Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 3. Der durchschnittliche Fehler

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

verfolgt, so wird man zu dem Schluss geführt, dass keine Messung vollkommen fehlerfrei ist.

Damit ist natürlich nicht gesagt, dass es nicht möglich ist, eine Messung so auszuführen, dass der noch zu fürchtende Fehler so klein ist, dass er für gewisse Zwecke unschädlich bleibt.

Trotz der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen können doch die Fehler gewisse Grenzen nicht übersteigen, sofern der Beobachter die nötige Sorgfalt anwendet. Ist letzteres nicht der Fall, so treten „grobe Fehler“ auf (z. B. falsches Zählen der ganzen Lattenlagen bei Längenmessungen u. A.). Solche grobe Fehler sollen von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen sein.

Gewisse Messungsfehler wirken immer in demselben Sinn, z. B. das Ausweichen der Messlatten aus der zu messenden Geraden führt immer auf ein zu grosses Messungsergebnis. Obgleich die Theorie der Beobachtungsfehler sich auch mit solchen „regelmässigen“ oder „einseitig wirkenden“ Beobachtungsfehlern zu befassen hat, werden wir doch im folgenden, sofern nicht das Gegenteil bemerkt ist, die Annahme machen, dass einseitig wirkende Fehler nicht zu befürchten sind, sondern nur unvermeidliche, unregelmässige Beobachtungsfehler, welche gleichwahrscheinlich positiv oder negativ sind.

Sobald man erkannt hat, dass die *wahren* Werte der beobachteten Grössen in aller Strenge zu bestimmen unmöglich ist, hat man sich ein weniger hohes Ziel zu stecken, nämlich nur die Erreichung der unter gegebenen Umständen *wahrscheinlichsten* Werte der Unbekannten, welche sich der Gesamtheit aller Messungen am besten anpassen. Je nach der Art der Beobachtung und der Anzahl der angewendeten Probemessungen wird man den wahren Werten der Unbekannten mehr oder weniger nahe kommen; man kann deswegen nach Ermittlung der wahrscheinlichsten Werte noch die Frage aufwerfen, welche Genauigkeit erzielt worden ist.

Es ist hiernach die Aufgabe der Ausgleichungsrechnung, aus Beobachtungen, welche infolge der unvermeidlichen ihnen anhaftenden Beobachtungsfehler auf Widersprüche führen, diejenigen Ergebnisse zu ziehen, welche sich den Messungen am besten anpassen (oder die geringsten Fehler fürchten lassen); ferner diejenigen Beträge anzugeben, um welche mutmasslich die gefundenen Ergebnisse von der Wahrheit noch abweichen.

Oder mit anderen Worten:

Die Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt sich mit der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern und mit der Bestimmung von mittleren zu fürchtenden Fehlern.

§ 3. Der durchschnittliche Fehler.

Die ersten Fehlerbetrachtungen führen immer auf eine Durchschnittsberechnung, welche zwar in der heutigen Fehlertheorie eine nur untergeordnete Rolle spielt, welche aber zur Einführung in das Verständnis der Sache hier zuerst mitgeteilt werden muss.

Wenn die Fehler mehrerer gleichartiger Beobachtungen bekannt sind, so kann man aus diesen Fehlern (absolut genommen, d. h. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen) einen Durchschnittswert bilden, welcher „*durchschnittlicher Fehler*“ heisst. Allerdings kennt man die wahren Beobachtungsfehler im allgemeinen ebensowenig als die wahren Werte der beobachteten Grössen, doch hindert dieses nicht, den strengen Begriff des durchschnittlichen Fehlers zu bilden, d. h. wenn $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ eine Anzahl wahrer Beobachtungsfehler von gleicher Art sind, so ist der durchschnittliche Fehler:

$$t = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} \tag{1}$$

wobei das Zeichen $[\pm \varepsilon]$ die absolute Summe der ε im Gegensatz zu der algebraischen Summe andeuten soll, indem die eckige Klammer als Summenzeichen dient.

Als Beispiel für die Berechnung des Durchschnittswertes wahrer Fehler nehmen wir folgendes:

Bei der „Gradmessung in Ostpreussen" wurden in 22 Dreiecken alle Winkel α, β, γ, gemessen und die Winkelsummen mit den theoretischen Summen 180° + sphär. Excess verglichen. Dabei ergaben sich folgende 22 Widersprüche:

$$\alpha + \beta + \gamma - (180° + \text{sphär. Excess}) = \varepsilon$$

Num.	Fehler ε	Num.	Fehler ε	Num.	Fehler ε
1.	+ 0,36″	9.	+ 0,56″	17.	+ 1,62″
2.	+ 0,93	10.	0,00	18.	+ 1,62
3.	− 0,51	11.	− 0,59	19.	+ 1,67
4.	− 1,46	12.	0,00	20.	− 0,72
5.	− 0,95	13.	− 1,36	21.	− 1,35
6.	− 1,40	14.	+ 1,86	22.	− 0,98
7.	+ 1,76	15.	− 0,42		7,96
8.	+ 0,92	16.	+ 1,68		6,47
	8,29		6,47		8,29
				Summe	22,72″ = $[\pm \varepsilon]$

$$\text{Durchschnitt} = \frac{[\pm \varepsilon]}{n} = \frac{22{,}72''}{22} = \pm 1{,}03''.$$

Betrachtet man nun die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ eines Dreiecks als Messungsgrösse, so hat man den durchschnittlichen Fehler derselben hiemit bestimmt $= \pm 1{,}03''$, und dieser Wert als durchschnittlicher Dreiecksfehler hat immer ein gewisses Interesse (dagegen wurde der durchschnittliche Fehler eines einzelnen Dreieckswinkels hiebei nicht gefunden).

Ebenso wie diese Dreiecksschlussfehler haben auch die Differenzen, welche man bei Messungswiederholungen findet, den Charakter *wahrer* Beobachtungsfehler ε.

Im Gegensatz zu diesen *wahren* Beobachtungsfehlern stehen die *scheinbaren* Fehler, welche man z. B. findet, wenn man das arithmetische Mittel mehrerer Beobachtungen mit den einzelnen Beobachtungen vergleicht.

Dieses giebt folgende Formeln:

Beobachtungen: $l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad \ldots l_n$

Arithmetisches Mittel: $$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} \tag{2}$$

oder mit Annahme der eckigen Klammer als Zeichen für algebraische Summierung

$$x = \frac{[l]}{n} \tag{3}$$

Man bildet die scheinbaren Fehler, d. h. die Differenzen:

$$v_1 = x - l_1 \qquad v_2 = x - l_2 \qquad v_3 = x - l_3 \ldots v_n = x - l_n$$

dabei bemerkt man, dass die algebraische Summe dieser Differenzen = 0 ist, nämlich

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = n\,x - (l_1 + l_2 + l_3 + \ldots)$$

$$[v] = n\,x - [l] = 0 \text{ wegen (2) oder (3)}$$

$$[v] = 0 \tag{4}$$

Diese Gleichung (4) kann als Rechenprobe dienen.

Diese scheinbaren Fehler v behandelt man näherungsweise wie wahre Beobachtungsfehler ε, d. h. man berechnet nach Anleitung der Gleichung (1) den durchschnittlichen Fehler:

$$t = \frac{[\pm v]}{n}$$

Beispiel. Ein Winkel ist 5mal unabhängig gemessen worden:

Beobachtungen l	Differenzen v	Probe
35° 26′ 16″	+ 2,8″	
20″	− 1,2	
18″	+ 0,8	$[+v] = +7{,}4$
25″	− 6,2	$[-v] = -7{,}4$
15″	+ 3,8	$[v] = 0$
Summen: 94″	14,8″	

Mittel $x = 35°\,26'\,18{,}8''$ $\quad t = \frac{14{,}8}{5} = 2{,}96''$.

Damit hat man ein Mass für die mutmassliche Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung. Nun wäre es weiter von Wichtigkeit, zu wissen, wie sich die Genauigkeit einer einzelnen Beobachtung zur Genauigkeit des arithmetischen Mittels verhält, allein diese und andere hier sich anschliessende Fragen lassen sich auf Grundlage des durchschnittlichen Fehlers und der vorstehenden einfachen Betrachtungen *nicht* lösen.

Aus diesem Grunde lassen wir jetzt den durchschnittlichen Fehler fallen und gehen zu einem anderen Genauigkeitsmass, dem *mittleren* Fehler über.

§ 4. Der mittlere Fehler.

Nachdem der durchschnittliche Fehler sich als ungeeignet zur Behandlung weiterer Aufgaben der Ausgleichungsrechnung erwiesen hat, machen wir einen Versuch mit einem anderen Mittelwert der Fehler. Wenn eine Anzahl n wahrer Beobachtungsfehler $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ vorliegt, so bilden wir daraus einen Mittelwert m nach der Gleichung:

$$m = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \ldots \varepsilon_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{[\varepsilon^2]}{n}} \tag{1}$$

Man nennt diesen Mittelwert den „mittleren Fehler" oder „mittleren zu fürchtenden Fehler". (error medius metuendus).

Der mittlere Fehler bietet gegenüber dem durchschnittlichen Fehler den Vorteil, dass bei der Summierung $[\varepsilon^2]$, da alle Quadrate positiv sind, keine Unterscheidung der Vorzeichen nötig ist, sowie dass das Vorzeichen der Quadratwurzel unbestimmt $\pm$ aus der Rechnung hervorgeht. Abgesehen von diesen äusserlichen Unterschieden ist aber der mittlere Fehler ein besseres Genauigkeitsmass als der durchschnittliche Fehler, weil in den Quadraten die grossen Fehler mehr ins Gewicht fallen.

Der mittlere Fehler ist im allgemeinen grösser als der durchschnittliche Fehler