Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

$$m = \sqrt{\frac{62,80}{5}} = \pm 3,54'' \quad (?) \tag{3}$$

Dieser Berechnung (3) haben wir ein Fragezeichen (?) zugesetzt, weil es fraglich ist, ob die zunächst gemachte Annahme der v als wahrer Fehler zulässig ist? Die Antwort hierauf wird in unserem spätern § 7. gegeben werden. Inzwischen müssen wir uns einer anderen Betrachtung zuwenden.

Der *mittlere Fehler* nach der im Vorstehenden gegebenen Definition ist der Grundbegriff der Genauigkeitsuntersuchungen; neben diesem mittleren Fehler hat der durchschnittliche Fehler, der sich zuerst in § 3. dargeboten hat, eine nur sehr untergeordnete Bedeutung.

Es bestehen noch zwei andere Fehlermasse, welche wir hier vorläufig erwähnen wollen, nämlich der *wahrscheinliche Fehler* und der *Grenzfehler*.

Diese beiden Fehler werden jedoch erst in einem späteren Kapitel zu behandeln sein.

§ 5. Das Fehlerfortpflanzungsgesetz.

Es handelt sich um die Frage, in welcher Weise sich die mittleren Fehler gemessener Grössen auf die hieraus durch Rechnung abgeleiteten Grössen übertragen. Diese wichtige Frage muss erledigt sein, ehe weitere Aufgaben der Ausgleichungsrechnung gelöst werden können. Wir behandeln zuerst einzelne besondere Fälle dieser Frage, nämlich Multiplikation und Addition gemessener Grössen.

I. Multiplikation. Eine gemessene Grösse l wird mit einer gegebenen Zahl a multipliziert, man hat also ein Produkt

$$x = a\,l \tag{1}$$

Hier ist a als gegebene Zahl fehlerfrei, dagegen l als gemessene Grösse soll mit einem mittleren Fehler m behaftet sein, und es fragt sich, welches der mittlere Fehler M des Produktes x wird?

Durch die Multiplikation a werden auch die der Grösse l anhaftenden Fehler betroffen, man kann also rasch überblicken, dass das Ergebnis sein wird:

$$M = a\,m \tag{2}$$

Zur Veranschaulichung mag das Messen einer Geraden mit unsicheren Latten dienen. Wenn eine Messlatte l an sich um den Betrag $\pm m$ unsicher ist, d. h. wenn sie ungenau mit dem Normalmass verglichen ist und wenn die Handhabung der Messung selbst ganz fehlerfrei ist (d. h. wenn von den Messungsfehlern selbst hier gar nicht die Rede sein soll), so wird bei $a$maligem Anlegen der fehlerhaften Latte offenbar ein Fehler $M = a\,m$ erzeugt, und zwar $\pm M$, wenn $\pm m$ im Vorzeichen unbestimmt ist.

II. Addition. Es werden zwei Grössen l und l' unabhängig von einander gemessen und dann addiert, man hat also eine Summe:

$$x = l + l' \tag{3}$$

die l und l' seien mit mittleren Fehlern $\pm m$ und $\pm m'$ behaftet und es fragt sich nun, was der mittlere Fehler M der Summe x ist?

Auf den ersten Blick könnte es scheinen, als ob einfach zu setzen wäre:

$$M = m + m' \quad (?), \tag{3 a}$$

allein sobald man die Sache näher betrachtet, so bemerkt man, dass dieses nur dem äussersten Fall der *Häufung* der Fehler m und m' entspricht, während bei unregelmässigen Vorzeichen $\pm m$ und $\pm m'$ auch der Fall der gegenseitigen *Tilgung* $m - m'$

berücksichtigt werden muss. Zudem muss man beachten, dass der Fehler von l und l' durchaus nicht gerade m und m' selbst sind, sondern dass diese m und m' nur die *Mittel*werte der den l und l' anhaftenden Fehler vorstellen, dass also von einer so einfachen Lösung wie (3a) nicht die Rede sein kann.

Um zur richtigen Lösung der vorliegenden sehr wichtigen Aufgabe zu gelangen, müssen wir den Grundbegriff des mittleren Fehlers anwenden, und dazu denken wir uns die Addition $l + l' = x$ nicht nur *ein*mal, sondern wiederholt (etwa n mal) vorgenommen, und wir ziehen *alle* Fehler ε, ε' u. s. w. in Betracht, welche bei allen diesen Fällen auftreten. Im ersten Falle habe man l behaftet mit dem Fehler ε, und l' behaftet mit ε', dann ist zweifellos der Fehler von x im ersten Falle gleich $\varepsilon + \varepsilon'$, was mit δ bezeichnet werden soll. Dieses n mal angewendet giebt:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \varepsilon_1 + \varepsilon_1' \\
\delta_2 &= \varepsilon_2 + \varepsilon_2' \\
\delta_3 &= \varepsilon_3 + \varepsilon_3' \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\delta_n &= \varepsilon_n + \varepsilon_n'
\end{aligned}$$

Um zu mittleren Fehlern überzugehen, müssen wir quadrieren:

$$\begin{aligned}
\delta_1^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + 2\,\varepsilon_1\,\varepsilon_1' \\
\delta_2^2 &= \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2'^2 + 2\,\varepsilon_2\,\varepsilon_2' \\
\delta_3^2 &= \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3'^2 + 2\,\varepsilon_3\,\varepsilon_3' \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\delta_n^2 &= \varepsilon_n^2 + \varepsilon_n'^2 + 2\,\varepsilon_n\,\varepsilon_n'
\end{aligned}$$

$$\text{Quadratsumme} \qquad [\delta^2] = [\varepsilon^2] + [\varepsilon'^2] + 2\,[\varepsilon\,\varepsilon']$$

$$\text{Quadrat-Mittel} \qquad \frac{[\delta^2]}{n} = \frac{[\varepsilon^2]}{n} + \frac{[\varepsilon'^2]}{n} + 2\,\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n} \tag{4}$$

Hier ist zufolge der Grunderklärung des mittleren Fehlers:

$$\frac{[\delta^2]}{n} = M^2, \quad \frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2, \quad \frac{[\varepsilon'^2]}{n} = m'^2 \tag{5}$$

und es fragt sich noch, was $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n}$ ist?

Dieses ist der Durchschnittswert aller Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2'$ u. s. w. und da alle ε gleich wahrscheinlich positiv oder negativ sein sollen, also auch kein Grund vorhanden ist, warum in der Reihe der Produkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_1'$, $\varepsilon_2\,\varepsilon_2' \ldots$ die positiven oder negativen Beträge überwiegen sollten, so ist der Durchschnittswert des letzten Gliedes in (4) gleich *Null* zu setzen. (Genauer gesagt, der Grenzwert, gegen welchen bei wachsender Anzahl n jenes Glied konvergiert, ist gleich Null.)

Damit und wegen (5) giebt nun (4):

$$\left.\begin{aligned}
M^2 &= m^2 + m'^2 \\
\text{oder } M &= \sqrt{m^2 + m'^2}
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dieses ist der wichtigste Satz der ganzen Ausgleichungs-Rechnung, er ist gleichlautend mit dem pythagoräischen Satz der Geometrie, indem M als Hypotenuse zu den Katheten m und m' gehört.

Der wichtige pythagoräische Lehrsatz der Ausgleichungs-Rechnung heisst also: Wenn eine Messung mit dem mittleren Fehler $\pm m$ addiert wird zu einer zweiten Messung mit dem mittleren Fehler $\pm m'$, so entsteht eine Summe, deren mittlerer

Fehler $\pm M$ die Quadratwurzel aus der Quadratsumme von m und m' ist, oder es ist der Summenfehler M die Hypotenuse zu den Teilfehlern m und m' als Katheten.

Derselbe Satz gilt wie für Summen, so auch für Differenzen, d. h. wenn aus den Messungen $l \pm m$ und $l' \pm m'$ die Differenz $D = (l \pm m) - (l' \pm m')$ gebildet wird, so haftet an dieser Differenz *derselbe* mittlere Fehler $M = \sqrt{m^2 + m'^2}$ wie an der Summe $l + l'$. Man überzeugt sich hievon leicht, wenn man die vorstehende Entwicklung nochmals durchgeht, denn es wird sich mit $l - l'$ statt $l + l'$ nichts ändern als dass in (4) das letzte Glied negativ wird, da aber dieses letzte Glied in (4) gleich Null wird, bleibt alles bestehen.

Der Satz (6) lässt sich auch auf mehr als zwei Messungen leicht ausdehnen. Hat man

$$x = (l \pm m) + (l' \pm m') + (l'' \pm m'')$$

so kann man zuerst die zwei ersten Elemente nach dem Satze (6) zusammenfassen und dann das dritte hinzunehmen, d. h. man hat für drei Elemente:

$$M^2 = (m^2 + m'^2) + m''^2$$

So kann man beliebig fortfahren, wodurch man erhält:

$$M^2 = m^2 + m'^2 + m''^2 + m'''^2 + \ldots \tag{7}$$

Sind hiebei alle Einzelfehler $m\ m'\ m'' \ldots$ einander *gleich*, was als besonderer Fall vorkommen kann, so wird bei n Fehlern:

$$M^2 = m^2 + m^2 + m^2 \ldots = n\, m^2$$

$$M = m\sqrt{n} \tag{8}$$

Zur Veranschaulichung mag wieder das Beispiel der Lattenmessung dienen; jedoch soll nun im Gegensatz zu dem früheren Falle bei (2) angenommen werden, dass die Latten an sich fehlerfrei seien, dass aber bei jeder Lattenanlage l ein aus der Handhabung entspringender Fehler begangen werde, dessen Mittelwert gleich $\pm m$ sei, wobei das Überwiegen positiver oder negativer Fehler ausgeschlossen sein soll. (Letzteres ist bekanntlich nicht wirklich der Fall, doch sei davon jetzt nicht die Rede.)

Unter diesen Voraussetzungen haben wir die Gleichung (8) giltig für n maliges Lattenanlegen mit $\pm m$ als mittlerem Fehler einer Anlage, und hiernach ist der mittlere Lattenmessungsfehler proportional der Quadratwurzel aus der Anzahl n der Lattenanlagen, d. h. auch proportional der Quadratwurzel aus der gemessenen Länge L (weil L proportional n).

III. Lineare Funktion. Durch Verbindung der beiden Sätze I für Multiplikation und II für Addition bzw. Subtraktion, erhalten wir den allgemeinen Satz für Bestimmung des mittleren Fehlers einer linearen Funktion gemessener Grössen:

Wenn $l, l', l'' \ldots$ gemessene Grössen und $m, m', m'' \ldots$ deren bekannte mittlere Fehler sind, so handelt es sich um die lineare Funktion

$$x = a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{9}$$

deren mittlerer Fehler M sich nach dem Vorhergehenden leicht ergiebt:

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m')^2 + (a''\,m'')^2 + \ldots} \tag{10}$$

Wenn dabei $m' = m'' = m''' \ldots = m$ ist, so wird

$$M = m\sqrt{[a\,a]} \tag{11}$$

IV. Allgemeine Funktion. Mit den vorstehenden Sätzen I, II, III ist das wichtige Fehlerfortpflanzungsgesetz an sich erledigt; mehr als eine lineare Funktion (9) lässt sich in diesem Sinne nicht allgemein behandeln; man kann aber jede beliebige andere Funktion wenigstens näherungsweise auf eine lineare Funktion zurückführen durch Differentiieren nach dem Taylor schen Satze, mit der Annahme, dass die Fehler verhältnismässig *kleine* Grössen seien. Obgleich die darauf gegründete Verallgemeinerung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes zu unserem nächsten Gang der Theorie in § 6.—§ 11. nicht gebraucht wird (also auch zunächst übergangen werden kann), wollen wir dieselbe doch hier einschalten und durch ein kleines geodätisches Beispiel erläutern.

Man habe irgend eine Funktion gemessener Grössen:

$$X = f(l_1 \, l_2 \, l_3 \ldots) \tag{12}$$

Bezeichnet man jetzt mit $l_1 \, l_2 \, l_3 \ldots$ die wahren Werte der gemessenen Grössen, mit $m_1 \, m_2 \, m_3 \ldots$ deren mittlere Fehler, und mit $\varepsilon_1 \, \varepsilon_2 \, \varepsilon_3 \ldots$ bestimmte denselben anhaftende Fehler, so kann man unter der Voraussetzung, dass diese Fehler so klein sind, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden können, mit Hilfe des Taylor schen Satzes den entsprechenden Fehler ε von x bestimmen, nämlich:

$$\varepsilon = f(l_1 + \varepsilon_1 \, , \, l_2 + \varepsilon_2 \, , \, l_3 + \varepsilon_3 \ldots) - f(l_1 \, , \, l_2 \, , \, l_3 \ldots)$$

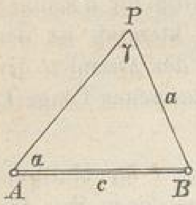
$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \varepsilon_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \varepsilon_3 + \ldots$$

Durch ähnliche Schlüsse wie die bei I. und II. angewendeten kommt man zu dem Ergebnis:

$$M = \sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x_1} m_1)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2} m_2)^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_3} m_3)^2 + \ldots} \tag{13}$$

wobei die Differentialquotienten mit Hilfe von Näherungswerten der $l_1 \; l_2 \; l_3 \ldots$ berechnet werden.

Fig. 1.
Mittlerer Fehler der Seite a.



Ein einfaches Beispiel zur Anwendung dieses Satzes (13) ist folgendes (Fig. 1.):

Ein Punkt P wird gegen eine feste Basis $A\,B = c$ festgelegt durch Messung der zwei Winkel α und γ, wodurch die Seite $B\,P = a$ bestimmt wird:

$$a = \frac{c}{\sin \gamma} \sin \alpha \tag{14}$$

dabei sind α und γ mit mittleren Fehlern $\delta\alpha$ und $\delta\gamma$ behaftet; es fragt sich, was der mittlere Fehler M der Seite a ist. Die Basis c wird dabei als fehlerfrei betrachtet.

Man bildet das totale Differential von (14):

$$d\,a = \frac{\partial a}{\partial \alpha} d\,\alpha + \frac{\partial a}{\partial \gamma} d\,\gamma$$

$$d\,a = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \alpha \, d\,\alpha - c \sin \alpha \, \frac{\cos \gamma}{\sin^2 \gamma} \, d\,\gamma$$

Wegen (14) kann man dieses auch so schreiben:

$$d\,a = a \,\mathrm{cotg}\, \alpha \, d\,\alpha - a \,\mathrm{cotg}\, \gamma \, d\,\gamma$$

Nun setzt man an Stelle der Differentiale $d\,\alpha$ und $d\,\gamma$ die mittleren Fehler $\pm\,\delta\,\alpha$ und $\pm\,\delta\,\gamma$, und hat damit den mittleren Fehler M zunächst in unbestimmter Form:

$$\pm\, M = a \,\mathrm{cotg}\, \alpha \, \delta\,\alpha \pm a \,\mathrm{cotg}\, \gamma \, \delta\gamma;$$

endlich nach der Regel von (13):

$$M = a\sqrt{cotg^2\,\alpha\,(\delta\alpha)^2 + cotg^2\,\gamma\,(\delta\gamma)^2} \tag{15}$$

Wenn beide Winkel α und γ gleich genau gemessen sind, so sei $\delta\alpha = \delta\gamma = \delta$, damit wird:

$$M = a\,\delta\sqrt{cotg^2\,\alpha + cotg^2\,\gamma}$$

Hiebei ist δ in analytischem Masse verstanden; wenn δ'' der Winkelfehler in Sekunden ist, so wird:

$$\frac{M}{a} = \frac{\delta''}{\varrho''}\sqrt{cotg^2\,\alpha + cotg^2\,\gamma}$$

Wir nehmen beispielshalber $\alpha = \gamma = 60^\circ$ und $\delta = 10''$, das giebt

$$\frac{M}{a} = \pm\,0{,}0000\,396$$

oder es ist der Fehler M etwa $= 0{,}004\,\%$ von a.

Nehmen wir dabei $a = 1000^m$, so ist also $M = 0{,}04^m$.

Wenn etwa in dem Dreieck (Fig. 1.) der dritte Winkel bei B auch gemessen ist, dann lässt sich die Berechnung des mittleren Fehlers der Seite a nicht mehr in so einfacher Weise machen; wie dann zu verfahren ist, wird erst später bei der Theorie der bedingten Beobachtungen gezeigt werden.

§ 6. Zusammenwirkung unregelmässiger und regelmässiger Fehler.

Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, dass keine konstanten oder einseitig wirkenden Fehler vorhanden sind, indessen gilt der Hauptsatz II. des vorigen § 5. über Fehlerfortpflanzung auch dann noch, wenn es sich um Kombination eines unregelmässigen mit einem regelmässigen oder mit einem konstanten Fehler handelt, denn der Mittelwert $\frac{[\varepsilon\,\varepsilon']}{n}$, auf welchen es bei dem Falle II. S. 16 hauptsächlich ankommt, konvergiert auch dann noch gegen Null, wenn nur ε *oder* ε' gleichwahrscheinlich positiv und negativ ist.

Als Beispiel hiefür nehmen wir wieder wie im vorigen § 5. S. 15 die Längenmessung mit Messlatten. Eine solche Messung ist nämlich nicht nur mit unregelmässigen Fehlern, sondern auch mit regelmässigen Fehlern behaftet. Solche regelmässige Fehler sind z. B. das Ausweichen aus der Geraden nach links oder rechts, nach oben oder unten. Diese Ausweichungen heben sich durchaus nicht gegenseitig auf, sondern sie geben lauter positive Fehler, d. h. Fehler, welche die Länge zu gross erscheinen lassen.

Bei n maliger Lattenanlage wird man die einseitig wirkenden Fehlerteile $= A\,n$ und die unregelmässig wirkenden Teile $= B\sqrt{n}$ annehmen können, dann ist der mittlere Gesamtfehler:

$$M = \sqrt{(A\,n)^2 + (B\sqrt{n})^2} = \sqrt{A^2\,n^2 + B^2\,n}.$$

Der Begriff des mittleren Fehlers ist also nicht an die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeit für positive und negative Einzelfehler gebunden; man kann den mittleren Fehler auch als Genauigkeitsmass für solche Messungen benützen, bei welchen einseitig wirkende Fehlerquellen vorhanden sind; doch darf natürlich ein mittlerer Fehler, welcher konstante Teile enthält, im allgemeinen nicht ebenso weiter behandelt werden, wie ein mittlerer Fehler, welcher solche Teile nicht enthält.