Handbuch der Vermessungskunde

Jordan, Wilhelm

Stuttgart, 1895

§ 7. Das einfache arithmetische Mittel

urn:nbn:de:hbz:466:1-83060

Es ist ein oft gehörter Einwurf gegen die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf gewisse Messungen, dass diese Messungen einseitige Fehler enthalten, und dass deswegen die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen überhaupt nicht anzuwenden sei.

Dem ist entgegenzuhalten, dass gerade die Methode der kleinsten Quadrate die feinsten Mittel darbietet, um einseitig wirkende oder unbekannte Fehler aufzufinden, und dann die Ausgleichung mit Rücksicht auf solche Fehlerquellen zu behandeln.

§ 7. Das einfache arithmetische Mittel.

Wenn eine Messung mehrfach gleichartig und unabhängig wiederholt worden ist mit den Ergebnissen $l_1\ l_2\ l_3 \ldots l_n$, so nimmt man als bestanschliessenden Wert das arithmetische Mittel:

$$x = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \ldots l_n}{n} = \frac{[l]}{n} \tag{1}$$

Die Abweichungen der Einzelmessungen von dem Mittel x, d. h. die scheinbaren Fehler sind:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = x - l_1 \\ v_2 = x - l_2 \\ v_3 = x - l_3 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n = x - l_n \end{array}\right\} \tag{2}$$

deren Summe wegen (1) gleich Null ist, d. h.:

$$[v] = 0. \tag{3}$$

Durch Quadrierung der scheinbaren Fehler v findet man den mittleren Fehler einer Beobachtung zunächst näherungsweise durch die Formel:

$$m = \sqrt{\frac{[v\,v]}{n}}\ (?) \tag{4}$$

Es handelt sich nun um Bestimmung des mittleren Fehlers M des arithmetischen Mittels selbst, wozu die Anleitung des Satzes über Fehlerfortpflanzung (10) und (11) § 5. S. 17 dient, denn vermöge (1) ist x eine lineare Funktion der beobachteten Grössen l, denen sämtlich der mittlere Fehler m zukommt, wie sich noch deutlicher zeigt, wenn man die Gleichung (1) auseinanderzieht und so schreibt:

$$x = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \frac{1}{n} l_3 + \ldots \frac{1}{n} l_n \tag{5}$$

Dieses entspricht der Gleichung (9) § 5. S. 17, nämlich

$$x + a\,l + a'\,l' + a''\,l'' + \ldots \tag{5 a}$$

und dazu gehört die Anwendung (10) § 5. S. 17, nämlich

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m')^2 + (a''\,m'')^2 + \ldots} \tag{5 b}$$

Es treten also die $l_1\ l_2\ l_3 \ldots$ von (5) an Stelle der früheren $l\ l'\ l'' \ldots$ in (5 a) und die dort mit $a\ a'\ a'' \ldots$ bezeichneten Coefficienten sind in unserem Falle (5) sämtlich $= \frac{1}{n}$; die mittleren Fehler $m\ m'\ m'' \ldots$ sind in unserem Fall alle einander gleich, nämlich alle $= m$, also giebt die Anwendung von (5 b) nun:

$$M = \sqrt{(a\,m)^2 + (a'\,m)^2 + (a''\,m)^2 + \ldots} = m\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

dabei ist $a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots = \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots = n\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}$

also
$$M = m\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \text{oder} \quad M = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

d. h. der mittlere Fehler M des arithmetischen Mittels x wird erhalten aus dem mittleren Fehler m einer Einzelbeobachtung durch Division mit der Quadratwurzel $\sqrt{n}$ aus der Anzahl n der Beobachtungen. Wir werden diesen wichtigen und interessanten Satz nachher mit Fig. S. 23 noch etwas näher betrachten, zuvor aber müssen wir uns nochmals der Gleichung (4) zuwenden, um die daselbst noch offen gelassene Frage zu behandeln, inwiefern die scheinbaren Fehler v zur Vertretung der wahren Fehler ε geeignet sind.

Diese wahren Fehler ε bleiben ewig unbekannt, aber dennoch kann man die Abweichungen zwischen den v und den ε näherungsweise berücksichtigen in folgender Weise:

Im Gegensatz zu dem arithmetischen Mittel x bezeichnen wir mit X den wahren Wert der Unbekannten, und mit ε die wahren Beobachtungsfehler im Gegensatz zu den scheinbaren Beobachtungsfehlern v; dann haben wir die Gleichungen:

$$\varepsilon = X - l \quad , \quad v = x - l \quad , \quad \text{also } \varepsilon = v + (X - x) \tag{7}$$

Wenn man dieses auf n Fälle anwendet und die $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ quadriert, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1^2 &= v_1^2 + (X-x)^2 + 2\,v_1\,(X-x)\\
\varepsilon_2^2 &= v_2^2 + (X-x)^2 + 2\,v_2\,(X-x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varepsilon_n^2 &= v_n^2 + (X-x)^2 + 2\,v_n\,(X-x)\\
\hline
\text{Summe } [\varepsilon^2] &= [v^2] + n\,(X-x)^2 + 2\,(v_1 + v_2 + \ldots v_n)\,(X-x)
\end{aligned}$$

Nun ist aber $v_1 + v_2 + \ldots v_n = [v] = 0$ nach (3), also

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + n\,(X-x)^2 \tag{8}$$

Der Wert $X - x$, d. h. die Abweichung des arithmetischen Mittels x von dem wahren Wert X der Unbekannten ist in aller Strenge niemals zu bestimmen, allein man kann wenigstens für $X - x$ einen guten Näherungswert einführen, indem man dafür den mittleren Fehler M des arithmetischen Mittels selbst setzt, d. h. nach (6)

$$X - x = M = \frac{m}{\sqrt{n}} \quad , \quad (X-x)^2 = \frac{m^2}{n}$$

Damit giebt (8):

$$[\varepsilon^2] = [v^2] + m^2 \tag{9}$$

Es ist nun in aller Strenge:

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = m^2$$

denn die wahren Fehler ε müssen den streng richtigen mittleren Fehler bestimmen. Damit wird (9):

$$n\,m^2 = [v^2] + m^2$$

Diese Gleichung kann nach m^2 aufgelöst werden und giebt:

$$m^2 = \frac{[v^2]}{n-1} \quad \text{oder} \quad m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} \tag{10}$$

Das ist die gesuchte richtige Formel, welche an Stelle der genäherten Formel (4) tritt, die Formel (10) kann man auch wieder in (6) einsetzen, womit man hat:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} \tag{11}$$

Die neue Formel (10) erscheint auch ohne die mathematische Herleitung, nach dem blossen Anblick besser als die frühere Formel (4); insbesondere in dem besonderen Fall mit $n = 1$. Hiefür würde (4) geben $[v^2] = 0$ also $m = 0$. Dagegen (10) giebt zwar auch $[v^2] = 0$, aber auch im Nenner $n - 1 = 0$, also im ganzen $m = \sqrt{\frac{0}{0}}$, d. h. unbestimmt, und in der That muss beim Vorhandensein von nur *einer* Beobachtung die Genauigkeit unentschieden bleiben. (Als letzten extremen Fall kann man auch noch $n = 0$ setzen, d. h. nach der Genauigkeit einer Beobachtung fragen, welche gar nicht gemacht worden ist; auch hiefür giebt (10) die richtige Antwort, indem wegen $n - 1 = 0 - 1 = -1$ der mittlere Fehler m imaginär wird.)

Zur Anwendung der in Vorstehendem entwickelten Theorie des einfachen arithmetischen Mittels nehmen wir nochmals das kleine Zahlenbeispiel am Schlusse des § 3. S. 13:

	Beobachtungen l	v	v^2
1.	35° 26′ 16″	+ 2,8″	7,84
2.	20	− 1,2	1,44
3.	18	+ 0,8	0,64
4.	25	− 6,2	38,44
5.	15	+ 3,8	14,44
Summe	= 94	0,0	62,80 = $[v^2]$

Mittel = 35° 26′ 18,8″.

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{62{,}80}{4}} = \pm\, 3{,}96''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[v^2]}{n\,(n-1)}} = \frac{3{,}96}{\sqrt{5}} = \pm\, 1{,}77''$$

Im ganzen schreibt man nun abgerundet:

$$x = 35^\circ\, 26'\, 18{,}8'' \pm 1{,}8''.$$

Zweites, grösseres Zahlenbeispiel.

In der „Gradmessung in Ostpreussen“ (S. 78) giebt *Bessel* 18 unabhängige Messungen für den Winkel Mednicken-Fuchsberg auf der Station Trenk, wie folgende Zusammenstellung zeigt, welche zugleich die Fehlerberechnung enthält.

Nr.	Beobachtung l	v	v^2
1	83° 30′ 36,25″	− 1,38″	1,90
2	7,50	− 2,63	6,92
3	6,00	− 1,13	1,28
4	4,77	+ 0,10	0,01
5	3,75	+ 1,12	1,25
6	0,25	+ 4,62	21,34
7	3,70	+ 1,17	1,37
8	6,14	− 1,27	1,61
9	4,04	+ 0,83	0,69
10	6,96	− 2,09	4,37
11	3,16	+ 1,71	2,92
12	4,57	+ 0,30	0,09
13	4,75	+ 0,12	0,01
14	6,50	− 1,63	2,66
15	5,00	− 0,13	0,02
16	4,75	+ 0,12	0,01
17	4,25	+ 0,62	0,38
18	5,25	− 0,38	0,14
Summe	87,59	+ 10,71	46,97
Mittel 83° 30′ 34,87″		− 10,64	= $[v^2]$

Mittlerer Fehler einer einzelnen Beobachtung:

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}} = \sqrt{\frac{46{,}97}{17}} = \pm 1{,}66''$$

Mittlerer Fehler des arithmetischen Mittels:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}66}{\sqrt{18}} = \pm 0{,}39''$$

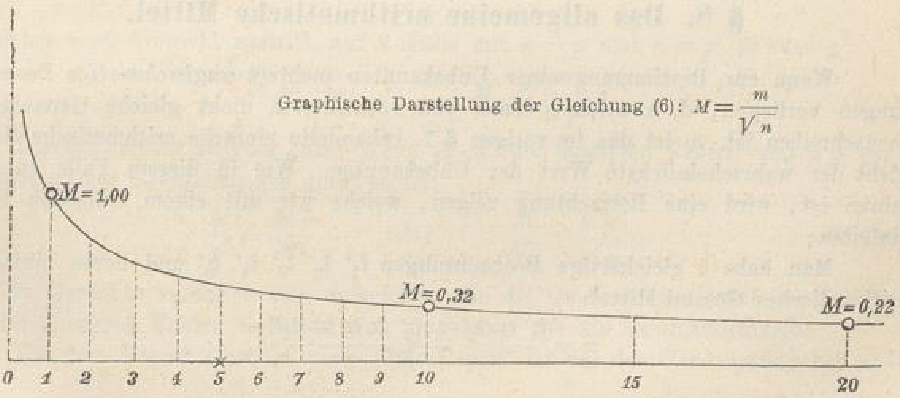
Haupt-Ergebnis = 83° 30′ 34,87″ ± 0,39″.

Graphische Darstellung der Gleichung (6).

Die oben S. 21 gefundene Gleichung (6) ist in mehr als einer Hinsicht sehr wichtig, sie sagt in Worten, dass der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels sich im Verhältnis der *Quadratwurzel* der Anzahl der Messungen verkleinert. Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes kann man M als Ordinate zur Abscisse n auftragen, wobei man eine hyperbelartige Kurve dritten Grades erhält, welche in der nachfolgenden Figur dargestellt ist. Die Zahlenwerte hiefür sind:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 20 & 50 & 100 \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} & = & 1{,}00 & 0{,}71 & 0{,}58 & 0{,}50 & 0{,}45 & 0{,}41 & 0{,}35 & 0{,}32 & 0{,}22 & 0{,}14 & 0{,}10 \end{array}\right\} \quad (12)$$

Graphische Darstellung der Gleichung (6): $M = \dfrac{m}{\sqrt{n}}$



Die Kurve läuft asymptotisch aus, d. h. der mittlere Fehler M nähert sich unbegrenzt der Null, ohne den Wert Null selbst je zu erreichen. Die ersten 5—10 Wiederholungen geben rasch eine Abnahme von M, d. h. eine Genauigkeitssteigerung; dann aber hat weiteres Wiederholen wenig Erfolg, und um den mittleren Fehler *einer* ersten Messung auf ein Zehntel seines Wertes herunter zu bringen, müsste man 100 Wiederholungen machen.

Das thut man aber gewöhnlich nicht; eine und dieselbe Messung pflegt man höchstens 5—10 mal zu wiederholen, und zwar nicht bloss deswegen, weil von da an der Wert M nur noch langsam abnimmt, sondern aus einem noch viel wichtigeren Grund: die Gleichung (6) und die darnach berechneten Zahlenwerte (12), nebst der dazu gehörigen Kurve, setzen nämlich voraus, dass die Messungen *nur* mit unregelmässigen, positiv oder negativ gleich wahrscheinlichen Fehlern behaftet seien, und dieses ist in Wirklichkeit fast nie der Fall. Im Gegenteil, je feiner die Messungen werden und je öfter man sie wiederholt, desto mehr kommt man zu der Überzeugung, dass fast überall konstante Fehlerquellen einwirken. Man soll daher bei Wiederholungen auch die Nebenumstände möglichst abändern, z. B. bei Winkelmessungen nach und nach verschiedene Striche der Kreisteilung benützen u. s. w.

Einführung des Gewichtes.

Zur späteren Anwendung (z. B. im folgenden § 8.) betrachten wir nochmals die wichtige Gleichung (6) in anderer Hinsicht:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad \text{oder} \qquad M^2 = \frac{m^2}{n} \tag{13}$$

Es folgt hieraus, dass man das arithmetische Mittel als Ergebnis *einer* Beobachtung betrachten kann, deren mittlerer Fehler M ist; es ist also das Genauigkeitsverhältnis dieser fingierten Beobachtung und einer ursprünglichen Beobachtung durch die Werte M und m festgestellt.

Dieses führt zu dem Begriff des *Gewichtes.*

Das Verhältnis von m^2 zu M^2 ist bestimmt durch die Zahl n, welche angiebt, wie viele Beobachtungen der einen Art in ein arithmetisches Mittel vereinigt werden müssen, damit dieses die Genauigkeit einer Beobachtung der anderen Art hat. n heisst in diesem Falle das *Gewicht* der letzteren Beobachtung (wobei man das Gewicht einer Beobachtung der ersteren Art $= 1$ setzt).

§ 8. Das allgemeine arithmetische Mittel.

Wenn zur Bestimmung einer Unbekannten mehrere *ungleichwertige* Beobachtungen vorliegen, d. h. solche, denen von vorn herein nicht gleiche Genauigkeit zuzuschreiben ist, so ist das im vorigen § 7. behandelte einfache arithmetische Mittel nicht der wahrscheinlichste Wert der Unbekannten. Wie in diesem Falle zu verfahren ist, wird eine Betrachtung zeigen, welche wir mit einem einfachen Falle einleiten:

Man habe 5 gleichartige Beobachtungen l_1' l_2' l_3' l_4' l_5' und deren einfaches arithmetisches Gesamt-Mittel:

$$x = \frac{l_1' + l_2' + l_3' + l_4' + l_5'}{5} \tag{1}$$