fehlergleichung doppelt einsetzte, und dann mit folgendem System weiter rechnete:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 & p = 1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 & p = 1 \\ \left\{\begin{array}{l} v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ v_4 = a_3 x + b_3 y + l_3 \end{array}\right. & \begin{array}{l} p = 1 \\ p = 1 \end{array} \end{array}\right\} \tag{17}$$

Aus beiden Systemen (16) und (17) erhält man dieselben Unbekannten $x\ y$ mit denselben Gewichten und derselben Summe $[l\,l\,.\,2] = [v\,v]$.

Wenn man aber die mittleren Fehler berechnet, so darf man bei (17) *nicht* 4 Gleichungen in Rechnung bringen, sondern nur 3, d. h. es ist:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{3-2} \text{ und } nicht = \frac{[v\,v]}{4-2} \tag{17a}$$

Wenn umgekehrt die Gleichungen (17) den Beobachtungen entsprechen, so darf man zwar zur Ausgleichung selbst statt (17) ein System von der Form (16) anwenden, bei der Fehlerberechnung ist aber die ursprüngliche Zahl der Fehlergleichungen, d. h. der Beobachtungen, massgebend.

Wenn 2 Fehlergleichungen mit gleichen Coefficienten $a, b \ldots$, aber mit ungleichen Absolutgliedern l, und mit ungleichen Gewichten vorliegen:

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_1 & \text{Gewicht} = p_1 \\ v_2 = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + l_2 & \quad " \quad = p_2 \end{array}\right\} \tag{18}$$

so geben diese nach gewöhnlichem Verfahren folgende Beiträge zu den Coefficienten der Normalgleichungen:

$$p_1\,a^2 + p_2\,a^2 = (p_1 + p_2)\,a^2\ ,\ (p_1 + p_2)\,a\,b \ldots p_1\,a\,l_1 + p_2\,a\,l_2 = a\,(p_1\,l_1 + p_2\,l_2) \tag{19}$$

Beitrag zu dem Fehlerquadrat-Gliede: $(p_1\,l_1^2 + p_2\,l_2^2)$ (20)

Wir wollen nun statt der *zwei* Gleichungen (18) die *eine* folgende schreiben:

$$v' = a\,x + b\,y + c\,z + \ldots + \frac{p_1\,l_1 + p_2\,l_2}{p_1 + p_2}\,,\quad \text{Gewicht} = p_1 + p_2 \tag{18'}$$

Diese *eine* Gleichung giebt zu den Normalgleichungen folgende Beiträge:

$$(p_1 + p_2)\,a^2 \quad , \quad (p_1 + p_2)\,a\,b \ldots \quad a\,(p_1\,l_1 + p_2\,l_2) \tag{19'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(p_1\,l_1 + p_2\,l_2)^2}{p_1 + p_2} \tag{20'}$$

Die Coefficienten (19) und (19′) sind identisch, dagegen die Beiträge zur Quadratsumme $[p\,l\,l]$ sind in (20) und in (20′) nicht identisch, und nur wenn $l_1 = l_2$ ist, geht (20′) in (20) über.

Dieses Resultat heisst in Worten: Man kann zwei Fehlergleichungen von der Form (18), d. h. mit gleichen Coefficienten aber ungleichen Absolutgliedern, durch *eine* Gleichung (18′) ersetzen, soweit es sich nur um die Unbekannten $x\,y\,z \ldots$ selbst und um deren Gewichte handelt, dagegen für die Berechnung mittlerer Fehler giebt die Gleichung (18′) keinen richtigen Ersatz der zwei ursprünglichen Gleichungen, sondern nur eine etwa näherungsweise zulässige Genauigkeitsbestimmung. In dem Nenner des mittleren Fehlerquadrats muss aber jedenfalls die Gleichung (18′) als *zwei* Gleichungen zählen.

§ 22. Nicht lineare Funktionen.

Wenn die Beziehungen zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten nicht durch lineare Gleichungen dargestellt sind, so kann man dennoch die Ausgleichung auf lineare Fehlergleichungen zurückführen in folgender Weise:

Man habe die Beobachtungen

$$L_1 \quad L_2 \quad L_3 \ldots L_n$$

welche mit den Unbekannten X und Y in folgenden Beziehungen stehen:

Es *soll* sein:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y) - L_1 = 0 \\ F_2(X, Y) - L_2 = 0 \\ F_3(X, Y) - L_3 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_n(X, Y) - L_n = 0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Wegen der Beobachtungsfehler sind diese Gleichungen nicht erfüllt, und es gelten statt derselben die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = F_1(X, Y) - L_1 \\ v_2 = F_2(X, Y) - L_2 \\ v_3 = F_3(X, Y) - L_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = F_n(X, Y) - L_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

Schreibt man diese Gleichungen in die Form:

$$F(X, Y) - (L + v) = 0 \tag{3}$$

so ergiebt die Vergleichung mit (1), dass v eine Verbesserung der Beobachtung L ist, welche den Widerspruch in der betreffenden Gleichung zum Verschwinden bringt. (Vgl. die kleingedruckte Anmerkung am Schlusse von § 12. S. 44—45.) Wenn X und Y die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten sind, so sind die Werte v die wahrscheinlichsten Verbesserungen der Beobachtungen L, oder, um alle Fragen der Wahrscheinlichkeit zu vermeiden, nennt man v die „übrigbleibenden Fehler“ der Ausgleichung, oder die *„scheinbaren“* Fehler.

Versteht man unter (X) und (Y) Näherungswerte von X und Y, und unter x und y deren Verbesserungen, also

$$X = (X) + x \qquad Y = (Y) + y \tag{4}$$

so kann man mit Hilfe des Taylorschen Satzes unter Beschränkung auf die ersten Potenzen von x und y die Funktion F so entwickeln:

$$F(X, Y) = F\big((X) + x, (Y) + y\big)$$

$$F(X, Y) = F\big((X), (Y)\big) + \frac{\partial F}{\partial X} x + \frac{\partial F}{\partial Y} y$$

und damit gehen die Gleichungen (2) über in:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1 x + b_1 y + l_1 \\ v_2 = a_2 x + b_2 y + l_2 \\ v_3 = a_3 x + b_3 y + l_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = a_n x + b_n y + l_n \end{array}\right\} \tag{5}$$

wobei die Coefficienten a, b und die Absolutglieder l folgende Bedeutung haben:

$$a = \frac{\partial F}{\partial X} \qquad b = \frac{\partial F}{\partial Y} \tag{6}$$

$$l = F\big((X), (Y)\big) - L \quad \text{oder} \quad l = (L) - L \tag{7}$$

(L) ist ganz allgemein derjenige Wert, welchen eine Beobachtung L annehmen würde, wenn die Näherungen (X), (Y) giltig wären.

Schreibt man (7) in die Form:

$$F\big((X), (Y)\big) - (L + l) = 0 \quad \text{oder} \quad (L) - (L + l) = 0 \tag{8}$$

und vergleicht man dieses mit (1), so ergiebt sich, dass die l in Bezug auf das *Vorzeichen*, mit den v gleichartig sind. Sachlich betrachtet hat aber das Absolutglied l den Charakter einer Beobachtung, ebenso wie L, denn (L) in (8) ist eine fehlerfreie Rechnungsgrösse. Formell betrachtet ist auch l diejenige Verbesserung, welche an einer Beobachtung L angebracht werden müsste, wenn die Näherungswerte (X), (Y) statt X, Y angenommen würden.

Die Gleichungen (5) treten an die Stelle der ursprünglichen Fehlergleichungen (2); diese Gleichungen (5) sind selbst Fehlergleichungen in Bezug auf die neuen Unbekannten x, y und in Bezug auf die Werte l, welche an Stelle der Beobachtungen L treten.

§ 23. Ausgleichung von Barometerständen.

Zu einem Zahlenbeispiel der Ausgleichung mit nicht linearen Funktionen nehmen wir die Barometermessungen von § 13. S. 46 nochmals vor, nämlich:

	h	B	
	m	mm	
1. Bruchsal	120,2	751,18	
2. Cannstatt . . .	225,1	742,37	
3. Stuttgart . . .	270,6	738,50	
4. Calw	347,6	731,27	
5. Friedrichshafen .	406,7	726,99	(1)
6. Heidenheim . . .	492,4	718,16	
7. Isny	708,1	700,48	
8. Freudenstadt . .	733,5	697,64	
9. Schopfloch . . .	768,9	695,23	

Wir stellen uns die Aufgabe: Es soll zwischen den Höhen h und den Barometerständen B eine Beziehung hergestellt werden von der Form:

$$h = Y \log \frac{X}{B} \tag{2}$$

wobei die trigonometrisch bestimmten Meereshöhen h als fehlerfrei, die Barometerstände B als gleich genaue Beobachtungen behandelt werden.

Es handelt sich zuerst um Bestimmung von Näherungswerten (X) und (Y). Hiezu schreiben wir (2) in die Form:

$$\log X - \log B = \frac{h}{Y}$$

und wenden diese Gleichung auf die erste und auf die letzte Beobachtung an, dieses giebt:

$$\log (X) - \log 751{,}18 = \frac{120{,}2}{(Y)}$$

$$\log (X) - \log 695{,}23 = \frac{768{,}9}{(Y)}$$

Diese zwei Gleichungen kann man nach (X) und (Y) auflösen, und man findet:

$$(X) = 762{,}03 \qquad (Y) = 19298 \tag{3}$$

Um zu der allgemeinen Form der Gleichungen (1) S. 70 zu gelangen, hat man die Gleichung (2) nach (B) aufzulösen. Dieses giebt:

$$\frac{h}{Y} = \log \frac{X}{B} \;,\quad \frac{X}{B} = 10^{\frac{h}{Y}} \;,\quad \frac{B}{X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \;,\quad B - X\,10^{-\frac{h}{Y}} = 0$$

d. h. die in den allgemeinen Formeln S. 70 mit $F(X, Y)$ bezeichnete Funktion ist in unserem Falle: $F(X, Y) = X\,10^{-\frac{h}{Y}}$,
und damit berechnet man nach Anleitung von (6) und (7) S. 71:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\partial\left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial X} = 10^{-\frac{h}{Y}} \\ b &= \frac{\partial\left(X\,10^{-\frac{h}{Y}}\right)}{\partial Y} = X\,10^{-\frac{h}{Y}}\,\frac{h}{Y^2}\,\frac{1}{M} \\ l &= (X)\,10^{-\frac{h}{(Y)}} - B \quad \text{oder} \quad = (B) - B \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Bei der Ausrechnung von a und b ist überall (X) und (Y) an Stelle von X und Y zu setzen. Die Ausrechnung der Formeln (4) macht man am besten in logarithmischer Form, d. h.:

$$\left.\begin{aligned} \log a &= -\frac{h}{(Y)} \quad \text{oder } \log\frac{1}{a} = \frac{h}{(Y)} \\ \log b &= -\frac{h}{(Y)} + \log\frac{(X)\,h}{M(Y)^2} = \log a + \log\frac{(X)\,h}{(Y)^2 M} \\ \log(l+B) &= \log(X) - \frac{h}{(Y)} = \log(X) + \log a \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man hier die Zahlenwerte nach (1) und (3) ein, so erhält man:

Nr.	a	b	l
1	+ 0,986	+ 0,00056	0,00
2	+ 0,973	+ 0,00103	— 0,53
3	+ 0,968	+ 0,00123	— 0,68
4	+ 0,959	+ 0,00157	— 0,20
5	+ 0,953	+ 0,00182	— 1,06
6	+ 0,943	+ 0,00219	+ 0,38
7	+ 0,919	+ 0,00307	— 0,20
8	+ 0,916	+ 0,09317	+ 0,53
9	+ 0,912	+ 0,00331	0,00

Der Umstand, dass der erste und der letzte Wert l Null werden, ist nicht zufällig; es kommt dieses daher, dass die erste und die letzte Beobachtung B zur Bestimmung der Näherungswerte benützt wurden. Wenn die Näherungswerte gar keiner der Beobachtungen streng genügen, so wird auch kein Wert $l = 0$ werden.

Die Fehlergleichungen würden also jetzt sein:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}00056\,y' + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}00103\,y' - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die zweite Unbekannte wurde hier y' genannt, weil wir dieselbe nochmals ändern wollen. Die Coefficienten sind nämlich noch zu ungleich, was bei der numerischen Rechnung unbequem ist. Wir wollen daher statt der Fehlergleichungen (6) lieber folgende schreiben:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}986\,x + 0{,}056\left(\frac{y'}{100}\right) + 0{,}00 \\ v_2 &= 0{,}973\,x + 0{,}103\left(\frac{y'}{100}\right) - 0{,}53 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

d. h. wir führen statt y' die neue Unbekannte ein:

$$\frac{y'}{100} = y \qquad (\text{also } y' = 100\,y) \tag{8}$$

wobei y' die Korrektion des Näherungswertes (Y) und y die aus den Normalgleichungen zu bestimmende Unbekannte ist. Damit erhält man folgende Tafel der Coefficienten, nebst Summen s, wobei:

$$a + b + l + s = 0 \tag{9}$$

Nr.	a	b	l	s
1	+ 0,986	+ 0,056	0,000	— 1,042
2	+ 0,973	+ 0,103	— 0,530	— 0,546
3	+ 0,968	+ 0,123	— 0,680	— 0,411
4	+ 0,959	+ 0,157	— 0,200	— 0,916
5	+ 0,953	+ 0,182	— 1,060	— 0,075
6	+ 0,943	+ 0,219	+ 0,380	— 1,542
7	+ 0,919	+ 0,307	— 0,200	— 1,026
8	+ 0,916	+ 0,317	+ 0,530	— 1,763
9	+ 0,912	+ 0,331	0,000	— 1,243
Summen	+ 8,529	+ 1,795	— 1,760	— 8,564

Die Ausrechnung der Summen-Coefficienten $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. wollen wir mit der Quadrattafel machen nach dem Verfahren von § 18. S. 60.

Bei nur 2 Unbekannten hat man dabei auch eine Erleichterung insofern, als $a + s \quad b + s \quad l + s$ nicht besonders zu berechnen sind, denn wegen (9) ist:

$$(a + s) = -(b + l) \qquad (b + s) = -(a + l) \qquad (l + s) = -(a + b)$$

a	b	l	s	$a+b$ $=-(l+s)$	$a+l$ $=-(b+s)$	$b+l$ $=-(a+s)$	Proben:	
+ 0,986	+ 0,056	0,000	— 1,042	+ 1,042	+ 0,986	+ 0,056	+ 8,529	+ 8,529
+ 0,973	+ 0,103	— 0,530	— 0,546	+ 1,076	+ 0,443	— 0,427	+ 1,795	+ 1,795
+ 0,968	+ 0,123	— 0,680	— 0,411	+ 1,091	+ 0,288	— 0,557	— 1,760	+ 10,324
+ 0,959	+ 0,157	— 0,200	— 0,916	+ 1,116	+ 0,759	— 0,043	— 8,564	+ 8,529
+ 0,953	+ 0,182	— 1,060	— 0,075	+ 1,135	— 0,107	— 0,878	0,000	— 1,760
+ 0,943	+ 0,219	+ 0,380	— 1,542	+ 1,162	+ 1,323	+ 0,599		+ 6,769
+ 0,919	+ 0,307	— 0,200	— 1,026	+ 1,226	+ 0,719	+ 0,107		
+ 0,916	+ 0,317	+ 0,530	— 1,763	+ 1,233	+ 1,446	+ 0,847		+ 1,795
+ 0,912	+ 0,331	0,000	— 1,243	+ 1,243	+ 0,912	+ 0,331		— 1,760
+ 8,529	+ 1,795	— 1,760	— 8,564	+ 10,324	+ 6,769	+ 0,035		+ 0,035

a^2	b^2	l^2	s^2	$(a+b)^2$ $=(l+s)^2$	$(a+l)^2$ $=(b+s)^2$	$(b+l)^2$ $=(a+s)^2$
0,9722	0,0031	0,0000	1,0858	1,0858	0,9722	0,0031
0,9467	0,0106	0,2809	0,2981	1,1578	0,1962	0,1823
0,9370	0,0151	0,4624	0,1689	1,1903	0,0829	0,3102
0,9197	0,0246	0,0400	0,8391	1,2455	0,5761	0,0018
0,9082	0,0331	1,1236	0,0056	1,2882	0,0114	0,7709
0,8892	0,0475	0,1444	2,3778	1,3502	1,7503	0,3588
0,8446	0,0942	0,0400	1,0527	1,5031	0,5170	0,0114
0,8391	0,1005	0,2809	3,1082	1,5203	2,0909	0,7174
0,8317	0,1096	0,0000	1,5450	1,5450	0,8317	0,1096
8,0884	0,4383	2,3722	10,4812	11,8862	7,0287	2,4655

$$\begin{array}{lr}
[a\,a] = & 8{,}0884 \\
[b\,b] = & 0{,}4383 \\
\hline
 & -\ 8{,}5267 \\
 & +\ 11{,}8862 \\
\hline
 & +\ 3{,}3595 \\
[a\,b] = & +\ 1{,}6798
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
[a\,a] = & 8{,}0884 \\
[l\,l] = & 2{,}3722 \\
\hline
 & -\ 10{,}4606 \\
 & +\ 7{,}0287 \\
\hline
 & -\ 3{,}4319 \\
[a\,l] = & -\ 1{,}7160
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
[a\,a] = & 8{,}0884 \\
[s\,s] = & 10{,}4812 \\
\hline
 & -\ 18{,}5696 \\
 & +\ 2{,}4655 \\
\hline
 & -\ 16{,}1041 \\
[a\,s] = & -\ 8{,}0520
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
[b\,b] = & 0{,}4383 \\
[l\,l] = & 2{,}3722 \\
\hline
 & -\ 2{,}8105 \\
 & +\ 2{,}4655 \\
\hline
 & -\ 0{,}3450 \\
[b\,l] = & -\ 0{,}1725
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
[b\,b] = & 0{,}4383 \\
[s\,s] = & 10{,}4812 \\
\hline
 & -\ 10{,}9195 \\
 & +\ 7{,}0287 \\
\hline
 & -\ 3{,}8908 \\
[b\,s] = & -\ 1{,}9454
\end{array}$$

Diese Rechnungen sind ausführlicher, und auch genauer behandelt, als für den unmittelbaren Zweck unseres Beispiels nötig wäre; indessen soll durch diese ausführliche Behandlung das Verfahren überhaupt nach allen Beziehungen klar gemacht werden.

$$\begin{array}{lr}
[l\,l] = & 2{,}3722 \\
[s\,s] & 10{,}4812 \\
\hline
 & -\ 12{,}8534 \\
 & +\ 11{,}8862 \\
\hline
 & -\ 0{,}9672 \\
[l\,s] & -\ 0{,}4836
\end{array}$$

Diese Coefficienten stellt man in üblicher Weise zusammen:

	a	b	l	s	Probe
a	+ 8,0884	+ 1,6798	— 1,7160	— 8,0520	+ 2
b		+ 0,4383	— 0,1725	— 1,9454	+ 2
l			+ 2,3722	— 0,4836	+ 1
s				+ 10,4812	+ 2

Ausführlich geschrieben heisst z. B. die dritte Probe:

$$-1{,}7160 - 0{,}1725 + 2{,}3722 - 0{,}4836 = +0{,}0001$$

Die bei den Proben bleibenden Reste $+2$ $+2$ $+1$ $+2$ rühren lediglich von Abrundungen her, und bleiben auf sich beruhen.

Löst man nun die Normalgleichungen nach dem Muster von § 20. S. 65 logarithmisch auf, so bekommt man:

	a	b	l	s	Probe
Logarithmische Auflösung der Normalgleichungen nach dem Muster S. 65.	+ 8,088 0.90784	+ 1,680 0.22531 9.54278	— 1,716 0.23452 9.55199 9.56120	— 8,052 0.90590 0.22337 0.23258	0,000
		+ 0,438 — 0,349	— 0,172 + 0,356	— 1,946 + 1,673	0,000
			+ 2,372 — 0,364	— 0,484 — 1,708	0,000
$y = -\dfrac{0{,}184}{0{,}089} = -2{,}07$		+ 0,089 8.94939	+ 0,184 9.26482 9.58025	— 0,273 9.43616 9.75159	0,000
			+ 2,008 — 0,380	— 2,192 + 0,564	0,000
			+ 1,628	— 1,628	0,000

Nun stellt man die Coefficienten so um:

b	a	l	s
$+0,438$	$+1,680$	$-0,172$	$-1,946$
	$+8,088$	$-1,716$	$-8,052$
		$+2,372$	$-0,484$

Die Weiterrechnung giebt dann:

$$x = -\frac{-1,056}{+1,644} = +0,642$$

$+1,644$	$-1,056$	$-0,588$
	$+2,304$	$-1,248$
	$-1,626$	$+1,626$

Man hat also jetzt im ganzen:

$$x = +0,642 \qquad [v\,v] = [l\,l\,.\,2] \qquad y = -2,07$$
$$p_x = \;\;1,644 \qquad\quad = 1,627 \qquad p_y = \;\;0,089$$

$$m = \sqrt{\frac{1,627}{9-2}} = \pm 0,48$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = \pm 0,38 \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = \pm 1,62$$

also $x = +0,64 \pm 0,38$ $\qquad y = -2,07 \pm 1,62$

$y' = -\;207 \pm 162$

Näherungen $(X) = 762,03$ $\qquad (Y) = 19298$

Resultate $X = 762,67 \pm 0,38$ $\qquad Y = 19091 \pm 162$ (11)

Also die gesuchte Formel:

$$h = 19091 \, log \frac{762,67}{B} \quad \text{oder} \quad log\, B = log\, 762,67 - \frac{h}{19091} \tag{12}$$

Um die Fehlerverteilung zu untersuchen und um zugleich eine durchgreifende Rechenprobe zu erhalten, berechnen wir nach der Formel (12) aus den gegebenen Meereshöhen h die Barometerstände B, und vergleichen dieselben mit den Beobachtungen:

Nr.	Meereshöhe h	Barometerstand B ausgeglichen	beobachtet	v	v^2
	m	mm	mm	mm	mm
1	120,2	751,69	751,18	$+0,51$	0,2601
2	225,1	742,24	742,37	$-0,13$	0,0169
3	270,6	738,18	738,50	$-0,32$	0,1024
4	347,6	731,36	731,27	$+0,09$	0,0081
5	406,7	726,16	726,99	$-0,83$	0,6889
6	492,4	718,69	718,16	$+0,53$	0,2809
7	708,1	700,24	700,48	$-0,24$	0,0576
8	733,5	698,10	697,64	$+0,46$	0,2116
9	768,9	695,12	695,23	$-0,11$	0,0121
					$1,6386 = [vv]$

Die hieraus erhaltene Summe $[v\,v] = 1,6386$ stimmt genügend mit dem aus der Elimination erhaltenen Wert $[l\,l\,.\,2] = 1,628$ oder $1,626$.

Man kann nun diese nach dem logarithmischen Gesetz gemachte Ausgleichung mit der früheren, nach linearem Gesetz gemachten Ausgleichung vergleichen. Nach (15) § 14. S. 51 gab die frühere Ausgleichung die Quadratsumme der übrig bleibenden scheinbaren Fehler $[v\,v] = 1{,}4695$, also etwas *kleiner* als die neue Ausgleichung mit 1,6386.

Die übrig bleibende Summe $[v\,v]$ betrachtet man in solchen Fällen als Kriterium der Güte der angewendeten Funktion, und in diesem Falle erscheint also die lineare Funktion *besser* als die theoretische logarithmische Funktion, was jedenfalls nicht der Fall ist, und nur durch Zufall erklärt werden kann.

Als sachliches Resultat heben wir hervor: Der auf den Meeresspiegel reduzierte mittlere Barometerstand in Württemberg ist:

$$B_0 = 762{,}7^{mm} \pm 0{,}4^{mm}.$$

Eine weitergehende Interpolations-Ausgleichung dieser Art wurde von uns in der Zeitschrift der österr. Gesellschaft für Meteorologie 1880, S. 162—167 veröffentlicht.

26 badische und württembergische Stationen zwischen 111^m und 1009^m Höhe gaben die Formel:

$$h = 18517 \log \frac{762{,}56}{B} (1 + 0{,}003665\, t)$$

wo t die mittlere Jahrestemperatur ist. Hiebei ist:

$$B_0 = 762{,}56^{mm} \pm 0{,}10^{mm}.$$

§ 24. Gewicht einer Funktion der ausgeglichenen x und y.

Schon am Schlusse von § 17. S. 58, als von den Gewichten und mittleren Fehlern der ausgeglichenen x und y die Rede war, mit den Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ und $[\beta\,\beta]$, haben wir die Bemerkung gemacht, dass es auch noch einen ähnlichen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ giebt, welcher dann gebraucht wird, wenn es sich um eine *Funktion* der ausgeglichenen x und y handelt.

Indem wir dem Leser anheimgeben, mit dieser nicht dringlichen Sache sofort sich bekannt zu machen, müssen wir doch der Vollständigkeit wegen das Funktions-Gewicht für 2 Elemente auch noch hier erledigen, ehe wir zu beliebig vielen Unbekannten übergehen.

Jedenfalls wollen wir schon vor Beginn der Formel-Entwicklung vor einem Irrtum warnen, der leicht vorkommen kann, nämlich die mittleren Fehler m_x und m_y, welche nach § 17. berechnet wurden, als *unabhängig* weiter zu behandeln, was nicht zulässig ist.

Oft hat es weniger Interesse, die Genauigkeit der Unbekannten x und y selbst zu kennen, als die Genauigkeit einer Funktion derselben; wir nehmen die lineare Funktion:

$$F = f_1\, x + f_2\, y \tag{1}$$

Es könnte auf den ersten Blick erscheinen, als ob man den mittleren Fehler von F kurzweg aus den mittleren Fehlern von x und y berechnen könnte nach der Formel (10) § 5. S. 17:

$$M^2 = (f_1\, m_x)^2 + (f_2\, m_y)^2 \quad (?) \tag{2}$$

Allein dieses ist nicht richtig, weil die x und y durchaus *nicht* unabhängige Beobachtungen mit den ebenfalls unabhängigen mittleren Fehlern m_x und m_y sind, vielmehr hängen x und y von *denselben* Messungen $l_1\, l_2 \ldots l_n$ ab. Wenn z. B. zufällig die Fehler aller l positiv wären, so würden nach (1) und (2) § 17. S. 56 auch die Fehler von x *und* von y beide positiv.

Setzen wir zunächst bestimmte Fehler Δl_1 Δl_2 . . . der l voraus, so folgen daraus die bestimmten Fehler Δ_x und Δ_y nach (1) und (2) § 17. S. 56:

$$\Delta x = \alpha_1 \Delta l_1 + \alpha_2 \Delta l_2 + \alpha_3 \Delta l_3 + \ldots \tag{3}$$

$$\Delta y = \beta_1 \Delta l_1 + \beta_2 \Delta l_2 + \beta_3 \Delta l_3 + \ldots \tag{4}$$

und daraus folgt ferner der bestimmte Fehler von F nach (1):

$$\Delta F = f_1 \Delta x + f_2 \Delta y \tag{5}$$

Wenn man dieses quadriert und die Mittelwerte der Quadrate bildet, so wird, wenn n malige Wiederholung angenommen wird:

$$\frac{[\Delta F \Delta F]}{n} = f_1^2 \frac{[\Delta x \Delta x]}{n} + f_2^2 \frac{[\Delta y \Delta y]}{n} + 2 f_1 f_2 \frac{[\Delta x \Delta y]}{n} \tag{6}$$

und hier ist der Mittelwert $\frac{[\Delta x \Delta y]}{n}$ nicht gleich Null, denn es ist nach (3) und (4):

$$\left.\begin{aligned} \Delta x \Delta y = \alpha_1 \beta_1 (\Delta l_1)^2 + \alpha_2 \beta_2 (\Delta l_2)^2 + \alpha_3 \beta_3 (\Delta l_3)^2 + \ldots \\ + \alpha_1 \beta_2 \Delta l_1 \Delta l_2 + \alpha_2 \beta_1 \Delta l_2 \Delta l_1 + \alpha_1 \beta_3 \Delta l_1 \Delta l_3 + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Hier werden die Mittelwerte der in der *zweiten* Linie stehenden Produkte allerdings = Null, weil die *verschiedenen* (mit ungleichen Nummern $_1$ und $_2$ u. s. w. bezeichneten) Δl unter sich unabhängig sind. Es bleibt also nur die erste Linie von (7) weiter zu betrachten, und diese giebt den Mittelwert:

$$\frac{[\Delta x \Delta y]}{n} = [\alpha \beta] m^2 \tag{8}$$

Die übrigen in (6) auftretenden, quadratischen Mittelwerte haben bereits bekannte Bedeutungen, nämlich:

$$\frac{[\Delta x \Delta x]}{n} = m_x^2 = [\alpha \alpha] m^2 \quad \text{und} \quad \frac{[\Delta y \Delta y]}{n} = m_y^2 = [\beta \beta] m^2$$

Setzt man dieses nebst (8) in (6) ein, so wird:

$$\frac{[\Delta F \Delta F]}{n} = M^2 = m^2 \left\{ f_1^2 [\alpha \alpha] + f_2^2 [\beta \beta] + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] \right\} \tag{9}$$

oder auch:

$$M^2 = (f_1 m_x)^2 + (f_2 m_y)^2 + 2 f_1 f_2 [\alpha \beta] m^2 \tag{10}$$

Würde man also die unrichtige Formel (2) angewendet haben, so würde das Glied $2 f_1 f_2 [\alpha \beta] m^2$ in (10), welches die Zusammenwirkung der beiden Fehler m_x und m_y ausdrückt, verloren gegangen sein.

Statt (9) kann man auch schreiben (wegen (18) § 17. S. 58):

$$M^2 = m^2 \left\{ \frac{f_1^2}{[a a . 1]} + 2 \frac{f_1 f_2}{[a b . 1]} + \frac{f_2^2}{[b b . 1]} \right\} \tag{11}$$

Die Gleichung (9) kann man ausserdem noch in eine andere Gestalt bringen mit Benützung der Beziehungen, welche am Schluss von § 17. S. 58 zusammengestellt sind, nämlich:

$$[\alpha \alpha] = \frac{[b b]}{D} \qquad [\beta \beta] = \frac{[a a]}{D} \qquad [\alpha \beta] = \frac{-[a b]}{D}$$

damit wird (9):

$$\frac{M^2}{m^2} = \frac{1}{P} = \frac{1}{D} \left\{ f_1^2 [b b] + f_2^2 [a a] - 2 f_1 f_2 [a b] \right\} \tag{12}$$

und dieses kann auch noch so umgeformt werden:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \tag{13}$$

wobei

$$[f_2\,.\,1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} f_1. \tag{14}$$

Beispiel eines Funktions-Gewichtes.

Um auch eine Anwendung der vorstehenden Formeln zu haben, müssen wir vor allem den Coefficienten $[a\,b\,.\,1] = \dfrac{1}{[\alpha\,\beta]}$ berechnen, wozu die Formel (16) § 17. S. 58 dient:

$$[a\,b\,.\,1] = [a\,b] - \frac{[a\,a]}{[a\,b]}[b\,b] \quad \text{oder} \quad = [a\,b] - \frac{[b\,b]}{[a\,b]}[a\,a]$$

Wir haben dieses zweifach geschrieben, weil diese beiden Formen sich den Eliminationen von x und von y anschliessen.

Um dieses deutlich zu zeigen, setzen wir die Anfänge jener Eliminationen von § 19. S. 62 und S. 63 nochmals her, und fügen die Berechnung von $[a\,b\,.\,1]$ beidemale bei:

	a]	b]	l]
[a	+ 9,0	− 40,7	+ 4,9
[b	− 40,7	+ 229,9	− 25,3
	+ 50,8	− 184,4	+ 22,1
	+ 10,1	+ 45,5	− 3,2
	= [a b . 1]	[b b . 1]	

	b]	a]	l]
[b	+ 229,9	− 40,7	− 25,3
[a	− 40,7	+ 9,0	+ 4,9
	+ 50,8	− 7,2	− 4,5
	+ 10,1	+ 1,8	+ 0,4
	= [b a . 1]	[a a . 1]	

Es soll nun für die Höhe $h = 1000^{\mathrm{m}}$ der mittlere Barometerstand B und dessen mittlerer Fehler, bzw. Gewicht, berechnet werden. Es handelt sich also um die Funktion:

$$B = 761{,}77 - 0{,}08695\,h \quad \text{oder} \quad = 761{,}77 - 8{,}695\left(\frac{h}{100}\right)$$

mit $h = 1000$:

$$B = 761{,}77 - 10 \times 8{,}695 = X - 10\,Y = 674{,}82 \tag{15}$$

Dieses entspricht der Funktion (1):

$$F = f_1\,x + f_2\,y \quad \text{d. h.} \quad f_1 = 1 \quad f_2 = -10.$$

Zur Berechnung des mittleren Fehlers M der Funktion (1) haben wir oben die Formel (11) gefunden, welche mit Einsetzung aller Zahlenwerte giebt:

$$M^2 = 0{,}46^2 \left\{\frac{1}{1{,}8} - \frac{20}{10{,}1} + \frac{100}{45{,}5}\right\} = 0{,}46^2 \times 0{,}77$$

$$M = \pm\,0{,}40^{\mathrm{mm}}$$

also

$$B_{1000} = 674{,}82^{\mathrm{mm}} \pm 0{,}40^{\mathrm{mm}}$$

Das heisst also: In der Höhe 1000^{m} über dem Meere wird, nach der Beobachtungsweise (1) § 23. S. 72, ein Jahres-Mittel-Barometerstand $= 674{,}82^{\mathrm{mm}}$ zu erwarten sein, und zwar kann man das aus den vorhandenen Beobachtungen schliessen mit einem mittleren zu fürchtenden Fehler von $\pm\,0{,}40^{\mathrm{mm}}$.

§ 25. Übergang zu beliebig vielen Unbekannten.

Wir haben in § 13. bis § 24. die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit *zwei* Unbekannten besonders behandelt, weil dieser Fall sich sehr übersichtlich darstellen liess, und weil es für das erste Erlernen der M. d. kl. Q. nützlich ist, nicht sofort in die weitschweifigen allgemeinen Formeln für beliebig viele Unbekannte einzugehen. Zudem kommt der Fall *zweier* Beobachtungen so oft vor, z. B. bei trigonometrischen Punktbestimmungen, mit Coordinaten x und y, dass es sich wohl lohnt, diesen Fall besonders zu erledigen.

Man kann sogar von den Formeln für zwei Unbekannte einige Analogieschlüsse auf die Formeln für mehr Unbekannte sich erlauben; z. B. nachdem nachgewiesen ist, dass bei zwei Unbekannten x und y das Gewicht $p_y = [b\,b\,.\,1]$ ist, kann man wohl *vermuten*, dass bei drei Unbekannten $x\ y\ z$ gelten wird $p_z = [c\,c\,.\,2]$ u. s. w.

Auch bei der Fehlerformel mit dem Nenner $n-2$ (§ 16. S. 56) haben wir schon den Analogieschluss beigefügt, dass bei u Unbekannten der Nenner $n-u$ zu erwarten sein werde, doch war das noch kein Beweis für beliebige Anzahl u.

Wir gehen nun von dem besonderen Falle zweier Unbekannter x und y zu dem allgemeinen Fall beliebig vieler Unbekannter $x\ y\ z\ .\ .\ .$ über, und überzeugen uns sofort, dass Alles, was früher über die Einführung von Näherungswerten (§ 14.), über den allgemeinen Gang der Gauss schen Elimination mit $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]\ .\ .\ .$ (§ 15.), Coefficienten-Berechnung und Summenproben (§ 18.), über ungleiche Gewichte und nicht lineare Funktionen (§ 21.—22.) u. A. gesagt wurde, nicht bloss für zwei, sondern für beliebig viele Unbekannte gilt.

Z. B. bei vier Unbekannten $x\ y\ z\ t$ hat man folgenden Rechnungsgang:

Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1\,t + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2\,t + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3\,t + l_3 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \end{array}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen ausführlich geschrieben:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,d]\,t + [c\,l] = 0 \\ [a\,d]\,x + [b\,d]\,y + [c\,d]\,z + [d\,d]\,t + [d\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Da hier alle nicht quadratischen Coefficienten $[a\,b]\ [a\,c]\ .\ .\ .$ *doppelt* vorkommen, pflegt man, um diese nicht doppelt schreiben zu müssen, die folgende Abkürzung anzuwenden, wobei man die in der Diagonale stehenden quadratischen Glieder *unterstreicht* und dann die Wiederholungen der $[a\,b]\ [a\,c]\ .\ .\ .$ einfach weglässt.

Normalgleichungen abgekürzt geschrieben, nebst $[l\,l]$:

$$\left.\begin{array}{r} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,d]\,t + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,d]\,t + [c\,l] = 0 \\ \underline{[d\,d]\,t} + [d\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{array}\right\} \tag{3}$$

Reduzierte Normalgleichungen abgekürzt geschrieben:

$$\left.\begin{aligned} \text{1. Reduktion:}\quad \underline{[b\,b\,.1]}\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,d\,.1]\,t + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,z + [c\,d\,.1]\,t + [c\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[d\,d\,.1]}\,t + [d\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,1]} & \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{2. Reduktion:}\quad \underline{[c\,c\,.\,2]}\,z + [c\,d\,.\,2]\,t + [c\,l\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[d\,d\,.2]}\,t + [d\,l\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,2]} & \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{3. Reduktion:}\quad [d\,d\,.3]\,t + [d\,l\,.\,3] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,3]} & \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\text{4. Reduktion:}\quad \underline{[l\,l\,.\,4]} \qquad (7)$$

Der Bau des Eliminations-Coefficienten lässt sich leicht dem Gedächtnis einprägen, wenn man ausser den unmittelbar in die Augen fallenden noch folgende Eigenschaften merkt:

1) Jeder Klammer-Coefficient wird $= 0$, wenn man die symbolischen Zeichen algebraisch auffasst, z. B.:

$$[b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l] = b\,l - \frac{a\,b\,a\,l}{a\,a} = b\,l - b\,l = 0$$

2) Wenn 1, 2, 3 . . . in der Klammer steht, so steht im Nenner des Subtrahenden bzw. $[a\,a]$, $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ . . .

Um ein Zahlenbeispiel zu haben, wollen wir folgendes Gleichungssystem auflösen:

$$\left.\begin{aligned} +\underline{459\,x} - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 &= 0 \\ +\underline{464\,y} + 408\,z - 269\,t + 695 &= 0 \\ +\underline{676\,z} - 331\,t + 653 &= 0 \\ +\underline{469\,t} - 283 &= 0 \\ +\underline{1129} & \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Die Auflösung mit dem Rechenschieber zeigt nachfolgende Tabelle S. 82, welche ähnliche Anordnung hat wie die Tabelle für 2 Unbekannte $x\ y$ § 19, S. 63. In den 2 letzten Spalten sind die Summenglieder und die Proben angegeben.

Die Anfangsgleichungen aller Gruppen, zusammengenommen, nennt man vollständig reduzierte Normalgleichungen oder Endgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A \;&= [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,d]\,t + [a\,l] = 0 \\ B' \;&= \qquad\quad [b\,b.1]\,y + [b\,c.1]\,z + [b\,d.1]\,t + [b\,l.1] = 0 \\ C'' \;&= \qquad\qquad\qquad [c\,c.2]\,z + [c\,d.2]\,t + [c\,l.2] = 0 \\ D''' \;&= \qquad\qquad\qquad\qquad [d\,d.3]\,t + [d\,l.3] = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad [l\,l.4] = [v\,v] \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Dieses sind wirkliche Gleichungen, deren jede immer eine Unbekannte weniger enthält als die vorhergehende, während (3) oder (8) mit den Unterstreichungen nur Abkürzungen der Gleichungen (2) sind, deren jede noch *alle* Unbekannten enthält.

Das Zahlenbeispiel auf S. 82 giebt folgende Endgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} +459\,x - 308\,y - 389\,z + 244\,t - 507 &= 0 \\ +256\,y + 146\,z - 105\,t + 354 &= 0 \\ +263\,z - \;\,64\,t + \;\,21 &= 0 \\ +281\,t + 137 &= 0 \\ 11 &= [v\,v] \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z u. s. w. Kurz, man kann durch Rückwärtssubstituieren allmählich alle Unbekannten in der Aufeinanderfolge $t\ z\ y\ x$ finden.

Auflösung eines Systems von 4 Normalgleichungen:

	a	b	c	d	l	s	Probe
A	+ 459	− 308	− 389	+ 244	− 507	+ 501	0
		+ 464	+ 408	− 269	+ 695	− 990	0
		− 208	− 262	+ 164	− 341	+ 337	
			+ 676	− 331	+ 653	−1017	0
			− 330	+ 207	− 430	+ 425	
				+ 469	− 283	+ 170	0
				− 130	+ 270	− 267	
					+1129	−1687	0
					− 560	+ 554	
B'		+ 256	+ 146	− 105	+ 354	− 653	− 2
			+ 346	− 124	+ 223	− 592	− 1
			− 83	+ 60	− 202	+ 373	
				+ 339	− 13	− 97	0
				− 43	+ 145	− 268	
					+ 569	−1133	0
					− 490	− 902	
C''			+ 263	− 64	+ 21	− 219	+ 1
				+ 296	+ 132	− 365	− 1
				− 15	+ 5	− 53	
					+ 79	− 231	+ 1
					− 2	+ 17	
$t = -\frac{+137}{+281} = -0{,}488$ D'''				+ 281	+ 137	− 418	0
					+ 77	− 214	0
					− 66	+ 203	
					+ 11	− 11	

Die Ausrechnung der Abzüge − 208 − 262 + 164 u. s. w. ist mit dem Rechenschieber gemacht.

Man stellt dabei zuerst den Quotienten $\frac{308}{459}$ ein, und liest mit dieser *einzigen* Einstellung der Reihe nach ab:

$$\frac{308}{459}\,308 = 208\ ,\quad \frac{308}{459}\,389 = 262\ ,\quad \frac{308}{459}\,244 = 164\ ,\quad \frac{308}{459}\,507 = 341\ ,\quad \frac{308}{459}\,501 = 337$$

Dann in der zweiten Linie, mit *einer* Einstellung:

$$\frac{389}{459}\,389 = 330\ ,\quad \frac{389}{459}\,244 = 207\ ,\quad \frac{389}{459}\,507 = 430\ ,\quad \frac{389}{459}\,501 = 425$$

Diese Ergebnisse 208, 262 u. s. w. werden mit richtigen Vorzeichen d. h. nach den Regeln von § 19. S. 63—64 unter 464, 408 u. s. w. eingesetzt.

Die Eliminationen und die damit verwandten Berechnungen sind, wie die meisten kleineren Zahlenrechnungen in diesem Buche, lediglich mit dem Rechenschieber gemacht, und dagegen wird sachlich nichts einzuwenden sein. Dagegen entstehen formelle Übelstände, wenn man solche Berechnungen durch den Druck veröffentlicht.

Z. B. heisst oben der erste Subtrahend — 208, während der genauere Wert — 207 ist, denn die genaue Ausrechnung ist $-\frac{308}{459}\,308 = -206{,}7$. Der Fehler 208 statt 207 bleibt in dem Schlussresultat unschädlich.

Da es unsere Absicht war, in diesem Buche die Anwendung des Rechenschiebers praktisch zu zeigen, mussten wir *wirkliche* Rechnungen dieser Art vorführen, und nicht etwa solche, welche *nachher* logarithmisch verbessert sind. Es war notwendig, unverfälschte Originalrechnungen mitzuteilen, und dabei kleine formelle Widersprüche zu dulden, welche bei logarithmischen Rechnungen in einem Druckwerke nicht zulässig wären, deshalb haben wir auch den Fehler 208 statt 207 von der früheren Auflage auch wieder stehen gelassen.

§ 26. Reduzierte Fehlergleichungen.

Im Anschluss an die reduzierten Normalgleichungen können wir auch reduzierte Fehlergleichungen bilden, welche zu manchen Zwecken sehr nützlich sind.

Mit Beschränkung auf 3 Unbekannte $x\ y\ z$ haben wir die allgemeine Form einer Fehlergleichung:

$$v = a\,x + b\,y + c\,z + l \tag{1}$$

und hiezu die erste Normalgleichung:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \tag{2}$$

woraus

$$x = -\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,y - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,z - \frac{[a\,l]}{[a\,a]} \tag{3}$$

Dieses x setzen wir in (1) und haben:

$$v = \left(b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a\right) y + \left(c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a\right) z + \left(l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a\right) \tag{4}$$

oder

$$v = \qquad b'\,y + \qquad c'\,z + \qquad l' \tag{5}$$

wobei

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \tag{6}$$

(4) oder (5) nennen wir eine „reduzierte Fehlergleichung“, und $b'\ c'\ l'$ nach (6) können wir reduzierte Coefficienten nennen.

Man kann sich leicht überzeugen, dass folgendes richtig ist:

$$\left.\begin{array}{lll} [b'\,b'] = [b\,b\,.\,1] & [b'\,c'] = [b\,c\,.\,1] & [b'\,l'] = [b\,l\,.\,1] \\ & [c'\,c'] = [c\,c\,.\,1] & [c'\,l'] = [c\,l\,.\,1] \\ & & [l'\,l'] = [l\,l\,.\,1] \end{array}\right\} \tag{7}$$

denn es ist z. B.:

$$b_1' = b_1 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a_1 \qquad b_1'^2 = b_1^2 - 2\,a_1\,b_1\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,a_1^2$$

$$[b'\,b'] = [b\,b] - 2\,[a\,b]\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]} + \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]^2}\,[a\,a]$$

$$[b'\,b'] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b] = [b\,b\,.\,1] \text{ u. s. w.}$$

Nun kann man die Fehlergleichung (5) nochmals reduzieren. Nimmt man nämlich die erste reduzierte Normalgleichung zur Hand:

$$[b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \quad \text{oder} \quad [b'\,b']\,y + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0$$

und bestimmt daraus: $y = -\frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,z - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}$

und setzt man dieses in (5), so wird:

$$v = \left(c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,b'\right)z + \left(l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b'\right) \tag{8}$$

$$v = c''\,z + l'' \tag{9}$$

wobei $c'' = c' - \frac{[b'\,c']}{[b'\,b']}\,l'$ $\qquad l'' = l' - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b'$ (10)

und es gelten die ähnlich wie (7) leicht nachzuweisenden Beziehungen:

$$[c''\,c''] = [c\,c\,.\,2] \qquad \left.\begin{array}{l}[c''\,l''] = [c\,l\,.\,2]\\ [l''\,l''] = [l\,l\,.\,2]\end{array}\right\} \tag{11}$$

So kann man auch fortfahren, bis man hat:

$$v = l''' = l'' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c'' \tag{12}$$

oder mit Zurückgehen auf (10) und (6):

$$v = l''' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a - \frac{[b'\,l']}{[b'\,b']}\,b' - \frac{[c''\,l'']}{[c''\,c'']}\,c''$$

Wir haben also nun bewiesen, dass alle Eliminations-Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$, $[b\,c\,.\,1]$ . . . $[c\,l\,.\,2]$ u. s. w. nicht bloss der Form nach, sondern in Wirklichkeit Quadratsummen und Produktsummen sind, deren Elemente b', c' . . . c'' u. s. w. angegeben werden können.

Insbesondere sind die $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$... *Quadrat*summen, und daher stets positiv.

§ 27. Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ und mittlerer Fehler m.

Die Entwicklung von $[v\,v]$, welche in § 15. (9) bis (15) S. 52—53, für 2 Unbekannte gemacht wurde, lässt sich allgemein weiter führen:

Für 3 Elemente $x\ y\ z$ haben wir:

$$\left.\begin{array}{rl}[v\,v] = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z + 2\,[a\,l]\,x & \\ + \ [b\,b]\,y^2 \ + 2\,[b\,c]\,y\,z + 2\,[b\,l]\,y & \\ + \ [c\,c]\,z^2 \ + 2\,[c\,l]\,z & \\ + \ [l\,l] & \end{array}\right\} \tag{1}$$

Mit dieser Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ kann man die linken Seiten $A\ B'\ C''$ . . . der Endgleichungen (9) § 25. S. 81 in innige Beziehungen bringen. Zunächst hat man:

$$A = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] \tag{2}$$

also

$$\begin{array}{rl}\frac{A\,A}{[a\,a]} = [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z & + 2\,[a\,l]\,x \\ + \ \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]}\,y^2 + 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,c]\,y\,z & + 2\,\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,y \\ + \ \frac{[a\,c]^2}{[a\,a]}\,z^2 & + 2\,\frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l]\,z \\ & + \ \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}\end{array}$$

Dieser Ausdruck lässt sich Glied für Glied von der Summe $[v\,v]$ in (1) subtrahieren; dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v]-\frac{A\,A}{[a\,a]}=[b\,b\,.\,1]\,y^2&+2\,[b\,c\,.\,1]\,y\,z+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ &+\quad[c\,c\,.\,1]\,z^2\;+2\,[c\,l\,.\,1]\,z\\ &\qquad\qquad\qquad+\quad[l\,l\,.\,1]\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Genau in derselben Weise kann man mit der zweiten Endgleichung fortfahren:

$$B'=[b\,b\,.\,1]\,y\;+\;[b\,c\,.\,1]\,z\;+\;[b\,l\,.\,1]\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]}=[b\,b\,.\,1]\,y^2&+2\,[b\,c\,.\,1]\,y\,z+2\,[b\,l\,.\,1]\,y\\ &+\frac{[b\,c\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}\,z^2+2\,\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\,z\\ &\qquad\qquad+\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]\end{aligned}$$

Dieses kann man wieder Glied für Glied von (3) abziehen, wodurch man erhält:

$$\left.\begin{aligned}[v\,v]-\frac{A\,A}{[a\,a]}-\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]}=[c\,c\,.\,2]\,z^2&+2\,[c\,l\,.\,2]\,z\\ &+\quad[l\,l\,.\,2]\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens giebt:

$$C''=[c\,c\,.\,2]\,z\;+\;[c\,l\,.\,2]\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\frac{C''C''}{[c\,c\,.\,2]}=[c\,c\,.\,2]\,z^2&+2\,[c\,l\,.\,2]\,z\\ &+\frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}\,[c\,l\,.\,2]\end{aligned}$$

Wenn man auch dieses noch, Glied für Glied, von (5) abzieht, so erhält man:

$$[v\,v]-\frac{A\,A}{[a\,a]}-\frac{B'\,B'}{[b\,b\,.\,1]}-\frac{C''\,C''}{[c\,c\,.\,2]}=[l\,l\,.\,3]\tag{7}$$

Nun sind aber die $A\;B'\;C''$ nach (2), (4) und (6), d. h. die linken Seiten der Endgleichungen (9) § 25. S. 82 sämtlich *Null*, und (7) wird sehr einfach:

$$[v\,v]=[l\,l\,.\,3]\tag{7a}$$

Wenn man dieses Restglied $[l\,l\,.\,3]$ wieder in seine Teile zerlegt, so hat man:

$$[l\,l\,.\,3]=[l\,l\,.\,2]-\frac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}\,[c\,l\,.\,2]$$

$$[l\,l\,.\,2]=[l\,l\,.\,1]-\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[b\,l\,.\,1]$$

$$[l\,l\,.\,1]=\quad[l\,l]-\frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,[a\,l]$$

folglich:

$$[v\,v]=[l\,l\,.\,3]=[l\,l]-\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]}-\frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]}-\frac{[c\,l\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]}\tag{8}$$

Am Schluss von § 26. wurde gezeigt, dass alle Nenner $[a\,a]$ $[b\,b\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. positiv sind; man sieht also aus (8) deutlich, wie die Summe $[l\,l]$ allmählich abnimmt.

Aus $[v\,v]$ berechnet man auch den mittleren Fehler m einer einzelnen Beobachtung (vom Gewicht 1). Wenn v die wahren Beobachtungsfehler wären, so würde man bei n Fehlergleichungen haben:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n} \quad (?) \tag{9}$$

dagegen bekommt man aus den wahren Beobachtungsfehlern ε richtig:

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n} \tag{10}$$

Bezeichnet man die wahren Unbekannten mit $X\ Y\ Z$, so hat man:

$$\begin{aligned} v &= a\,x + b\,y + c\,z + l \\ \varepsilon &= a\,X + b\,Y + c\,Z + l \\ \hline \text{Differenz}\quad v &= a\,(x - X) + b\,(y - Y) + c\,(z - Z) + \varepsilon \end{aligned} \tag{11}$$

Diese Gleichung hat wieder die Form einer Fehlergleichung, und würde in der Form $[a\,v] = 0 \quad [b\,v] = 0$ auch Normalgleichungen von der früheren Form geben; man kann daher auf die Gleichung (11) auch alle mit den Fehlergleichungen vorgenommenen Umformungen anwenden, insbesondere ist nach (8):

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} - \frac{[c\,\varepsilon\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{12}$$

und mit den reduzierten Coefficienten $b'\ c''$ von § 26:

$$[v\,v] = [\varepsilon\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} - \frac{[b'\,\varepsilon']}{[b'\,b']} - \frac{[c''\,\varepsilon'']}{[c''\,c'']} \tag{13}$$

wobei die $\varepsilon'\ \varepsilon''\ \ldots$ folgende Bedeutungen haben:

$$\varepsilon' = \varepsilon - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,a \qquad \varepsilon'' = \varepsilon' - \frac{[b\,\varepsilon\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,b' = \varepsilon' - \frac{[b'\,\varepsilon']}{[b'\,b']}\,b' \tag{14}$$

Aus (13) erkennt man, wegen der quadratischen Gestalt der Glieder, dass $[\varepsilon\,\varepsilon]$ jedenfalls grösser als $[v\,v]$ ist. Die Differenz $[\varepsilon\,\varepsilon] - [v\,v]$ ist selbst eine Funktion der ε, also in aller Strenge niemals zu bestimmen; man kann aber wenigstens die Mittelwerte bestimmen, gegen welche die Glieder von (13) konvergieren. Wir betrachten zuerst:

$$\begin{aligned} [a\,\varepsilon]^2 &= (a_1\,\varepsilon_1 + a_2\,\varepsilon_2 + a_3\,\varepsilon_3 + \ldots)^2 \\ &= a_1^2\,\varepsilon_1^2 + a_2^2\,\varepsilon_2^2 + a_3^2\,\varepsilon_3^2 + \ldots \\ &\quad + 2\,a_1\,a_2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + 2\,a_1\,a_3\,\varepsilon_1\,\varepsilon_3 + \ldots \end{aligned} \tag{15}$$

Der Mittelwert der Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$, $\varepsilon_1\,\varepsilon_3$ u. s. w. verschwindet wegen der gleichwahrscheinlichen Zeichen $+$ und $-$ und der Mittelwert der Quadrate ε_1^2, $\varepsilon_2^2\ \ldots$ ist $= m^2$ zu setzen. Es ist also als Mittelwert der Funktion (15) zu nehmen:

$$[a\,\varepsilon]^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)\,m^2 = [a\,a]\,m^2$$

und

$$\frac{[a\,\varepsilon]^2}{[a\,a]} = m^2 \tag{16}$$

Gehen wir zu dem zweiten Gliede von (13) über, so ist zuerst zu zeigen, dass der Mittelwert von $[b'\,\varepsilon']$ auch gleich dem Mittelwert von $[b'\,\varepsilon]$ ist, denn nach der ersten Gleichung von (14) ist:

$$[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon] - \frac{[a\,\varepsilon]}{[a\,a]}\,[a\,b']$$

Hier ist aber über das Vorzeichen von $[a\,\varepsilon]$ gar nichts bekannt, es ist also im Mittel $[b'\,\varepsilon'] = [b'\,\varepsilon]$, folglich nach denselben Schlüssen wie bei (15) und (16):

$$\frac{[b'\,\varepsilon']^2}{[b'\,b']} = \frac{[b'\,\varepsilon]^2}{[b'\,b']} = m^2$$

Diese Schlussfolge geht beliebig weiter; wir haben daher aus (13):

$$[v\,v] - [\varepsilon\,\varepsilon] = -m^2 - m^2 - m^2 \quad \text{oder} \quad [\varepsilon\,\varepsilon] = [v\,v] + 3\,m^2 \tag{17}$$

Der strenge Wert des mittleren Fehlerquadrats ist nach (10):

$$m^2 = \frac{[\varepsilon\,\varepsilon]}{n}$$

und dieses giebt in Verbindung mit der vorhergehenden Gleichung (17):

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-3} \tag{18}$$

Dieses gilt für 3 Unbekannte, da wir der Kürze wegen nur 3 Symbole $x\ y\ z$ geschrieben haben; die Betrachtung gilt aber allgemein, und giebt daher für n Fehlergleichungen mit u Unbekannten:

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n-u} \tag{19}$$

Diese Gleichung tritt an Stelle von (9).

Anhang zu § 27.

Ähnliche Entwicklungen wie die vorstehende Entwicklung von $[v\,v]$ kommen in der M. d. kl. Q. mehrfach vor; wir bilden deshalb aus dieser Entwicklung einen allgemeinen Satz, indem in (1) und (7) S. 85 alle $l = 0$ gesetzt werden, und dann (1) und (7) einander gleich gesetzt werden. Wenn man hiebei die Bedeutungen von A nach (2), B' nach (4), und C'' nach (6) berücksichtigt, so geben (1) und (7):

$$\left\{\begin{array}{r} [a\,a]\,x^2 + 2\,[a\,b]\,x\,y + 2\,[a\,c]\,x\,z \\ +\ [b\,b]\,y^2 \ + 2\,[b\,c]\,y\,z \\ +\ [c\,c]\,z^2 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{r} \dfrac{([a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z)^2}{[a\,a]} \\ + \dfrac{([b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z)^2}{[b\,b\,.\,1]} \\ + \dfrac{([c\,c\,.\,2]\,z)^2}{[c\,c\,.\,2]} \end{array}\right\} \tag{20}$$

Dieses ist eine algebraische Identität, welche mit der Bedingung Quadratsumme $[v\,v]$ = Minimum in gar keiner Beziehung besteht. Es ist hier nur vorausgesetzt, dass die Coefficienten $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. nach dem allgemeinen Gesetz der Elimination gebildet sind.

§ 28. Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ . . .

Nach dem Bisherigen haben wir, mit Beschränkung auf $n = 4$, $u = 3$, folgendes:

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl } n = 4 \quad \left\{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ v_3 = a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + l_3 \\ v_4 = \underbrace{a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z}_{\text{Anzahl } u\,=\,3} + l_4 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Reduzierte Normalgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$[c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \tag{4}$$

Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]\,x} + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] &= 0 \\ \underline{[b\,b]\,y} + [b\,c]\,z + [b\,l] &= 0 \\ \underline{[c\,c]\,z} + [c\,l] &= 0 \\ \underline{[l\,l]} & \end{aligned}\right| \tag{2*}$$

Reduzierte Normalgleichungen in abgekürzter Schreibweise:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]\,z} + [c\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,1]} & \end{aligned}\right\} \tag{3*}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{[c\,c\,.\,2]\,z} + [c\,l\,.\,2] &= 0 \\ \underline{[l\,l\,.\,2]} & \end{aligned}\right\} \tag{4*}$$

$$[l\,l\,.\,3] \tag{5}$$

Die Bedeutung der Eliminations-Coefficienten setzen wir nochmals ausführlich her:

$$\left.\begin{aligned} &[bb.1]=[bb]-\frac{[ab]}{[aa]}[ab] \quad [bc.1]=[bc]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac] \quad [bl.1]=[bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; [cc.1]=[cc]-\frac{[ac]}{[aa]}[ac] \quad [cl.1]=[cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad [ll.1]=[ll]-\frac{[a\,l]}{[aa]}[al] \end{aligned}\right\} \tag{3**}$$

$$\left.\begin{aligned} &[cc.2]=[cc.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bc.1] \quad [cl.2]=[cl.1]-\frac{[bc.1]}{[bb.1]}[bl.1] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad [ll.2]=[ll.1]-\frac{[cl.1]}{[cc.1]}[cl.1] \end{aligned}\right\} \tag{4**}$$

$$[ll.3]=[ll.2]-\frac{[cl.2]}{[cc.2]}[cl.2] \Big\} \tag{5**}$$

Nun wollen wir die Normalgleichungen (2) so aufgelöst denken, dass $x\ y\ z$ sich als lineare Funktionen der l zeigen, oder da es auf die Vorzeichen nicht ankommt, können wir auch $-x$, $-y$, $-z$ als lineare Funktionen der l darstellen:

$$\left.\begin{aligned} -x &= \alpha_1\,l_1 + \alpha_2\,l_2 + \alpha_3\,l_3 + \alpha_4\,l_4 \\ -y &= \beta_1\,l_1 + \beta_2\,l_2 + \beta_3\,l_3 + \beta_4\,l_4 \\ -z &= \gamma_1\,l_1 + \gamma_2\,l_2 + \gamma_3\,l_3 + \gamma_4\,l_4 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Hievon betrachten wir zuerst die dritte Gleichung, nämlich diejenige für z und wenden darauf das allgemeine Fehlerfortpflanzungsgesetz von (9) und (11) S. 17 an, nämlich indem der mittlere Fehler der l mit m und der mittlere Fehler von z mit m_z bezeichnet wird:

$$m_z^2 = \gamma_1^2\,m^2 + \gamma_2^2\,m^2 + \gamma_3^2\,m^2 + \gamma_4^2\,m^2$$

$$m_z^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 + \gamma_4^2)\,m^2 = [\gamma\gamma]\,m^2 \tag{7}$$

oder dasselbe in Gewichtsform:

$$\frac{1}{p_z} = [\gamma\gamma] \tag{8}$$

Nun muss man andererseits auch z aus den Normalgleichungen (2) bestimmen, durch Elimination von x und y, was wir nach dem Verfahren der unbestimmten Coefficienten thun wollen, d. h. wir multiplizieren die Gleichungen (2) mit den zunächst noch unbestimmt gelassenen Coefficienten Q_1, Q_2, Q_3, wodurch wir erhalten:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1[a\,a]\,x + Q_1[a\,b]\,y + Q_1[a\,c]\,z + Q_1[a\,l] = 0 \\ Q_2[a\,b]\,x + Q_2[b\,b]\,y + Q_2[b\,c]\,z + Q_2[b\,l] = 0 \\ Q_3[a\,c]\,x + Q_3[b\,c]\,y + Q_3[c\,c]\,z + Q_3[c\,l] = 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Wenn man diese 3 Gleichungen addiert, so sollen x und y verschwinden und z soll den Coefficienten $= 1$ erhalten, d. h. es wird über die Coefficienten $Q_1\ Q_2\ Q_3$ so verfügt, dass wird:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1[a\,a] + Q_2[a\,b] + Q_3[a\,c] = 0 \\ Q_1[a\,b] + Q_2[b\,b] + Q_3[b\,c] = 0 \\ Q_1[a\,c] + Q_2[b\,c] + Q_3[c\,c] = 1 \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Damit giebt die Addition der 3 Gleichungen (9):

$$z + Q_1[a\,l] + Q_2[b\,l] + Q_3[c\,l] = 0 \qquad (11)$$

Dieses wird mit der ursprünglichen Annahme, d. h. mit der dritten Gleichung von (6) verglichen, und dazu ist nötig, dass wir die Klammern $[a\,l]$, $[b\,l]$, $[c\,l]$ in (11) auflösen und alles nach $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ ordnen, d. h.:

$$\begin{array}{l} z + Q_1(a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 + a_4 l_4) \\ \quad + Q_2(b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 + b_4 l_4) \\ \quad + Q_3(c_1 l_1 + c_2 l_2 + c_3 l_3 + c_4 l_4) = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} z + (Q_1 a_1 + Q_2 b_1 + Q_3 c_1)\,l_1 + (Q_1 a_2 + Q_2 b_2 + Q_3 c_2)\,l_2 \\ \quad + (Q_1 a_3 + Q_2 b_3 + Q_3 c_3)\,l_3 + (Q_1 a_4 + Q_2 b_4 + Q_3 c_4)\,l_4 = 0 \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Zur Vergleichung setzen wir die dritte Gleichung von (6) her, nämlich:

$$z + \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 = 0$$

Dieses mit (12) verglichen giebt:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = Q_1 a_1 + Q_2 b_1 + Q_3 c_1 \\ \gamma_2 = Q_1 a_2 + Q_2 b_2 + Q_3 c_2 \\ \gamma_3 = Q_1 a_3 + Q_2 b_3 + Q_3 c_3 \\ \gamma_4 = Q_1 a_4 + Q_2 b_4 + Q_3 c_4 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ und berücksichtigt (10), so erhält man:

$$[a\,\gamma] = [a\,a]\,Q_1 + [a\,b]\,Q_2 + [a\,c]\,Q_3 = 0 \qquad (14\,\text{a})$$

Macht man dasselbe auch mit b und mit c, so bekommt man auch:

$$[b\,\gamma] = [a\,b]\,Q_1 + [b\,b]\,Q_2 + [b\,c]\,Q_3 = 0 \qquad (14\,\text{b})$$

$$[c\,\gamma] = [a\,c]\,Q_1 + [b\,c]\,Q_2 + [c\,c]\,Q_3 = 1 \qquad (14\,\text{c})$$

Diese 3 Gleichungen $[a\,\gamma] = 0$, $[b\,\gamma] = 0$, $[c\,\gamma] = 1$ sind erhalten worden bei der Elimination von x und y, d. h. bei der Bestimmung von z; würde man die Elimination umstellen (wobei auch wieder andere Coefficienten Q aufträten), so würde man analoge Gleichungen erhalten und die Gesamtheit aller solcher Formeln ist:

$$\left.\begin{array}{lll} \underline{[a\,\alpha] = 1} & [b\,\alpha] = 0 & [c\,\alpha] = 0 \\ \underline{[a\,\beta] = 0} & \underline{[b\,\beta] = 1} & [c\,\beta] = 0 \\ [a\,\gamma] = 0 & \underline{[b\,\gamma] = 0} & \underline{[c\,\gamma] = 1} \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Wir gehen einen Schritt weiter, und multiplizieren die Gleichungen (13) der Reihe nach mit α_1 α_2 α_3 α_4, das giebt:

$$[\alpha\,\gamma] = Q_1\,[a\,\alpha] + Q_2\,[b\,\alpha] + Q_3\,[c\,\alpha]$$

d. h. wegen (15):

$$[\alpha\,\gamma] = Q_1 \tag{16a}$$

Auf ähnlichem Wege, nämlich, wenn man die Gleichungen (13) mit β_1 β_2 β_3 β_4 und dann auch noch mit γ_1 γ_2 γ_3 γ_4 multipliziert und addiert, erhält man auch:

$$[\beta\,\gamma] = Q_2 \qquad [\gamma\,\gamma] = Q_3 \tag{16b u. 16c}$$

Setzt man diese (16) in (11), so erhält man:

$$-z = [\alpha\,\gamma]\,[a\,l] + [\beta\,\gamma]\,[b\,l] + [\gamma\,\gamma]\,[c\,l] \tag{17}$$

Setzt man diese (16) auch in (10), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
[a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\
[a\,b]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,b]\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\
[a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] + [c\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 1
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Bei diesen Gleichungen (17) und (18) ist die dritte Unbekannte z bevorzugt; durch cyklische Vertauschung erhält man aus (17) und (18) das vollständige System:

Unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
-x &= [\alpha\,\alpha]\,[a\,l] + [\alpha\,\beta]\,[b\,l] + [\alpha\,\gamma]\,[c\,l] \\
-y &= [\alpha\,\beta]\,[a\,l] + [\beta\,\beta]\,[b\,l] + [\beta\,\gamma]\,[c\,l] \\
-z &= [\alpha\,\gamma]\,[a\,l] + [\beta\,\gamma]\,[b\,l] + [\gamma\,\gamma]\,[c\,l]
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Gewichtsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&[a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] = 1 \qquad [a\,a]\,[\alpha\,\beta] + [a\,b]\,[\beta\,\beta] + [a\,c]\,[\beta\,\gamma] = 0 \\
&[a\,b]\,[\alpha\,\alpha] + [b\,b]\,[\alpha\,\beta] + [b\,c]\,[\alpha\,\gamma] = 0 \qquad [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [b\,b]\,[\beta\,\beta] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] = 1 \\
&[a\,c]\,[\alpha\,\alpha] + [b\,c]\,[\alpha\,\beta] + [c\,c]\,[\alpha\,\gamma] = 0 \qquad [a\,c]\,[\alpha\,\beta] + [b\,c]\,[\beta\,\beta] + [c\,c]\,[\beta\,\gamma] = 0 \\
&\qquad [a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] = 0 \\
&\qquad [a\,b]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,b]\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] = 0 \\
&\qquad [a\,c]\,[\alpha\,\gamma] + [b\,c]\,[\beta\,\gamma] + [c\,c]\,[\gamma\,\gamma] = 1
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Durch Auflösung der Gewichtsgleichungen (20) kann man alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. bestimmen, und zwar die nichtquadratischen, z. B. $[\alpha\,\beta]$ $[\beta\,\gamma]$ u. s. w. je doppelt, was als Rechenprobe dient.

Setzt man die so erhaltenen Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in (19), so hat man die sogenannte „unbestimmte Auflösung der Normalgleichungen", d. h. die Entwicklung der x y z als lineare Funktionen der Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ $[c\,l]$.

Die Gewichtsgleichungen (20) haben dieselben Coefficienten $[a\,a]$ $[a\,b]$ u. s. w. wie die ursprünglichen Normalgleichungen (2); die Auflösung der Gewichtsgleichungen schliesst sich daher auch der Auflösung (2*) (3*) (4*) an.

Hiebei sind an Stelle der früheren $[a\,l]$. $[b\,l]$, $[c\,l]$ nun entweder -1 oder 0 getreten, und man wird bald finden, dass auch alle folgenden $[b\,l\,.\,1]$, $[c\,l\,.\,1]$, $[c\,l\,.\,2]$ nur -1 oder 0 werden können, z. B. die dritte Gruppe von (20) geht in Hinsicht auf die Absolutglieder dadurch aus (2*) hervor, dass man setzt

$$[a\,l] = 0 \qquad [b\,l] = 0 \qquad [c\,l] = -1$$

damit wird nach (3**) S. 88:

$$[b\,l\,.\,1] = [b\,l] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,l] = 0 - 0 = 0$$

$$[c\,l\,.\,1] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,[a\,l] = -1 - 0 = -1$$

Auf diesem Wege bekommt man für die dritte Gruppe von (20) folgendes System, welches (3*) und (4*) S. 88 entspricht:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]}\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ \underline{[b\,b]}\,[\beta\,\gamma] + [b\,c]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ \underline{[c\,c]}\,[\gamma\,\gamma] &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{21 a}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{[b\,b\,.\,1]}\,[\beta\,\gamma] + [b\,c\,.\,1]\,[\gamma\,\gamma] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]}\,[\gamma\,\gamma] &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{21 b}$$

$$[c\,c\,.\,2]\,[\gamma\,\gamma] = 1 \tag{21 c}$$

Wir nehmen diese Schlussgleichung von (21 c) zusammen mit (8) und haben:

$$p_z = \frac{1}{[\gamma\,\gamma]} = [c\,c\,.\,2] \tag{22}$$

Dieses ist die Verallgemeinerung des Satzes, den wir in der Form $p_y = [b\,b\,.\,1]$ für 2 Unbekannte bereits in (8) § 17. S. 57 gehabt haben.

Da unsere Betrachtung zwar mit *drei* Elementen $x\ y\ z$ geführt, aber dem Gedanken nach nicht an *drei* gebunden ist, heisst dieser Satz nach (22) allgemein:

Wenn man die Normalgleichungen nach der Gauss schen Methode allmählich reduziert, d. h. $[b\,b\,.\,1]$, $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w. bildet, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt, so ist in dieser letzten Gleichung der Coefficient der Unbekannten zugleich das Gewicht der Unbekannten.

Diese Gewichtsbestimmungsmethode ist sehr gebräuchlich.

Um zur unabhängigen Bestimmung der Gewichte aller Unbekannten nach dieser Methode zu gelangen, muss man die Elimination wenigstens einmal vollständig umkehren, also etwa zuerst mit der Ordnung $x\ y\ z$ die Unbekannte z und p_z bestimmen, dann mit der Ordnung $z\ y\ x$ die Bestimmung von x und p_x vornehmen, worauf y nebst p_y sich findet durch Umstellung, entweder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von x geblieben sind, oder der 2 Gleichungen, welche nach Elimination von z sich ergeben haben.

Man kann jedesmal hiebei auch einen nicht quadratischen Coefficienten $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. gelegentlich mitbestimmen, denn wenn z. B. x eliminiert ist, so dass man hat:

$$\begin{aligned} \underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] &= 0 \\ \underline{[c\,c\,.\,1]\,z} + [c\,l\,.\,1] &= 0 \end{aligned}$$

so kann man auch rechnen:

$$[b\,c\,.\,2] = [b\,c\,.\,1] - \frac{[b\,b\,.\,1]\,[c\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]} = \frac{1}{[\beta\,\gamma]} \tag{23}$$

Man beweist dieses gerade so, wie (22) bewiesen wurde, d. h. man betrachtet $[\beta\,\gamma]$ als denjenigen speziellen Wert von z, welcher in (19) entsteht, wenn $[a\,l] = 0$, $[b\,l] = -1$ und $[c\,l] = 0$ gesetzt wird.

Man könnte in dieser Weise durch mehrfaches Umstellen der Eliminationsordnung alle Gewichts-Coefficienten nach und nach finden, und bei nur 2 oder 3 Unbekannten macht sich unter Umständen das ganz bequem.

Bei 2 Unbekannten ist überhaupt alles einfach, wie in dem Beispiel § 20. S. 65 gezeigt ist.

Bei 3 Unbekannten kann man so verfahren:

$$\begin{array}{llll} 1) & a & b & c \\ & & b & c \\ & & & c \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{llll} 2) & c & b & a \\ & & b & a \\ & & & a \end{array}$$

giebt z und $[\gamma\,\gamma]$ nebst $[\beta\,\gamma]$. giebt x und $[\alpha\,\alpha]$ nebst $[\alpha\,\beta]$.

Nun muss man jedenfalls noch einmal umstellen, um y und $[\beta\,\beta]$ zu erhalten; also:

$$\begin{array}{lll} 3) & c & b \\ & & b \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{lll} 4) & a & b \\ & & b \end{array}$$

giebt y und $[\beta\,\beta]$ nebst $[\beta\,\gamma]$. giebt y und $[\beta\,\beta]$ nebst $[\alpha\,\beta]$.

Da man mit 1), 2) und 3) bereits alle Unbekannten und deren Gewichte hat, kann man statt noch 4) zu bilden, für den letzten noch fehlenden Coefficienten $[\alpha\beta]$ auch die erste der Gleichungen (20) selbst zu Hilfe nehmen.

Bei mehr als 3 Unbekannten ist aber das Verfahren der Gleichung (23) höchstens dann zu empfehlen, wenn man nur *einzelne* der Coefficienten $[\beta\gamma]$ etc. braucht, nach denen man dann die Eliminationsordnung einrichten kann. Braucht man alle Gewichts-Coefficienten, (was z. B. bei der Bessel schen Triangulationsausgleichung der Fall ist), so kann man nicht ohne die allgemeinen Gewichtsgleichungen (20) bzw. (21) auskommen, deren gemeinsame Auflösung wir in § 33. besonders behandeln werden.

§ 29. Gewicht einer Funktion der $x\ y\ z$ nach der Ausgleichung.

Wir betrachten die lineare Funktion:

$$F = f_1 x + f_2 y + f_3 z \tag{1}$$

Das Gewicht von F kann man aus den *Einzel*gewichten der gemeinsam ausgeglichenen Elemente $x\ y\ z$ nicht unmittelbar bestimmen, weil die Gewichte der $x\ y\ z$ nicht unabhängig sind, man muss vielmehr, wie im Fall von § 17., auf die Beobachtungen selbst zurückgreifen, und F als Funktion derselben darstellen.

Wir benützen wieder die Gleichungen (6) § 28. S. 88:

$$\left.\begin{aligned} -x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4 \\ -y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4 \\ -z &= \gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Setzt man diese Werte in (1), so erhält man:

$$-F = \left\{\begin{aligned} &+(f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)\,l_1 \\ &+(f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)\,l_2 \\ &+(f_1\alpha_3 + f_2\beta_3 + f_3\gamma_3)\,l_3 \\ &+(f_1\alpha_4 + f_2\beta_4 + f_3\gamma_4)\,l_4 \end{aligned}\right\}$$

Da die l bei Gewichtsberechnungen als unmittelbare Beobachtungen gelten, erhält man das Gewicht P nach dem allgemeinen Gesetze der Fehlerfortpflanzung, ebenso wie bei (7) und (8) des vorhergehenden § 28. S. 88:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} &(f_1\alpha_1 + f_2\beta_1 + f_3\gamma_1)^2 \\ +&(f_1\alpha_2 + f_2\beta_2 + f_3\gamma_2)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}$$

oder mit Ausführung der Quadrate:

$$\frac{1}{P} = \left\{\begin{aligned} f_1 f_1 [\alpha\alpha] + 2 f_1 f_2 [\alpha\beta] &+ 2 f_1 f_3 [\alpha\gamma] \\ + f_2 f_2 [\beta\beta] &+ 2 f_2 f_3 [\beta\gamma] \\ &+ f_3 f_3 [\gamma\gamma] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Die Gleichung (3) kann man auch so schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = f_1 (f_1 [\alpha\alpha] + f_2 [\alpha\beta] + f_3 [\alpha\gamma]) \\ + f_2 (f_1 [\alpha\beta] + f_2 [\beta\beta] + f_3 [\beta\gamma]) \\ + f_3 (f_1 [\alpha\gamma] + f_2 [\beta\gamma] + f_3 [\gamma\gamma]) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

oder mit Ordnung nach Vertikal-Reihen und mit Zusammenfassung der Coefficienten von $f_1\ f_2\ f_3$:

$$\frac{1}{P} = q_1 f_1 + q_2 f_2 + q_3 f_3 = [q f] \tag{5}$$

wo $q_1\ q_2\ q_3$ folgende Bedeutungen haben:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= [\alpha\,\alpha]\,f_1 + [\alpha\,\beta]\,f_2 + [\alpha\,\gamma]\,f_3 \\ q_2 &= [\alpha\,\beta]\,f_1 + [\beta\,\beta]\,f_2 + [\beta\,\gamma]\,f_3 \\ q_3 &= [\alpha\,\gamma]\,f_1 + [\beta\,\gamma]\,f_2 + [\gamma\,\gamma]\,f_3 \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Nun wird sich zeigen, dass die Gleichung besteht:

$$[a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 = f_1 \quad (7)$$

denn die Ausführung dieser Funktion nach (6) giebt:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 = {} & ([a\,a]\,[\alpha\,\alpha] + [a\,b]\,[\alpha\,\beta] + [a\,c]\,[\alpha\,\gamma])\,f_1 \\ & ([a\,a]\,[\alpha\,\beta] + [a\,b]\,[\beta\,\beta] + [a\,c]\,[\beta\,\gamma])\,f_2 \\ & ([a\,a]\,[\alpha\,\gamma] + [a\,b]\,[\beta\,\gamma] + [a\,c]\,[\gamma\,\gamma])\,f_3 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die hier auftretenden Coefficienten $([a\ a]\ [\alpha\ \alpha] + \ldots)$ sind aber teils $= 1$, teils $= 0$, wie im vorigen § 28. (20) S. 90 gezeigt wurde. Die Entwicklung (8) giebt also in der That die sehr einfache Beziehung (7), und indem wir dieselbe Betrachtung auch auf f_2 und f_3 ausdehnen, haben wir entsprechend (7) das ganze System:

$$\left.\begin{aligned} [a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 &= f_1 \\ [a\,b]\,q_1 + [b\,b]\,q_2 + [b\,c]\,q_3 &= f_2 \\ [a\,c]\,q_1 + [b\,c]\,q_2 + [c\,c]\,q_3 &= f_3 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Das sind Gleichungen von derselben Form, wie die ursprünglichen Normalgleichungen, man kann sie daher auch ebenso wie jene weiter behandeln:

$$\left.\begin{aligned} \underline{[a\,a]\,q_1} + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3 - f_1 &= 0 \\ \underline{[b\,b]\,q_2} + [b\,c]\,q_3 - f_2 &= 0 \\ \underline{[c\,c]\,q_3} - f_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10\,\mathrm{a})$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{[b\,b.1]\,q_2} + [b\,c.1]\,q_3 - [f_2.1] &= 0 \\ \underline{[c\,c.1]\,q_3} - [f_3.1] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10\,\mathrm{b})$$

$$[c\,c.2]\,q_3 - [f_3.2] = 0 \quad (10\,\mathrm{c})$$

Die Schlussglieder haben folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{aligned} [f_2.1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,f_1 \qquad & [f_3.1] = f_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,f_1 \\ & [f_3.2] = [f_3.1] - \frac{[b\,c.1]}{[b\,b.1]}\,[f_2.1] \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Diese Schlussglieder kann man der gewöhnlichen Elimination (2*) bis (5) § 28. S. 88 anhängen.

Denkt man sich aus den Gleichungen (9) und (10) die $q_1\ q_2\ q_3$ numerisch bestimmt, und in (5) eingesetzt, so hat man den gesuchten Wert $\frac{1}{P}$.

Hieran schliesst sich aber ein noch einfacheres Verfahren an: Man setze die durch (9) bestimmten $f_1\ f_2\ f_3$ in (5), und erhält damit:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P} = [a\,a]\,q_1^2 + 2\,[a\,b]\,q_1\,q_2 &+ 2\,[a\,c]\,q_1\,q_3 \\ + \quad [b\,b]\,q_2^2 &+ 2\,[b\,c]\,q_2\,q_3 \\ &+ \quad [c\,c]\,q_3^2 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Auf diesen Ausdruck (12) kann man die allgemeine Entwicklung (20) § 27. S. 87 anwenden, nämlich:

$$\frac{1}{P} = \frac{([a\,a]\,q_1 + [a\,b]\,q_2 + [a\,c]\,q_3)^2}{[a\,a]} + \frac{([b\,b\,.\,1]\,q_2 + [b\,c\,.\,1]\,q_3)^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{([c\,c\,.\,2]\,q_3)^2}{[c\,c\,.\,2]}$$

d. h. mit Einsetzung von (10 a), (10 b), (10 c) giebt dieses:

$$\frac{1}{P} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{13}$$

Dieses ist theoretisch die übersichtlichste Formel für das Funktionsgewicht.

Ob man im einzelnen Falle numerisch hiernach, d. h. nach (10 a), (10 b), (10 c) und (13) rechnen will, oder ob man die ursprünglichen Formeln (3) oder (5) anwenden will, wird von den Umständen abhängen.

§ 30. Gewicht einer Funktion von Funktionen.

Eine weiter abschweifende und daher zunächst zu übergehende Betrachtung bezieht sich noch auf das Gewicht einer Funktion von Funktionen der ausgeglichenen x, y, z. Später bei der Fehler-Ellipse kann davon Gebrauch gemacht werden.

Man habe zwei Funktionen:

$$X = f_1\,x + f_2\,y + f_3\,z \qquad Y = f_1'\,x + f_2'\,y + f_3'\,z \tag{1}$$

Diese zwei Funktionen sollen nach dem vorigen § 29. (13) (s. oben) behandelt worden sein, und haben folgende Gewichte erhalten:

$$\frac{1}{P_x} = \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \qquad \frac{1}{P_y} = \frac{f_1'^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2'\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[f_3'\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]} \tag{2}$$

Nun stellt man noch eine Funktion von X und von Y auf:

$$(F) = r\,X + r'\,Y \tag{3}$$

deren Gewicht ebenfalls bestimmt werden soll.

Hiezu hat man jedenfalls den Weg, dass man vermöge (1) und (3), (F) in x und y ausdrückt und eine Funktion der x und y herstellt, nämlich:

$$(F) = (r\,f_1 + r'\,f_1')\,x + (r\,f_2 + r'\,f_2')\,y + (r\,f_3 + r'\,f_3')\,z \tag{4}$$

Das Gewicht dieser Funktion von x, y und z ist bestimmt durch:

$$\frac{1}{(P)} = \frac{(r\,f_1 + r'\,f_1')^2}{[a\,a]} + \frac{[(r\,f_2 + r'\,f_2')\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} + \frac{[(r\,f_3 + r'\,f_3')\,.\,2]^2}{[c\,c\,.\,2]} \tag{5}$$

Ausser diesem unmittelbar sich darbietenden Wege zur Berechnung des Gewichtes (P) der Funktion (3) giebt es aber noch einen zweiten Weg durch Vermittlung der Gewichte P_x und P_y, welche man nach (2) schon hat.

Wir betrachten die Bestandteile von (2) und (5) nach dem Entstehungsgesetz (11) § 29. S. 93:

$$f_1 = f_1 \qquad\qquad f_1' = f_1'$$

$$[f_2\,.\,1] = f_2 - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,f_1 \qquad\qquad [f_2'\,.\,1] = f_2' - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,f_1'$$

$$[f_3\,.\,2] = f_3 - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,f_1 - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[f_2\,.\,1] \qquad [f_3'\,.\,2] = f_3' - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,f_1' - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[f_2\,.\,1]$$

$$r\,f_1 + r'\,f_1' = r\,f_1 + r_1'\,f_1'$$

$$[(r\,f_2 + r'\,f_2')\,.\,1] = (r\,f_2 + r'\,f_2') - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,(r\,f_1 + r'\,f_1')$$

$$[(r\,f_3 + r'\,f_3')\,.\,2] = (r\,f_3 + r'\,f_3') - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,(r\,f_2 + r'\,f_2') - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}\,[(r\,f_2 + r'\,f_2')\,.\,1]$$

Man hat also die sehr einfachen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} r f_1 + r' f_1' &= r f_1 + r' f_1' \\ [(r f_2 + r' f_2') . 1] &= r [f_2 . 1] + r' [f_2' . 1] \\ [(r f_3 + r' f_3') . 2] &= r [f_3 . 2] + r' [f_3' . 2] \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Setzt man dieses in (5) ein und quadriert, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(P)} = r^2 &\left\{ \frac{f_1^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2' . 1]^2}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3' . 2]^2}{[c\,c . 2]} \right\} \\ + r'^2 &\left\{ \frac{f_1'^2}{[a\,a]} + \frac{[f_2' . 1]^2}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3' . 2]^2}{[c\,c . 2]} \right\} \\ + 2\,r\,r' &\left\{ \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 . 1][f_2' . 1]}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3 . 2][f_3' . 2]}{[c\,c . 2]} \right\} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

oder:

$$\frac{1}{(P)} = r^2 \frac{1}{P_x} + r'^2 \frac{1}{P_y} + 2\,r\,r' \frac{1}{P_{xy}} \tag{8}$$

Dabei haben $\frac{1}{P_x}$ und $\frac{1}{P_y}$ die bereits in (2) angegebenen Bedeutungen, und $\frac{1}{P_{xy}}$ lässt sich aus (7) leicht ableiten:

$$\frac{1}{P_{xy}} = \frac{f_1 f_1'}{[a\,a]} + \frac{[f_2 . 1][f_2' . 1]}{[b\,b . 1]} + \frac{[f_3 . 2][f_3' . 2]}{[c\,c . 2]} \tag{9}$$

In Worten kann man dieses so ausdrücken:

Wenn für zwei Funktionen X und Y nach (1) die Gewichte in den Formeln (2) bestimmt sind, und wenn es sich dann abermals um eine Funktion (F) von den Funktionen X und Y handelt, so braucht man das Gewicht (P) von (F) nicht von Neuem zu berechnen, sondern man kann es nach (9) und (8) aus den schon berechneten Gewichten P_x und P_y ableiten.

Wir werden bei der Fehlerellipse von diesem Satze Gebrauch machen, und zwar mit der Vereinfachung:

$$(F) = X + Y, \text{ d. h. } r = r' = 1. \tag{10}$$

Hiefür kann man das vorstehende in folgende Regel fassen:

Wenn gegeben ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x} = [\alpha\,\alpha] &= \frac{A_0 A_0}{[a\,a]} + \frac{A_1 A_1}{[b\,b . 1]} + \frac{A_2 A_2}{[c\,c . 2]} + \ldots \\ \frac{1}{P_y} = [\beta\,\beta] &= \frac{B_0 B_0}{[a\,a]} + \frac{B_1 B_1}{[b\,b . 1]} + \frac{B_2 B_2}{[c\,c . 2]} + \ldots \\ \text{dann berechnet man: } [\alpha\,\beta] &= \frac{A_0 B_0}{[a\,a]} + \frac{A_1 B_1}{[b\,b . 1]} + \frac{A_2 B_2}{[c\,c . 2]} + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

und damit ist: $\frac{1}{(P)} = [\alpha\,\alpha] + [\beta\,\beta] + 2\,[\alpha\,\beta]$.

§ 31. Partielle Elimination.

Auch die Theorie der partiellen Elimination ist nicht ein wesentlicher Bestandteil unseres Entwicklungsganges, die partielle Elimination mag aber später von Nutzen sein.

Zunächst wollen wir die Entwicklungen von § 26. zum Teil wiederholen und zusammenfassen:

Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} \;=\; u.} \right\} \tag{1}$$

Normalgleichungen:

$$\text{Anzahl} = u \left\{ \begin{array}{r} \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ \underline{[b\,b]}\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ \underline{[c\,c]}\,z + [c\,l] = 0 \\ \underline{[l\,l]} \end{array} \right\} \tag{2}$$

Erstmals reduzierte Normalgleichungen:

$$\begin{array}{l} \text{Anzahl} \\ = u - 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \underline{[b\,b\,.\,1]\,y} + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ \qquad\qquad \underline{[c\,c\,.\,1]\,z} + [c\,l\,.\,1] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{[l\,l\,.\,1]} \end{array} \text{ oder } \begin{array}{r} \underline{[b'\,b']\,y} + [b'\,c']\,z + [b'\,l'] = 0 \\ \underline{[c'\,c']}\,z + [c'\,l'] = 0 \\ \underline{[l'\,l']} \end{array} \right\} \tag{3}$$

Hiebei ist:

$$b' = b - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,a \qquad c' = c - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}\,a \qquad l' = l - \frac{[a\,l]}{[a\,a]}\,a \tag{4}$$

Auf das System (3) kann man auch dadurch kommen, dass man n reduzierte (fingierte) Fehlergleichungen schreibt:

Reduzierte Fehlergleichungen:

$$\text{Anzahl} = n \left\{ \underbrace{\begin{array}{l} v_1 = b_1'\,y + c_1'\,z + l_1' \\ v_2 = b_2'\,y + c_2'\,z + l_2' \\ \cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ v_n = b_n'\,y + c_n'\,z + l_n \end{array}}_{\text{Anzahl} \;=\; u - 1} \right\} \tag{5}$$

Alles dieses in Worte gefasst, giebt den Satz:

Wenn man statt der n Fehlergleichungen (1) die n reduzierten Fehlergleichungen (5) anschreibt, und aus denselben mit gleichen Gewichten wie bei (1), in üblicher Weise Normalgleichungen (3) bildet, so erhält man daraus dieselben Unbekannten y und z, und auch alle Gewichte und mittleren Fehler gerade so wie aus den ursprünglichen Fehlergleichungen (1). Man muss jedoch bei der Berechnung des mittleren Fehlerquadrats

$$m^2 = \frac{[v\,v]}{n - u} \tag{6}$$

im Nenner $n - u$ in der Zahl u der Unbekannten das zuerst eliminierte x mitzählen, oder man darf in (6) nicht etwa den Nenner $= n - (u - 1)$ nach (5) nehmen.

Man kann aus dem Vorstehenden auch noch folgenden, allgemein gültigen Satz ableiten:

Wenn man eine Unbekannte x bereits in den Fehlergleichungen, mit Hilfe der Beziehungen (4) eliminiert, und damit reduzierte Fehlergleichungen (5) aufstellt, so bekommt man daraus *dasselbe* Normalgleichungssystem (3), welches man auf dem gewöhnlichen Weg durch Elimination von x aus den Normalgleichungen erhalten haben würde.

Wir betrachten noch folgenden Fall:

Fehlergleichungen: *Normalgleichungen:*

$$\begin{array}{ll} v_1 = c_1 z \ldots + a_1 x + b_1 y + l_1 & \underline{[c\,c]}\,z + [c\,a]\,x + [c\,b]\,y + [c\,l] = 0 \\ v_2 = c_2 z \ldots + a_2 x + b_2 y + l_2 & \underline{[a\,a]}\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \underline{[b\,b]}\,y + [b\,l] = 0 \\ v_n = c_n z \ldots + a_n x + b_n y + l_n & \underline{[l\,l]} \end{array} \quad (7)$$

Eine zweite Gruppe von Beobachtungen gebe:

$$\begin{array}{ll} v_{n+1} = \ldots d_{n+1}\,t + a_{n+1}\,x + b_{n+1}\,y + l_{n+1} & \underline{(d\,d)}\,t + (d\,a)\,x + (d\,b)\,y + (d\,l) = 0 \\ v_{n+2} = \ldots d_{n+2}\,t + a_{n+2}\,x + b_{n+2}\,y + l_{n+2} & \underline{(a\,a)}\,x + (a\,b)\,y + (a\,l) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \underline{(b\,b)}\,y + (b\,l) = 0 \\ & \underline{(l\,l)} \end{array} \quad (8)$$

Die Unbekannten x und y kommen in beiden Gruppen vor, dagegen z nur in der ersten, t nur in der zweiten Gruppe.

Nun soll z aus den Normalgleichungen von (7), und t aus den Normalgleichungen von (8) eliminiert werden. Dieses giebt:

$$\text{aus (7):} \quad [a\,a\,.\,1]\,x + [a\,b\,.\,1]\,y + [a\,l\,.\,1] = 0 \quad (9)$$

$$\text{aus (8):} \quad (a\,a\,.\,1)\,x + (a\,b\,.\,1)\,y + (a\,l\,.\,1) = 0 \quad (10)$$

Diese beiden Gleichungen nehmen wir so zusammen:

$$([a\,a\,.\,1] + (a\,a\,.\,1))\,x + ([a\,b\,.\,1] + (a\,b\,.\,1))\,y + ([a\,l\,.\,1] + (a\,l\,.\,1)) = 0 \quad (11)$$

Dieses ist genau dieselbe erste Normalgleichung, welche man bekommen haben würde, wenn man aus allen Fehlergleichungen von (7) und (8) *zusammen* genommen Normalgleichungen gebildet und daraus z und t eliminiert hätte.

Um dieses zu beweisen, bilden wir das Gesamtnormalgleichungssystem für die Fehlergleichungen (7) und (8) unmittelbar:

$$\begin{array}{lllll} \underline{[c\,c]}\,z \;\ldots & + [c\,a]\,x & + [c\,b]\,y & + [c\,l] & = 0 \\ \quad \underline{(d\,d)}\,t & + (d\,a)\,x & + (d\,b)\,y & + (d\,l) & = 0 \\ & ([a\,a] + (a\,a))\,x & + ([a\,b] + (a\,b))\,y & + ([a\,l] + (a\,l)) & = 0 \end{array}$$

erstmals reduziert:

$$\left((d\,d) - \frac{0}{[c\,c]}\,0\right) t + \left((d\,a) - \frac{0}{[c\,c]}[c\,a]\right) x + \ldots$$

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}[c\,a]\right) x + \ldots$$

nochmals reduziert:

$$\left([a\,a] + (a\,a) - \frac{[c\,a]}{[c\,c]}[c\,a] - \frac{(d\,a)}{(d\,d)}(d\,a)\right) x + \ldots \quad (12)$$

Der Coefficient von x in (11) enthält in der That dieselben Bestandteile wie der Coefficient von x in (12), und da es mit allen anderen Coefficienten sich ähnlich verhält, so ist damit der bei (11) ausgesprochene Satz bewiesen.

Nun kann man auch noch einen Schritt weiter gehen, und mittelst des bei (5) bewiesenen Satzes über reduzierte Fehlergleichungen zu dem Schluss kommen:

Wenn einzelne Unbekannte z und t wie bei (7) und (8) nur in einem *Teil* der Fehlergleichungen vorkommen, so darf man für diese Partialgruppen von Fehlergleichungen reduzierte Fehlergleichungen von der Form (5) bilden und dann mit der Gesamtheit aller reduzierten Fehlergleichungen weiterrechnen, wie wenn es Originalfehlergleichungen wären.

Bei der Berechnung des mittleren Fehlers sind jedoch die anfänglich eliminierten Unbekannten (z und t) in der Zahl u aller Unbekannten mitzuzählen.

§ 32. Bildung der Endgleichungen ohne Zwischenglieder.

Die allmähliche Elimination, welche wir in § 25. durch die Gleichungen (4)—(7) S. 81 und durch das Zahlenbeispiel S. 82 gelehrt haben, reicht immer aus, und da man dabei Schritt für Schritt Summenproben hat, ist jenes Verfahren sehr gut. Indessen, nach Erlangung einer gewissen Übung im Ausrechnen der $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. kann man auch die Elimination mehr auf einmal machen, wie wir nun zeigen wollen:

Wir haben in § 25. S. 81 angenommen, dass die Endgleichungen von den Normalgleichungen durch Vermittlung der allmählich reduzierten Gleichungen (4) (5) (6) S. 81 erlangt werden. Obgleich alle hiebei vorkommenden Beträge von der Form $-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$, $-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,c\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$ u. s. w. jedenfalls ausgerechnet werden müssen, kann man doch wenigstens das allmähliche Zusammensetzen dieser Beträge ersparen und durch eine Gesamtsummierung ersetzen, so dass von den Gleichungen (4) und (5) § 25. S. 81 immer nur die erste jeder Gruppe gebildet wird.

In gleicher Weise, wie $[l\,l\,.\,3]$ in (8) § 27. S. 85 in seine Bestandteile rückwärts zerlegt wurde, kann man dieses mit allen anderen Coefficienten thun, so zeigt z. B. ein Blick auf (4**) und (5**) § 28. S. 88:

$$[c\,l\,.\,2] = [c\,l] - \frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l] - \frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1] \tag{1}$$

und nach diesem Beispiel ist folgendes Schema für 4 Unbekannte gebildet:

A	$[a\,a]$	$[a\,b]$	$[a\,c]$	$[a\,d]$	$[a\,l]$
a_2		$[b\,b]$	$[b\,c]$	$[b\,d]$	$[b\,l]$
α_1		$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,l]$
B'		$[b\,b\,.\,1]$	$[b\,c\,.\,1]$	$[b\,d\,.\,1]$	$[b\,l\,.\,1]$
a_3			$[c\,c]$	$[c\,d]$	$[c\,l]$
α_2			$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,c]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,c]}{[a\,a]}[a\,l]$
β_1			$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,c\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
C''			$[c\,c\,.\,2]$	$[c\,d\,.\,2]$	$[c\,l\,.\,2]$
a_4				$[d\,d]$	$[d\,l]$
α_3				$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,d]$	$-\frac{[a\,d]}{[a\,a]}[a\,l]$
β_2				$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,d\,.\,1]$	$-\frac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[b\,l\,.\,1]$
γ_1				$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,d\,.\,2]$	$-\frac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[c\,l\,.\,2]$
D'''				$[d\,d\,.\,3]$	$[d\,l\,.\,3]$

Nach diesem Schema ist im Folgenden das Zahlenbeispiel von § 25. S. 82 von 4 Gleichungen, nebst Summenproben und Fehlersummengliedern $[l\,l]$ u. s. w. nochmals behandelt, und zwar sind alle Beträge $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w. mit dem Rechenschieber berechnet, so dass keine Zahl mehr zu schreiben war, als hier hergesetzt ist.

	x a	y b	z c	t d	l	s	Probe
A	+ 459	− 308	− 389	+ 244	− 507	+ 501	
		+ 464	+ 408	− 269	+ 695	− 990	
		− 208	− 262	+ 164	− 341	+ 337	
B'		+ 256	+ 146	− 105	+ 354	− 653	− 2
			+ 676	− 331	+ 653	− 1017	
			− 330	+ 207	− 430	+ 425	
			− 83	+ 60	− 202	+ 373	
C''			+ 263	− 64	+ 21	− 219	+ 1
				+ 469	− 283	+ 170	
				− 130	+ 270	− 267	
				− 43	+ 145	− 268	
				− 15	+ 5	− 53	
$t = -\frac{+137}{+281} = -0{,}486$ D'''				+ 281	+ 137	− 418	0
					+ 1129	− 1687	
					− 560	+ 554	
					− 490	+ 902	
					− 2	+ 17	
					− 66	+ 203	
					+ 11	− 11	0

Die zwischen Horizontallinien stehenden Zahlen geben das Endgleichungssystem (10) § 25. S. 81.

Ob durch die vorstehende Eliminations-Anordnung ein rechnerischer Gewinn im Vergleich mit § 25. S. 82 erzielt wird, kommt namentlich auf die Zahl der Unbekannten an. Bei wenigen Unbekannten ist es nicht der Fall, dagegen bei zahlreichen Unbekannten ist diese Anordnung nützlich, wenn die Additionen mit wechselnden Zeichen bequem eingerichtet werden.

Diese Anordnung ist bei der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme im Gebrauch (mit Logarithmen), jedoch durchaus mit Subtraktion in Form von dekadischen Ergänzungen, so dass der Schluss obiger Tabelle so geschrieben wird:

+ 1129	× 8313
× 9440	554
× 9510	902
× 9998	17
× 9934	203
40011	× 9989
= 11	= − 11

Das kleine schiefe Kreuz × ist dabei Zeichen für dekadische Ergänzung, zum Beispiel: × 8313 = 8313 − 10000 = − 1687.

(Anmerkung. Die obenstehende Elimination, ebenso wie S. 82, ist nur mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht, weshalb die letzte Stelle nicht überall scharf ist.)

§ 33. Gemeinsame Bestimmung aller Unbekannten $x\ y\ z$ . . . und aller Gewichts-Coefficienten $[\alpha\alpha]$ $[\alpha\beta]$ u. s. w.

Im Anschluss an das Vorhergehende haben wir noch ein, für gewöhnliche Zwecke nicht erforderliches, Verfahren gebildet, nach welchem *alle* Unbekannte $x\ y\ z\ldots$ auf *ein*mal erhalten werden.

Wir nehmen die Endgleichungen (9) § 25. S. 81 nochmals vor:

Endgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} A\ = [a\,a]\,x + [a\,b]\,y & + [a\,c]\,z \quad + [a\,d]\,t \quad + [a\,l] \quad = 0 \\ B' = & [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,d\,.\,1]\,t + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ C'' = & \qquad [c\,c\,.\,2]\,z + [c\,d\,.\,2]\,t + [c\,l\,.\,2] = 0 \\ D''' = & \qquad\qquad [d\,d\,.\,3]\,t + [d\,l\,.\,3] = 0 \\ & \qquad\qquad\qquad [l\,l\,.\,4] = [v\,v] \end{array}\right\} \quad (1)$$

Die 4te Gleichung bestimmt t, und setzt man dieses rückwärts in die 3te Gleichung, so hat man auch z, und so fort aus der 2ten und 1ten Gleichung auch y und x. Dieses ist ein Verfahren, welches numerisch häufig angewendet wird.

Nun kann man aber die fragliche Rückwärtssubstitution auch allgemein algebraisch ausführen, worauf sich ein übersichtliches Schema zur numerischen Rechnung gründen lassen wird.

Wenn man ausser den bereits bei (1) vorkommenden Klammern $[b\,b\,.\,1]$ u. s. w. noch einige andere ähnlich gebaute Coefficienten einführt, welche wir im Folgenden durch *runde* Klammern $(a\,c\,.\,1)$ u. s. w. von den früheren unterscheiden wollen, so bekommt man folgendes Gleichungssystem, von dessen Richtigkeit man sich am besten rückwärts dadurch überzeugt, dass man die Ausdrücke (3) in (2) einsetzt, und die Resultate mit (1) vergleicht.

$$\left.\begin{array}{ll} -[a\,a]\,x & = [a\,l] - \dfrac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[a\,c\,.\,1] - \dfrac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]}(a\,d\,.\,2) \\ -[bb\,.\,1]\,y & = [b\,l\,.\,1] - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[b\,c\,.\,1] - \dfrac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]}(b\,d\,.\,2) \\ -[cc\,.\,2]\,z & = [c\,l\,.\,2] - \dfrac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]}[c\,d\,.\,2] \\ -[dd\,.\,3]\,t & = [d\,l\,.\,3] \end{array}\right\} \quad (2)$$

Dabei haben die neu eingeführten, durch runde Klammern unterschiedenen Coefficienten folgende Bedeutungen:

$$\left.\begin{array}{l} (a\,c\,.\,1) = [a\,c] - \dfrac{[b\,c\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] \\ (a\,d\,.\,1) = [a\,d] - \dfrac{[b\,d\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] \\ (a\,l\,.\,1) = [a\,l] - \dfrac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]}[a\,b] \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} (a\,d\,.\,2) = (a\,d\,.\,1) - \dfrac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}(a\,c\,.\,1)\ ,\ (b\,d\,.\,2) = [b\,d\,.\,1] - \dfrac{[c\,d\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[b\,c\,.\,1] \\ (a\,l\,.\,2) = (a\,l\,.\,1) - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}(a\,c\,.\,1)\ ,\ (b\,l\,.\,2) = [b\,l\,.\,1] - \dfrac{[c\,l\,.\,2]}{[c\,c\,.\,2]}[b\,c\,.\,1] \end{array}\right\} \quad (4)$$

Wir fahren nun noch weiter fort, und setzen:

$$(al.3) = (al.2) - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}(ad.2),\ (bl.3) = (bl.2) - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}(bd.2),\ (cl.3) = [cl.2] - \frac{[dl.3]}{[dd.3]}[cd.2] \quad (5)$$

und damit kann man $x\ y\ z\ t$ kurz so ausdrücken:

$$x = -\frac{(a\,l\,.\,3)}{[a\,a]} \qquad y = -\frac{(b\,l\,.\,3)}{[b\,b\,.\,1]} \qquad z = -\frac{(c\,l\,.\,3)}{[c\,c\,.\,2]} \qquad t = -\frac{[d\,l\,.\,3]}{[d\,d\,.\,3]} \qquad (6)$$

Es würde wenig Wert haben, alle diese Formeln aufzustellen, wenn es nicht ein einfaches Schema gäbe, nach welchem dieselben mechanisch ausgerechnet werden können. Dieses ist aber der Fall, wie folgendes zeigt:

$$\left.\begin{array}{cccccc|cccccc}
 & [a\,a]_3 & [a\,b]_0 & [a\,c]_0 & [a\,d]_0 & [a\,l]_0 & & & & & & \\
 & & [b\,b] & [b\,c] & [b\,d] & [b\,l] & & & & & & \\
A & & & [c\,c] & [c\,d] & [c\,l] & & & & & & \\
 & & & & [d\,d] & [d\,l] & & & & & & \\
 & & & & & [l\,l] & & & & & & \\ \hline
 & & [bb\,.\,1]_3 & [bc\,.\,1]_1 & [bd\,.\,1]_1 & [bl\,.\,1]_1 & [a\,b]_0 & & & & & \\
B & & & [cc\,.\,1] & [cd\,.\,1] & [cl\,.\,1] & [a\,c]_0 & & B' & & & \\
 & & & & [dd\,.\,1] & [dl\,.\,1] & [a\,d]_0 & & & & & \\
 & & & & & [ll\,.\,1] & [a\,l]_0 & & & & & \\ \hline
 & & & [cc\,.\,2]_3 & [cd\,.\,2]_2 & [cl\,.\,2]_2 & (ac\,.\,1) & [bc\,.\,1]_1 & & & & \\
 & & C & & [dd\,.\,2] & [dl\,.\,2] & (ad\,.\,1) & [bd\,.\,1]_1 & C' & & & \\
 & & & & & [ll\,.\,2] & (al\,.\,1) & [bl\,.\,1]_1 & & & & \\ \hline
 & & & D & [dd\,.\,3]_3 & [dl\,.\,3]_3 & (ad\,.\,2) & (bd\,.\,2) & [cd\,.\,2]_2 & & & D' \\
 & & & & & [ll\,.\,3] & (al\,.\,2) & (bl\,.\,2) & [c\,l\,.\,2]_2 & & & \\ \hline
 & & & & L & [ll\,.\,4] & (al\,.\,3) & (bl\,.\,3) & (cl\,.\,3) & [d\,l\,.\,3]_3 & \text{Zähler} & L' \\
 & & & & & & [a\,a]_3 & [bb\,.\,1]_3 & [cc\,.\,2]_3 & [dd\,.\,3]_3 & \text{Nenner} & \\ \cline{7-12}
 & & & & & & -x & -y & -z & -t & \text{Quotient} &
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Folgendes ist der Gang der Rechnung:

1. Die Abteilung A wird mit den gegebenen Coefficienten ausgefüllt.
2. Die ganze Abteilung B wird in üblicher Weise berechnet nach der Regel: $[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b]$ u. s. w.
3. Man füllt die Abteilung B' aus durch Heruntersetzen der mit $_0$ bezeichneten Grössen von A.
4. Man berechnet C und die erste Columne von C' wieder ganz nach der alten Regel, welcher sich auch die drei neuen Grössen nach den früher angegebenen Formeln (3) anschliessen.
5. Man ergänzt die Abteilung C' durch Heruntersetzen der mit $_1$ bezeichneten Klammern von B.
6. Man bildet D nebst den zwei ersten Columnen von D' wieder nach der alten Regel, welche für $[l\,l\,.\,3]$ sowie $(a\,l\,.\,2)$ u. s. w. *gemeinsam* ist [vgl. (4)].
7. Man setzt wieder die $[\ldots]_2$ von C nach D' hinunter.
8. L und die Zähler in L' werden wieder nach der alten Regel [s. o. (5)] gebildet.
9. Die Nenner $[\ldots]_3$ werden von $A\ B\ C\ D$ nach L' hinuntergesetzt.
10. Die Quotientenbildung in L ergiebt die Unbekannten nach den Formeln (6).

Zahlenbeispiel mit 3 Unbekannten.

$$\left.\begin{array}{rrrr} +\underline{17{,}50\,x} - & 6{,}50\,y - & 6{,}50\,z - & 2{,}14 = 0 \\ & +\underline{17{,}50\,y} - & 6{,}50\,z - & 13{,}96 = 0 \\ & & +\underline{20{,}50\,z} + & 5{,}40 = 0 \\ & & & +\underline{100{,}34} \end{array}\right\} \quad (8)$$

a	b	c	l			
+ 17,50	— 6,50	— 6,50	— 2,14			
	+ 17,50	— 6,50	— 13,96			
	— 2,41	— 2,41	— 0,79			
		+ 20,50	+ 5,40			
		— 2,41	— 0,79			
			+ 100,34			
			— 0,26			
	+ 15,09	— 8,91	— 14,75	— 6,50*		
		+ 18,09	+ 4,61	— 6,50*		
		— 5,26	— 8,71	— 3,84		
			+ 100,08	— 2,14*		
			— 14,42	— 6,35		
		+ 12,83	— 4,10	— 10,34	— 8,91*	
			+ 85,66	— 8,49	— 14,75*	
			— 1,31	— 3,30	— 2,85	
			+ 84,35	— 11,79	— 17,60	— 4,10*
			= [v v]	— 17,50*	— 15,09*	— 12,83* neg. Nenner
				+ 0,67	+ 1,17	+ 0,32
				= x	= y	= z

(9)

Die Subtrahenden von der Form $\frac{[a\,b]}{[a\,a]}\,[a\,b]$ u. s. w. sind hier zur Unterscheidung mit *kleineren* Zahlen gedruckt; dieselben sind durchaus mit dem Rechenschieber berechnet.

Alle von links nach rechts hinüber gesetzten Zahlen sind rechts mit * bezeichnet.

Wenn es sich nun weiter darum handelt, auch alle Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. zu bestimmen, so hat man nach (20) § 28. S. 90 an Stelle der Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ $[c\,l]$ die Werte $-1\ 0\ 0$ zu setzen u. s. w., und die Elimination in den hierauf bezüglichen Teilen zu wiederholen, d. h. wir bekommen folgendes:

a	b	c				
+ 17,50	− 6,50	− 6,50	− 1,00			
	+ 17,50	− 6,50	0,00			
	− 2,41	− 2,41	− 0,37			
		+ 20,50	0,00			
		− 2,41	− 0,37			
	+ 15,09	− 8,91	− 0,37	− 6,50*		
		+ 18,09	− 0,37	− 6,50*		
		− 5,26	0,22	3,84		
				− 1,00*		
				− 0,16		
		+ 12,83	− 0,59	− 10,34	− 8,91*	
				− 1,16	− 0,37*	
				− 0,48	− 0,41	
				− 1,64	− 0,78	− 0,59*
				− 17,50*	− 15,09*	− 12,83
				+ 0,094	+ 0,052	+ 0,046
				$= [\alpha\alpha]$	$= [\alpha\beta]$	$= [\alpha\gamma]$ (10)

Anmerkung zur 4ten Spalte: Statt der Absolutglieder − 1,00 , − 1,00 , − 1,00 kann man auch − 10,00 , − 10,00 , − 10,00 schreiben, und dann bekommt man die 10fachen Werte von $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ u. s. w. Eine solche Maassänderung ist oft für die Schärfe der Rechnung nützlich.

b	c			
+ 15,09	− 8,91	− 1,00		
	+ 18,09	0,00		
	5,26	− 0,59		
	+ 12,83	− 0,59	− 8,91*	
			− 1,00*	
			− 0,41	
			− 1,41	− 0,59*
			− 15,09	− 12,83
			+ 0,093	+ 0,046
			$= [\beta\beta]$	$= [\beta\gamma]$ (11)

c		
+ 12,83	− 1,00	− 1,00*
		− 12,83*
		+ 0,078
		$= [\gamma\gamma]$ (12)

Wir haben das Schema konsequent bis zu $[\gamma\gamma]$ fortgesetzt, obgleich die Reciproke von $[\gamma\gamma]$, nämlich 12,83, in der Form $[cc.2]$, schon in der Berechnung von $x\ y\ z$ bei (9) enthalten ist.

Damit haben wir *Alles* erhalten, was aus den Normalgleichungen (8) für irgend welche Ausgleichungszwecke überhaupt abzuleiten ist, nämlich in Zusammenstellung:

$$x = +0{,}67 \qquad y = +1{,}17 \qquad z = +0{,}32 \qquad [vv] = 84{,}34 \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{lll} [\alpha\alpha] = +0{,}094 & [\alpha\beta] = +0{,}052 & [\alpha\gamma] = +0{,}046 \\ & [\beta\beta] = +0{,}093 & [\beta\gamma] = +0{,}046 \\ & & [\gamma\gamma] = +0{,}078 \end{array}\right\} \tag{14}$$

Beispiel mit 6 Unbekannten.

Um das im Vorstehenden beschriebene Verfahren auch noch an einem grösseren Beispiele zu erproben, haben wir 6 Normalgleichungen genommen, welche aus unserer 2. Auflage, 1877, S. 53—64 herstammen (Stationsausgleichung auf Kandel mit 7 Strahlen und 16 Winkeln), nämlich, ausführlich geschrieben:

$$\begin{array}{lcccccccc} & a & b & c & d & e & f & l & \\ a & +\underline{18\,x_1} & +13\,x_2 & +8\,x_3 & +8\,x_4 & +6\,x_5 & +5\,x_6 & -91{,}8 & =0 \\ b & +13\,x_1 & +\underline{29\,x_2} & +12\,x_3 & +11\,x_4 & +7\,x_5 & +5\,x_6 & -95{,}4 & =0 \\ c & +8\,x_1 & +12\,x_2 & +\underline{27\,x_3} & +22\,x_4 & +12\,x_5 & +5\,x_6 & -118{,}9 & =0 \\ d & +8\,x_1 & +11\,x_2 & +22\,x_3 & +\underline{31\,x_4} & +18\,x_5 & +5\,x_6 & -168{,}4 & =0 \\ e & +6\,x_1 & +7\,x_2 & +12\,x_3 & +18\,x_4 & +\underline{22\,x_5} & +5\,x_6 & -139{,}4 & =0 \\ f & +5\,x_1 & +5\,x_2 & +5\,x_3 & +5\,x_4 & +5\,x_5 & +\underline{8\,x_6} & -75{,}5 & =0 \\ & & & & & & & +\underline{1856{,}1} & =[ll] \end{array}$$

Diese 6 Gleichungen finden sich in der Tabelle auf S. 105 nach den 6 Unbekannten $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$ aufgelöst und dazu noch das Quadratsummen-Glied $[ll.6] = 499 = [vv]$ bestimmt.

Die Elimination von S. 105 ist mit dem gewöhnlichen Rechenschieber gemacht (nur ausnahmsweise, wenn bei den Gliedern mit l grössere Zahlen auftraten, ist mit anderen Mitteln ein wenig nachgeholfen). Es ist nicht *eine* Zahl oder Ziffer mehr erforderlich gewesen, als auf S. 105 geschrieben ist, und die Subtraktionen z. B. $29{,}0 - 9{,}4 = 19{,}6$ konnten alle leicht im Kopfe gemacht werden.

Es ist auch jede einzelne Linie durch eine Summenprobe versichert, deren Stimmen in der äussersten Spalte rechts ausgesetzt ist. Allerdings muss das Glied mit s am Schlusse jeder Linie rechts selbst durch eine kleine Nebenrechnung eingesetzt werden, wobei jedesmal das mit * bezeichnete von links oben herunter gesetzte Glied zum vorhergehenden Summengliede negativ zuzunehmen ist, z. B. $-19{,}0$ ist entstanden aus

$$(+18{,}4 - {\scriptstyle 24{,}4}) - 13{,}0^* = -\ 6{,}0 - 13{,}0 = -19{,}0$$

oder

$$(+32{,}9 - {\scriptstyle 15{,}0}) - \ 8{,}0^* = \ 17{,}9 - \ 8{,}0 = +\ 9{,}9$$

und *dann* erst kommt die gewöhnliche Quersummenprobe

$$+6{,}2 + 23{,}4 + 18{,}4 + 9{,}3 + 2{,}8 - 78{,}1 + 8{,}0 + 9{,}9 = -0{,}1.$$

Dieses $-0{,}1$, welches 0,0 sein sollte, ist in der letzten Spalte rechts hinausgesetzt um zu zeigen, wie die Linie gestimmt hat. Diese Probestimmungsglieder wachsen nach unten immer mehr an, schliesslich bis 0,5, was aus dem allmählichen Häufen der unvermeidlichen Abrundungsunsicherheiten zu erklären ist. Übrigens kann man bei der Rechnung selbst immer auch einen Blick auf diese Stimmungsglieder werfen und einen Teil davon dem Gliede s zulegen, was in unserem Falle geschehen ist,

	a	b	c	d	e	f	l	$-s$	Probe
a	+ 18,0	+ 13,0	+ 8,0	+ 8,0	+ 6,0	+ 5,0	− 91,8	+ 33,8	0,0
		+ 29,0 − 9,4	+ 12,0 − 5,8	+ 11,0 − 5,8	+ 7,0 − 4,3	+ 5,0 − 3,6	− 95,4 + 66,3	+ 18,4 − 24,4	0,0
			+ 27,0 − 3,6	+ 22,0 − 3,6	+ 12,0 − 2,7	+ 5,0 − 2,2	− 118,9 + 40,8	+ 32,9 − 15,0	0,0
				+ 31,0 − 3,6	+ 18,0 − 2,7	+ 5,0 − 2,2	− 168,4 + 40,8	+ 73,4 − 15,0	0,0
					+ 22,0 − 2,0	+ 5,0 − 1,7	− 139,4 + 30,6	+ 69,4 − 11,3	0,0
						+ 8,0 − 1,4	− 75,5 + 25,5	+ 42,5 − 9,4	0,0
							+ 1856,1 − 468,2	− 1166,7 + 172,4	0,0
b	+ 19,6	+ 6,2	+ 5,2	+ 2,7	+ 1,4	− 29,1	+ 13,0*	− 19,0	0,0
		+ 23,4 − 2,0	+ 18,4 − 1,6	+ 9,3 − 0,9	+ 2,8 − 0,4	− 78,1 + 9,2	+ 8,0* − 4,1	+ 9,9 + 6,1	− 0,1
			+ 27,4 − 1,4	+ 15,3 − 0,7	+ 2,8 − 0,4	− 127,6 + 7,7	+ 8,0* − 3,4	+ 50,4 + 5,0	− 0,1
				+ 20,0 − 0,4	+ 3,3 − 0,2	− 108,8 + 4,0	+ 6,0* − 1,8	+ 52,1 + 2,6	− 0,1
					+ 6,6 − 0,1	− 50,0 + 2,1	+ 5,0* − 0,9	+ 28,1 + 1,4	0,0
						+ 1387,9 − 43,2	− 91,8* + 19,3	− 902,5 − 28,2	0,0
c	+ 21,4	+ 16,8	+ 8,4	+ 2,4	− 68,9	+ 3,9	+ 6,2*	+ 9,8	− 0,1
		+ 26,0 − 13,2	+ 14,6 − 6,6	+ 2,4 − 1,9	− 119,9 + 54,1	+ 4,6 − 3,1	+ 5,2* − 4,9	+ 50,2 − 7,7	− 0,1
			+ 19,6 − 3,3	+ 3,1 − 0,9	− 104,8 + 27,0	+ 4,2 − 1,5	+ 2,7* − 2,4	+ 52,0 − 3,8	− 0,2
				+ 6,5 − 0,3	− 47,9 + 7,7	+ 4,1 − 0,4	+ 1,4* − 0,7	+ 28,1 − 1,1	+ 0,1
					+ 1344,7 − 221,8	− 72,5 + 12,5	− 29.1* + 20,0	− 901,6 + 31,6	0,0
d	+ 12,8	+ 8,0	+ 0,5	− 65,8	+ 1,5	+ 0,3	+ 16,8*	+ 25,7	− 0,2
		+ 16,3 − 5,0	+ 2,2 − 0,3	− 77.8 + 41,2	+ 2,7 − 0,9	+ 0,3 − 0,2	+ 8,4* − 10,5	+ 39,8 − 16,1	− 0,1
			+ 6.2 − 0,0	− 40,2 + 2,6	+ 3,7 − 0,1	+ 0,7 − 0,0	+ 2,4* − 0,7	+ 24,6 − 1,0	+ 0,1
				+ 1122,9 − 338,3	− 60,0 + 7,7	− 9,1 + 1,5	− 68,9* + 86,4	− 801,1 + 133,0	0,0
e	+ 11,3	+ 1,9	− 36,6	+ 1,8	+ 0,1	− 2,1	+ 8,0*	+ 15,8	+ 0,2
		+ 6,2 − 0,3	− 37,6 + 6,2	+ 3,6 − 0,3	+ 0,7 − 0,0	+ 1,7 + 0,4	+ 0,5* − 1,3	+ 23,2 − 2,6	+ 0,2
			+ 784,6 − 118,5	− 52,3 + 5,8	− 7,6 + 0,3	+ 17,5 − 6,8	− 65,8* + 25,9	− 602,3 + 50,5	− 0,1
	+ 5,9	− 31,4	+ 3,3	+ 0,7	+ 2,1	− 0,8	+ 1,9*	+ 18,7	+ 0,4
		+ 666,1 − 167,1	− 46,5 + 17,5	− 7,3 + 3,7	+ 10,7 + 11,2	− 39,9 − 4,2	− 36,6* + 10,1	− 515,2 + 97,0	− 0,1
l	+ 499,0 = [$ll.6$]	− 29,0 + 18,0	− 3,6 + 19,6*	+ 21,9 + 21,4*	− 44,1 + 12,8*	− 26,5 + 11,3*	− 31,4* + 5,9*	− 386,8	− 0,5
		+ 1,6 $= x_1$	+ 0,2 $= x_2$	− 1,0 $= x_3$	+ 3,4 $= x_4$	+ 2,3 $= x_5$	+ 5,3 $= x_6$		

und beim etwaigen Nachrechnen zu beachten ist, indem dadurch die Gesamt-Stimmung noch etwas verbessert worden ist. Offenbar muss, wer ein solches Schema wie S. 105 anwenden will, dasselbe langsam mit dem Rechenschieber in der Hand verfolgen und erst, wenn er den ganzen Gang mechanisch eingeübt hat, ein neues eigenes Beispiel vornehmen.

§ 34. Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung der Normalgleichungen.

Zu den Nebenbetrachtungen, welche sich an die Haupttheorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen noch anschliessen lassen, gehört auch die Frage, ob die Normalgleichungen überhaupt immer eine Auflösung geben werden?

In praktischen Fällen wird man schon aus der Natur der Aufgabe selbst wissen, ob eine Auflösung im gewöhnlichen Sinn möglich ist oder nicht, z. B. wenn ein Punkt in der Ebene bestimmt wird durch den Schnitt mehrerer Geraden, welche in einem einzelnen Falle zufällig alle nahezu parallel werden, so sagt schon der Anblick der Figur, dass keine gute bzw. überhaupt keine Lösung von einer Ausgleichung zu erwarten sein wird.

In diesem und ähnlichem Sinne ist die nachfolgende Untersuchung zu verstehen.

Wir betrachten zuerst den besonderen Fall, dass die Anzahl der Fehlergleichungen *gleich* der Anzahl der Unbekannten ist, und nehmen nur 2 Elemente an:

Fehlergleichungen: *Normalgleichungen:*

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + l_1 \qquad & [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,l] = 0 \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + l_2 \qquad & [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,l] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Reduzierte Normalgleichung:} \qquad [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,l\,.\,1] = 0 \qquad (2)$$

$$\text{Fehlerquadratsumme:} \qquad [v\,v] = [l\,l\,.\,2] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l\,.\,1]^2}{[b\,b\,.\,1]} \qquad (3)$$

In diesem einfachen Falle ist aber:

$$[a\,a] = a_1^2 + a_2^2 \qquad [a\,b] = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 \qquad [a\,l] = a_1\,l_1 + a_2\,l_2$$
$$[b\,b] = b_1^2 + b_2^2 \qquad [b\,l] = b_1\,l_1 + b_2\,l_2$$
$$[l\,\,l] = l_1^2 + l_2^2$$

Setzt man dieses in (2) ein, so erhält man nach kurzer Um-Ordnung:

$$[b\,b\,.\,1] = \frac{(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} \qquad [b\,l\,.\,1] = \frac{(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,(a_1\,l_2 - a_2\,l_1)}{a_1^2 + a_2^2} \qquad (4)$$

folglich wird
$$y = -\frac{[b\,l\,.\,1]}{[b\,b\,.\,1]} = -\frac{(a_1\,l_2 - a_2\,l_1)}{(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)} \qquad (5)$$

Das ist *derselbe* Wert y, den man auch unmittelbar aus den Fehlergleichungen mit $v_1 = 0$ und $v_2 = 0$ erhalten würde. Die Normalgleichungen bilden also hier einen Umweg, den man aber unter Umständen deswegen betritt, weil dabei das Gewicht von y , $p_y = [b\,b\,.\,1]$ erhalten wird, welches die Fehlergleichungen an und für sich nicht geben würden.

Gehen wir nun weiter zu der Fehlerquadratsumme $[v\,v]$ nach (3), so zeigt sich bald, dass diese gleich Null wird, denn die Ausrechnung giebt:

$$[v\,v] = [l\,l\,.\,2] = l_1^2 + l_2^2 - \frac{(a_1\,l_1 + a_2\,l_2)^2}{a_1^2 + a_2^2} - \frac{(a_1\,l_2 - a_2\,l_1)^2}{a_1^2 + a_2^2} = 0 \qquad (6)$$

Wollte man ferner einen mittleren Gewichtseinheitsfehler berechnen, so würde man erhalten:
$$m^2 = \frac{[l\,l\,.\,2]}{2-2} = \frac{0}{0} \tag{7}$$

Denken wir uns, zur Veranschaulichung, unter den 2 Fehlergleichungen etwa 2 lineare Bestimmungen eines Punktes mit den Coordinaten x und y, so erhalten die Resultate (4) bis (7) folgende Deutungen:

Bei 2 Strahlen ist eine Ausgleichung zur Punktbestimmung nicht nötig, wenn man aber trotzdem die Ausgleichungsformeln anwendet, so geben sie denselben Schnittpunkt $x\ y$, den man auch ohne Ausgleichung erhalten hätte, mit bestimmten Gewichten $p_y = [b\,b\,.\,1]$ und $p_x = [a\,a\,.\,1]$, aber ohne einen bestimmten mittleren Gewichtseinheitsfehler m.

Hat man aber die Kenntnis eines solchen Wertes m von irgend anderwärts, so kann man auch mittlere Coordinatenfehler berechnen:
$$m_y = \frac{m}{\sqrt{[b\,b\,.\,1]}} \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{[a\,a\,.\,1]}}$$

Unmöglich wird die Bestimmung von y und x dann, wenn die Coefficienten $a_1\,b_1$ $a_2\,b_2$ in (1) gleiches Verhältnis haben:
$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}, \quad \text{also} \quad a_1\,b_2 - a_2\,b_1 = 0 \tag{8}$$
d. h. wenn die betreffenden Strahlen parallel werden.

Dagegen wird die Bestimmung von x und y wieder möglich, wenn zu zweien Fehlergleichungen mit konstantem Verhältnis $b:a$ eine dritte mit anderem Verhältnis $b_3 : a_3$ hinzutritt, oder allgemein, wenn bei beliebig vielen Fehlergleichungen, mit 2 Unbekannten, wenigstens 2 Fehlergleichungen sind, deren Coefficientenverhältnisse $b:a$ *nicht* gleich sind. Denn wenn *alle* Verhältnisse $b:a$ einander gleich wären, so würde auch $\frac{[a\,b]}{[a\,a]} = \frac{b}{a}$, also:
$$[b\,b\,.\,1] = [b\,b] - \frac{[a\,b]}{[a\,a]}[a\,b] = [b\,b] - \frac{b}{a}[a\,b] = [b\,b] - [b\,b] = 0.$$

Bei nur 2 Unbekannten x und y lassen sich alle diese Verhältnisse leicht überblicken; für irgend welche Zahl von Unbekannten hat schon *Gauss* in der „Theoria combinationis“ art. 23. Betrachtungen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Auflösung angestellt.

In neuerer Zeit ist diese Frage durch die Determinantentheorie theoretisch noch klarer gemacht worden in folgender Weise:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Normalgleichungen eine und nur eine Auflösung zulassen, besteht darin, dass die aus den Coefficienten der in diesen Gleichungen vorkommenden Unbekannten zusammengesetzte Determinante von Null verschieden sei.

Diese Determinante entsteht aus dem System der Coefficienten der Unbekannten in den Fehlergleichungen durch Komposition mit sich selbst. Sie ist daher gleich (nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten) der Summe der Quadrate derjenigen Determinanten, welche man erhält, indem man aus dem System der Fehlergleichungen auf alle möglichen verschiedenen Weisen jedesmal so viel Gleichungen herausgreift, als Unbekannte zu bestimmen sind, und die Coefficienten der Unbekannten in den herausgegriffenen Gleichungen zu einer Determinante zusammenstellt. Ist von diesen letzteren Determinanten auch nur eine von Null verschieden, so ist die Determinante der Coefficienten der Unbekannten in den Normalgleichungen ebenfalls von Null verschieden.

Das System der Normalgleichungen hat daher jedesmal dann eine und nur eine Lösung, wenn sich aus den Fehlergleichungen auch nur eine einzige Gruppe von Gleichnngen absondern lässt, welche eben so viele Gleichungen enthält, als Unbekannte vorhanden sind, und die Eigenschaft hat, eine und nur eine Lösung zu besitzen.

§ 35. Determinantenformeln für 3 Elemente.

(Ohne Zusammenhang mit unserem allgemeinen Entwicklungsgang.)

Man kann bei 3 Elementen $x\,y\,z$ immer noch die Auflösungsformeln für $x\,y\,z$ und die Gewichts-Coefficienten $[\alpha\,\alpha]$ $[\alpha\,\beta]$ u. s. w. in einigermassen geschlossener Form angeben, ähnlich wie bei 2 Unbekannten, namentlich wenn man *Determinanten* anwendet, welche selbst ja auch bei 3 Elementen noch übersichtliche Ausrechnung gestatten.

Praktische Bedeutung haben die nachfolgenden Formeln kaum, denn die numerische Auswertung der Unbekannten und ihrer Gewichte geschieht immer am besten auf dem Wege der allmählichen Elimination.

Wenn folgende Fehlergleichungen vorliegen:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + l_1 \\ v_2 = a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + l_2 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ v_n = a_n\,x + b_n\,y + c_n\,z + l_n \end{array}\right\} \tag{1}$$

so sind die zugehörigen Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} [a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c]\,z + [a\,l] = 0 \\ [a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c]\,z + [b\,l] = 0 \\ [a\,c]\,x + [b\,c]\,y + [c\,c]\,z + [c\,l] = 0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Durch allmähliche Elimination findet man hieraus:

$$\left.\begin{array}{r} [b\,b\,.\,1]\,y + [b\,c\,.\,1]\,z + [b\,l\,.\,1] = 0 \\ [b\,c\,.\,1]\,y + [c\,c\,.\,1]\,z + [c\,l\,.\,1] = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

$$[c\,c\,.\,2]\,z + [c\,l\,.\,2] = 0 \tag{4}$$

Andererseits kann man die Determinantentheorie anwenden:

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l} +\,[a\,a]\,[b\,b]\,[c\,c] - [a\,c]\,[b\,b]\,[a\,c] \\ +\,[a\,b]\,[b\,c]\,[a\,c] - [a\,a]\,[b\,c]\,[b\,c] \\ +\,[a\,c]\,[a\,b]\,[b\,c] - [a\,b]\,[a\,b]\,[c\,c] \end{array}\right. \tag{5}$$

Analog sei:

$$D_x = \begin{vmatrix} [a\,l] & [a\,b] & [a\,c] \\ [b\,l] & [b\,b] & [b\,c] \\ [c\,l] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,b] & [b\,l] & [b\,c] \\ [a\,c] & [c\,l] & [c\,c] \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,c] & [b\,c] & [c\,l] \end{vmatrix} \tag{6}$$

Dann werden x y und z so bestimmt:

$$x = -\frac{D_x}{D} \qquad y = -\frac{D_y}{D} \qquad z = -\frac{D_z}{D} \tag{7}$$

Zwischen (4) und (5) und (6) bestehen einfache Beziehungen, es ist nämlich:

$$[c\,c\,.\,2] = \frac{D}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \qquad [c\,l\,.\,2] = \frac{D_z}{[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]} \tag{8}$$

wo der Nenner $[a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]\,[a\,b]$ die schon früher in § 17. benützte Coefficienten-Determinante zweiter Ordnung ist.

$[c\,c\,.\,2]$ ist zugleich die Reciproke des Gewichts-Coefficienten $[\gamma\,\gamma]$. Alle Gewichts-Coefficienten lassen sich ähnlich darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
[\alpha\alpha] &= \frac{[bb]\,[cc] - [bc]\,[bc]}{D} \quad [\alpha\beta] = -\frac{[ab]\,[cc] - [ac]\,[bc]}{D} \quad [\alpha\gamma] = -\frac{[ac]\,[bb] - [ab]\,[bc]}{D} \\
[\beta\beta] &= \frac{[aa]\,[cc] - [ac]\,[ac]}{D} \quad [\beta\gamma] = -\frac{[bc]\,[aa] - [ab]\,[ac]}{D} \\
[\gamma\gamma] &= \frac{[aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]}{D}
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Auch die Quadratsumme der übrigbleibenden Fehler, $[l\,l\,.\,2]$, kann man dreifach durch Determinanten darstellen:

$$[l\,l\,.\,2] = \frac{\begin{vmatrix} [l\,l] & [l\,b] & [l\,c] \\ [l\,b] & [b\,b] & [b\,c] \\ [l\,c] & [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [b\,b] & [b\,c] \\ [b\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,l] & [a\,c] \\ [a\,l] & [l\,l] & [l\,c] \\ [a\,c] & [l\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,c] \\ [a\,c] & [c\,c] \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,l] \\ [a\,b] & [b\,b] & [b\,l] \\ [a\,l] & [b\,l] & [l\,l] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] \\ [a\,b] & [b\,b] \end{vmatrix}} \tag{10}$$

Die Richtigkeit aller vorstehenden Formeln kann man sofort einsehen, wenn man die Determinanten zweiten und dritten Grades in bekannter Weise entwickelt. Über die Gültigkeit analoger Formeln für mehr als 3 Elemente verweisen wir auf *Vogler*, Lehrbuch der praktischen Geometrie, 1. Teil S. 253 u. ff., und entnehmen von dort auch noch, dass die Coefficienten-Determinante D ausser der ursprünglichen Form (5) noch folgende andere leicht zu begründende Formen hat:

$$D = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & [b\,c\,.\,1] \\ 0 & [b\,c\,.\,1] & [c\,c\,.\,1] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & [a\,c] \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & [b\,c\,.\,1] \\ 0 & 0 & [c\,c\,.\,2] \end{vmatrix} = [a\,a]\,.\,[b\,b\,.\,1]\,.\,[c\,c\,.\,2]$$

Auch für die Gewichts-Coefficienten bestehen noch manche andere Formen:

$$[\gamma\,\gamma] = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & 0 \\ [a\,b] & [b\,b] & 0 \\ [a\,c] & [b\,c] & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} [a\,a] & [a\,b] & 0 \\ 0 & [b\,b\,.\,1] & 0 \\ 0 & [b\,c\,.\,1] & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{[a\,a] \begin{vmatrix} [b\,b\,.\,1] & 0 \\ [b\,c\,.\,1] & 1 \end{vmatrix}}{D}$$

Die erste dieser 3 Formen giebt aufgelöst daselbe wie (9).

Man kann solche Formeln vielleicht gelegentlich als Rechenproben benützen.

Die Determinanten sind symbolische Bezeichnungen, ähnlich wie unsere $[bb\,.\,1]$ $[c\,c\,.\,2]$ u. s. w., und so lange diese besonders der Methode der kleinsten Quadrate angepasste Symbolik ausreicht, ist kein Grund vorhanden, eine andere, für numerische Berechnung weniger geeignete Symbolik anzuwenden.

Die Benützung allgemeiner Determinantensätze zu Betrachtungen von solcher Art wie am Schluss von § 34. ist dagegen sehr nützlich.

§ 36. Interpolationsausgleichung einer periodischen Erscheinung.

Nachdem wir nun die allgemeine Theorie der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen erledigt haben, mag es am Platze sein, zum Abschluss dieser Theorie ein Anwendungs-Beispiel vorzunehmen und hier einzuschalten, welches nicht wie fast alle unsere späteren sonstigen Anwendungen geodätischer Natur ist.

Wir betrachten eine Ausgleichung von Beobachtungen, welche ihrer Natur nach einen *periodischen* Verlauf haben, wie z. B. meteorologische Beobachtungen, Pegelbeobachtungen am Meeresufer u. s. w.

Als periodische Funktion nehmen wir die folgende:

$$F = (F) + r_1 \sin(\alpha_1 + \varphi) + r_2 \sin(\alpha_2 + 2\varphi) + r_3 \sin(\alpha_3 + 3\varphi) + \ldots \tag{1}$$

wobei φ unabhängige Veränderliche, etwa der Zeit entsprechend, ist. Die Konstanten $r_0\ r_1\ r_2\ r_3 \ldots \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ sollen so bestimmt werden, dass die Funktionswerte sich gegebenen Beobachtungen möglichst gut anschliessen, d. h. dass die Quadratsumme der Abweichungen der Funktionswerte F von den Beobachtungen ein Minimum werde.

Zum Zweck der Ausgleichung muss man die Funktion (1) in Bezug auf die zu ermittelnden Unbekannten linear machen, und zwar geschieht dieses einfach durch Auflösung:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 + \varphi) &= \sin\alpha_1 \cos\varphi + \cos\alpha_1 \sin\varphi \\ \sin(\alpha_2 + 2\varphi) &= \sin\alpha_2 \cos 2\varphi + \cos\alpha_2 \sin 2\varphi \end{aligned}$$

Wir setzen:

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 \sin\alpha_1 = y_1 & r_1 \cos\alpha_1 = x_1 \\ r_2 \sin\alpha_2 = y_2 & r_2 \cos\alpha_2 = x_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{2}$$

und damit nimmt die Funktion (1) folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} F = (F) &+ y_1 \cos\varphi + y_2 \cos 2\varphi + y_3 \cos 3\varphi + \ldots \\ &+ x_1 \sin\varphi + x_2 \sin 2\varphi + x_3 \sin 3\varphi + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Man führt also statt der Unbekannten r und α die neuen Unbekannten y und x ein, und wenn diese ermittelt sind, kann man jederzeit wieder zu r und α zurückkehren, indem man die Gleichungen (2) nach den Unbekannten r und α auflöst.

Wir setzen folgende Beobachtungen voraus:

$$\left.\begin{array}{llllll} \text{Amplitude } \varphi = & 0 & i & 2i & 3i \ldots & (n-1)\,i \\ \text{Beobachtung} & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \ldots & F_{n-1} \end{array}\right\} \tag{4}$$

Dabei ist i das Intervall der Amplitude φ, und zwar sollen die Beobachtungen sich gleichförmig auf *eine* Periode verteilen, d. h.

$$n\,i = 360^\circ. \tag{5}$$

Man bildet nun aus (3) die den n Beobachtungen F entsprechenden n Fehlergleichungrn, deren allgemeine Form diese ist:

$$v = (F) + y_1 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi + y_2 \cos 2\varphi + x_2 \sin 2\varphi + \ldots - F \tag{6}$$

Die n Fehlergleichungen gehen hieraus hervor, wenn man für φ der Reihe nach die Werte $0\ ,\ i\ ,\ 2i \ldots$ und für F entsprechend die Werte $F_0\ F_1\ F_2 \ldots$ einsetzt. Wir bilden die Tabelle der Coefficienten der Fehlergleichungen, und um die Bezeichnungen festzusetzen, schreiben wir zu (6) noch die entsprechende Gleichung:

$$v = a\,(F) + b\,y_1 + c\,x_1 + d\,y_3 + e\,x_2 + \ldots + l \tag{7}$$

Die Tabelle der Coefficienten $a\ b\ c \ldots$ und der Absolutglieder l ist:

a	b	c	d	e	$\ldots$	l
$+1$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\cos 0$	$\sin 0$	$\ldots$	$-F_0$
$+1$	$\cos i$	$\sin i$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$(3i)$	$-F_1$
$+1$	$\cos 2i$	$\sin 2i$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$(6i)$	$-F_2$
$+1$	$\cos 3i$	$\sin 3i$	$\cos 6i$	$\sin 6i$	$(9i)$	$-F_3$
$+1$	$\cos 4i$	$\sin 4i$	$\cos 8i$	$\sin 8i$	$\ldots$	$-F_4$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

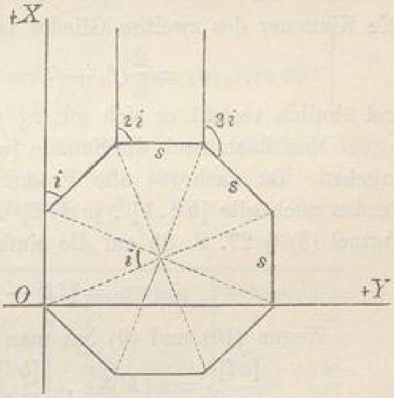
(8)

Wenn man nun die Summen-Coefficienten $[a\,a]\ [a\,b] \ldots$ bildet, so bemerkt man bald, dass dieselben wegen der symmetrischen Anordnung der Beobachtungen höchst einfach werden. Die Coefficienten sind nämlich:

$$\left.\begin{array}{lllll}
[a\,a] = n & [a\,b] = 0 & [a\,c] = 0 & [a\,d] = 0 & [a\,e] = 0 \\
 & [b\,b] = \frac{n}{2} & [b\,c] = 0 & [b\,d] = 0 & [b\,e] = 0 \\
 & & [c\,c] = \frac{n}{2} & [c\,d] = 0 & [c\,e] = 0 \\
 & & & [d\,d] = \frac{n}{2} & [d\,e] = 0 \\
 & & & & [e\,e] = \frac{n}{2}
\end{array}\right\} \quad (9)$$

Die Begründung dieser Formeln kann durch eine geometrische Betrachtung nach nebenstehender Fig. geschehen: Die Gleichung (5), $n\,i = 360°$, entspricht der Konstruktion eines regelmässigen Vielecks von n Seiten, dessen Projektionen auf 2 Achsen sind:

Geometrische Darstellung der Gleichungen $[a\,b] = 0$ und $[a\,c] = 0$



Projektion auf x:

$$s + s\cos i + s\cos 2i + s\cos 3i + \ldots$$

Projektion auf y:

$$0 + s\sin i + s\sin 2i + s\sin 3i + \ldots$$

Die Projektionen eines geschlossenen Vielecks auf 2 Achsen sind aber algebraisch = Null, es sind daher durch diese Projektionen die beiden Gleichungen der Gruppe (9) bewiesen:

$$[a\,b] = 0 \text{ und } [a\,c] = 0.$$

Ganz ebenso verhält es sich mit den übrigen Produktsummen $[a\,d] = 0$, $[a\,e = 0$ u. s. w., denn hier handelt es sich nur um *mehrfaches* Durchlaufen von Polygonen mit Centriwinkeln $2i$, $3i$ u. s. w., und ähnlich verhält es sich auch mit $[b\,c]$, $[b\,d]$ u. s. w.; man überzeugt sich, dass jedem Glied $\sin(\ldots)\cos(\ldots)$ immer ein Glied gegenübersteht von der Form $\sin(\ldots \pm 180°)\cos(\ldots)$. Bei den Quadratsummen $[a\,a]$, $[b\,b]$ u. s. w. findet man immer Gruppierung $\sin^2(\ldots) + \cos^2(\ldots)$.

Indem wir hiernach die Coefficienten (9) als erledigt betrachten, gehen wir zur Auflösung der Normalgleichungen über, welche sind:

$$\left.\begin{array}{llr} [a\,a]\,y_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & & +[a\,l]=0 \\ & [b\,b]\,y_1 \ldots\ldots & +[b\,l]=0 \\ & \quad [c\,c]\,x_1 & +[c\,l]=0 \end{array}\right\} \tag{9a}$$

Jede Normalgleichung enthält also nur *eine* Unbekannte, und Elimination ist gar nicht nötig. Indem wir nun auch die Absolutglieder $[a\,l]$ $[b\,l]$ . . . nach (8) bilden, erhalten wir folgende Auflösung der Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll} n\,(F) = -\,[a\,l] = [F] & \\ \frac{n}{2}y_1 = -\,[b\,l] = (F_0 + F_1 \cos i + F_2 \cos 2\,i + F_3 \cos 3\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2}x_1 = -\,[c\,l] = (\ldots \quad F_1 \sin i + F_2 \sin 2\,i + F_3 \sin 3\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2}y_2 = -\,[d\,l] = (F_0 + F_1 \cos 2\,i + F_2 \cos 4\,i + F_3 \cos 6\,i + \ldots) \\ \frac{n}{2}x_2 = -\,[e\,l] = (\ldots \quad F_1 \sin 2\,i + F_2 \sin 4\,i + F_3 \sin 6\,i + \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Die erste Gleichung $n\,(F) = [F]$ sagt aus, dass (F) das arithmetische Mittel aller Beobachtungen F ist, und es scheint nun passend, alle Beobachtungen von diesem Mittel an zu zählen, und zu setzen:

$$F_0 = (F) + f_0 \quad , \quad F_1 = (F) + f_1 \quad , \quad F_2 = (F) + f_2 \text{ u. s. w.} \tag{11}$$

hiebei ist:

$$[f] = 0 \tag{12}$$

Man darf nun auch in (10) überall f statt F schreiben, denn es wird z. B. durch Substitution von (11) in y_1:

$$y_1 = \frac{2}{n}(f_0 + f_1 \cos i + f_2 \cos 2\,i + \ldots) + \frac{2}{n}(F)\,(1 + \cos i + \cos 2\,i + \ldots)$$

Die Klammer des zweiten Gliedes ist aber $= [a\,b] = 0$, folglich:

$$y_1 = \frac{2}{n}(f_0 + f_1 \cos i + f_2 \cos 2\,i + f_3 \cos 3\,i + \ldots) \tag{13}$$

und ähnlich verhält es sich mit x_1 y_2 x_2 . . .

Man kann noch die Summe $[v\,v]$ und den mittleren Fehler m einer Beobachtung angeben. Da nach (9) alle Produktsummen $[a\,b]$, $[a\,c]$ . . . gleich Null sind, so werden auch alle $[b\,c\,.\,1]$, $[c\,d\,.\,2]$ u. s. w. gleich Null, und damit reduziert sich die Formel (8) § 27. S. 85 auf die einfache Gestalt:

$$[v\,v] = [l\,l] - \frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} - \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} - \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} \ldots$$

Wegen (10) und (9) hat man hier:

$$\frac{[a\,l]^2}{[a\,a]} = n\,(F)^2 \quad , \quad \frac{[b\,l]^2}{[b\,b]} = \frac{n}{2}y_1^2 \quad , \quad \frac{[c\,l]^2}{[c\,c]} = \frac{n}{2}x_1^2 \text{ u. s. w.}$$

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}(y_1^2 + x_1^2) - \frac{n}{2}(y_2^2 + x_2^2) - \ldots \tag{14}$$

Wegen (2) ist $\quad y_1^2 + x_1^2 = r_1^2 \qquad y_2^2 + x_2^2 = r_2^2 \ldots$

also

$$[v\,v] = [l\,l] - n\,(F)^2 - \frac{n}{2}[r\,r] \tag{15}$$

Das Anfangsglied $[l\,l]$ ist nach (8) zunächst:

$$[l\,l] = [F\,F]$$

Aus (11) folgt: $[F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2 + 2\,(F)\,[f]$ (16)
oder weil nach (12) $[f] = 0$ ist:

$$[l\,l] = [F\,F] = [f\,f] + n\,(F)^2$$

Dieses in (15) gesetzt giebt: $[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}[r\,r]$ (17)

Der mittlere Fehler einer Beobachtung wird:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n-u}} \tag{18}$$

wobei u die Anzahl der Konstanten in der Interpolationsformel ist, z. B. in (1) ist $u = 7$; wenn man dagegen schon bei den Gliedern mit $2\,\varphi$ abbricht, wie in (14), so ist $u = 5$.

Wir stellen noch besondere Formeln auf für den häufig vorkommenden Fall $n = 12$, also nach (5), $i = 30°$. In diesem Falle wird nach (13):

$$6\,y_1 = f_0 + f_1 \cos 30° + f_2 \cos 60° + f_3 \cos 90° + f_4 \cos 120° + f_5 \cos 150°$$
$$+ f_6 \cos 180° + f_7 \cos 210° + f_8 \cos 240° + f_9 \cos 270° + f_{10} \cos 300° + f_{11} \cos 330°$$

Da aber alle hier vorkommenden goniometrischen Funktionen sich auf $\sin 30°$ $= 0{,}5$ und $\cos 30° = 0{,}8660$ reduzieren lassen, so erhält man:

$$6\,y_1 = (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 - f_{10}) \sin 30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11}) \cos 30°$$

Alle derartigen Formeln für $n = 12$, entsprechend einer Funktion (1), welche bis $4\,\varphi$ fortgesetzt wird, erhält man aus (10), mit Rücksicht auf die Ersetzung der F durch f, wie bei (13). Die Resultate sind:

$$\left.\begin{aligned}
6\,y_1 &= (f_0 - f_6) + (f_2 - f_4 - f_8 + f_{10}) \sin 30° + (f_1 - f_5 - f_7 + f_{11}) \cos 30° \\
6\,x_1 &= (f_3 - f_9) + (f_1 + f_5 - f_7 - f_{11}) \sin 30° + (f_2 + f_4 - f_8 - f_{10}) \cos 30° \\
6\,y_2 &= (f_0 - f_3 + f_6 - f_9) + (f_1 - f_2 - f_4 + f_5 + f_7 - f_8 - f_{10} + f_{11}) \sin 30° \\
6\,x_2 &= (f_1 + f_2 - f_4 - f_5 + f_7 + f_8 - f_{10} - f_{11}) \cos 30° \\
6\,y_3 &= (f_0 - f_2 + f_4 - f_6 + f_8 - f_{10}) \\
6\,x_3 &= (f_1 - f_3 + f_5 - f_7 + f_9 - f_{11}) \\
6\,y_4 &= (f_0 + f_3 + f_6 + f_9) - (f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + f_7 + f_8 + f_{10} + f_{11}) \sin 30° \\
6\,x_4 &= (f_1 - f_2 + f_4 - f_5 + f_7 - f_8 + f_{10} - f_{11}) \cos 30°
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Zu einem Zahlenbeispiel für die Formeln (19) nehmen wir die 6jährigen Barometermittel von 1868—1873 in Kairo (Jordan, Phys. Geogr. und Meteorol. der lib. Wüste S. 144). Diese Mittel für die einzelnen Monate gehen in unsere Rechnung als Beobachtungen F ein, wie folgende Tabelle zeigt:

φ	Monat		Beobachtet			Ausgeglichen		Widersprüche	
			F	$f = F - 758{,}26$	f^2	f'	F'	v	v^2
			mm	mm		mm	mm	mm	
0°	Januar	0.	761,70	+ 3,44	11,83	+ 3,95	762,21	+ 0,51	0,26
30°	Februar	1.	761,74	+ 3,48	12,11	+ 2,80	761,06	— 0,68	0,46
60°	März	2.	757,62	— 0,64	0,41	+ 0,09	758,35	+ 0,73	0,53
90°	April	3.	758,14	— 0,12	0,01	— 0,72	757,54	— 0,60	0,36
120°	Mai	4.	757,15	— 1,11	1,23	— 0,77	757,49	+ 0,34	0,12
150°	Juni	5.	755,75	— 2,51	6,30	— 2,52	755,74	— 0,01	0,00
180°	Juli	6.	754,51	— 3,75	14,06	— 4,00	754,26	— 0,25	0,06
210°	August	7.	754,40	— 3,86	14,90	— 3,46	754,80	+ 0,40	0,16
240°	September	8.	757,10	— 1,16	1,35	— 1,52	756,74	— 0,36	0,13
270°	Oktober	9.	758,90	+ 0,64	0,41	+ 0,84	759,10	+ 0,20	0,04
300°	November	10.	760,51	+ 2,25	5,06	+ 2,27	760,53	+ 0,02	0,00
330°	Dezember	11.	761,61	+ 3,35	11,22	+ 3,08	761,34	— 0,27	0,07
	Mittel (F) =		758,26	+ 13,16	78,89	+ 13,03	758,26	+ 2,20	2,19
				— 13,15		— 12,99		— 2,17	

Nach (19) wird berechnet:

$$6\,y_1 = +\,20{,}561 \qquad 6\,y_2 = -\,0{,}270 \qquad 6\,y_3 = +\,3{,}31 \qquad 6\,y_4 = +\,0{,}11$$
$$6\,x_1 = -\;\;2{,}479 \qquad 6\,x_2 = -\,3{,}603 \qquad 6\,x_3 = +\,2{,}24 \qquad 6\,x_4 = +\,1{,}49$$

Nach (2) hat man $tang\,\alpha_1 = \dfrac{+\,20{,}561}{-\;\,2{,}479}$ $\qquad \alpha_1 = 96°\,53'$

$$r_1 = \frac{1}{6}\,\frac{20{,}561}{sin\,\alpha_1} = \frac{1}{6}\,\frac{-\,2{,}479}{cos\,\alpha_1} \qquad r_1 = 3{,}452$$

und in gleicher Weise findet man auch die übrigen α und r, so dass man hat:

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = & 96°\;53' & r_1 = & 3{,}452 \\ \alpha_2 = & 184°\;17' & r_2 = & 0{,}602 \\ \alpha_3 = & 55°\;55' & r_3 = & 0{,}666 \\ \alpha_4 = & 4°\;13' & r_4 = & 0{,}249 \end{array}$$

Die Interpolationsformel heisst jetzt:

$$\left.\begin{array}{l} f' = 3{,}452\,sin\,(96°\,53' + \varphi) + 0{,}602\,sin\,(184°\,17' + 2\,\varphi) \\ \quad + 0{,}666\,sin\,(55°\,55' + 3\,\varphi) + 0{,}249\,sin\,(4°\,13' + 4\,\varphi) \end{array}\right\} \tag{20}$$

oder die ganze Formel nach (1):

$$F' = 758{,}26 + f'$$

Hiernach sind die ausgeglichenen Werte f' und F' der Tabelle unten auf S. 113 berechnet.

Durch Vergleichung der beobachteten und der ausgeglichenen Funktionswerte F oder f erhält man die Widersprüche v, deren Quadratsumme sich in der vorstehenden Tabelle (S. 113) durch unmittelbare Rechnung $[v\,v] = 2{,}19$ ergiebt. Zur durchgreifenden Kontrolierung der ganzen Ausgleichungsrechnung bestimmt man diese Summe auch noch nach (17):

$$\left.\begin{array}{ll} r_1 = 3{,}452 & r_1^2 = 11{,}916 \\ r_2 = 0{,}602 & r_2^2 = \;\;0{,}362 \\ r_3 = 0{,}666 & r_3^2 = \;\;0{,}444 \\ r_4 = 0{,}249 & r_4^2 = \;\;0{,}062 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} [r\,r] = 12{,}784 \\ 6\,[r\,r] = 76{,}704 \end{array}$$

$$[v\,v] = [f\,f] - \frac{n}{2}\,[r\,r] = 78{,}89 - 76{,}70 = 2{,}19$$

was mit der unmittelbaren Ausrechnung von $[v\,v] = 2{,}19$ vollständig stimmt. Endlich hat man noch den mittleren Fehler einer Beobachtung nach (18):

$$m = \sqrt{\frac{2{,}19}{12-9}} = \pm\,0{,}85^{mm} \tag{21}$$

Wenn man nur bis zu den Gliedern mit $3\,\varphi$ gehen will, so hat man lediglich in (20) das letzte Glied wegzulassen, und umgekehrt, wenn man mit der Übereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung nicht zufrieden ist, und deswegen ein weiteres Glied in die Formel aufnehmen will, so fügt man, mit Beibehaltung aller erstmals erhaltenen Resultate, weitere Glieder bei.

Wie viele Glieder man der Interpolationsformel (1) geben soll, ist natürlich nicht allgemein festzusetzen, man kann nur verlangen, dass der mittlere Fehler (18) nach der Ausgleichung, den Abweichungen, welche die Beobachtungen vor der Ausgleichung unter sich zeigten, möglichst entspreche.

Die hier behandelte Interpolationsrechnung ist zuerst von Bessel in den astr. Nachrichten 6. Band 1828 S. 333—356 behandelt worden: „Über die Bestimmung des Gesetzes einer periodischen Erscheinung". Unsere vorstehende Darstellung giebt das Bessel sche Verfahren, nur in etwas mehr anschaulicher Darstellung.

Die Coefficienten $\sin i \; \sin 2\,i \; \sin 3\,i \ldots \cos i \; \cos 2\,i \; \cos 3\,i \ldots$, welche wir in (19) für $n = 12$ also $i = 30°$ ausgerechnet haben, kann man auch für andere Fälle ein für allemal berechnen, z. B. $n = 73$, $i = 4° \, 55' \, 53''$ (5tägige Mittel, $n = 365 : 5$) sind die Logarithmen solcher Coefficienten mitgeteilt in: „Des anomalies de la température observées à Genève par Plantamour, Genf und Basel 1867" S. 20 und 21, wobei jedoch die Amplitude φ anders gezählt ist, so dass die Formeln und die zugehörigen Coefficienten nicht unmittelbar mit den unsrigen übereinstimmen.

Hiezu ist auch zu berichten: Ein graphisches Verfahren zur Herleitung der Coefficienten der Bessel schen Reihe, von Prof. Dr. *Paul Schreiber* in der Meteorologischen Zeitschrift, Juni 1891, S. 237.

Bedingte Beobachtungen.

Nachdem wir in § 12.—36. die vermittelnden Beobachtungen als unmittelbare Folge des allgemeinen Ausgleichungsprinzips von § 12. vollständig durchgenommen haben, gehen wir über zu einer zweiten Form der Ausgleichungsaufgaben, den *bedingten Beobachtungen*, und zwar wollen wir im nächsten § 37. zuerst zeigen, wie sich die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf die bereits bekannte Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen zurückführen lässt, worauf in § 38, 39 u. ff. die selbständige Lösung der neuen Aufgabe sich anschliessen wird.

§ 37. Bedingte Beobachtungen, zurückgeführt auf vermittelnde Beobachtungen.

Es wurden n Grössen unmittelbar beobachtet, zwischen denen r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen bestehen, wobei n grösser als r ist; es sollen die wahrscheinlichsten Werte der n Grössen bestimmt werden.

Ein sehr einfacher Fall dieser Art ist z. B. die Messung von 3 Winkeln $x_1 \; x_2 \; x_3$ in einem Dreieck, wobei eine Bedingungsgleichung $x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0$ besteht (bzw. $180° +$ sphär. Excess), also $n = 3$, $r = 1$.

Wir haben diese Aufgabe bereits in § 10. S. 31—35 auf eine Ausgleichung nach dem arithmetischen Mittel zurückgeführt.

Man kann immer die Ausgleichung bedingter Beobachtungen auf vermittelnde Beobachtungen zurückführen, was wir nun zeigen werden.

Wir nehmen an, es seien n unbekannte Grössen $x_1 \; x_2 \; x_3 \ldots x_n$ zu bestimmen und man habe hiefür die gleich genauen Messungen $l_1 \; l_2 \; l_3 \ldots l_n$ gemacht. Zwischen den Unbekannten x bestehen folgende r streng zu erfüllende Bedingungsgleichungen:

$$\text{Anzahl} = r \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + a_3\,x_3 + \ldots + a_n\,x_n = 0 \\ b_0 + b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + b_3\,x_3 + \ldots + b_n\,x_n = 0 \\ c_0 + c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + c_3\,x_3 + \ldots + c_n\,x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_0 + \underbrace{r_1\,x_1 + r_2\,x_2 + r_3\,x_3 + \ldots + r_n\,x_n}_{\text{Anzahl} \,=\, n} = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Setzt man an Stelle der Unbekannten x die Beobachtungswerte l, so sind die Gleichungen (1) nicht mehr befriedigt, sondern sie geben:

$$\left. \begin{array}{l} a_0 + a_1\,l_1 + a_2\,l_2 + a_3\,l_3 + \ldots + a_n\,l_n = w_1 \\ b_0 + b_1\,l_1 + b_2\,l_2 + b_3\,l_3 + \ldots + b_n\,l_n = w_2 \\ c_0 + c_1\,l_1 + c_2\,l_2 + c_3\,l_3 + \ldots + c_n\,l_n = w_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_0 + r_1\,l_1 + r_2\,l_2 + r_3\,l_3 + \ldots + r_n\,l_n = w_n \end{array} \right\} \quad (2)$$